arXiv:2301.00962v1 [math.AG] 3 Jan 2023

对数平坦联络的导出模空间栈

Francis Bischoff*

摘要

我们为沿带权齐次 Saito 自由除子具有对数奇点的平坦联络的导出模空间栈给出了一个显式的有限维模型。我们详细研究了形如 $x^p = y^q$ 的平面曲线情形，并将模空间与 Grothendieck-斯普林格解消联系起来。我们还讨论了这些模空间的移位泊松几何。具体而言，我们猜想，将对数联络限制到除子补集的映射具有移位余各向同性结构；对于平面曲线 $x^p = y^q$ 的情形，我们在一个典范联络的形式邻域上构造了移位泊松结构。

目录

1 引言 1
2 齐次自由除子与对数平坦联络 4
3 有限维模型 5
4 定理的证明3.5 8
5 平面曲线 $x^p - y^q$

12

1 引言

设 $D \subset \mathbb{C}^k$ 是由约化全纯函数 f切出的超曲面。在 [30] 中，Saito 考虑了通常记作 $T_{\mathbb{C}^k}(-\log D)$的全纯向量场子层；这些向量场作用于 $\mathbb{C}^k$ 并保持由 f生成的理想。在一般情况下，它是相干的，并且在李括号下封闭，但可能不是局部自由的。事实上，Saito 给出了一个非常明确的判据，用于确定该层是否为局部自由。当它是局部自由时， D 被称为自由除子，而 $T_{\mathbb{C}^k}(-\log D)$（称为对数切丛）定义了一个李代数丛。自由除子的例子包括光滑超曲面、平面曲线和简单正规交叉。一般而言， D 可能具有高度奇异性。

设 G 是一个连通复约化群，其李代数为 $\mathfrak{g}$ ，并假设 D 是一个自由除子，在给定的 $\mathbb{C}^*$ 对 $\mathbb{C}^k$ 的作用下是齐次的，且其所有权都严格为正。本文旨在研究主 G-丛上 $T_{\mathbb{C}^k}(-\log D)$-表示的模空间，这些表示也称为对数平坦联络。定义该模空间的一种标准方法，是将其视为与 D 和 $\mathfrak{g}$相关联的无限维微分分次李代数（dgla）$L_{D,\,\mathfrak{g}}$的 Maurer-Cartan 轨迹。令 $\Omega^1_{\mathbb{C}^k}(\log D)$ 表示对数余切丛，它是 $T_{\mathbb{C}^k}(-\log D)$ 的对偶；令 $\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^k}(\log D) = \wedge^\bullet \Omega^1_{\mathbb{C}^k}(\log D)$ 表示外代数。配备李代数丛微分 d后，它构成一个交换微分分次代数。于是，$L_{D,\,\mathfrak{g}} = \Omega^\bullet_{\mathbb{C}^k}(\log D) \otimes \mathfrak{g}$ 继承了微分分次李代数的结构。该微分分次李代数的 Maurer-Cartan 轨迹定义为以下集合

$$MC(L_{D,\mathfrak{g}}) = \{\omega \in L^1_{D,\mathfrak{g}} \mid d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0\}.$$

*埃克塞特 学院与数学研究所，牛津大学；francis.bischoff@maths.ox.ac.u k

这里， $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}^k}(\log D) \otimes \mathfrak{g}$ 是一个李代数值1-形式，并定义了以下联络$\nabla = d + \omega$，它沿 D 具有对数奇点。其曲率由以下表达式给出

$$F(\omega) = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

微分分次李代数的 0 次部分是 $L^0_{D,\ \mathfrak{g}} = Map(\mathbb{C}^k,\ \mathfrak{g})$，它是无限维规范群 $\mathfrak{G} = Map(\mathbb{C}^k,\ G)$ 的李代数。该群作用于 Maurer-Cartan 轨迹，从而给出平坦联络之间的正确等价关系。因此，平坦对数联络的模空间被定义为叠商

$$[MC(L_{D,\mathfrak{g}})/\mathfrak{G}].$$

尽管这一构造涉及无限维空间，但在 [4] 中，我们给出了一个纯粹的有限维模型。更确切地说，我们证明了具有固定留数数据的对数平坦联络范畴，等价于某个仿射代数簇在一个代数群作用下的叠商。

本文旨在为模叠提供一个导出增强。文献中存在多种不同的导出几何方法，例如 [16, 12, 19, 31, 28]。在本文中，我们选择采用弯曲微分分次李代数丛这一概念；它所需的技术相对较少，并且足以满足我们的目的。让我们回顾一下 [2] 中给出的定义。

定义 1.1。 在簇 M 上的一个曲弯微分分次李代数丛 由一个从次数 2 开始的分次向量丛 $\mathrm{L}^\bullet$ 构成，并配备以下数据

1. 一个截面 $F \in \Gamma(M,\ \mathrm{L}^2)$，2. 一个次数为 1 的丛映射 $\delta : \mathrm{L}^\bullet \to \mathrm{L}^\bullet[1]$3. $\mathrm{L}^\bullet$的纤维上光滑变化的分次李括号 $[-,-]$，

满足以下条件

1. Bianchi恒等式 $\delta F = 0$，2. $\delta^2 = [F, -]$，3. δ 是括号 $[-,-]$的分次导子。

若 $[M/\mathrm{G}]$是一个叠，由李群胚 G 在 M上的数据定义，则我们将叠上的曲弯微分分次李代数丛定义为 M上的这样一个丛，并为其配备保持数据 $(F,\ \delta,\ [-,-])$ 的 G 的等变作用。我们将分别使用导出流形 和导出栈 的术语来指称这些数据。

根据微分分次李代数的数据构造导出流形有一种标准方法，我们可以将其应用于 $L_{D,\mathfrak{g}}$ 的情形。具体而言，我们取 $M = L^1_{D,\mathfrak{g}}$ 为基底，并令丛 $\mathrm{L}^\bullet$ 为纤维取为截断 $L^{\bullet\geq 2}_{D,\mathfrak{g}}$ 的平凡丛。截面由曲率 F 给出，而括号就是从 $L_{D,\mathfrak{g}}$ 继承而来的常值括号。丛映射 δ 随 M 变化，并且在点 $\omega \in L^1_{D,\mathfrak{g}}$ 上，它由扭曲微分 $\delta_\omega = d + [\omega, -]$ 给出。我们将由此得到的导出流形记为 $\mathrm{M}_{D,\mathfrak{g}}$。注意到规范群 $\mathfrak{G}$ 通过伴随表示提升为对 $L^{\bullet\geq 2}_{D,\mathfrak{g}}$ 的作用后，还可以进一步将其升级为导出栈。

导出流形（或叠）有一个底层的经典截断 $\pi_0(\mathrm{M})$，它定义为截面 F 的零点轨迹。在所考察的例子中，经典截断由 Maurer-Cartan 轨迹给出，因此

$$\pi_0([\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}/\mathfrak{G}]) = [MC(L_{D,\mathfrak{g}})/\mathfrak{G}].$$

因此，我们称 $[\mathrm{M}_{D,\ \mathfrak{g}}/\mathfrak{G}]$ 为平坦对数 G-联络的导出模空间栈。本文的主要结果是该导出栈的一个有限维模型。

下面简要描述这一结果。给定元素 $A \in \mathfrak{g}$，我们考虑由 G-联络构成的无限维导出模空间栈 $[\mathrm{M}_D,\ \mathfrak{g}(A)/\mathfrak{G}]$，其"留数"与$A$共轭。相关细节见第 2 节。设 $A = S + N_0$ 为若尔当分解，其中S 为半单部分，N_0 为幂零部分。在第 3 节中，我们构造一个与 S相关的有限维微分分次李代数 (U_0, δ_S)，以及相应的导出栈 $[\mathrm{U}_S/Aut(S)]$。这可解释为纤维 $f^{-1}(1)$ 上平坦联络的某个子模空间。随后，对于元素 A，我们构造移位切丛 $T[-1][\mathrm{U}_S/Aut(S)]$的一个导出子栈 $[\mathrm{W}(A)/Aut(S)]$。主要结果是定理 3.5，它断言存在导出栈的一个等价

$$q : [\mathcal{W}(A)/Aut(S)] \to [\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}].$$

这里的意思是，q 在解群胚之间诱导出一个等价；并且对于任意解 w，导数 dq_w 是切复形之间的拟同构。

在第 5 节中，我们转而讨论由函数 $f = x^p - y^q$ 定义的平面曲线情形。这是上述 $k = 1$ 情形中最简单的一种，但已展现出有趣的行为。我们根据一个抛物子群 P_S（它属于 $exp(\frac{2\pi i}{pq} S)$ 的中心化子）和一个表示 $H^1(U_0)$ 的数据，构造一个显式的导出栈 $[\mathrm{Q}(A)/P_S]$。在定理 5.7 中，我们证明，若 ad_S 的特征值满足某个条件，则导出栈 $[\mathrm{Q}(A)/P_S]$ 等价于 $[\mathrm{W}(A)/Aut(S)]$。对于一般的 S，模空间可能包含额外分支，我们在例 5.9 中对此加以说明。导出栈 $[\mathrm{Q}(A)/P_S]$ 可以用几何表示论中出现的空间来解释，例如 Grothendieck-Springer 解消。因此，定理 5.7 可视为 Boalch 在 [5] 中对圆盘上对数联络模空间的描述在更高维度上的推广。

关于泊松几何的猜想

回顾 Atiyah-Bott [1] 和 Goldman [15], 的工作，我们知道，闭黎曼曲面上的平坦联络模空间具有辛结构。若曲面有穿孔点，则其模空间具有泊松结构，而辛叶可通过固定穿孔点处的边界条件 [14] 得到。此后，这一图景沿着多个方向得到了推广，包括带奇点 [6, 8, 7]的平坦联络情形。近来，人们运用导出代数几何的工具研究了高维流形上的局部系统模空间。对于一个维数为 d的紧致定向流形 M，局部系统的模空间 $Loc_G(M)$是一个导出栈，并带有次数为$2-d$ [25]的移位辛结构。若 M有边界 $\partial M = N$，则 $Loc_G(N)$具有 $3-d$移位辛结构，而限制映射 $r : Loc_G(M) \to Loc_G(N)$具有拉格朗日结构 [9],，从而在 $Loc_G(M)$上诱导出 $2-d$移位泊松结构 [22]。我们希望将这一图景推广到高维情形下的对数平坦联络。

在上述映射 $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ 的设定下，单位圆 $f^{-1}(S^1)$ 的逆映射像是一个维数为 $2k-1$ 的流形，通常带有边界，因此 $Loc_G(f^{-1}(S^1))$ 具有一个次数为 $3-2k$ 的泊松结构。给定一个对数平坦联络，我们可以将其限制到 $f^{-1}(S^1)$ 上，并取其全纯单值。这应当定义一个映射

$$r : [\mathcal{W}(A)/Aut(S)] \to Loc_G(f^{-1}(S^1)). \tag{1.1}$$

Boalch 曾研究过此映射 [5] 在 $k = 1$ 的特殊情形，其中 $f^{-1}(S^1) = S^1$。在此情形下，$Loc_G(S^1) = G/G$ 具有 1-移位辛结构，而 Boalch 的工作（由 [29] 作了恰当的诠释）表明，r 具有拉格朗日结构。在高维情形下，我们猜想此映射可以赋予 [21, 22] 意义下的移位余各向同性结构。

猜想 1.2. 映射 r 可自然地赋予一个余各向同性结构。

为避免取全纯单值时出现的分析问题，或许最好用 D 补空间上的平坦联络模空间替代 $Loc_G(f^{-1}(S^1))$。

近期的工作中 [23, 24], Pantev 和 To¨en 研究了非紧代数簇上的局部系统和平坦联络的模空间。他们构造了移位泊松结构，并阐明了如何通过在无穷远处施加适当的边界条件来得到辛叶。猜想1.2 可视为为与 $f^{-1}(\mathbb{C}^k \smallsetminus D)$相关的模空间提供了另一种边界条件来源。我们希望它也能与他们的结果结合使用，例如考虑在 r 的纤维边界处存在额外边界条件时的映射 f。

猜想的一个推论是，模空间 $[\mathcal{W}(A)/Aut(S)]$ 应当具有 $2(1-k)$-移位泊松结构。在定理 5.14 中，我们通过在平面曲线 -2的情形下构造特殊联络形式邻域上的 $x^p = y^q$-移位泊松结构，为该猜想提供了证据。我们的构造多少有些临时拼凑的性质，但用到了李代数 $\mathfrak{g}$上的不变内积，以及曲线上同调的交 pairing $f^{-1}(1)$。我们也尚未检验我们的移位泊松结构是否符合 [10]所发展的形式体系。我们希望在未来的工作中解决所有这些问题。

Ack致谢。 感谢 Elliot Cheung 向我推荐了论文 [2].

