arXiv:2301.01001v1 [math.DG] 3 Jan 2023

关于一类广义 Berwald 流形

A. Tayebi 和 F. Eslami

2023年1月4日

摘要

广义 Berwald 度量类包含 Berwald 度量类。本文刻画具有消失的 S-曲率的二维广义 Berwald (α,β)-度量。设 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 是流形 M 上的二维广义 Berwald (α,β)-度量。假设 F 具有消失的 S-曲率。我们证明以下结论之一成立：(i) 若 F 是正则度量，则它退化为具有各向同性截面曲率的黎曼度量或局部闵可夫斯基度量；(ii) 若 F 是既非黎曼度量也非局部闵可夫斯基度量的几乎正则度量，则我们给出$\phi=\phi(s)$的显式形式，由此得到一个既非 Berwald 度量、也非 Landsberg 度量或 Douglas 度量的广义 Berwald 度量。这推广了 Szab´o 关于 (α,β)-度量类的刚性定理。接下来，我们证明具有消失的 S-曲率的左不变芬斯勒曲面必定是具有常截面曲率的黎曼曲面。最后，我们构造了一族奇数维广义 Berwald Randers 度量。

关键词：广义 Berwald 度量、Berwald 度量、(α,β)-度量、S-曲率。[1]

1 引言

流形 M 上的芬斯勒度量 F 称为广义 Berwald 度量，如果存在流形 M 上的协变导数 ∇，使得由 ∇ 诱导的平行移动保持芬斯勒函数 F [18][19][20][26]不变。在这种情况下，F 称为 M 上的广义 Berwald 度量，而 (M,F) 称为广义 Berwald 流形。如果协变导数 ∇ 还是无挠的，那么 F 就退化为 Berwald 度量。因此，Berwald 度量属于广义 Berwald 度量这一类。广义 Berwald 流形这一类的重要性在于，这些流形可能具有丰富的等距变换群 [16][17]。关于广义 Berwald 流形这一类的相关进展，请参见 [2], [4], [20], [25], [26],[27] 和 [28]。

为了寻找广义 Berwald 度量，可以考虑 (α,β)-度量这一类。(α,β)-度量是由 $F:=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 定义的芬斯勒度量，其中 $\phi=\phi(s)$ 是定义在对称区间 $(-b_0,b_0)$ 上、具有一定正则性的光滑函数，$\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是黎曼度量，$\beta=b_i(x)y^i$ 是底流形上的一个 1-形式。最简单的 (α,β)-度量是 Randers 度量 $F=\alpha+\beta$，由 G. Randers 在研究四维广义相对论时发现。这些度量已广泛应用于自然科学的许多领域，包括物理学、生物学、心理学等 [5]。在 [26], Vincze 证明，Randers 度量$F=\alpha+\beta$ 是广义 Berwald 度量，当且仅当对偶向量场 $\beta^\sharp$ 具有常

[1]2010 数学主题分类：53C60，53C25。

黎曼长度。在 [20], Tayebi-Barzegari 将 Vincze 的结果推广到了 (α,β)-度量，并证明满足所谓符号性质的 (α,β)-度量是广义 Berwald 度量，当且仅当 $\beta^\sharp$ 具有常黎曼长度。随后，Vincze 证明，满足正则性条件 $\phi'(0)\neq 0$ 的 (α,β)-度量是广义 Berwald 度量，当且仅当 $\beta^\sharp$ 具有常黎曼长度 [25]。在 [4], Bartelmeß-Matveev 证明，芬斯勒度量是广义 Berwald 度量，当且仅当它是单色的。

一般而言，二维 Finsler 度量与高维情形相比具有一些不同且特殊的黎曼和非黎曼曲率性质。例如，Bartelmeß-Matveev 证明，除了环面和克莱因瓶之外，其他闭二维流形都不可能具有非黎曼广义 Berwald 度量 [4]。在 [28], Vincze 等人证明，一个连通广义 Berwald 曲面是 Landsberg 曲面，当且仅当它是 Berwald 曲面。Shen 针对 Finsler 流形上的给定比较定理构造了 S-曲率 [5]。研究具有消失的 S-曲率的广义 Berwald 度量是一个有趣的问题。在此，我们刻画具有消失的 S-曲率的二维广义 Berwald (α,β)-度量类，并证明如下结论。

定理 1.1. 设 $F=\alpha\phi(s)$、 $s=\beta/\alpha$ 是连通流形 M 上的二维广义 Berwald (α,β)-度量。假设 F 具有消失的 S-曲率。则以下结论之一成立：

