arXiv:2301.00990v1 [math.NA] 3 Jan 2023

能　　浅水波方程高阶不变量的能量方法

张启峰[a]、Tong Yan[a]、高光华[b]

[a]浙江理工大学数学系，中国杭州，310018[b]南京邮电大学数学系，中国南京，210096

摘要

三阶色散演化方程广泛用于描述一维长波，并在流体力学、等离子体物理和非线性光学中有着广泛应用。其中包括 KdV方程、Camassa–Holm方程和 Degasperis–Procesi 方程。它们具有许多共同特征，例如完全可积性、Lax 对和双哈密顿结构。本文结合斜伴随算子（$1-\partial_{xx}$）$^{-1}$，采用能量方法重新研究这三类浅水波方程的高阶不变量。此外，还介绍了若干应用，以求得 Benjamin-Bona-Mahony 方程、正则化长波方程和 Rosenau 方程的高阶不变量。

关键词：能量方法；高阶不变量；浅水波方程

1. 引言

一类形式如下的三阶色散演化方程

$$u_t-\alpha^2u_{xxt}+\gamma u_{xxx}+c_0u_x=(c_1u^2+c_2u_x^2+c_3uu_{xx})_x,\quad x\in R,\ t>0 \tag{1.1}$$

f常用于浅水波的模拟，参见例如 [1], 其中 α，γ 且 $c_i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 为
r实常数；u 表示一个水平速度场，其独立空间变量为x，时间变量为t。一个典型的此类方程（1.1）具有 $\alpha^2=c_0=c_2=c_3=0,\ c_1=2,\ \gamma=-2$ 即KdV方程

$$u_t-4uu_x-2u_{xxx}=0,\quad x\in R,\ t>0, \tag{1.2}$$

该方程描述了重力作用下浅水自由表面处波的单向传播。（1.2）的前四个不变量分别为（参见，例如，[2], 尽管第四个不变量的系数中存在一个小的排版错误，但这并不影响阅读这篇经典综述）

$$M_1=\int_R u\mathrm{d}x,\quad M_2=\int_R u^2\mathrm{d}x,\quad M_3=\int_R\Big(u_x^2-\frac{2}{3}u^3\Big)\mathrm{d}x,\quad M_4=\int_R\Big(u_{xx}^2-\frac{10}{3}uu_x^2+\frac{5}{9}u^4\Big)\mathrm{d}x.$$

取 $\alpha^2=c_3=1$、$\gamma=c_0=0$、$c_1=-\frac{3}{2}$、$c_2=\frac{1}{2}$，我们得到另一个称为 Camassa–Holm方程的例子 [3]

$$u_t-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx},\quad x\in R,\ t>0, \tag{1.3}$$

该方程描述了浅水波在平底上的单向传播。前三个不变量列如下

$$E_1=\int_R(u-u_{xx})\mathrm{d}x,\quad E_2=\frac{1}{2}\int_R(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x,\quad E_3=\frac{1}{2}\int_R u(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x.$$

令 $\alpha^2=c_2=c_3=1,\gamma=c_0=0,c_1=-2$，得到第三个例子，称为 Degasperis–Procesi 方程

$$u_t-u_{xxt}+4uu_x=3u_xu_{xx}+uu_{xxx},\quad x\in R,\ t>0, \tag{1.4}$$

*电子邮箱地址：zhangqifeng0504@gmail.com（Q. Zhang）、tyan0320@mails.zstu.edu.cn（Tong Yan）、gaogh@njupt.edu.cn（G. Gao）

它可视为非线性浅水动力学的一个模型 [4]。常讨论的不变量为

$$H_1 = \int_R (u - u_{xx})\mathrm{d}x, \quad H_2 = \int_R (u - u_{xx})v\mathrm{d}x, \quad H_3 = \int_R u^3\mathrm{d}x,$$

其中 $4v - v_{xx} = u$。

迄今为止，已有数千篇论文聚焦于这三个方程的理论与数值研究。值得一提的是，不变量保持性质是衡量数值方法是否成功的关键指标。然而，高阶不变量通常难以通过数值方法保持。Liu 等人在 [5] 中也指出："保持全部三条守恒律似乎是一项相当困难的任务。"在这项工作中，我们将从能量方法的角度重新推导这些方程的高阶不变量，这或许能为不变量保持数值方法提供一些思路。实际上，源于物理学守恒律的能量方法最早由 Courant、Friedrichs 和 Lewy 于 1928 年提出 [6]。此后，该方法被广泛应用于非线性演化方程的数学分析与数值分析。与其列出大量相关研究的参考文献，我们相信读者可借助 [7] 了解相关工作。