2 齐次自由除子与对数平坦联络

假设给定的 $\mathbb{C}^*$ 作用在 $\mathbb{C}^k$ 上具有严格正权。其无穷小生成元为欧拉向量场

$$E = \sum_{i=1}^{k} n_i z_i \partial_{z_i},$$

其中 $n_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ 为正整数。这个向量场在 $\mathbb{C}^k$上的全纯函数 $\mathsf{O}_{\mathbb{C}^k}$ （更一般地说，张量场）上定义了一个权分次，使得坐标函数 z_i 的权为 n_i。这个分次将发挥重要作用。根据我们的假设，每个权空间在 $\mathbb{C}$上都是有限维的。我们还假设定义 D 的函数 f 是权为 r的齐次函数： $E(f) = rf$。

$\mathbb{C}^*$ 作用确定了一个作用李锚丛 $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^k$，它由欧拉向量场生成。由于 E 是 $T_{\mathbb{C}^k}(-\log D)$的一个截面，因此诱导出一个李代数丛态射

$$i : \mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^k \to T_{\mathbb{C}^k}(-\log D), \qquad (\lambda, z) \mapsto \lambda E_z.$$

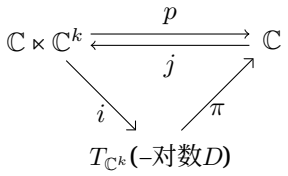
对数 1-形式 $d\log f = \frac{df}{f}$ 是 $\Omega^1_{\mathbb{C}^k}(\log D)$ 的闭截面。因此，它确定了一个李代数丛态射

$$\pi : T_{\mathbb{C}^k}(-\log D) \to \mathbb{C}, \qquad V \mapsto \frac{1}{rf} V(f),$$

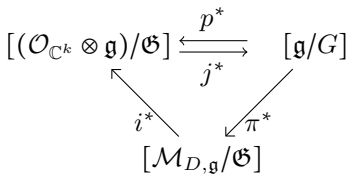
其中 $\mathbb{C}$ 被视为阿贝尔李代数。复合 $p = \pi \bigcirc i : \mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ 由投影到第一个因子给出。它有一个截面

$$j : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^k, \qquad \lambda \mapsto (\lambda, 0),$$

它也是一个李代数丛态射。总之，我们有如下李代数丛图表：



每个李代数丛都确定一个微分分次李代数，其 Maurer-Cartan 轨迹由平坦代数丛联络组成。此外，每个李代数丛的态射都确定一个微分分次李代数之间的拉回态射，从而也确定表示范畴之间的拉回态射，或者更一般地，平坦联络的导出模空间栈之间的拉回态射。这便得到如下（无限维）导出叠图：



在此图中， $[\mathfrak{g}/G]$ 是 $\mathbb{C}$的 $\mathfrak{g}$表示的模叠。它是对应于 G 在其李代数上的伴随作用的叠商。 $[(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^k} \otimes \mathfrak{g})/\mathfrak{G}]$ 是 $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^r$的$\mathfrak{g}$表示的模叠。两种情形下，导出结构都是平凡的，因为李代数丛的秩为 1。

现在固定一个元素 $A \in \mathfrak{g}$，令 $O_A \subset \mathfrak{g}$ 为其伴随轨道，并令 $G_A \subseteq G$ 为其中心化子子群。这确定了一个子叠 $[O_A/G] \subset [\mathfrak{g}/G]$ ，它与 BG_AMorita等价。原像 $[\mathbf{M}_{D,\ \mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}] := (j^*i^*)^{-1}(BG_A)$是 ω的对数平坦联络的导出栈，其中“留数” $j^*i^*(\omega)$属于 O_A。更准确地说，导出流形$\mathbf{M}_{D,\ \mathfrak{g}}(A)$的底空间由下式给出

$$M(A) = \{\omega \in \Omega^1_{\mathbb{C}^k}(\log D) \otimes \mathfrak{g} \mid j^*i^*(\omega) \in O_A\},$$

其中曲弯微分分次李代数丛是从 $\mathbf{M}_{D,\ \mathfrak{g}}$ 限制而来的。 $\mathfrak{G}$ 的作用保持 $M(A)$。

3 有限维模型

设 $A = S + N_0$ 是 A的若尔当分解，其中 S 是半单的， N_0 是幂零的，并且$[S, N_0] = 0$。本节将为 $[\mathbf{M}_{D,\ \mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$构造一个有限维模型。

微分分次李代数$L_{D,\ \mathfrak{g}}$

我们首先分析微分分次李代数$L_{D,\ \mathfrak{g}}$的结构。它由交换微分分次代数 $\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^k}(\log D)$ 和李代数 $\mathfrak{g}$构造而成，因此 $L_{D,\ \mathfrak{g}}$ 继承了它们的导子。基本的导子如下：

- 李代数丛微分 d，其次数为 $+1$ ，且平方为 0，
- 与欧拉向量场 ι_E进行内乘，其次数为 -1 且平方为 0，
- S, ad_S的伴随作用，其次数为 0。

通过取交换子括号，我们可以得到更多导子，例如 $L_E = [\iota_E, d]$，即关于 E 的李导数，它是一个次数为 0 的导子。我们也可以将任意导子与一个微分形式作楔积，从而得到新的导子。设 $\alpha_0 = \frac{1}{r} d\log f$ 是一个闭对数 1-形式。那么 $\alpha_0 ad_S$ 是一个次数为 $+1$ 的导子，且其平方为 0。在刚才描述的 5 个导子中，几乎所有导子都彼此交换。仅有以下两个非零交换子括号：

$$[\iota_E, d] = L_E, \qquad [\iota_E, \alpha_0 ad_S] = ad_S.$$

第二个括号由恒等式 $\iota_E(\alpha_0) = 1$ 推出。我们主要关注由下式产生的微分分次李代数结构

$$\delta_S = d + \alpha_0 ad_S,$$

它是一个次数为 $+1$ 、平方为 0 的导子。我们还关注以下 0 次导子

$$L_S := [\iota_E, \delta_S] = L_E + ad_S.$$

算 子是可对角化的，具体而言，任意元素 $\beta \in L_{D,\mathfrak{g}}$ 都有一个泰勒级数展开 n

$$\beta = \sum_u \beta_u$$

其中每一项都满足 $L_S(\beta_u) = u\beta_u$。事实上，由于 S 是半单的，算子 ad_S 在 $\mathfrak{g}$ 上是可对角化的，且只有有限个特征值。L_E 的特征子空间就是权空间。我们先前指出，全纯函数的权次数都是严格正整数，且每个权空间都是有限维的。作为 $\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^k}(\log D)$ 上的算子，L_E 的特征值未必为正，但它们都是有下界的整数。因此，L_S 的特征值具有 $u_i + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的形式，其中 u_i 是有限多个复数。

令 $L_{D,\mathfrak{g},u}$ 表示 u-特征空间，并注意到它是有限维的。由于 L_S 是一个导子，李括号与此分解相容：

$$[-,-] : L_{D,\mathfrak{g},u} \times L_{D,\mathfrak{g},v} \to L_{D,\mathfrak{g},u+v}.$$

特别地，$L_{D,\mathfrak{g},0}$ 是一个有限维李子代数。导子 δ_S 和 ι_E 与 L_S对易，因此保持其特征子空间不变。特别地，它们限制在 $L_{D,\mathfrak{g},0}$上。

现在引入次数为 0 的导子 $P = \alpha_0 \iota_E$。该导子满足 $P^2 = P$，因此导出分解 $L_{D,\mathfrak{g}} = \ker(P) \oplus \mathrm{im}(P)$。令 $U =$为 $\ker(P)$，令 $I =$为 $\mathrm{im}(P)$。关于李括号，U 是一个子代数，而 I 是一个阿贝尔理想。

引理 3.1. 导子 ι_E 在 U上为零。对于每个次数 i，它定义了一个同构

$$\iota_E : I^i \to U^{i-1},$$

其逆映射由乘以 α_0给出。因此，作为分次李代数，$L_{D,\mathfrak{g}}$ 同构于 $U \ltimes U[-1]$，其中 U通过伴随作用作用于 $U[-1]$。

证明。 </style}显然，$\ker(\iota_E) \subseteq U = \ker(P)$。反过来，假设 $P(x) = 0$。那么 $\iota_E(x)$ 属于乘以 α_0 的核。由于 α_0 是一个处处非零的代数丛 1-形式，$\iota_E(x)$ 必须具有 $\alpha_0 \wedge y$ 的形式。但此时

$$0 = \iota_E^2(x) = \iota_E(\alpha_0 \wedge y) = y - \alpha_0 \wedge \iota_E(y),$$

这意味着 $\iota_E(x) = 0$，正如所需。ι_E 的像包含于 U，因为 $\iota_E^2 = 0$。为证明满射性，我们可以显式地构造逆映射，即乘以 α_0。给定 $x \in U$，验证

$\alpha_0 \wedge x = P(\alpha_0 \wedge x) \in I$。因此 $\alpha_0\wedge : U^{i-1} \to I^i$。接着，对于 $x \in U$，有 $\iota_E(\alpha_0 \wedge x) = x$；而对于$P(y) \in I$，有 $\alpha_0 \wedge \iota_E P(y) = P^2(y) = P(y)$。

现在通过以下在次数 i 中的公式定义同构 $\Xi : L_{D,\ \mathfrak{g},\ 0} \to U \ltimes U[-1]$

$$U^i \oplus I^i \to U^i \oplus U^{i-1}, \qquad (x, y) \mapsto (x, (-1)^i \iota_E(y)).$$

