arXiv:2301.00963v1 [math.CV] 3 Jan 2023

具有孤立奇点的函数芽的莫尔斯数

˘LAURENT,IU MAXIM 和 MIHAI TIBAR

Abstract. 对于具有分层孤立奇点的全纯函数芽，可以定义一组莫尔斯数，将经典的米尔诺数推广到奇异基空间的情形。

1. Introduction

全纯函数芽的拓扑 g: （$\mathbb{C}^n$, 0） → （$\mathbb{C}$, 0）， $n \geq 2$, 其具有孤立奇点，自米尔诺的基础讲义以来，便在20世纪60年代末开始受到研究[Mi] 。当时，米尔诺证明了局部平凡纤维化的存在

$$g_| : B_\varepsilon \cap g^{-1}(D^*_\delta) \to D^*_\delta \tag{1.1}$$

其中 $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n$ 是以 0 为中心、半径为 $\varepsilon > 0$ 的开球，而 $D^*_\delta \subset \mathbb{C}$ 是以 0 为中心、半径为 $\delta > 0$的穿孔开圆盘；首先选取 ε 足够小，使得所有半径更小的球面都与 g^{-1}(0) 横截；然后选取 $0 < \delta \ll \varepsilon$ 使得 g 在 D^*_δ 上的所有纤维都与 ∂B_ε横截。米尔诺证明，纤维化（1.1）在同伦意义下与 ε 和 δ 的选择无关，并且其纤维（称为米尔诺纤维）与球面的楔和 S^{n-1}同伦等价。这些球面的个数 $\mu(g)$ 是一个局部不变量，称为米尔诺数，还有几种其他表述方式：

(a) 雅可比理想的余维，即 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n})$; (b) 对 g进行莫尔斯化时莫尔斯点的个数；(c) grad g 在 x_0处的庞加莱-霍普夫指标，其中 ´e；

若源空间是奇异解析空间芽 $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$，且 $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ 是具有分层孤立奇点的全纯函数芽，则人们已定义了米尔诺数的若干推广。下面简要回顾比较其中一些推广时会用到的几个概念。

Goryunov [Go] 为曲线奇点上的函数引入的米尔诺数$X \subset \mathbb{C}^N$，记作 $\mu_G(f)$, 在空间 X 和函数 f的同时变形下保持不变，见[MS，第178]页。假设曲线奇点 $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{p+1}, 0)$ 是由 g: $(\mathbb{C}^{p+1}, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$定义的 ICIS，且 F是 f到 $(\mathbb{C}^{p+1}, 0)$ 的延拓，则 $\mu_G(f)$计数临界点的个数

日期：2023年1月4日。2010年数学主题分类：32S30、14C17、32S60、32S50、32S55、14D06、32S05。关键词和短语：米尔诺数、莫尔斯函数、孤立奇点、消失同调。L. Maxim 部分获得了 Simons基金会（数学家合作资助项目 #567077）、法国国家科学研究中心和波恩马克斯·普朗克数学研究所的支持。M. Tib˘ar 感谢 Labex CEMPI资助（ANR-11-LABX-0007-01）以及法国国家科学研究中心研究组“奇点与应用”的部分资助。

并按 F 在米尔诺纤维 $g^{-1}(t)$ 上的限制的重数计数。对于更高维的 ICIS，这一概念同样适用；事实证明，$\mu_G(f)$等于$F_{|_{X_t}}$ 在 ICIS X的米尔诺纤维 X_t 上的限制之梯度的庞加莱-霍普夫指标。因此，$\mu_G(f)$也可视为 f 在 X上的梯度向量场的所谓 GSV指标，该指标由[GSV], 引入，并定义为 f 的梯度向米尔诺纤维 $g^{-1}(t) = X_t$的延拓的庞加莱-霍普夫指标。对于 ICIS，不变量 $\mu_G(f)$也等于 Izawa 和 Suwa [IS]引入的函数 f 在 X 上的 x_0 处的虚重数。按定义，这一重数是由 f的微分定义的 X 的虚余切丛 $T^*(X)$ 的顶陈类在 0 处的局部化；根据假设，该微分在 $X\backslash\{0\}$ 上不为零。即使 X 的奇异集不是孤立的，虚重数仍然有定义，详情参见[IS] 。对于 ICIS，不变量 $\mu_G(f)$也与 [EG]中定义的 1-形式 dg的指标一致。这与 [LSS] 中将 GSV 指标解释为虚切丛的顶陈类的局部化颇为相近。