本文其余部分安排如下。在第 2 节中，我们结合能量方法与一个斜伴随算子，分别给出 KdV方程、Camassa–Holm方程和 Degasperis–Procesi 方程的高阶不变量。随后，我们在第 3 节列举若干应用，以探求其他类型浅水波方程的高阶不变量。

2. 主要结果

接下来，我们直接证明$M_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$，$E_i\,(i = 1, 2, 3)$和$H_i\,(i = 1, 2, 3)$分别是方程（1.2）、（1.3）和（1.4）在周期边界条件下，基于能量方法得到的不变量。

2.1. KdV方程的不变量

证明：（I）分别将（u和（$u^2 + u_{xx}$）乘以 1，并与（1.2）相乘，可得$M_i\,(i = 1, 2, 3)$。接下来，我们用能量方法证明KdV方程的第四个不变量M_4。

将（1.2）两边乘以 $2u_{xxxx} + \frac{10}{3}u_x^2 + \frac{20}{3}uu_{xx} + \frac{20}{9}u^3$，然后对所得结果积分，可得

$$\begin{aligned}
0 =& \int_R \left(2u_{xxxx} + \frac{10}{3}u_x^2 + \frac{20}{3}uu_{xx} + \frac{20}{9}u^3\right)\cdot u_t\mathrm{d}x \\
&- \int_R \left(2u_{xxxx} + \frac{10}{3}u_x^2 + \frac{20}{3}uu_{xx} + \frac{20}{9}u^3\right)\cdot (4uu_x + 2u_{xxx})\mathrm{d}x \\
=& \int_R \left[2u_{xx}u_{xxt} - \frac{10}{3}(u_t u_x^2 + 2uu_x u_{xt}) + \frac{20}{9}u^3 u_t\right]\mathrm{d}x \\
&- \int_R \left(2u_{xxxx} + \frac{10}{3}u_x^2 + \frac{20}{3}uu_{xx} + \frac{20}{9}u^3\right)\cdot (4uu_x + 2u_{xxx})\mathrm{d}x \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_4 - 8\int_R uu_x u_{xxxx}\mathrm{d}x - \frac{40}{3}\int_R uu_x^3\mathrm{d}x - \frac{80}{3}\int_R u^2 u_x u_{xx}\mathrm{d}x - \frac{80}{9}\int_R u^4 u_x\mathrm{d}x \\
&- 4\int_R u_{xxx}u_{xxxx}\mathrm{d}x - \frac{20}{3}\int_R u_{xxx}u_x^2\mathrm{d}x - \frac{40}{3}\int_R uu_{xx}u_{xxx}\mathrm{d}x - \frac{40}{9}\int_R u^3 u_{xxx}\mathrm{d}x. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

接下来需要验证上述方程中所有积分项之和为零。利用分部积分计算（2.1）中的各项，可得

$$-8\int_R uu_x u_{xxxx}\mathrm{d}x = -20\int_R u_x u_{xx}^2\mathrm{d}x, \qquad (2.2)$$

$$-\frac{80}{3}\int_R u^2 u_x u_{xx}\mathrm{d}x = \frac{80}{3}\int_R uu_x^3\mathrm{d}x, \qquad (2.3)$$

$$-\frac{80}{9}\int_R u^4 u_x\mathrm{d}x = 0, \qquad (2.4)$$

$$-4\int_R u_{xxx}u_{xxxx}\mathrm{d}x = 0, \qquad (2.5)$$

$$-\frac{20}{3}\int_R u_{xxx}u_x^2\mathrm{d}x=\frac{40}{3}\int_R u_x u_{xx}^2\mathrm{d}x, \tag{2.6}$$

$$-\frac{40}{3}\int_R uu_{xx}u_{xxx}\mathrm{d}x=\frac{20}{3}\int_R u_x u_{xx}^2\mathrm{d}x, \tag{2.7}$$

$$-\frac{40}{9}\int_R u^3u_{xxx}\mathrm{d}x=-\frac{40}{3}\int_R uu_x^3\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