这保持李括号不变。 □

交换子 $[P, L_S] = 0$。因此，这两个算子可以同时对角化。特别地，我们有分解 $L_{D,\ \mathfrak{g},\ 0} = U_0 \oplus I_0$。前一个引理的结论对这个子代数仍然成立。接下来，我们有 $[P, \delta_S] = \alpha_0 L_S$。如果将其改写为以下恒等式

$$P\delta_S = \alpha_0 L_S + \delta_S P$$

那么我们可以推出 δ_S 保持 I不变。事实上，将这个恒等式应用于形如 $x = P(y)$ 的元素，我们得到

$$P\delta_S(x) = \alpha_0 L_S P(y) + \delta_S P^2(y) = \alpha_0 P L_S(y) + \delta_S P(y) = \delta_S(x).$$

另一方面，微分 δ_S 不保持 U不变。但是，将该恒等式应用于元素 $x \in U$后，我们计算得到“非对角”项为 $P\delta_S(x) = \alpha_0 L_S(x)$。当我们将其限制到子代数 $L_{D,\ \mathfrak{g},\ 0}$时，该项消失。因此，我们得到以下推论。

推论 3.2. 子代数 U_0 在 δ_S下保持不变，并且存在一个微分分次李代数的同构

$$(L_{D,\mathfrak{g},0}, \delta_S) \cong (U_0, \delta_S) \ltimes (U_0, \delta_S)[-1].$$

证明。 在子空间 $L_{D,\ \mathfrak{g},\ 0}$ 上，我们有 $[\iota_E, \delta_S] = 0$。这意味着态射 Ξ 来自引理3.1是一个链映射。 □

规范群 $Aut(S)$

将 $S \in \mathfrak{g}$ 视为 $\mathbb{C}$的一个表示，我们可以将其拉回，得到$\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^k$的一个表示 p^*S 。令 $Aut(S)$ 表示规范群 $\mathfrak{G}$ 中保持 p^*S不变的规范变换所构成的子群:

$$Aut(S) = \{g \in \mathfrak{G} \mid g * p^*S = p^*S\}.$$

这是一个有限维代数群，其李代数为 $L^0_{D,\ \mathfrak{g},\ 0}$。我们回顾其在 [4]中给出的 Levi 分解描述。 $j^*p^*S = S$ 的自同构群为 G_S，即 S 在 G中的中心化子子群，它是约化的。拉回函子 j^* 定义了一个同态

$$j^* : Aut(S) \to G_S, \qquad g \mapsto g(0),$$

且拉回函子 p^* 定义了一个分裂。 j^*的核，记作 $Aut_0(S)$，是幺幂根。因此，同构 $Aut(S) \cong Aut_0(S) \ltimes G_S$ 给出了 Levi 分解。

定义 $Aut(S)$ 在 $L^1_{D,\mathfrak{g},0}$ 上的如下规范作用：

$$g * x = gxg^{-1} - \delta_S(g)g^{-1},$$

其中 $\delta_S(g)g^{-1} = dgg^{-1} + \alpha_0(S - gSg^{-1})$。

引理 3.3。 $Aut(S)$ 的规范作用是良定义的。用分解 $L^1_{D,\mathfrak{g},0} = U^1_0 \oplus I^1_0$ 表示，它可写为

$$g * (x, y) = (gxg^{-1} - \delta_S(g)g^{-1}, gyg^{-1}),$$

其中 $x \in U^1_0$和 $y \in I^1_0$。此外， $Aut(S)$ 通过共轭作用于 $L^{\geq 2}_{D^\bullet,\ \mathfrak{g},\ 0}$，并保持分解 $U_0 \oplus I_0$ 和李括号。

证明。 计算表明，对于 $x \in L^1_{D,\mathfrak{g},0}$，有 $L_S(g*x) = g(L_S x)g^{-1}$，这说明 $L^1_{D,\mathfrak{g},0}$ 保持不变。同理，对于 $x \in L^j_{D,\mathfrak{g}}$，有 $L_S(gxg^{-1}) = g(L_S x)g^{-1}$，这说明共轭作用保持 $L^{\bullet\geq 2}_{D,\mathfrak{g},0}$。接下来，对于 $x \in L_{D,\mathfrak{g},0}$，我们有 $P(gxg^{-1}) = gP(x)g^{-1}$，这意味着共轭也保持 U_0 和 I_0。最后，

$$P(\delta_S(g)g^{-1}) = \alpha_0(L_E(g)g^{-1} + S - gSg^{-1}),$$

它在 $g \in Aut(S)$ 处消失。因此 $\delta_S(g)g^{-1} \in U_0^1$。 □

有限维导出栈

给定有限维微分分次李代数$L_{D,\mathfrak{g},0}$，我们得到一个导出流形 $\mathbf{W}_S$。底流形是向量空间 $W_S = L^1_{D,\mathfrak{g},0}$，曲弯微分分次李代数丛是平凡丛 $W_S \times L^{\bullet\geq 2}_{D,\mathfrak{g},0}$，曲率截面由标准公式 $F_S(w) = \delta_S(w) + \frac{1}{2}[w,w]$ 给出，而扭曲微分 δ 由下式给出

$$\delta_{S,w} = \delta_S + [w,-],$$

对于 $w \in W_S$。此外，引理 3.3 给出了 $Aut(S)$ 在 $W_S \times L^{\bullet\geq 2}_{D,\mathfrak{g},0}$ 上的一个等变作用，并保持括号不变。也容易验证，此作用保持 F_S 和 δ。因此，我们得到一个导出栈 $[\mathbf{W}_S/Aut(S)]$。

U_0 是 $L_{D,\mathfrak{g},0}$ 的一个微分分次李子代数，并且在 $Aut(S)$ 的作用下保持不变。因此，它导出一个导出子栈 $[\mathbf{U}_S/Aut(S)]$，它包含于 $[\mathbf{W}_S/Aut(S)]$。此外，由于 I_0 是 $L_{D,\mathfrak{g},0}$ 的一个理想，我们还得到一个投影态射 $[\mathbf{W}_S/Aut(S)] \to [\mathbf{U}_S/Aut(S)]$.

命题 3.4. 导出栈 $[\mathcal{W}_S/Aut(S)]$ 同构于移位切丛$T[-1][\mathcal{U}_S/Aut(S)]$。

证明。 这由推论 3.2 和引理 3.3得出。 □

我们实际上感兴趣的是由元素$A = S + N_0$确定的 $[\mathbf{W}_S/Aut(S)]$ 的一个子叠。回想一下，$Aut(S)$在 j^* 下的像是 G_S，即 S的中心化子。这意味着对于任意元素 $\omega \in W_S$，其像 $j^*i^*(\omega) \in \mathfrak{g}_S = Lie(G_S)$。我们要求此元素属于 $G_S * N_0$，即 N_0 在 $\mathfrak{g}_S$中的伴随轨道。也就是说，定义

$$W(A) = \{\omega \in W_S \mid j^*i^*(\omega) \in G_S * N_0\}.$$

令$\mathbf{W}(A)$为将曲弯微分分次李代数丛从 W_S拉回到 $W(A)$所得的导出流形。 $Aut(S)$的作用限制为在这个子流形上的作用。因此，我们得到一个导出栈 $[\mathbf{W}(A)/Aut(S)]$。

定理 3.5. $[\mathcal{W}(A)/Aut(S)]$ 等价于 $[\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$，即留数属于 A 的伴随轨道 O_A 的对数平坦联络的导出栈。

4 定理 3.5 的证明 3.5

本节将给出 $[\mathbf{W}(A)/Aut(S)]$ 与 $[\mathbf{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$ 之间等价的证明。存在一个自然态射

$$q : [\mathcal{W}(A)/Aut(S)] \to [\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}],$$

我们将其描述如下：

1. 底流形上的映射由以下公式给出

$$q : W(A) \to M(A), \qquad \omega \mapsto \alpha_0 S + \omega.$$

2. 曲弯微分分次李代数丛之间的映射由包含映射给出$L_{D,\mathfrak{g},0}^{\bullet\geq 2} \to L_{D,\mathfrak{g}_\circ}^{\bullet\geq 2}$

3. 群 $Aut(S)$ 作为子群包含于 $\mathfrak{G}$ 中，且映射 q 是等变的。

为了证明 q 是一个等价，我们必须证明两件事。首先，经典群胚之间存在一个底层函子：

$$\pi_0(q) : Aut(S) \ltimes MC(\mathcal{W}(A)) \to \mathfrak{G} \ltimes MC(\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)).$$

我们需要证明这是一个范畴等价。这由 [4, 定理 5。5] 以及以下引理推出。

引理 4.1。 设 $\omega \in W(A)$。那么 $\iota_E(\omega)$ 是幂零的。

证明。 对于 $\omega \in L_{D,\mathfrak{g},0}^1$，我们有 $\iota_E(\omega) \in U_0^0 = Lie(Aut(S))$。若 $\omega \in W(A)$，我们还可得到 $j^*\iota_E(\omega) \in G_S * N_0$，因此它是幂零的。令 $\iota_E(\omega) = B_s + B_n$为若尔当分解，其中$B_s$ 是半单的， B_n 是幂零的。那么 $j^*(B_s) = 0$，因此 $B_s \in Lie(Aut_0(S))$。但由于$Aut_0(S)$是幺幂的，这意味着 $B_s = 0$，因此 $\iota_E(\omega)$是幂零的。

□

其次，导出栈在其 MC 位形的每一点都有一个切复形，而映射 q诱导出切复形之间的链映射：

$$dq_w : \mathbb{T}_w[\mathcal{W}(A)/Aut(S)] \to \mathbb{T}_{q(w)}[\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}].$$

我们需要证明，在 MC 位形的每一点，这都是一个拟同构。我们将先在特殊点 $q(0)$（它通常不在我们的空间中）构造一个显式同伦，然后应用同调微扰引理，得到所有点处的拟同构。

同伦

令 $a : L_{D,\mathfrak{g},0} \to L_{D,\mathfrak{g}}$ 为包含映射，令 $b : L_{D,\mathfrak{g}} \to L_{D,\mathfrak{g},0}$ 为到次数 0 分量的投影。关于 δ_S， a 和 b 都是链映射，但一般而言，只有 a 保持李括号。此外， $b \bigcirc a = id_{L_{D,\mathfrak{g},0}\circ}$

回顾一下，给定元素 $\beta \in L_{D,\mathfrak{g}}$ 在 L_S的特征值中有一个泰勒展开 ：

$$\beta = \sum_u \beta_u,$$

其中每一项都满足 $L_S(\beta_u) = u\beta_u\circ$ 正如我们所见，这些特征值的形式为 $u_i + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，其中 u_i为有限多个复数。基于这个原因，级数

$$\beta' = \sum_{u\neq 0} \frac{1}{u}\beta_u$$

收敛到 $L_{D,\ \mathfrak{g}}$ 中一个定义良好的元素。我们用它来定义以下次数为 -1 的算子

$$h : L_{D,\mathfrak{g}}^i \to L_{D,\mathfrak{g}}^{i-1}, \qquad \sum_u \beta_u \mapsto \iota_E(\sum_{u\neq 0} \frac{1}{u}\beta_u).$$

下面的引理可由直接计算得出。其结论是， a 定义了从 $(L_{D,\mathfrak{g},0}, \delta_S)$ 到 $(L_{D,\mathfrak{g}}, \delta_S)$ 的微分分次李代数之间的拟同构。