可以注意到，上述所有不变量都与米尔诺数诸种体现形式列表中的(a)项和(c)项相关。相较之下，我们在此关注的是(b)项。

对于一个全纯函数芽 $g\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0),\ n\geq 2$若其具有孤立奇点，Brieskorn 在[Br，附录] 中证明，任何连续族 g_t 全纯 Morse 函数芽，其中 $g_0 = g$ 恰有 $\mu(g$个莫尔斯点在 $t\to 0$时趋于 0。

令我们考虑奇异分层空间芽 $(X, 0)$ 上的全纯函数 $f\colon(X, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$。在 $0\in X$ 的某个足够小的邻域内，空间 X 可以赋予最粗的 Whitney 分层 $\mathscr{S}$，它具有有限个分层，且 $\{0\}$ 是唯一的点分层。这里我们引入，或者说回顾（见下文评注），与这样的 f 相关的莫尔斯对集合 $M(f) := \{(V, m_V) \mid V \subset \mathscr{S} \setminus \{0\}\}$。对于任意正维分层 $V \in \mathscr{S}$，整数 m_V 表示在某个 f_t 的莫尔斯化及足够小的参数 $t \in \mathbb{C}$ 下，f_t 在 V 上的莫尔斯点数。我们在 §2.3 中指出，m_V 与所选的莫尔斯化无关，因此这些莫尔斯数是 f 的拓扑不变量。我们还在命题 2.3 中指出，[STV] 给出了以相对欧拉障碍（定义见 [BMPS]）解释莫尔斯数的方法，即有：

$$m_V = (-1)^{\dim V}\,\mathrm{Eu}_f(\overline{V}, 0). \tag{1.2}$$

莫尔斯数的可计算性是 f的消失同调中的一个重要问题。事实上，数值 m_V作为重要组成部分，与分层 $\mathbb{Z}$的米尔诺纤维 F_f 的 f-同调的以下直和分解中的复链接 $\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V$一起出现；该分解由布里斯科恩变形原理得出（见§2.2）：

$$\widetilde{H}_*(F_f) \cong \widetilde{H}_*(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}) \oplus \bigoplus_{V\in\mathscr{S}\setminus\{0\}} \widetilde{H}_*\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right)^{m_V}.$$

本文的主要目的，是指出一种极为实用且有效的方法，通过局部极性重数来计算莫尔斯数集合。我们的定理3.1 将上述直和分解与

中 [Ti1] 通过对米尔诺纤维进行极分析得到的另一种分解进行了比较。实际上，该定理指出这两种分解相同，这也就证明了 m_V 与极不变量 k_V 相等；后者出现在[Ti1，§4.1], 见（3.3），对任意正维分层 V均成立。Massey 也将这一数值等同作为其主要结果加以证明[Ma，定理 3。2]。本文提供了一种简短而直接的方法，来证明关于莫尔斯数的极公式 m_V。最后，我们通过一个例子，详细说明极不变量的算法计算过程 k_V，这些极不变量给出了莫尔斯数。

致谢。 感谢 Matthias Zach 提出了 Morse 数可计算性的问题，该问题出现在 Massey 的论文中 [Ma]。

2. Brieskorn principle and Morse numbers

从现在起，我们假设全纯函数芽 $f\colon (X,0)\to(\mathbb{C},0)$ 在 0 处相对于 $X\subset\mathbb{C}^N$ 的典范惠特尼分层 $\mathscr{S}$ 有一个孤立奇点。