(i) 如果 F 是正则度量，那么它会约化为具有各向同性截面曲率的黎曼度量，或局部闵可夫斯基度量；

(ii) 如果 F 是既非黎曼度量也非局部闵可夫斯基度量的几乎正则度量，那么 ϕ 可表示为

$$\phi=c\exp\left[\int_0^s\frac{kt+q\sqrt{b^2-t^2}}{1+kt^2+qt\sqrt{b^2-t^2}}dt\right], \tag{1.1}$$

其中 $c>0$、 $q>0$ 和 k 是实常数，且 β 满足

$$r_{ij}=0,\qquad s_i=0. \tag{1.2}$$

在这种情况下， F 既不是 Berwald 度量，也不是 Landsberg 度量或 Douglas 度量。

值得注意的是，对于广义伯瓦尔德 (α,β)-度量 $F=\alpha\phi(s)$， $s=\beta/\alpha$，在 M 上的一个 n 维流形上，我们证明了 $\mathbf{S}=0$ 当且仅当 F 是黎曼度量，或 β 是常长度的 Killing 形式（见引理 3.2）。

著名的 Szab´o 刚性定理指出，每个二维 Berwald 曲面要么是局部闵可夫斯基的，要么是黎曼的（见 [13]）。每个 Berwald 度量的 S-曲率都消失 [22]。因此，定理 1.1 将 Szab´o 的结果推广到了 (α,β)-度量。

不能从定理 1.1 的假设中去掉广义贝尔瓦尔德性条件。存在许多具有消失的 S-曲率的二维（α,β）-度量，它们既不是黎曼度量，也不是局部闵可夫斯基度量。例如，考虑 Shen 的沈氏鱼缸兰德斯度量 $F=\alpha+\beta$，其定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，如下所示

$$F=\frac{\sqrt{(xv-yu)^2+(u^2+v^2)(1-x^2-y^2)}}{1-x^2-y^2}+\frac{yu-xv}{1-x^2-y^2}.$$

F 具有消失的 S-曲率 [14]，但它不是广义 Berwald 度量（$\|\beta\|_\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$）。该度量不是黎曼度量。此外， F 具有消失的旗曲率，但它不是局部闵可夫斯基度量。

在定理 m 1.1 中，S-曲率消失是必要条件。例如，参见以下 .

例 1. 令我们考虑 $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$，并在 G 上定义乘法 $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_2 y_1 + x_1, y_1 y_2)$, 其中 $(x_i, y_i) \in G$, $i = 1, 2$. $(G, *)$ 是一个李群 [8]。可以在 G 上引入 Randers 度量 F，其定义为

$$F = \frac{\sqrt{2dx^2 + 2dxdx + 2dy^2}}{y} + \frac{dx + dy}{y}. \tag{1.3}$$

Then

$$a_{11} = a_{22} = \frac{2}{y^2}, \quad a_{21} = a_{12} = \frac{1}{y^2}, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{y},$$
$$a^{11} = a^{22} = \frac{2}{3}y^2, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{1}{3}y^2, \quad b^1 = b^2 = \frac{1}{3}y.$$

显然， α 是一个正定黎曼度量。此外，我们得到 t

$$b := \|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{ij} b_i b_j} = \sqrt{b_i b^i} = \sqrt{b_1 b^1 + b_2 b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

由此可知， F 是定义在 G上的正定 Randers 度量。在 [26], 中，Vincze 证明了 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$是广义 Berwald 度量，当且仅当 β相对于 α具有常长度。因此，由 (1.3) 定义的 Randers 度量是广义 Berwald 度量。我们有

$$d\beta = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy \neq 0.$$

因此， β 不是闭的，这意味着 F 不可能是 Berwald 度量。我们有

$$s_{11} = s_{22} = 0, \quad s_{12} = \frac{1}{y^2} = -s_{21}, \quad s_1 = -\frac{1}{3y}, \quad s_2 = \frac{1}{3y}. \tag{1.4}$$