引理 4.2。 算子 h 在 ab 与 $id_{L_{D,\mathfrak{g}}}$ 之间定义了一个同伦。换言之，它满足

$$[\delta_S, h] = id_{L_{D,\mathfrak{g}}} - ab.$$

此外，它满足“侧条件” $h\circ a = 0$, $b\circ h = 0$ 以及 $h^2 = 0$。最后，它在U 上为零，并将 I^i 映至 U^{i-1}。

扰动

现在我们将扰动微分 δ_S ，并证明 a 仍然定义一个拟同构。这是通过使用扰动引理 [13]实现的。

设 $w \in W(A)$满足毛雷尔–卡当方程 $\delta_S(w)+\frac{1}{2}[w,w] = 0$，并考虑扰动后的微分$\delta_{S,w} = \delta_S + [w,-]$。这是$L_{D,\mathfrak{g}}$上的一个微分，我们希望对上一节的同伦数据（$a, b, h, \delta_S$）导出一个扰动。

引理 4.3。 $L_{D,\mathfrak{g}}$ 上的自同态 $ad_w \circ h$ 是幂零的。

证明。 元素 w可分解为 $w = \gamma + \alpha_0 N$，其中 $\gamma \in U_0^1$且 $N \in U_0^0$。由引理4.1可知， N 是幂零的。回顾引理4.2 ， h 在 U 上为零，且其像包含于 U中。此外，由于 U 是$L_{D,\mathfrak{g}}$的子代数，它在 ad_γ作用下保持不变。因此 $h \bigcirc\ ad_\gamma \bigcirc h = 0$。所以，只需证明算子 $\alpha_0 ad_N \bigcirc h$ 是幂零的。

现在注意到 ad_N与乘以 α_0的算子可交换。由于 $N \in U_0^0$, ad_N也与 h可交换。这意味着

$$(h \circ \alpha_0 ad_N)^k = (ad_N)^k \circ \tilde{h}^k,$$

因此 ~ ~其中 h 是算子 $h(\beta) = h(\alpha_0 \wedge \beta)$。但当 k 足够大时，这将为零，因为 N 是幂零的。 □

这个引理的结论是，我们现在可以定义以下扰动映射：

$$h' = \sum_{p=0}^{\infty} (-had_w)^p h,$$

$$\delta' = \delta_S + \sum_{p=0}^{\infty} b(-ad_w h)^p ad_w a,$$

$$a' = \sum_{p=0}^{\infty} (-had_w)^p a,$$

$$b' = \sum_{p=0}^{\infty} b(-ad_w h)^p.$$

扰动引理指出， δ' 在 $L_{D,\mathfrak{g},0}$上定义了一个微分， a' 和 b' 定义了 $(L_{D,\mathfrak{g},0}, \delta')$ 与 $(L_{D,\mathfrak{g}}, \delta_{S,w})$ 之间的链映射，并且满足以下方程：

$$b'\circ a' = id_{L_{D,\mathfrak{g},0}},\quad [\delta_{S,w}, h'] = id_{L_{D,\mathfrak{g}}} - a'\circ b',\quad h'\circ a' = 0,\quad b'\circ h' = 0,\quad h'\circ h' = 0.$$

以下引理确定了这些扰动。

引理 4.4. 这些扰动由下式给出

$$a' = a,\quad b' = b,\quad \delta' = \delta_{S,w}.$$

特别地，包含映射 $a : (L_{D,\mathfrak{g},0}, \delta_{S,w}) \to (L_{D,\mathfrak{g}}, \delta_{S,w})$ 是一个拟同构。此外，h' 在 U 上为零，并将 I 映到 U。

证明。元素 $w \in L^1_{D,\mathfrak{g},0}$ 因此 ad_w 限制到 $L_{D,\mathfrak{g},0}$ 并且与 a 以及 b可交换。由此以及引理 4.2 的侧条件可得， $had_w a = 0$ 且 $bad_w h = 0$。将其代入变形映射的定义，得到

$$\begin{aligned} a' &= a - \sum_{p\geq 0}(-had_w)^p(had_w a) = a, \\ \delta' &= \delta_S + bad_w a - \sum_{p\geq 0} b(-ad_w h)^{p-1} ad_w(had_w a) = \delta_{S,w}, \\ b' &= b - \sum_{p\geq 0}(bad_w h)(-ad_w h)^p = b. \end{aligned}$$

关于 h' 的陈述由引理 4.2 以及以下事实推出：在 h'的定义中，每一项都以 h开头并以其结尾。

□

切复形的拟同构

考虑一点 $w \in MC(\mathbf{W}(A))$。它具有 $w = \gamma + \alpha_0 N$ 的形式，其中 $\gamma \in U_0^1$、 $N \in U_0^0$，且 $j^*i^*(w) = N(0) \in G_S * N_0$。它对应于一点 $q(w) \in MC(\mathbf{M}_{D,\mathfrak{g}}(A))$。在本节中，我们将描述切复形之间的态射 $dq_w : \mathbb{T}_w[\mathbf{W}(A)/Aut(S)] \to \mathbb{T}_{q(w)}[\mathbf{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$，并证明它是一个拟同构。

我们首先描述切复形。首先， $[\mathbf{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$ 的切复形如下给出：

$$\mathbb{T}_{q(w)}[\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}] = L^0_{D,\mathfrak{g}} \to T_{q(w)}M(A) \to L^2_{D,\mathfrak{g}} \to L^3_{D,\mathfrak{g}} \to \dots$$

注意，第一项是 $L^0_{D,\mathfrak{g}} = Lie(\mathfrak{G})$，第二项是子空间

$$T_{q(w)}M(A) = \{v \in L^1_{D,\mathfrak{g}} \mid j^*i^*(v) \in T_{(S+N(0))}O_A\},$$

这里我们用到了这样的事实： $j^*i^*(q(w)) = S + N(0)$。第一个映射是规范作用的导数，计算可知它等于 $-\delta_{S,w}$。负号是因为我们让规范群从左侧作用。为简便起见，我们将其替换为$\delta_{S,w}$，因为这不会影响上同调。第二个映射是曲率 dF 的导数，经计算可得其为 $\delta_{S,w}$。最后，所有更高阶映射均由 $\delta_{q(w)} = \delta_{S,w}$ 给出。因此，切复形是 $(L_{D,\mathfrak{g}}, \delta_{S,w})$ 的一个子复形。

$[\mathbf{W}(A)/Aut(S)]$ 的切复形有类似的描述。它由下式给出：

$$\mathbb{T}_w[\mathcal{W}(A)/Aut(S)] = L^0_{D,\mathfrak{g},0} \to T_w W(A) \to L^2_{D,\mathfrak{g},0} \to L^2_{D,\mathfrak{g},0} \to \dots$$

与上文一样， $L^0_{D,\mathfrak{g},0} = Lie(Aut(S))$，第二项是子空间

$$T_w W(A) = \{v \in L^1_{D,\mathfrak{g},0} \mid j^*i^*(v) \in T_{N(0)}(G_S * N_0)\}.$$

同样，所有映射均由 $\delta_{S,w}$ 给出（第一个映射带有一个负号，为简便起见我们将其去掉）。因此，切复形是 $(L_{D,\mathfrak{g},0}, \delta_{S,w})$ 的一个子复形。

容易看出，映射 dq_w 与 a一致。因此，为了证明 dq_w 是一个拟同构，只需证明同伦数据（a、b、 h'、$\delta_{S、w}$）限制到切复形上。

引理 4.5. 这些映射 $(a, b, h', \delta_{S,w})$ 限制到 $\mathbb{T}_{q(w)}[\mathcal{M}_{D,\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{G}]$和 $\mathbb{T}_w[\mathcal{W}(A)/Aut(S)]$。因此， dq_w 定义了一个拟同构。

证明. 由于这些复形在次数 1 处经过修改，因此只需将注意力限制在次数 0,1,2。上述对切复形的描述以及 dq_w 立即推出 a 和 $\delta_{S,w}$是限制映射。要验证 h'是限制映射，我们只需证明 $h'(L^2_{D,\mathfrak{g}})$ 包含于 $T_{q(w)}M(A)$中。但由引理 4.4可知，的像包含于 U之中。

对于映射 b，考虑一点 $\beta \in T_{q(w)}M(A)$。它可以展开为 $\beta = \sum_u \beta_u$，其中每一项都满足 $L_S(\beta_u) = u\beta_u$。根据定义， $b(\beta) = \beta_0$。因此，我们需要验证：若$j^*i^*(\beta) \in T_{(S+N(0))}O_A$，则 $j^*i^*(\beta_0) \in T_{N(0)}(G_S * N_0)$。这些切空间有如下描述

$$T_{(S+N(0))}O_A = Im(ad_{S+N(0)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}), \qquad T_{N(0)}(G_S * N_0) = Im(ad_{N(0)} : \mathfrak{g}_S \to \mathfrak{g}_S).$$

现在利用特征向量展开，我们有

$$j^*i^*(\beta) = \sum_u j^*i^*(\beta_u) = ad_{S+N(0)}(Z),$$

对于某个 $Z \in \mathfrak{g}$。可以验证，被加数中的每一项都满足 $ad_S(j^*i^*(\beta_u)) = uj^*i^*(\beta_u)$。由于 $ad_S : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 可对角化，我们也可以将 Z 分解为特征向量之和： $Z = \sum_u Z_u$。又由于 $ad_{S+N(0)}$与 ad_S可交换，它保持特征子空间不变。因此，我们可以将特征向量配对，得到

$$j^*i^*\beta_0 = ad_{S+N(0)}(Z_0) = ad_{N(0)}(Z_0),$$

其中 $Z_0 \in \mathfrak{g}_S$。 □

5 平面曲线 $x^p - y^q$

本节将详细研究平面曲线的情形。考虑

$$f = x^p - y^q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},$$

其中 p 和 q 是互素的正整数，满足 $p < q$。对于欧拉向量场 $E = qx\partial_x + py\partial_y$，该函数是次数为 qp 的带权齐次函数，它定义了坐标 $|x| = q$ 和 $|y| = p$上的权分次。对数切丛由向量场 E和 $V = qy^{q-1}\partial_x + px^{p-1}\partial_y$生成，它们满足 $[E, V] = (qp - p - q)V$。令 $w_0 = qp - p - q$。对数 1-形式 $\alpha_0 = \frac{1}{qp}d\log f$与 V配对所得为0。因此，它可以补充为对数余切丛的一组对偶基 α_0， β。形式 α_0是闭的，且 β满足$d\beta = (p + q - qp)\alpha_0 \wedge \beta$。

V的上同调

令 $\mathcal{O}_w$ 表示关于 E具有权 w 的多项式函数子空间。注意，任意整数 $w \in \mathbb{Z}$ 都可以唯一分解为 $w = aq + bp + cqp$，其中 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $0 \le a < p$ 和$0 \le b < q$。由于以下引理，这种分解为权的编号提供了一种有用的方式。