2.1. 极曲线与一般线性函数。设 $l\colon (X,0)\to\mathbb{C}$ 是一个线性函数，并令 $\Gamma(l,f):=\mathrm{Sing}_{\mathscr{S}}(l,f)$ 为 f 关于 l 的极曲线在原点处的芽。

下面是一个贝尔蒂尼–萨德型的基本结果，可追溯至 Hamm-Lˆe、Kleiman 和 Teissier；证明请参阅[Kl], [HL], 另见 [Ti2], [Ti3，定理 7.1。2], ，其中有证明及更详尽的讨论：

引理 2.1（极曲线引理）。存在一个扎里斯基开稠密子集 $\Omega':=\Omega'_f\subset\check{\mathbb{P}}^{N-1}$，使得 $\Gamma(l,f)$ 对所有 $l\in\Omega'$ 而言，要么是一个约化曲线芽，要么对所有$l\in\Omega'$而言为空，并且超平面 $\{l=0\}$ 与 $X\setminus\{0\}$的所有分层横截。

若极集非空，则存在一个扎里斯基开子集 $\Omega\subset\Omega'$，使得限制映射 $(l,f)|_{\Gamma(l,f)}$ 是一对一的。□

线性形式 $l\in\Omega'$ 将称为一般，而 Ω 中的线性形式称为非常一般。我们只使用 Ω'，有关 Ω 的说明请参见备注 3.2 。根据定义，$\mathscr{S}$ 中维数为 1 的分层是极曲线的分支。

2.2. 关于莫尔斯化的布里斯科恩原理。 f 在 0 处的一般变形 f_t 在某些正维分层 $V\in\mathscr{S}$ 上只有分层莫尔斯奇点；换言之，奇点 $0\in\mathrm{Sing}_{\mathscr{S}}f$ 分裂为有限多个莫尔斯分层奇点 $q_1,\dots,q_r$，它们属于 f_t，其中 $t\neq 0$，且位于某些闭包包含 0 的分层 $V\in\mathscr{S}$ 上，见 [GM]。若空间在 0 处是奇异的，则原点 $q_0:=0\in X$ 仍是 f 的一个奇异（但非莫尔斯）点，这是由于 X 在 0 处的奇异结构；而芽 f_t 在 q_0 处则是一般函数的芽。我们将这样的 f 一般变形称为莫尔斯化。 f 的一种特殊莫尔斯化是一般线性变形 $f_t=f-\lambda l$，其中某个 $l\in\Omega'$。

很久以前，包括 Lˆe D.T. 在内的许多学者就已观察到（例如，参见 [Lˆe2]），奇异空间芽（X，0）上的任意全纯函数芽都具有局部平凡的米尔诺纤维化。在我们的情形中，f 在原点处有一个分层孤立奇点。取一个足够小的米尔诺球 B_ε，以 0 为中心，针对 f，则 F_f 的局部米尔诺纤维 f 与莫尔斯化 f_t 在同一球 B_ε内的一般纤维同伦等价，并且其上方的所有纤维

足够小的圆盘 D_η 与边界 ∂B_ε分层横截。若我们计算 f_t 的一般纤维的同调，则通过在 B_ε内各个莫尔斯奇点 q_i 处的小米尔诺球以及中心奇点 q_0处进行切除，可得到以下关于 $\mathbb{Z}$ 系数的约化同调直和分解：

$$\widetilde{H}_*(F_f) \cong \bigoplus_{i=0}^{r} \widetilde{H}_*(F_{f_t,q_i}),$$

其中 F_{f_t,q_i} 表示 f_t 在 q_i处的米尔诺纤维，对所有 $i = 0$，1，.....，r均如此。

我们用 $\mathbb{C}\mathrm{lk}_X(V)$ 表示分层 $V \in \mathscr{S}$的复链接。令 $\Sigma^k(Y)$ 表示某个空间 Y的 k 重悬。按惯例，设 $\Sigma(\emptyset) := S^0$ （0 维球面），且 $\Sigma^0(Y) := Y$。根据 Goresky-MacPherson 分层莫尔斯理论 [GM], , 分层莫尔斯奇点 $q_i \in V, i = 1, \ldots, r$ 的米尔诺纤维的同调可以用局部莫尔斯数据表示，从而可以用正维分层 V的复链接表示，如下所示：

$$\widetilde{H}_*(F_{f_t,q_i}) \cong \widetilde{H}_*\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X(V))\right). \tag{2.1}$$