其中， s_{ij} 和 s_i 由 (3.1) 和 (3.2) 定义。我们断言 F 不具有消失的 S-曲率。反之，设 S $= 0$。那么根据 [5], 中的引理 3.2.1，我们有 $r_{ij} + b_i s_j + b_j s_i = 0$。将其与 b^i 缩并，得到

$$r_j + b^2 s_j = 0.$$

考虑 $r_i + s_i = 0$ 和 $b^2 = 2/3$，必有 $s_i = 0$，这与 (1.4) 矛盾。于是，Randers 度量 (1.3) 是一个广义 Berwald 度量，具有 B $\neq 0$、L $\neq 0$、D $\neq 0$、S $\neq 0$ 和 E $\neq 0$。我们断言 F 不是 R二次的。反之，设由 (1.3) 定义的芬斯勒度量F 是 R二次的。根据 [5], 中的定理6.2.1, 若二维Randers度量 (1.3) 是 R二次的，则它具有常S曲率 S $= 3cF$，其中c是某个实常数。在 [23], 中，Xu-Deng 证明了每个具有各向同性 S-曲率的齐性芬斯勒度量都具有消失的 S-曲率。因此，必有 S $= 0$，这就产生了矛盾。因此，Randers 度量 (1.3) 不是 R二次的。

定理 1.1 对于常S曲率的（α, β）-度量未必成立。例如，在点 $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ 处，沿方向 $y = (y^1, y^2) \in T_x\mathbb{R}^2$，考虑如下黎曼度量 $\alpha = \alpha(x, y)$ 和 1-形式 $\beta = \beta(x, y)$

$$\alpha(x, y) := \sqrt{(y^1)^2 + e^{2x^1}(y^2)^2}, \quad \beta(x, y) := y^1. \tag{1.5}$$

于是 $s_{ij} = 0$ 和 $r_{ij} = b^2 a_{ij} - b_i b_j$，从而得到 $r_i + s_i = 0$。若 $\phi = \phi(s)$ 满足

$$\Phi = -6k \frac{\phi \Delta^2}{b^2 - s^2}, \tag{1.6}$$

某个常数 k，则 $F = \alpha\phi(\beta/\alpha)$ 具有常S曲率 $\mathbf{S} = 3kF$ （见 [6]）。这里，$\Delta = \Delta(b, s)$ 和 $\Phi = \Phi(b, s)$ 分别由 (3.3) 和 (3.4) 定义。当 α 和 β 由 (1.5) 给出时，对于任意 $k \in \mathbb{R}$，(1.6) 的正则解的存在性已在 [10] 中得到证明。容易看出，F 是一个广义 Berwald 度量，但不是 Berwald 度量。

必须指出，定理 1.1 对于 $dim(M) \geq 3$ 的芬斯勒度量并不成立。将 $\mathbb{S}^3$ 上的一般切向量记为 $u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$。Bao-Shen 的 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 的芬斯勒函数如下

$$F = \frac{\sqrt{\mathcal{K}(cu - zv + yw)^2 + (zu + cv - xw)^2 + (xv + cw - yu)^2}}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{K} - 1}\ (cu - zv + yw)}{1 + x^2 + y^2 + z^2},$$

其中 $\mathcal{K} > 1$ 是一个实常数。对于这些度量，我们有

$$b := \|\beta\|_\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\mathcal{K}}}$$

可以看出，1-形式 β 不闭，因此 F 不是 Douglas 度量。这族 Randers 度量是具有 $\mathbf{S} = 0$ 的广义 Berwald 度量，但不是 Berwald 型。

文献 [4], 证明了每个三维闭流形都存在一个非黎曼广义 Berwald 度量。然而，闭性条件非常严格。事实上，对于每个满足 $dim(M) \geq 3$ 的流形 M，都可以构造出不是 Berwald 型的广义 Berwald (α, β)-度量。

例 2. $\mathbb{R}^3$ 上的射影球面度量由下式给出

$$\alpha := \frac{\sqrt{(1 + ||X||^2)||Y||^2 - \langle X, Y\rangle^2}}{1 + \langle X, X\rangle},\ X \in \mathbb{R}^3,\ Y \in T_X\mathbb{R}^3, \tag{1.7}$$

其中，〈、〉和 ||.|| 分别表示 $\mathbb{R}^3$上的欧几里得内积和范数。令$X =$（x，y，z）和 $Y =$（u，v，w）。设 $\beta = \kappa$（$b_1u + b_2v + b_3w$）是 α的 Killing 1-形式，其中 $0 < \kappa < 1$。经过简单计算可得

$$b_1 = \frac{A_2^1 y + A_3^1 z + C^1}{1 + \langle X, X\rangle},\quad b_2 = \frac{A_1^2 x + A_3^2 z + C^2}{1 + \langle X, X\rangle},\quad b_3 = \frac{A_1^3 x + A_2^3 y + C^3}{1 + \langle X, X\rangle}, \tag{1.8}$$