引理 5.1. 设 $w = aq + bp + cqp$，并满足上述对 a, b, c 的限制。$\mathcal{O}_w$ 的维数为$\max(c, -1) + 1$，一组基为

$$x^{a+cp}y^b, x^{a+(c-1)p}y^{b+q}, \ldots, x^a y^{b+cq}.$$

向量场 V 的权为 w_0，因此它定义了一个映射

$$V : \mathcal{O}_w \to \mathcal{O}_{w+w_0}.$$

引理 5.2。 V 的核是 $\mathbb{C}[f]$。

证明。经计算可得， $V(f^c) = 0$。反过来，设 $g \in \ker(V)$。由于 V是齐次的，只需考虑 g 是权为 $w > 0$的齐次多项式的情形。方程 $V(g) = 0$意味着，对于某个共同的多项式 h，有 $\partial_x g = px^{p-1}h$ 和 $\partial_y g = -qy^{q-1}h$。因此，

$$wg = E(g) = qx\partial_x g + py\partial_y g = qp(x^p - y^q)h,$$

因此 $g = \frac{qp}{w} fh$。由此可知， h 是一个权为 $w - qp$ 的函数，且它属于 V的核。现在对权应用归纳法即可得出结论。 □

f 的雅可比理想由 x^{p-1} 和 y^{q-1}生成。令 $C = \mathbb{C}[x,y]/(x^{p-1}, y^{q-1})$，将其视为一个 $\mathbb{C}$-向量空间。它有一个自然的单项式基 $x^a y^b$，其中 $0 \le a < p-1$ 且 $0 \le b < q-1$。利用这个基， C 自然地按权分次，并且存在一个保持权的单射线性映射 $C \to \mathbb{C}[x,y]$。考虑分次多项式环 $\mathbb{C}[f]$，其中 f的次数为 pq。那么 $\mathbb{C}[x,y]$是一个分次 $\mathbb{C}[f]$-模，并且存在一个分次 $\mathbb{C}[f]$-模态射

$$\mathbb{C}[f] \otimes_{\mathbb{C}} C \to \mathbb{C}[x,y].$$

V在 $\mathbb{C}[x,y]$ 上的作用是 $\mathbb{C}[f]$-线性的，因此余核 $\operatorname{coker}(V)$ 也是一个 $\mathbb{C}[f]$-模。与商投影复合后，我们得到态射

$$\mathbb{C}[f] \otimes_{\mathbb{C}} C \to \operatorname{coker}(V).$$

引理 **5.3.** 态射 $\mathbb{C}[f] \otimes_{\mathbb{C}} C \to$ 余核(V) 是分次 $\mathbb{C}[f]$-模的一个同构。

证明。由于 V 是齐次的，只需一次考虑一个权：我们考虑映射 $V : \mathrm{O}_{w-w_0} \to \mathrm{O}_w$的余核。设 $w = aq + bp + cqp$，其中 $0 \le a < p$、 $0 \le b < q$和 $c \ge 0$，于是 O_w 的维数为 $c+1$。则 $w - w_0 = (a+1)q + (b+1)p + (c-1)qp$。若 $a < p-1$ 且$b < q-1$，则 O_{w-w_0}的维数为 c。此外， V是单射，因为 $w - w_0$不是 qp的倍数。因此，$\operatorname{coker}(V)_w$ 是一维的。若 $a = p-1$ 且 $b < q-1$，则 $w - w_0 = (b+1)p + cqp$，所以 O_{w-w_0} 的维数为 $c+1$， V是单射，因此 $\operatorname{coker}(V)_w = 0$。同样的论证也适用于 $a < p-1$ 且 $b = q-1$的情形。剩下的唯一情形是 $a = p-1$ 且 $b = q-1$。在这种情形下，$w - w_0 = (c+1)qp$，且 O_{w-w_0} 的维数为 $c+2$。但此时 V的核是一维的，因此 $\operatorname{coker}(V)_w = 0$。

结论是，当且仅当 $a < p-1$ and $b < q-1$时，余核非零，此时其维数为 1。这些维数与 $\mathbb{C}[f] \otimes_{\mathbb{C}} C$的维数相符。因此，我们只需证明 $f^c x^a y^b$ 不在 V的像中。为此，我们将证明以下映射

$$M : \mathbb{C} \oplus \mathcal{O}_{w-w_0} \to \mathcal{O}_w, \qquad (\lambda, g) \mapsto \lambda f^c x^a y^b + V(g)$$

相对于引理5.1中的基，由一个行列式为正的矩阵表示。将 V应用于元素 $x^{a+1+ip}y^{b+1+jq}$ 得到

$$p(1+b+jq)x^{a+(i+1)p}y^{b+jq} + q(1+a+ip)x^{a+ip}y^{b+(j+1)q}.$$

需要注意的关键之处是，基元素连续且系数为正。因此， V由一个 $(c+1) \times c$矩阵表示，其中第 i 列在第 i行和第$i+1$行的元素为正，其余行的元素均为 0。利用二项式定理， $f^c x^a y^b = \sum_{k=0}^{c} (-1)^k x^{a+(c-k)p} y^{b+kq}$。这里的关键之处在于，各项均非零且符号交替。这些项构成矩阵 M第一列的元素。沿第一列对 M 应用拉普拉斯展开式计算行列式，可知其为正。

□

微分分次李代数$(U_0,\ \delta_S)$

现在我们选取一个李代数 $\mathfrak{g}$ 和一个半单元 $S \in \mathfrak{g}$。这会诱导出李代数的特征空间分解

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda} \mathfrak{g}_\lambda,$$

其中， $\mathfrak{g}_\lambda$ 是 ad_S 的特征值为 λ的特征空间。我们采用以下约定：如果 λ 不是 ad_S的特征值，则 $\mathfrak{g}_\lambda = 0$。注意，分解在括号运算下保持不变：$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$。

微分分次李代数（$U_0,\ \delta_S$）的项位于 0 次和 1 次。它们由下式给出

$$U_0^0 = \bigoplus_{w\geq 0} \mathcal{O}_w \otimes \mathfrak{g}_{-w}, \qquad U_0^1 = \bigoplus_{w\geq 0} \mathcal{O}_w \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w}\beta,$$

其中 δ_S 由应用 V得到。我们有时会在记号中省略 β 。

应用引理 5.2 和 5.3 ，我们得到($U_0,\ \delta_S$的上同调的如下描述).

推论 5.4. (U_0, δ_S) 的上同调如下

$$H^0(U_0) = \bigoplus_{c\geq 0} f^c \mathfrak{g}_{-cpq}, \qquad H^1(U_0) \cong \bigoplus_{w\geq 0} (\mathbb{C}[f] \otimes C)_w \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w}.$$

此外，具有零微分的分次李代数 $H^\bullet(U_0)$ 自然嵌入到(U_0, δ_S)中，成为一个准同构子微分分次李代数。

令 $a \in \mathfrak{g}$ 为一个实半单元。回忆一下，根据 [5] ，它确定了 G的一个抛物子群

$$P(a) = \{g \in G \mid \lim_{z\to 0} z^a g z^{-a} \text{ exists in } G \text{ along any ray}\},$$

其中 $z \in \mathbb{C}$ 和 $z^a = \exp(\log(z)a)$。将 S 分解为实部和虚部，记作 $S = a + ib$，我们可以定义 G的以下子群

$$P_S := C_G(e^{\frac{-2\pi i}{qp}S}) \cap P(\frac{-a}{qp}).$$

在此定义中， $C_G(e^{\frac{-2\pi i}{qp}S})$是 G中 $e^{\frac{-2\pi i}{qp}S}$的中心化子。它是约化的，但可能不连通。令 C_S 表示单位连通分支。群 P_S 是由元素 $\frac{-a}{qp}$ 确定的 $C_G(e^{\frac{-2\pi i}{qp}S})$（或 C_S）的抛物子群，并且它是连通的。P_S 的约化商为 $\overline{G_S}$，即 G中 S 的中心化子。记商映射为 $\chi : P_S \to G_S$。

引理 5.5. P_S 群嵌入到 $Aut(S)$ 中，作为由 $H^0(U_0)$积分得到的子群。 P_S 的规范作用保持 $H^1(U_0) \subset U_0^1$不变，且是线性的。因此，我们有一个李子群胚

$$P_S \ltimes H^1(U_0) \subseteq Aut(S) \ltimes U_0^1.$$

证明. 令 $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^2$ 为由 E 的作用生成的李代数丛，并令 $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}$ 为由 $z\partial_z$的作用生成的李代数丛。下述内容定义了一个李代数丛态射

$$f : \mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}, \qquad (\lambda, x, y) \mapsto (pq\lambda, f(x, y)),$$

并且在此映射下，对数联络 $d + \frac{1}{qp} S d\log z$ 拉回为 $p^* S$。因此，拉回定义了从 $Aut(d + \frac{1}{qp} S d\log z)$到 $\to Aut(S)$ 的自同构群嵌入。在 [3, 命题 3.4] 中证明，将自同构限制到 $1 \in \mathbb{C}$ 定义了一个从 $Aut(d + \frac{1}{qp} S d\log z)$ 到 G 的嵌入，并将其与 P_S等同。此外， P_S 的李代数与 $\oplus_{c\geq 0} z^c \mathfrak{g}_{-cpq}$等同，而在拉回下，它同构地映到 $H^0(U_0)$。最后，由于 $H^0(U_0)$ 的作用保留 $H^1(U_0)$ 且为线性作用， P_S 也具有相同性质。

□

给定半单元 $S \in \mathfrak{g}$，若 ad_S 的所有正整数特征值都严格大于 w_0，则称其 足够大。

命题 5.6. 包含映射 $P_S \ltimes H^1(U_0) \subseteq Aut(S) \ltimes U_0^1$ 是 *Morita* 等价，只要 S 足够大。

证明。首 先，由于关于 S 的假设以及 $\mathcal{O}_{w_0} = 0$ (见引理 5.1) 这一事实，向量空间 U_0^1 h具有如下形式

$$U_0^1 = \bigoplus_{w>w_0} \mathcal{O}_w \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w}\beta.$$

我们现在分几个步骤继续进行。

1. 命题：子空间 $H^1(U_0)$ 与 $Aut(S)$ 的每个轨道都相交。给定 $\gamma \in U_0^1$，我们需要找到 $Aut(S)$ 中的一个元素，将 γ 变换到 $H^1(U_0)$ 中。我们按照常微分方程带 Fuchs 型奇点时标准形的通常证明，迭代地进行此操作。首先，我们展开$\gamma = \sum_{w>w_0} \gamma_w$，其中 $\gamma_w \in \mathsf{O}_w \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w}\beta$。给定一个权 $w' > w_0$，令 $u \in \mathsf{O}_{w'-w_0} \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w'}$，并考虑 $e^u \in Aut(S)$ 对 γ 的作用：

$$e^u * \gamma = e^u \gamma e^{-u} - V(e^u)e^{-u}\beta.$$

我们断言， γ 在权 w' 及更高权重下会发生改变。确实，展开后得到

$$V(e^u)e^{-u} = V(u) - V(u)u + \frac{1}{2}V(u^2) + \ldots$$

第一项的权为 w'。由于 $w'-w_0 > 0$，所有其他项的权都更高。展开项 $e^u\gamma_w e^{-u}$ 得到

$$exp(ad_u)\gamma_w = \gamma_w + [u, \gamma_w] + \frac{1}{2}[u, [u, \gamma_w]] + \ldots$$