注意，F_{f_t,q_0} 是一般函数在 $0 \in X$处的米尔诺纤维，因此它与复链接 $\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}$同伦等价。

上述变形原理由 Brieskorn [Br，附录]在光滑空间上的函数情形中建立 X。Lˆe D.T. [Lˆe1] 将其推广到了任意分层空间芽（X，0）的情形；Siersma [Si] 将其推广到了具有孤立奇点的空间芽（X，0）的情形；第二作者 [Ti1，第228-229]页将其推广到了任意奇异 X。Massey 的论文 [Ma] 将 Brieskorn 的论证应用于分层（X，0）上带可构造层系数的米尔诺纤维的（超）上同调。（这些参考文献并非意在穷尽所有文献；可能还有我们未注意到的更早文献。）

根据 [Ti1，第228-229],页，由（2.1）可得 $\mathbb{Z}$-同调中的同构：

$$\widetilde{H}_*(F_f) \cong \widetilde{H}_*(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}) \oplus \bigoplus_{V \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \widetilde{H}_*\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right)^{m_V}, \tag{2.2}$$

其中， X 具有纯维数 $\dim_0 X \geq 2$，并且：

$$m_V := \#\{\text{在 } V \text{ 上的分层莫尔斯点；当 } t \to 0\}\text{.时，这些点趋于 0} \tag{2.3}$$

2.3. 莫尔斯对集合。 比较论证§§3.1（见注 3.3）将表明，整数 m_V 由（2.3）定义，仅取决于分层 V，而与所选的莫尔斯化无关 f_t。或者，这也可由下文的定理3.1推出。因此，我们可以引入以下定义。

定义 2.2。 设 $f\colon (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ 是一个关于典范惠特尼分层 $\mathscr{S}$ 的 X 在 0 处具有孤立奇点的全纯函数芽。非负整数 m_V （2.3）称为与分层相关联的莫尔斯数 f，其对应的分层为$V \in \mathscr{S}$。以下数对“（分层，莫尔斯数）”的集合：

$$M(f) := \{(V, m_V) \mid V \in \mathscr{S} \setminus \{0\}\}$$

称为 f 的莫尔斯对集合。

需要指出的是，以下原因导致无法为分层 $\{0\} \in \mathscr{S}$ 定义莫尔斯数：或者（1）点 0 不属于 X 的任何 Whitney分层中的高维分层，此时除非 X 的情形非常特殊，否则任意函数 f_t 在 0 处都有退化的（非莫尔斯）奇点；或者（2）点 0 属于高维分层，但在这种情况下，一般的莫尔斯化 f_t 相对于典范分层 $\mathscr{S}$ 在 0 处没有奇点。

正如我们在上文已经指出的，莫尔斯对集合 $M(f)$ 是经典米尔诺数在分层情形下的延拓。事实上，当 X 是光滑空间时，只有一个分层，因此 $M(f)$ 只包含一个莫尔斯对 (X, m_X)，其中整数 m_X 是经典米尔诺数 $\mu(f)$。

由[STV，命题 2.3]，以下公式根据相对欧拉障碍[1]计算莫尔斯数：

命题 2.3. 若 $f\colon (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ 具有孤立分层奇点，则对于任意满足 $\dim V > 0$ 的 $V \in \mathscr{S}$，以下等式成立：

$$m_V = (-1)^{\dim V} \operatorname{Eu}_f(\overline{V}, 0). \tag{2.4}$$

证明。对于光滑分层 $V = X_{\mathrm{reg}}$，该公式已在 [STV，命题 2.3] 中陈述并证明。不过实际上，这已经足够了。事实上，典范惠特尼分层中任意正维分层 V 的闭包在 X 处的 0 是一个复解析空间，因此同样的证明（从而同样的公式）适用于复解析空间芽 $(\overline{V},0)$，因为显然有 $(\overline{V})_{\mathrm{reg}} = V$。 □