将（2.2)–(2.8)代入（2.1），可得 d dtM4= 0，证明完毕。 □

注 1. 假设 KdV方程的一般形式为

$$u_t-auu_x-bu_{xxx}=0,$$

以及相应的高阶不变量

$$M(t)=\int_R(u_{xx}^2-Auu_x^2+Bu^4)\mathrm{d}x.$$

采用上述相同的方法，我们可以推导出

$$\begin{cases}5a=3Ab,\\12Bb=Aa,\end{cases}$$

可将其改写为

$$\frac{a}{b}=\frac{3A}{5}=\frac{12B}{A}.$$

因此可得

$$A^2=20B.$$

例如，当 a = −6、b = −1 时，我们有 A = 10、B = 5，由此可推导出 KdV方程：

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0,$$

具有一个四阶不变量

$$M(t)=\int_R(u_{xx}^2-10uu_x^2+5u^4)\mathrm{d}x.$$

2.2. Camassa–Holm方程的不变量

证明： 分别将等式两边乘以 1 和 u，然后对（1.3）的结果积分，可得E_1 和 E_2，这是通过分部积分得到的。下面，我们用能量方法证明 E_3。首先，注意到（1.3）可以写成带有斜伴随算子 $(1-\partial_{xx})^{-1}$ 的形式：

$$u_t+uu_x+\partial_x(1-\partial_{xx})^{-1}\Big(u^2+\frac{1}{2}u_x^2\Big)=0.$$

设 $g=(1-\partial_{xx})^{-1}\Big(u^2+\frac{1}{2}u_x^2\Big)$。那么由上面的方程可知，（1.3）等价于

$$\begin{cases}u_t+uu_x+g_x=0, &(2.9)\\ g-g_{xx}=u^2+\dfrac{1}{2}u_x^2. &(2.10)\end{cases}$$

将式（2.9）乘以 $3u^2+u_x^2-2(uu_x)_x$ 并对等式两边积分，可得

$$\begin{aligned}0&=\int_R(u_t+uu_x+g_x)\cdot(3u^2+u_x^2-2(uu_x)_x)\mathrm{d}x\\&=\int_R u_t\cdot(3u^2+u_x^2-2(uu_x)_x)\mathrm{d}x+\int_R(uu_x+g_x)\cdot(3u^2+u_x^2-2(uu_x)_x)\mathrm{d}x\\&\triangleq A+B.\end{aligned} \tag{2.11}$$

计算各项可得

$$\begin{aligned} A &= \int_R u_t \cdot (3u^2 + u_x^2 - 2(uu_x)_x)\mathrm{d}x \\ &= \int_R u_t \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x + \int_R 2uu_x \cdot u_{xt}\mathrm{d}x \\ &= \int_R u_t \cdot 3u^2\mathrm{d}x + \int_R u_t \cdot u_x^2\mathrm{d}x + \int_R u \cdot (u_x^2)_t\mathrm{d}x \\ &= \int_R (u^3)_t\mathrm{d}x + \int_R (u \cdot u_x^2)_t\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u^3 + uu_x^2)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.12}$$

and

$$\begin{aligned} B &= \int_R (uu_x + g_x) \cdot (3u^2 + u_x^2 - 2(uu_x)_x)\mathrm{d}x \\ &= \int_R u \cdot u_x^3\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x - \int_R g_x \cdot 2(uu_x)_x\mathrm{d}x \\ &= \int_R u \cdot u_x^3\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x + 2\int_R g_{xx} \cdot uu_x\mathrm{d}x \\ &= \int_R u \cdot u_x^3\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x + 2\int_R (g - u^2 - \frac{1}{2}u_x^2) \cdot uu_x\mathrm{d}x \\ &= \int_R g_x \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x + 2\int_R g \cdot uu_x\mathrm{d}x \\ &= \int_R g_x \cdot (3u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x - \int_R g_x \cdot u^2\mathrm{d}x \\ &= \int_R g_x \cdot (2u^2 + u_x^2)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R g_x \cdot (g - g_{xx})\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

将 (2.12) 和 (2.13) 代入 (2.11)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u^3 + uu_x^2)\mathrm{d}x = 0,$$

这意味着 E_3。 □

2.3. Degasperis–Procesi 方程的不变量

证明： 对 (1.4) 两边积分，容易得到 H_1。接下来分别证明 (1.4) 的不变量 H_2 和 H_3 。首先令 $g = (1 - \partial_{xx})^{-1}\left(\frac{3}{2}u^2\right)$，则 (1.4) 等价于

$$\begin{cases} u_t + uu_x + g_x = 0, & (2.14) \\ g - g_{xx} = \frac{3}{2}u^2. & (2.15) \end{cases}$$