第二项的权为 $w' - w_0 + w > w'$，因为 $w > w_0$。注意，权 w' 上的作用由 $\gamma_{w'} \mapsto \gamma_{w'} - V(u)\beta$ 给出。
由引理 5.3，元素 $\gamma_{w'}$ 可以分解为

$$\gamma_{w'} = f^c x^a y^b \otimes X\beta + V(u)\beta,$$

其中 $f^c x^a y^b \otimes X \in (\mathbb{C}[f] \otimes C)_{w'} \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w'}$且 $u \in \mathsf{O}_{w'-w_0} \otimes \mathfrak{g}_{w_0-w'}$。那么 $(e^u * \gamma)_{w'} = \gamma_{w'} - V(u)\beta \in H^1(U_0)$。
现在从最低权 $w' > w_0$开始，我们反复用元素 $e^u \in Aut(S)$ 作用于 γ，使得直到 w' 层的各项都属于 $H^1(U_0)$。由于 U_0^1 是有限维的，这一过程会在有限步后终止。所得结果是 $H^1(U_0)$ 中的一个元素。

2. 断言：包含函子 $P_S \ltimes H^1(U_0) \to Aut(S) \ltimes U_0^1$是全忠实的。我们需要证明，给定 $g \in Aut(S)$ 和 $\gamma \in H^1(U_0)$，若 $g * \gamma \in H^1(U_0)$，则 $g \in P_S$。回顾 Levi 分解 $Aut(S) \cong Aut_0(S) \rtimes G_S$，并注意到 $G_S \subseteq P_S$。因此，只需在假设 $g \in Aut_0(S)$ 的情况下进行讨论。由于这样的 g 是幺幂的，它具有形式 $g = e^u$，其中$u \in \bigoplus_{w>0} \mathsf{O}_w \otimes \mathfrak{g}_{-w}$。按权展开， $u = \sum_{w \geq w_1} u_w$，其中 $w_1 > 0$ 是最低权。从上述关于 $e^u * \gamma$的表达式可知， γ 发生改变的最低权是 $w_0 + w_1$。相应的项为

$$(e^u * \gamma)_{w_0+w_1} = \gamma_{w_0+w_1} + V(u_{w_1}).$$

由于 $e^u * \gamma \in H^1(U_0)$，我们必有 $V(u_{w_1}) = 0$，这意味着 $u_{w_1} \in H^0(U_0)$ 且 $e^{u_{w_1}} \in P_S$。令 $\tilde{\gamma} = e^{u_{w_1}} * \gamma \in H^1(U_0)$，使得 $g * \gamma = (e^u e^{-u_{w_1}}) * \tilde{\gamma}$。利用 Baker-Campbell-Hausdorff公式以及 $w_1 > 0$ 这一事实，我们得到 $e^u e^{-u_{w_1}} = e^v$，其中 v 的最低权严格大于 w_1。因此，关于 w_1 的归纳法即可得出结论。

3. 令 $\gamma \in H^1(U_0)$。断言：包含映射 $(H^\bullet(U_0)\ ad_\gamma) \to (U_0^\bullet, \delta_S + ad_\gamma)$ 是拟同构。这由同调微扰引理 [13] 得出。令 $a : H^\bullet(U_0) \to U_0^\bullet$ 为包含映射。根据推论 5.4，相对于定义域上的零微分和余域上的 δ_S，这是一个拟同构。我们有分解 $U_0^1 = H^1(U_0) \oplus \mathrm{Im}(\delta_S)$。令 C 为 $H^0(U_0)$ 的一个补空间，使得 $U_0^0 = H^0(U_0) \oplus C$。可以选择与权重分解相容的这个补空间。利用该分解，我们定义投影 $b : U_0^\bullet \to H^\bullet(U_0)$。其在 $\delta_S|_C : C \to \mathrm{Im}(\delta_S)$ 上的限制是一个同构，而其逆映射定义了一个权为 $-w_0$ 的映射 $h : U_0^1 \to U_0^0$。这些映射满足 $b \bigcirc a = id$、$id - a \bigcirc b = [\delta_S, h]$，以及侧条件 $h \bigcirc a = 0$、$b \bigcirc h = 0$ 和 $h \bigcirc h = 0$。

现在考虑映射 $ad_\gamma : U_0^0 \to U_0^1$，它将作为扰动。注意，它限制为一个映射 $H^0(U_0) \to H^1(U_0)$。按权展开，$\gamma = \sum_{w>w_0} \gamma_w$。由于 h 的权为 $-w_0$，因此 $ad_\gamma \circ h$ 是 U_0^1 的自同态，并且使元素的权至少增加 1。由此可知，$ad_\gamma \circ h$ 是幂零的，因此可以应用扰动引理。利用引理4.4上方给出的公式，我们看到 a 保持不变，δ_S 变形为 $\delta_S + ad_\gamma$，而零微分变形为 ad_γ。

□

模叠 $[\mathcal{W}(A)/Aut(S)]$

现在我们选取一个元素 $A = S + N_0 \in \mathfrak{g}$，并用若尔当分解来表示它。这确定了导出栈 $[\mathsf{W}(A)/Aut(S)]$。导出流形的底空间为

$$W(A) = \{C\beta + N\alpha_0 \in U_0^1 \oplus U_0^0\alpha_0 \mid N(0) \in G_S * N_0\}.$$

曲弯微分分次李代数丛是平凡丛 $W(A) \times U_0^1\alpha_0$，其微分分次李代数结构是平凡的。曲率截面由 $F(C\beta + N\alpha_0) = (V(N) + [C, N])\beta \wedge \alpha_0$给出。应用引理 5.5和命题5.6，我们可以为这个导出栈构造一个更小的模型。

根据引理5.5，向量空间 $H^1(U_0)$ 是 P_S的一个线性表示。李代数$Lie(P_S)$ 同样是一个表示，而子空间 $d\chi^{-1}(G_S * N_0)$ 在此作用下保持不变（回想一下，$\chi : P_S \to G_S$ 是到约化商的投影）。令

$$Q(A) = H^1(U_0) \times d\chi^{-1}(G_S * N_0),$$

赋予其 P_S 的作用。P_S 在 $H^1(U_0)$ 上的无穷小作用定义了一个 P_S-等变映射

$$F_S : Q(A) \to H^1(U_0), \qquad (C, N) \mapsto [C, N].$$

将其视为丛 $Q(A) \times H^1(U_0)$ 的一个截面，我们得到导出流形 $\mathsf{Q}(A)$，它表示 F_S 的导出零点轨迹。这定义了导出栈

$$[\mathcal{Q}(A)/P_S].$$

由推论 5.4 和引理 5.5 此映射进入 $[\mathcal{W}(A)/Aut(S)]$。

定理 5.7。存在一个导出叠之间的映射

$$i : [\mathcal{Q}(A)/P_S] \to [\mathcal{W}(A)/Aut(S)].$$

对于点$(0, N) \in Q(A)$，导数 $di_{(0,N)}$是切复形之间的拟同构。此外，若 S 足够大，则 i 是一个等价。

证明。首先，假设 S 足够大，从而 $P_S \ltimes H^1(U_0) \subseteq Aut(S) \ltimes U_0^1$ 由命题 5.6 可知是一个 Morita 等价。现在令 $C\beta + N\alpha_0 \in MC(\mathsf{W}(A))$。断言：若 $C \in H^1(U_0)$，则 $(C, N) \in MC(\mathsf{Q}(A))$。事实上，注意到 $F(C\beta + N\alpha_0) = (\delta_S(N) + ad_{C\beta}(N)) \wedge \alpha_0$，并且

$$(H^\bullet(U_0), ad_{C\beta}) \to (U_0^\bullet, \delta_S + ad_{C\beta}) \tag{5.1}$$

是一个拟同构。由此可得 $N \in H^0(U_0)$，因此该断言得证。由此断言不难推出所诱导的态射

$$P_S \ltimes MC(\mathcal{Q}(A)) \to Aut(A) \ltimes MC(\mathcal{W}(A))$$

是一个范畴等价。现在给定一个点 $(C, N) \in MC(\mathsf{Q}(A))$，我们需要证明切复形的态射 $di_{(C,N)} : \mathbb{T}_{(C,N)}[\mathsf{Q}(A)/P_S] \to \mathbb{T}_{(C,N)}[\mathsf{W}(A)/Aut(S)]$ 是一个拟同构。这些切复形上的微分具有形式 $d + ad_{N\alpha_0}$。通过扰动引理的论证，只需证明 $di_{(C,N)}$ 关于微分 d是一个拟同构。但对于这些微分， $di_{(C,N)}$ 是方程 5.1 与一个子空间的平移的直和。因此，它是一个拟同构。注意，根据推论 5.4，当 $C = 0$ 时，即使 S 不够大，方程 5.1 仍是拟同构。

□

注记 5.8。 形如 $(0, N) \in Q(A)$ 的联络是 f对在原点有对数极点的 $\mathbb{C}$ 上的联络作拉回所得。

定理 5.7 中的条件 S 足够大是必要的。在下面的例子中，我们将看到，当不满足该条件时，模空间可能会有额外分支。

例 5.9。 设 $f = x^2 - y^5$，设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_3$，并设 $A = S$ 为一个对角矩阵，其对角元为 0、1 和 11。注意， S 不够大，因为 1 是 ad_S 的一个正特征值，且小于 $w_0 = 3$。子代数 $\mathfrak{g}_S$ 由对角矩阵和

$$\begin{aligned} U_0^0 &= \mathfrak{g}_S \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(x^2E_{23}, y^5E_{23}, xy^3E_{13}), \\ U_0^1 &= \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(yE_{21}, y^2E_{12}, xy^4E_{23}, x^2y^2E_{13}, y^7E_{13}), \end{aligned}$$

其中 E_{ij} 是初等矩阵。另一方面， δ_S 上同调为

$$H^0(U_0) = \mathfrak{g}_S \oplus \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(fE_{23}), \quad H^1(U_0) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(yE_{21}, y^2E_{12}, y^2fE_{13}).$$

$W(A)$ 的任意元素都具有 $C\beta + N\alpha_0$ 的形式，其中

$$\begin{aligned} C &= C_{21}yE_{21} + C_{12}y^2E_{12} + C_{23}xy^4E_{23} + (C_{13}^{(1)}x^2y^2 + C_{13}^{(2)}y^7)E_{13}, \\ N &= N_{13}xy^3E_{13} + (N_{23}^{(1)}f + N_{23}^{(2)}(x^2 + y^5))E_{23}. \end{aligned}$$

毛雷尔–卡当方程由以下耦合方程组构成：

$$\begin{aligned} 20N_{23}^{(2)} &= -C_{21}N_{13} \\ 5N_{13} &= -C_{12}(N_{23}^{(2)} - N_{23}^{(1)}) \\ 6N_{13} &= -C_{12}(N_{23}^{(2)} + N_{23}^{(1)}). \end{aligned}$$

将最后两个方程相加，并将结果代入第一个方程，得到 $(110 - C_{21}C_{12})N_{23}^{(2)} = 0$。首先假设 $C_{21}C_{12} \neq 110$。此时方程化简为 $N_{23}^{(2)} = N_{13} = C_{12}N_{23}^{(1)} = 0$，且 $N \in H^0(U_0)$。结果是一个具有 2 个不可约分支的 5 维簇 M_a。接下来，假设 $C_{21}C_{12} = 110$。此时可以求解方程，得到 $N_{13} = -2C_{12}N_{23}^{(1)}$ 和 $N_{23}^{(2)} = 11N_{23}^{(1)}$。因此，结果是一个光滑不可约的 5 维簇 M_b。

$Aut(S)$ 的一个元素具有如下形式

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 & \lambda xy^3 \\ 0 & v & ax^2 + by^5 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix},$$