最近，Zach 2.4）中欧拉障碍的对偶表达式[2]，被 Zach [Za] 用于说明原则上可以通过切赫上同调和谱序列计算莫尔斯数。

需要指出的是，在多项式函数 $f\colon X \to \mathbb{C}$的整体情形中，近年来人们对计算线性莫尔斯化 X_{reg} 中 $f_t = f - tl$ 的 f正则部分上的莫尔斯点数目越来越感兴趣，因为这与相应的优化代数次数概念有关，参见例如[DHOST], [MRW1], [MRW2] 或 [MT], ，这些文献主要关注欧几里得距离次数。

3. The polar formula for the Morse numbers

我们将证明，莫尔斯数存在一个以极重数表示的实用且有效的公式。尽管这个公式很久以前就由 Massey 在 [Ma],中证明过，但它似乎一直被忽视。诚然，Massey 的证明看起来冗长而乏味，但公式本身（见（3.1））无疑是最便于有效计算的。我们将在此给出一个简短得多的证明，希望能为这个极其简洁优美的公式带来新的认识。

[1]定义见 [BMPS]。[2]参见 [EG] ，其中给出了 1-形式 $\mathrm{d}f$的欧拉障碍的定义。

我们使用引理 2.1 所定义的一般极曲线。每当 $l \in \Omega'$ 时，如果极曲线 $\Gamma(\ell, f)$ 非空，则它分解为：

$$\Gamma(\ell, f) = \bigcup_{V \in \mathscr{S}} \Gamma_V(\ell, f)$$

其中，$\Gamma_V(\ell, f)$ 表示包含在 $V \cup \{0\}$ 中的 $\Gamma(\ell, f)$ 的非平凡曲线分支之并。

下面的定理表明，f 如上所定义，参与消失同调的直和分解（2.2）的莫尔斯对，可以用局部极性重数来计算。特别地，这也再次证明了集合 $M(f)$ 与所选的 f 莫尔斯化无关。

定理 3.1。设 $f\colon (X,0) \to (\mathbb{C}, 0)$，满足 $\dim_0 X \geq 1$，且 f 相对于分层 $\mathscr{S}$ 具有孤立奇点。那么，对于任意 $l \in \Omega'$ 以及任意正维分层 $V \in \mathscr{S}$，等式成立：

$$m_V = \mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l, f), f^{-1}(0)) - \mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l, f), l^{-1}(0)). \tag{3.1}$$

我们对定理 3.1 的简短证明，源于米尔诺纤维 F_f 在 f 的 0 点处的同调的两种表示，它们均将同调写成若干“部分”的直和，其中第一种已在（2.2）中回顾。Massey [Ma]也曾希望看到这样一个简短而直接的证明，因为据他在 [Ma第 1001], 页的评论，他以“极其迂回的方式”证明了（3.1）。

米尔诺纤维约化同调的第二个分解 F_f 在 f 处的分解，是花束定理及其在 [Ti1], 中的证明所带来的同调学推论；具体而言，对于 $\dim X \geq 2$，有：

$$\widetilde{H}_*(F_f) \cong \widetilde{H}_*(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}) \oplus \bigoplus_{V \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \widetilde{H}_* \left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right)^{k_V}, \tag{3.2}$$

其中：

$$k_V := \mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l, f), f^{-1}(0)) - \mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l, f), l^{-1}(0)), \tag{3.3}$$

如[Ti1所示，§41]。

这个同调的直和分解中，指数恰好是极重数。该结果已在 k_V Ti [中于同伦型层面得到证明，这需要对 1] 的单值化的几何进行深入得多的研究。Massey 在 f中对（上）同调图景的补充，是用极重数 [来解释指数]，m_V即等式 k_V，参见 $m_V = k_V$ Ma[，定理 3。2]。