将（2.14）两边乘以 2u – 6v并对所得结果积分，得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R (u_t + uu_x + g_x) \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &= \int_R u_t \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x + \int_R uu_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &\triangleq C + D. \end{aligned} \tag{2.16}$$

上述恒等式中的各项估计如下:

$$\begin{aligned} C &= \int_R u_t \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x = 2\int_R u_t \cdot u\mathrm{d}x - 6\int_R u_t \cdot v\mathrm{d}x = 2\int_R u_t \cdot u\mathrm{d}x - 6\int_R (4v_t - v_{xxt}) \cdot v\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R u_t \cdot u\mathrm{d}x - 24\int_R v_t \cdot v\mathrm{d}x - 6\int_R v_{xt} \cdot v_x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u^2 - 12v^2 - 3v_x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \Big(u^2 - 3(4v - v_{xx}) \cdot v\Big)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u^2 - 3uv)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u \cdot (u - 3v)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u \cdot (v - v_{xx})\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u - u_{xx}) \cdot v\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.17}$$

and

$$\begin{aligned} D &= \int_R uu_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &= -6\int_R uu_x \cdot v\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &= 3\int_R u^2 \cdot v_x\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R (g - g_{xx}) \cdot v_x\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2u - 6v)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R g \cdot v_x\mathrm{d}x - 2\int_R g_{xx} \cdot v_x\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot (2v - 2v_{xx})\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R g \cdot v_x\mathrm{d}x + 2\int_R g_x \cdot v\mathrm{d}x - 2\int_R g_{xx} \cdot v_x\mathrm{d}x - 2\int_R g_x \cdot v_{xx}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_R (gv)_x\mathrm{d}x - 2\int_R (g_x \cdot v_x)_x\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

将（2.17）和（2.18）代入（2.16），得到 e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (u - u_{xx}) \cdot v\mathrm{d}x = 0,$$

这意味着 H_2。

最后，我们证明 H_3。将（2.14）两边乘以 u^2 并对所得结果积分，注意到（2.15），可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R (u_t + uu_x + g_x) \cdot u^2\mathrm{d}x \\ &= \int_R u_t \cdot u^2\mathrm{d}x + \int_R u^3 \cdot u_x\mathrm{d}x + \int_R g_x \cdot u^2\mathrm{d}x \\ &= \int_R \Big(\frac{1}{3}u^3\Big)_t\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int g_x \cdot (g - g_{xx})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u^3\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这意味着不变量 H_3。

3. 对其他周期非线性色散波的应用

3.1. Benjamin-Bona-Mahony 方程

考虑形式如下的 Benjamin-Bona-Mahony 方程 [8]

$$u_t - u_{xxt} + u_x + \varepsilon uu_x = 0, \quad x \in R. \tag{3.1}$$

它可以写成

$$u_t + \partial_x(1-\partial_{xx})^{-1}\Big(u+\frac{\varepsilon}{2}u^2\Big)=0,\quad x\in R.$$

令 $g=(1-\partial_{xx})^{-1}\Big(u+\frac{\varepsilon}{2}u^2\Big)$，则方程（3.1）可写为

$$\begin{cases} u_t+g_x=0, & (3.2)\\ g-g_{xx}=u+\dfrac{\varepsilon}{2}u^2. & (3.3)\end{cases}$$

将（3.2）两边乘以 u^2 并对结果进行积分，再利用（3.3），可得

$$\begin{aligned} 0&=\int_R (u_t+g_x)\cdot u^2\mathrm{d}x=\int_R u_t\cdot u^2\mathrm{d}x+\int_R g_x\cdot u^2\mathrm{d}x\\ &=\int_R u_t\cdot u^2\mathrm{d}x+\frac{2}{\varepsilon}\int_R g_x\cdot(g-g_{xx}-u)\mathrm{d}x=\int_R u_t\cdot u^2\mathrm{d}x-\frac{2}{\varepsilon}\int_R g_x\cdot u\mathrm{d}x\\ &=\int_R u_t\cdot u^2\mathrm{d}x+\frac{2}{\varepsilon}\int_R u_t\cdot u\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R\Big(\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{\varepsilon}u^2\Big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这表明