并且它以下述方式作用于 $C = (C_{21},\ C_{12},\ C_{23},\ C_{13}^{(1)},\ C_{13}^{(2)})$ 和 $N = (N_{13},\ N_{23}^{(1)},\ N_{(2)23})$:

$$g * C = (\frac{v}{u}C_{21}, \frac{u}{v}C_{12}, \frac{v}{w}C_{23} - \frac{\lambda v}{uw}C_{21} - \frac{10(a+b)}{w}, \frac{u}{w}C_{13}^{(1)} - \frac{au}{vw}C_{12} - \frac{6\lambda}{w}, \frac{u}{w}C_{13}^{(2)} - \frac{bu}{vw}C_{12} - \frac{5\lambda}{w})$$
$$g * N = (\frac{u}{w}N_{13}, \frac{v}{w}N_{23}^{(1)}, \frac{v}{w}N_{23}^{(2)}).$$

我们可以立即注意到两点。首先，观察它在 N 上的作用可知， M_b 中存在一些轨道与 $Q(A)$ 不相交。因此， $[M_b/Aut(S)]$ 是模空间的一个额外分支。其次，乘积 $C_{21}C_{12}$ 在该作用下保持不变；如果假设 $C_{21}C_{12} \neq 110$，那么总能将 C 变为 $H^1(U_0)$（即 $C_{23} = 0$ 和 $C_{13}^{(1)} + C_{13}^{(2)} = 0$）。稳定该轨迹的 $Aut(S)$ 子群是 P_S，因此 $[M_a/Aut(S)]$ 包含于 $[MC(\mathrm{Q}(A))/P_S]$。■

与 Grothendieck-Springer 解消的关系

回顾一下， $P_S \subseteq C_S$ 是一个具有列维因子 G_S的抛物子群。分别将它们的李代数记为 $\mathfrak{p}_S$、 $\mathfrak{c}_S$和 $\mathfrak{g}_S$。令 $\mathbb{P}$ 表示部分旗簇，它定义为由 $\mathfrak{c}_S$ 中与 $\mathfrak{p}_S$共轭的抛物子代数组成的集合。它同构于 C_S/P_S。考虑关联簇

$$\tilde{\mathfrak{c}} = \{(x, \mathfrak{p}) \in \mathfrak{c}_S \times \mathbb{P} \mid x \in \mathfrak{p}\},$$

它同构于 $(C_S \times \mathfrak{p}_S)/P_S$ ，同构映射将 $(g, x) \in C_S \times \mathfrak{p}_S$ 映射为这对元素$(Ad_g(x)\ Ad_g(\mathfrak{p}_S)) \in \tilde{\mathfrak{c}}$。当 P_S 是玻尔子群时， $\tilde{\mathfrak{c}}$ 就是 Grothendieck-Springer 解消（详情参见 [11] ）。元素 $N_0 \in \mathfrak{g}_S$ 在每个抛物 $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}$ [5, 的列维商中定义了一个伴随轨道 $\mathcal{O}$ 引理 1]。由此我们可以定义 $\tilde{\mathfrak{c}}$的以下子空间:

$$\tilde{\mathfrak{c}}_{N_0} = \{(x, \mathfrak{p}) \in \tilde{\mathfrak{c}} \mid d\chi(x) \in \mathcal{O}\},$$

其中 $d\chi$ 表示到列维商的投影。空间 $Q(A)$ 是定义在 $d\chi^{-1}(G_S * N_0)$ 上的 P_S-等变向量丛。因此， $\pi : E_A = (C_S \times Q(A))/P_S \to \tilde{\mathfrak{c}}_{N_0}$ 是一个 C_S-等变向量丛，而映射 F_S 给出一个 $\pi^*(E_A) \to E_A$ 的等变截面 σ_S。由此，我们得到一个导出栈 $[\mathrm{E}_A/C_S]$ ，它等价于 $[\mathrm{Q}(A)/P_S]$。

例5.10。设 $G = GL_n$ ，并设 $A = S = pqD$，其中 D 是一个具有互不相同整数特征值的对角矩阵。在这种情况下， S 足够大， $C_S = G$ ，且 $P_S = B$ 是一个玻尔子群。因此， $\mathbb{P}$ 是旗簇 Fl_n。由于 $N_0 = 0$， $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ 是斯普林格解消，它与 T^*Fl_n 同构。我们使用推论 5.4 来计算上同调空间 $H^1(U_0)$。分解中出现的权 w 具有如下形式： $w = (p-1)q + (q-1)p + cqp$。但在这种情况下 $(\mathbb{C}[f] \otimes C)_w = 0$ ，因此 $H^1(U_0) = 0$。因此，模空间 $[\mathrm{W}(A)/Aut(S)]$ 等价于商栈

$$[T^*Fl_n/GL_n].$$

注意，与 T^*Fl_n 中各点对应的联络，都是从 $\mathbb{C}$上的对数联络拉回得到的；类似的分类由 [5, 定理 A]给出。■

例5.11. 设 $G = GL_n$ 和 $A = S = \frac{qp}{r}D$，其中 D 是一个具有互异特征值的对角整数矩阵，且 r 是一个正整数。在此情形下，$e^{\frac{-2\pi i}{qp}S}$ 的特征值是 r^{th} 个单位根，这意味着 $C_S = \prod_{i=0}^{r-1} GL_{m_i}$，其因子由单位根标记。由于假设 S的特征值互异，$P_S = \prod_{i=0}^{r-1} B_{m_i}$是若干个 Borel子群的乘积。因此，$\mathbb{P} \cong \prod_{i=0}^{r-1} Fl_{m_i}$是旗簇的乘积，而 $\mathfrak{c}_0 \cong \prod_{i=0}^{r-1} T^* Fl_{m_i}$是它们的余切丛的乘积。将 D 的特征值写作 $rk+u$，其中 $0 \le u < r$，则 ad_S 的特征值具有如下形式$qp(k_1 - k_2) + \frac{qp}{r}(u_1 - u_2)$。通过限制 k_i的可能取值，可以确保 S足够大。例如，若对所有特征值对都有 $k_1 - k_2 \neq 0, \pm 1$，则可保证这一点。根据推论 5.4，$H^1(U_0)$ 分解中出现的权 w 具有如下形式

$$w = qp(1 + k_2 - k_1) + \frac{qp}{r}(u_2 - u_1) - p - q.$$

与例子5.10一样，为了获得非零贡献，我们必须有 $u_2 \neq u_1$。

现在我们将其特化到 GL_4，其中 $r = pq$ 且 $S = D$ 是一个对角矩阵，其对角元为

$$pqk_1, \quad pqk_2, \quad pqk_3 + p + q, \quad pqk_4 + p + q,$$

使得 $k_1 \ll k_2 \ll k_3 \ll k_4$。那么 $C_S = GL_2 \times GL_2$ 且 $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。令 T_1 和 T_2 为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上的典范秩2向量丛（分别对应第一个和第二个因子）。它们都是平凡的，但配备了典范线子丛L_i，其次数分别为（−1，0）和（0，−1）。余切丛 $\mathfrak{c}_0$可识别为$Hom(T_1/L_1, L_1) \oplus Hom(T_2/L_2, L_2)$；或者，也可将其视为保持 T_1 和 T_2 的幂零滤过的自同态。

$H^1(U_0)$的分解中的权具有如下形式：$qp(1 + k_j - k_i)$，其中 $j = 3, 4$且$i = 1, 2$。因此，$H^1(U_0)$可识别为 $\mathfrak{gl}_4$中由右上 2×2块构成的子空间。因此，

$$E_A = Hom(T_1/L_1, L_1) \oplus Hom(T_2/L_2, L_2) \oplus Hom(T_2, T_1),$$

其截面为 $\sigma_S(a, b, c) = c \bigcirc b - a \bigcirc c$。 ■

切李双代数与移位泊松几何

设 $A = S \in \mathfrak{g}$ 为一个半单元，并考虑模空间 $[\mathcal{W}(S)/Aut(S)]$。其中有一个特殊点 $0 \in MC(\mathcal{W}(S))$，它对应于联络1-形式 $\alpha_0 S$。本节将重点关注模空间中该点的形式邻域，并概述如何在此邻域上构造一个 −2-移位泊松结构。根据导出变形理论的基本原理（例如参见 [17, 20, 27, 18]），这个形式邻域由移位切复形 $\mathbb{T}_0[\mathcal{W}(S)/Aut(S)][-1]$编码，并赋有其作为微分分次李代数的结构。根据定理5.7，这个微分分次李代数与以下对象准同构：

$$\mathbb{T}_0[\mathcal{Q}(A)/P_S][-1] = H^0(U_0) \to H^1(U_0) \oplus H^0(U_0)_+ \to H^1(U_0),$$

其中微分为 0，且 $H^0(U_0)_+ = \oplus_{c>0} f^c \mathfrak{g}_{-cpq}$。根据 [26, 命题 1，5]，一个 −3-移位李双代数结构赋予 $\mathbb{T}_0[\mathcal{Q}(A)/P_S][-1]$ 一个 −2-移位泊松结构，使其定义在形式邻域上。因此，我们的策略是将切复形嵌入 $H^\bullet(U_0) \ltimes H^\bullet(U_0)[-1]$中，从而在切复形上构造李双代数结构，然后将这个更大的李代数实现为一个 −3-移位 Manin 三元组中的拉格朗日子空间。

我们分阶段构造 Manin 三元组，首先从以下输入数据开始：

- 在约化李代数 $\mathfrak{g}$ 上选取一个不变内积 k。这在特征子空间 $\mathfrak{g}_\lambda$ 与 $\mathfrak{g}_{-\lambda}$ 之间诱导出一个完美配对。

- 向量空间 $C = \mathbb{C}[x,y]/(x^{p-1}, y^{q-1})$ 与 $f^{-1}(1)$ 的 1 次上同调有典范同构； $f^{-1}(1)$ 是一条亏格为 $g = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ 且只有一个穿孔点的曲线。该同构如下给出：

$$C \to H^1(f^{-1}(1)), \qquad x^a y^b \mapsto (x^a y^b \beta)|_{f^{-1}(1)}.$$

通过将曲线上的交 pairing 拉回，我们在 C上得到一个辛形式 I 。除一个缩放常数外，它由以下公式给出

$$I(x^a y^b, x^{a'} y^{b'}) = \frac{\delta(a+a'+2-p)\delta(b+b'+2-q)}{aq+bp-w_0},$$

其中， δ 是狄拉克δ函数，在 0 处取值为 1，在其他地方取值为 0。我们可以将其扩展为 $\mathbb{C}[f] \otimes_{\mathbb{C}} C$上的 $\mathbb{C}[f]$-线性配对。

现在考虑李代数 $\mathfrak{c} = \oplus_{c\in\mathbb{Z}} f^c \mathfrak{g}_{-cpq}$。它有两个特别的子代数：第一是$\mathfrak{b} = H^0(U_0)$，其中 $c \geq 0$；第二是 $\mathfrak{b}^-$，其中 $c \leq 0$。注意， $\mathfrak{c}$ 可以视为$\mathfrak{g}$ 的子代数，因此继承配对 k。这定义了 $\mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{b}^-$之间的完美配对。