注记3.2。(3.2) 和 (3.3) 的证明见 [Ti1] 中使用了一个非常一般的 $l \in \Omega$。不过，只需稍作修改并考虑到 $(l \in \Omega', l, f)|_{\Gamma(l,f)}$ 是有限对一而非一对一，证明对任意 $l \in \Omega'$ 均成立。考虑 Ω'而不是 Ω 的原因在于，使用 Ω'时，交数的计算可能更容易，正如我们将在例 3.4中看到的。

3.1. 比较论证。首先注意，整数 m_V和 k_V不依赖于在这个扎里斯基开集 Ω'_f中所选取的 l，这是由于该空间的弧连通性。我们通过对维数 $n = \dim_0 X \geq 2$ 以及在 0 处 $\mathscr{S}$的分层数目进行归纳，证明所有正维分层 $V \in \mathscr{S}$均满足等式 $m_V = k_V$。$\dim_0 X \geq 1$ 的情形将单独处理。

设 X 的所有不可约分支维数均为 ≥ 2。首先注意，若（X，0）不可约，且 $X \setminus \{0\}$ 在0的某个邻域内非奇异，则有 $X_{\text{reg}} := X \setminus \{0\}$ 作为其邻域内除0以外的单个分层，因此通过比较两个分解（2.2）和（3.2），很明显此时莫尔斯数 $m_{X_{\text{reg}}} = k_{X_{\text{reg}}}$ 相等。还要指出，顶层分层 X_{reg} 的复链接是$\widetilde{\quad}$空集，因此对于 $V = X_{\text{reg}}$，我们得到 $H_*\left(\Sigma^{\dim X}\left(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X X_{\text{reg}}\right)\right) \cong H_*\left(S^{\dim X - 1}\right)$。$\widetilde{\quad}$

我们从 $\dim_0 X = 0$ 的情形开始归纳。此时定理3.1 的陈述为空，因此无须证明。假设我们已证明所有维数为 $\leq n-1$的空间芽（X，0）的莫尔斯数相等，现在考虑一个满足 $\dim_0 X = n$ 的空间 X。我们考虑0处维数为 $\leq n-1$的分层之并 X_{n-1}。根据归纳假设， X_{n-1} 的莫尔斯数等式已按分层证明。然后，我们将 $X_{n-1} \cup V$与 n中的一个 V维分层 X取并。由于 $X_{n-1} \cup V$是0处的闭解析空间芽，我们可以写出它的两个直和分解（2.2）和（3.2），并将它们进行比较。消去 X_{n-1}的贡献（根据归纳假设，这些贡献相等）后，可知等式 $m_V = k_V$必定成立。随后，我们逐个添加其他维数为 n 的分层，重复上述步骤。每个此类分层的莫尔斯数等式也可用同样的方法得出。

请注意，上述论证，即比较直和分解（2.2）和（3.2），同样适用于被排除的情形 $\dim X = 1$，因为这两个分解对于 0 次约化同调仍然成立，即：

$$\widetilde{H}_0(F_f) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}) \oplus \bigoplus_{V \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \widetilde{H}_0\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right)^{m_V},$$

分别为：

$$\widetilde{H}_0(F_f) \cong \widetilde{H}_0(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X\{0\}) \oplus \bigoplus_{V \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \widetilde{H}_0\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right)^{k_V},$$

并注意在这种情况下 $\widetilde{H}_0\left(\Sigma^{\dim V}(\mathbb{C}\mathrm{lk}_X V)\right) \simeq \mathbb{Z}$，且 k_V仍满足“极”等式（3.3）。

因此，通过比较这两个分解，我们得到等式$m_V = k_V$。这样，我们也单独处理了维数为 1 的空间 X 这一情形，正如一开始所承诺的。至此，我们相对简短的定理 3.1 证明也就结束了。□

注 3.3. 上述比较论证也可应用于由 f 的两种不同莫尔斯化分别得到的 f 的米尔诺纤维同调的直和分解，其莫尔斯数分别为 m_V 和 m'_V。那么，上述

归纳过程直接表明，对每个正维分层 $V \in \mathscr{S}$，等式 $m_V = m'_V$ 均成立，因而莫尔斯对集合 $M(f)$ 与所选莫尔斯化无关。

令 u s 计算例子中所考虑的莫尔斯对集合 $M(f)$ [Za] .