$$\int_R\frac{1}{3}\Big(u^3+\frac{1}{\varepsilon}u^2\Big)\mathrm{d}x$$

是（3.1）的三阶不变量。

3.2. 正则化长波方程

考虑如下形式的正则化长波方程 [9]

$$u_t-\mu u_{xxt}+u_x+u^pu_x=0, \tag{3.4}$$

其中 $\mu>0$ 是一个正数。当 $p=2$时，称其为修正正则化长波方程；当 $p\geqslant 3$时，称其为广义正则化长波方程。与前面的论证类似，(3.4) 可写成等价形式

$$\begin{cases} u_t+g_x=0, & (3.5)\\ g-\mu g_{xx}=u+\dfrac{1}{p+1}u^{p+1}. & (3.6)\end{cases}$$

将 (3.5) 两边乘以 u^{p+1}，对所得结果积分，再利用 (3.6)，得到

$$\begin{aligned} 0&=\int_R (u_t+g_x)\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x=\int_R u_t\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x+\int_R g_x\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x\\ &=\int_R u_t\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x+(p+1)\int_R g_x\cdot(g-\mu g_{xx}-u)\mathrm{d}x\\ &=\int_R u_t\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x-(p+1)\int_R g_x\cdot u\mathrm{d}x\\ &=\int_R u_t\cdot u^{p+1}\mathrm{d}x+(p+1)\int_R u_t\cdot u\mathrm{d}x\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R\Big(\frac{1}{p+2}u^{p+2}+\frac{p+1}{2}u^2\Big)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这表明

$$\int_R\Big(\frac{1}{p+2}u^{p+2}+\frac{p+1}{2}u^2\Big)\mathrm{d}x$$

是（3.4）的一个高阶不变量。这修正了I_3 在例4中出现的一个不变量，见 [10]（第492页）。

3.3. Rosenau 方程

考虑 Rosenau 方程 [11]

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0, \tag{3.7}$$

它等价于

$$\begin{cases} u_t + g_x = 0, & (3.8) \\ g + g_{xxxx} = u + \dfrac{1}{2}u^2. & (3.9) \end{cases}$$

两边相乘不变量 （3.8）乘以 u^2 并注意到（3.9），与上述论证类似，我们得到一个三阶 r （3.7）的形式为

$$\int_R \left(\frac{1}{3}u^3 + u^2\right)\mathrm{d}x.$$

□

致谢

我们感谢孙志忠教授进行的许多有益讨论。值孙志忠教授六十华诞之际，谨以此文献给他。本研究得到浙江省自然科学基金（项目编号：LZ23A010007）资助。

参考文献

参考文献

[1] J. Escher, Y. Liu, Z. Yin, Degasperis-Procesi方程的整体弱解与爆破解构. J. Funct. Anal., 241 (2006) 457–485.[2] T. Tao, 非线性色散方程的低正则性整体解. Surveys in analysis and operator theory (Canberra, 2001), 19–48, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., 40, Austral. Nat. Univ., Canberra, (2002). [3] R. Camassa, D. D. Holm, 一个具有尖峰孤子的可积浅水方程. Phys. Rev. Lett., 71 (1993) 1661–1664. [4] A. Degasperis, M. Procesi, 渐近可积性，载于：A. Degasperis, G. Gaeta (编). Symmetry and Perturbation Theory, World Scientific, Singapore, (1999) 23–37. [5] H. Liu, Y. Xing, Camassa-Holm方程的一种保持不变量的间断Galerkin方法. SIAM J. Sci. Comput., 38 (2016) A1919–A1934. [6] R. Courant, K.O. Friedrichs, H. Lewy, ¨关于数学物理中的偏微分方程，Math. Ann., 100 (1928) 32–74.[7] Z. Sun. 非线性演化方程的有限差分方法，科学出版社，北京，(2018). [8] L.A. Medeiros, G.P. Menzala, Benjamin-Bona-Mahony 方程周期解的存在性与唯一性. SIAM J. Math. Anal., 8(5) (1977) 792–799. [9] C.E. Seyler, D.L. Fenstermacher, 一个对称的正则化长波方程. The Physics of Fluids, 27(4) (1984) 4–7. [10] A. Ghiloufi, K. Omrani, 一些非线性色散波模型方程的四阶精度新守恒差分格式. Numer. Methods Partial Differential Equation, 34 (2018) 451–500. [11] M.A. Park, 关于Rosenau 方程. Math. Appl. Comput., 9 (1990) 145–152.