接下来，定义以下向量空间

$$\mathfrak{K} = \bigoplus_{c\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{\substack{0\leq a\leq p-2 \\ 0\leq b\leq q-2}} f^c x^a y^b \mathfrak{g}_{w_0-cpq-aq-bp}.$$

根据 c 分别为正、零或负的情形，这可分解为 $\mathfrak{K} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$。注意， $H^1(U_0) = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$。将 $\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{K}$ 都视为李代数 $\mathbb{C}[x,y] \otimes \mathfrak{g}$的子空间，我们可以证明 $\mathfrak{K}$ 是 $\mathfrak{c}$的一个表示。将 C 上的辛形式 I 与 $\mathfrak{g}$上的李括号结合起来，我们定义一个对 $\mathfrak{c}$等变的对称映射 $\omega : S^2(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{c}$ 如下

$$\omega(f^{c_1} x^{a_1} y^{b_1} X_1, f^{c_2} x^{a_2} y^{b_2} X_2) = f^{c_1+c_2} I(x^{a_1} y^{b_1}, x^{a_2} y^{b_2})[X_1, X_2].$$

将其与到 $\mathfrak{b}^-$ 的自然投影复合，得到一个映射 $\mu : S^2(\mathfrak{K}) \to \mathfrak{b}^-$。该映射是 $\mathfrak{b}$-等变的，其中 $\mathfrak{b}^-$ 是一个 $\mathfrak{b}$-表示，这是通过利用内积将其与 $\mathfrak{b}^*$ 识别得到的。对于 $\mathfrak{K}$ 上的 $\mathfrak{b}$ 作用， $\mathfrak{n}_+$ 和 $\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$ 都是子表示。因此，商空间 $\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}}{\mathfrak{n}_+}$ 自然是一个 $\mathfrak{b}$-表示，而 μ 下降为一个 $\mathfrak{b}$-等变映射 $\nu : \overline{S^2}(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{b}^-$。现在我们定义一个分次李代数

$$L = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{K} \oplus \mathfrak{h})[-1] \oplus \mathfrak{b}^-[-2].$$

括号由 $\mathfrak{b}$ 上的括号、对其他直和项的 $\mathfrak{b}$ 作用、 $\mathfrak{K}$ 上的对称配对 μ 以及 $\mathfrak{h}$ 上的对称配对 $-\nu$ 构造而成。我们将 $\mathfrak{K}$ 与 $\mathfrak{h}$ 之间的括号设为零。

引理5.12。 向量空间 L 配备上述括号后构成一个分次李代数。令 $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h})[-1]$，并令 $\mathfrak{p}_- = (\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h})[-1] \oplus \mathfrak{b}^-[-2]$。存在态射

$$\mathfrak{p}_+ \to L, \qquad (b,n,h) \mapsto (b, n+h, h, 0)$$
$$\mathfrak{p}_- \to L, \qquad (n,h,u) \mapsto (0, n+h, -h, u).$$

这些 将 $\mathfrak{p}_\pm$ 嵌入为 L 的互补子代数。此外， $\mathfrak{p}_+$ 与 $H^\bullet$（U_0 同构 ）.

接下来，我们在 L上构造一个内积。将 k 上的内积与 $\mathfrak{g}$ 上的辛配对结合起来，我们定义斜对称配对 $\Omega : \wedge^2 \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ 如下

$$\Omega(f^{c_1} x^{a_1} y^{b_1} X_1, f^{c_2} x^{a_2} y^{b_2} X_2) = f^{c_1+c_2} I(x^{a_1} y^{b_1}, x^{a_2} y^{b_2}) k(X_1, X_2).$$

此配对是非退化的，在 $\mathfrak{h}$ 上的限制也是非退化配对，并定义了 $\mathfrak{n}_{\pm}$之间的完美配对。现在我们可以定义一个非退化的分次对称双线性配对

$$B : S^2(L) \to \mathbb{C}[-2].$$

更确切地说，给定 $y = (b_1,\ k_1,\ h_1,\ u_1)\ z = (b_2,\ k_2,\ h_2,\ u_2) \in L$，我们定义

$$B(y,z) = k(b_1,u_2) + k(u_1,b_2) + \Omega(k_1,k_2) - \Omega(h_1,h_2).$$

引理 5.13。 **</style}配对 是 上的非退化不变内积。此外，是互补的拉格朗日子代数。换言之，(**L、 $\mathfrak{p}_+$、$\mathfrak{p}_-$*) </style}*是一个 -2-移位的 *Manin* 三元组。

现在令 $\mathbb{C}[\epsilon]$ 为由一个次数为 $+1$ 的变量 ϵ 生成的交换微分分次代数，并令 $tr : \mathbb{C}[\epsilon] \to \mathbb{C}[-1]$ 为迹映射，其定义为将元素 $a + b\epsilon$ 映射到 b。与 $\mathbb{C}[\epsilon]$ 作张量积定义了一个新的分次李代数三元组（$\mathbb{C}[\epsilon] \otimes L$， $\mathbb{C}[\epsilon] \otimes \mathfrak{p}_+$， $\mathbb{C}[\epsilon] \otimes \mathfrak{p}_-$），双线性形式 B 以下述方式延拓

$$B : S^2(\mathbb{C}[\epsilon] \otimes L) \to \mathbb{C}[-3], \qquad (fy, gz) \mapsto (-1)^{|y||g|} tr(fg) B(y,z).$$

由此，我们得到一个 -3 移位的 Manin 三元组。注意， $\mathbb{C}[\epsilon] \otimes \mathfrak{p}_+ \cong H^\bullet(U_0) \ltimes H^\bullet(U_0)[-1]$。切复形 $\mathbb{T}_0[\mathrm{Q}(A)/P_S][-1]$ 同构于子代数 $\mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{b}_{>0}\epsilon \oplus (\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h})\epsilon$，其中 $\mathfrak{b}_{>0}$ 由满足 $c > 0$ 的元素 $f^c X$ 构成。令 M 为该子代数与$\mathbb{C}[\epsilon] \otimes \mathfrak{p}_-$的直和。于是， M 是 L 的余等向子代数，而 $M^\perp = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{b}^- \subset M$ 是一个等向理想。因此，$(M/M^{-1}, \mathbb{T}_0[\mathrm{Q}(A)/P_S][-1], \mathbb{C}[\epsilon] \otimes \mathfrak{p}_-/M^\perp)$ 是一个 -3 移位的 Manin 三元组。由 [26, 引理 1.3], 可知，切复形获得了一个 -3 移位的李双代数结构。

定理 5.14。 切复形 $\mathbb{T}_0[\mathcal{Q}(A)/P_S][-1]$ 具有 -3-移位李双代数结构。因此， $0 \in [\mathcal{W}(S)/Aut(S)]$ 的形式邻域具有 -2-移位泊松结构。

参考文献

[1] M. F. Atiyah 和 R. Bott。《黎曼曲面上的杨–米尔斯方程》。*Philos. Trans.Roy. Soc. London Ser. A*，308(1505):523–615，1983年。[2] Kai Behrend、Ionut Ciocan-Fontanine、Junho Hwang 和 Michael Rose。《稳定层的导出模空间》。*Algebra Number Theory*，8(4):781–812，2014年。[3] Francis Bischoff。《李群胚与对数联络》。*arXiv preprint arXiv:2010.03685*，2020年。[4] Francis Bischoff。《对数平坦联络的标准形与模叠》。*arXivpreprint arXiv:2209.00631*，2022年。[5] P. P. Boalch。《温和复抛物联络的黎曼–希尔伯特对应》。*Transformationgroups*，16(1):27–50，2011年。[6]Philip Boalch。《辛流形与等单调变形》。*Adv. Math.*，163(2):137–205，2001年。[7] Philip Boalch。《亚纯联络的拟哈密顿几何》。*Duke Math. J.*，139(2):369–405，2007年。[8] Philip P. Boalch。 *G*-丛、等单调性与量子 Weyl 群。*Int. Math. Res. Not.*，(22):1129–1166，2002年。[9] Damien Calaque。《映射叠与半经典拓扑场论上的拉格朗日结构》。载于*Stacksand categories in geometry, topology, and algebra*，第643卷*Contemp. Math.*，第1–23页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2015年。

[10] Damien Calaque、Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi。《移位泊松结构与变形量子化》。J. Topol.，10(2):483–584，2017年。[11] Neil Chriss 和 Victor Ginzburg。《表示论与复几何》。Modern Birkh¨auser Classics。Birkh¨auser Boston, Ltd.，美国马萨诸塞州波士顿，2010年。1997年版重印。[12] Ionut。Ciocan-Fontanine 和 Mikhail Kapranov。《导出 Quot 概形》。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4)，34(3):403–440，2001年。[13] Marius Crainic。《关于扰动引理与变形》。arXiv 预印本 math/0403266，2004年。[14] V. V. Fock 和 A. A. Rosly。《黎曼曲面上平坦联络模空间的泊松结构及 r-矩阵》。载于《莫斯科数学物理研讨会》，美国数学会译丛第2辑第191卷，第67–86页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1999年。[15] William M. Goldman。《曲面基本群的辛性》。Adv. in Math.，54(2):200–225，1984年。[16] M. Kapranov。《 BG 的内射分解与局部系统的导出模空间》。J. Pure Appl. Algebra，155(2-3):167–179，2001年。[17] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman。《变形理论》。Livre en pr´eparation，2002 年。[18] Jacob Lurie。《环谱的模问题》。载于《国际数学家大会论文集》第II卷，第1099–1125页。印度斯坦图书机构，新德里，2010年。[19] Jacob Lurie。《谱代数几何》。预印本，2018年。[20] Marco Manetti。《变形理论中的李方法》。Springer 数学专著。Springer，新加坡， [2022] ©2022。[21] Valerio Melani 和 Pavel Safronov。《导出余等向结构 I：仿射情形》。Selecta Math. (N.S.)，24(4):3061–3118，2018年。[22] Valerio Melani 和 Pavel Safronov。《导出余等向结构 II：代数栈与量子化》。Selecta Math. (N.S.)，24(4):3119–3173，2018年。[23] Tony Pantev 和 Bertrand To¨en。《光滑簇上局部系统模空间的泊松几何》。Publ. Res. Inst. Math. Sci.，57([3-4]):959–991，2021年。[24] Tony Pantev 和 Bertrand To¨en。《光滑簇上的平坦联络模空间》。Algebr. Geom.，9(3):266–310，2022年。[25] Tony Pantev、Bertrand To¨en、Michel Vaqui´e 和 Gabriele Vezzosi。《移位辛结构》。Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.，117:271–328，2013年。[26] Slava Pimenov。《复形的导出簇上的移位泊松结构与巴塔林–维尔科维斯基结构》。arXiv 预印本 arXiv:1511.00946，2015年。[27] J. P. Pridham。《统一导出变形理论》。Adv. Math.，224(3):772–826，2010年。[28] Jonathan P. Pridham。《构造导出模栈》。Geom. Topol.，17(3):1417–1495，2013年。[29] Pavel Safronov。《通过经典陈–西蒙斯理论进行拟哈密顿约化》。Adv. Math.，287:733–773，2016年。[30] Kyoji Saito。《对数微分形式与对数向量场理论》。J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math，27(2):265–291，1980年。[31] Bertrand To¨en 和 Gabriele Vezzosi。《同伦代数几何 II：几何代数栈与应用》。Mem. Amer. Math. Soc.，193(902):x+224，2008年。