例 3.4。令 $X := \{h = xz^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ 为众所周知的惠特尼伞。其典范分层中有两个正维分层 X，分别是x轴去掉原点后的部分，以下记为 V，以及二维分层$W := X \setminus \overline{V}$。令 $f := y^2 - (x-z)^2$, 视为定义在 X上的函数。我们将考虑所有相关对象在 $0 \in \mathbb{C}^3$ 处的芽。我们选择线性函数 $l = x + 2z$，如[Za]所示。

由于 V的维数为 1，根据定义，极曲线 $\Gamma_V(l, f)$等于$\overline{V}$。我们有$f_{|V} = -x^2$ 和 $l_{|V} = x$，因此得到：

$$\mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l,f), f^{-1}(0)) - \mathrm{mult}_0(\Gamma_V(l,f), l^{-1}(0)) = \mathrm{ord}_0(-x^2) - \mathrm{ord}_0(x) = 2 - 1 = 1,$$

因此，根据定理3.1 我们得到 $m_V = 1$。

极曲线 $\Gamma_W(l, f)$ 的求法是：首先写出 f在 X 上的奇异轨迹的方程，该奇异轨迹就是三元组 (h, f, l) 的雅可比，然后将其限制到 W 上。通过计算可得，该雅可比为 $4y(x-z)(3+z) = 0$。由此可知，$\Gamma_W(l, f)$ 有两条经过原点的分支，即：

$\Gamma_1 = \{x = y = 0\}$和 $\Gamma_2 = \{x = z, y^2 = xz^2\}$。

此时我们可以指出，线性函数 l 并不是非常一般的，因为它不满足引理 2.1的最后一个要求。事实上，将 (l, f) 限制到Γ_2 上是二对一的，而不是一对一的。然而 $l \in \Omega'$，这对于我们的情形已经足够了，另见注记3.2。

我们有 $\Gamma_2 = \{x = z, y^2 = xz^2\} = \{x = z, y^2 = x^3\}$，通过将尖点$y^2 = x^3$ 参数化为 $x = t^2$，我们得到 $l_{|\Gamma_2} = 3t^2$ 和 $f_{|\Gamma_2} = t^6$。因此：

$$\mathrm{mult}_0(\Gamma_2, f^{-1}(0)) - \mathrm{mult}_0(\Gamma_2(l,f), l^{-1}(0)) = \mathrm{ord}_0(t^6) - \mathrm{ord}_0(3t^2) = 6 - 2 = 4.$$

Γ_1 的计算要容易得多，因为这条极分支是 z-轴：

乘 1t$_0(\Gamma_1, f^{-1}(0)) - \mathrm{mult}_0(\Gamma_1(l,f), l^{-1}(0)) = \mathrm{ord}_0(-z^2) - \mathrm{ord}_0(2z) = 2 - 1 =$

将两条分支上的数值相加，得到 $4 + 1 = 5$，这就是我们的莫尔斯数 m_W，根据定理 3.1。

因此我们得到莫尔斯对集合 $M(f) = \{(V, 1), (W, 5)\}$。

注 3.5。 在 [Za，第 937-939],Zach 解释了如何使用他的公式计算[Za，定理 1 和推论。4] 数值 $m_W = 5$ 对于上例中的顶层分层 W，借助计算机使用在 Singular 软件上实现的算法进行计算。用我们的方法，很容易手工计算。不过，这种便利归功于这个特定例子中雅可比的良好因式分解。一般而言，即使采用我们的方法，计算也困难得多，因此，在 Singular 上实现其算法或许会有帮助。

References

[BMPS] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran 和 J. Seade，奇异簇上的欧拉障碍与函数缺陷。《伦敦数学会杂志》（第2辑）70 (2004)，第1期，59-76页。2，5

[Br] E. Brieskorn，孤立超曲面奇点的单值化。Manuscripta Math. (1970)，第2期，103-161页。2, 4[DHOST] J. Draisma, E. Horobet¸, G. Ottaviani, B. Sturmfels 和 R. R. Thomas。代数簇的欧几里得距离次数。Found. Comput. Math., 16 (2016)，第1期，99-149页。5[EG] W. Ebeling 和 S. Gusein-Zade，孤立完全交奇点上的1-形式的指标，Moscow. Math. J. 3，第2期 (2003)，439–455页。2, 5[GSV] X. G´omez-Mont, J. Seade 和 A. Verjovsky，具有孤立奇点的全纯流的指标，Math. Ann. 291 (1991)，737-751页。2[GM] M. Goresky 和 R. MacPherson。分层莫尔斯理论。数学及其边界领域成果。第3辑，第14卷。柏林，施普林格出版社，1988。3, 4[Go] V. Goryunov，空间曲线上的函数，伦敦数学会杂志 61 (2000)，807-822页。1[HL] H. Hamm, Lˆe D.T.，一种 Lefschetz 型 Zariski 定理。Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973)，317-355页。3[IS] T. Izawa, T. Suwa，奇异簇上的函数重数，Internat. J. Math. 14, 5 (2003)，541-558页。2[Kl] S. Kleiman。一般平移的横截性。Compositio Math. 28 (1974)，287-297页。3[Lˆe1] Lˆe D.T.，D-模的莫尔斯化，预印本，1988。发表于：Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 4 (1998)，第2期，229-248页。4[Lˆe2] Lˆe D.T.，具有孤立奇点的复解析函数，J. Algebraic Geom. 1 (1992)，83–100页。3[LSS] D. Lehmann, M. Soares 和 T. Suwa，切于奇异簇的全纯向量场的指标，Bull. Braz. Math. Soc. 26 (1995)，183-199页。2[Ma] D. Massey，米尔诺纤维的超上同调。Topology, 35 (1996)，第4期，969-1003页。3, 4, 5, 6[MRW1] L. G. Maxim, J. I. Rodriguez 和 B. Wang。多视图簇的欧几里得距离次数。SIAM J. Appl. Algebra Geom. 4 (2020)，28-48页。5[MRW2] L. G. Maxim, J. I. Rodriguez 和 B. Wang。研究非孤立奇点及其在优化中应用的莫尔斯理论方法。J. Pure Appl. Algebra 226 (2022)，第3期，论文编号106865。5[MT] L. Maxim, M. Tib˘ar，莫尔斯化中的欧几里得距离次数与极限点。arXiv:2210.06022 doi: 10.48550/arXiv.2210.06022。5[Mi] J. W. Milnor，复超曲面的奇点。数学研究年刊，第61号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1968。1[MS] D. Mond 和 D. Van Straten，空间曲线上的函数的米尔诺数等于蒂尤里纳数，伦敦数学会杂志 63 (2001)，177-187页。1[STV] J. Seade, M. Tib˘ar, A. Verjovsky，米尔诺数与欧拉障碍，Bull. Braz. Math. Soc. 36(2) (2005)，275-283页。2, 5[Si] D. Siersma。米尔诺纤维的花束定理。J. Algebraic Geom. 4 (1995)，第1期，51-66页。4[Ti1] M. Tib˘ar。米尔诺纤维的花束分解，Topology 35 (1996)，第1期，227-242页。3, 4, 6[Ti2] M. Tib˘ar，多项式映射在无穷远处的拓扑与 Thom 正则条件，Com- positio Math. 111 (1998)，第1期，89-109页。3[Ti3] M. Tib˘ar。多项式与消失圈。剑桥数学论丛，第170卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007。3[Za] M. Zach，米尔诺公式的一种推广，Math. Ann. 382 (2022)，901-942页。5, 8

L. Maxim: Department of Mathematics, University of Wisconsin-Madison, 480 LincolnDrive, Madison WI 53706-1388, USA.电子邮箱地址：maxim@math.wisc.edu
M. Tibăr: Université de Lille, CNRS, UMR 8524 – Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France电子邮箱地址：mihai-marius.tibar@univ-lille.fr