其中，$A =$（A_j^i）是一个实反对称矩阵，$C =$（C^i）是 $\mathbb{R}^3$中的一个常向量。令

$$C = (0, 1, 0),\quad A_2^1 = A_3^2 = 0,\quad A_3^1 = 1. \tag{1.9}$$

在此情形下，β 是一个 Killing 1-形式，且 $\|\beta\|_\alpha = \kappa < 1$ 不闭。根据 [12], 中的 Shen 定理，正则的（α，β）-度量是 Berwald 度量，当且仅当 β 关于 α平行。利用满足（1.8）和（1.9）的黎曼度量（1.7）和 1-形式 β，可以构造不是 Berwald 型的广义 Berwald（α，β）-度量。

齐性 Finsler 流形是指这样的芬斯勒流形（M, F）：$I(M, F)$ 在 M上的自然作用，其在 M 任意一点处的轨道都是整个 M。对于齐性广义伯瓦尔德（α, β）度量，我们证明如下结论。

推论 1.1. 设 $F = \alpha\phi(s)$、$s = \beta/\alpha$ 是流形 M 上的二维齐性广义 Berwald（α，β）度量。那么，F具有各向同性 S-曲率，当且仅当它是具有常截面曲率的黎曼度量或局部闵可夫斯基度量。

¯设 G 是一个带有双不变芬斯勒度量 F 的连通李群， H 是 G 的闭子群。分别将 G 和 H 的李代数记为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$。令 ρ 为从 G 到 $M = G/H$ 的自然投影。那么，存在唯一确定的 G-不变度量 F，定义在 M 上，使得对于任意 $g \in G$，切映射 ρ_*: $\big(T_gG, \bar{F}(g, .)\big) \to \big(T_{\pi(g)}M, F(\pi(g)\ .)\big)$ 是浸没（见 [24]中的引理 3.1）。 G-不变芬斯勒度量 F 称为由 F 诱导的正规¯齐性度量。称对 (M, F) 为由 ρ 诱导的正规齐性空间¯: $G \to M = G/H$ 和 F。对于正规齐性广义 Berwald 度量，我们有如下结论。

推论 1.2. 每个二维正规齐性广义 Berwald (α, β)-度量都是具有非负常截面曲率的黎曼度量，或是局部闵可夫斯基度量。

若流形 M 上的芬斯勒度量 F 对任意 $x, y \in M$，都存在一个 $\delta(x)$-平移，将 (M, F) 映到 x 上的 y（见 [30]），则称其为广义正规齐性度量。本文研究广义正规型的二维齐性广义 Berwald Randers 度量，并证明如下结论。

推论 1.3. 每个二维广义正规齐性广义 Berwald Randers 度量必为具有非负常截面曲率的黎曼度量，或是局部闵可夫斯基度量。

设 $(G, \cdot)$ 是一个连通李群，其单位元为 e， λ_g 表示由 $g \in G$ 给出的左平移。若流形 G 上的芬斯勒度量 F 满足 $F \circ (\lambda_g)_* = F$，则称其为左不变芬斯勒度量，其中 $g \in G$ 任意。在 [2], 中，Aradi 证明了左不变芬斯勒度量是广义 Berwald 度量。对于这类芬斯勒度量，有如下结论。

定理 1.2. 每个左不变芬斯勒曲面具有消失的 S-曲率，当且仅当它是具有常截面曲率的黎曼度量。

由定理 1.1 和定理 1.2 可知，具有消失的 S-曲率的二维广义伯瓦尔德 (α, β)-度量似乎只能是黎曼度量。但我们尚未找到证明这一猜想的简短方法。

流形 M 上的芬斯勒度量 F 称为各向同性 Berwald 度量，如果其 Berwald 曲率由下式给出

$$\mathbf{B}_y(u,v,w) = cF^{-1}\Big\{\mathbf{h}(u,v)\big(w - \mathbf{g}_y(w,\ell)\ell\big) + \mathbf{h}(v,w)\big(u - \mathbf{g}_y(u,\ell)\ell\big) + \mathbf{h}(w,u)\big(v - \mathbf{g}_y(v,\ell)\ell\big) + 2F\mathbf{C}_y(u,v,w)\ell\Big\}. \quad (1.10)$$

其中，$\mathbf{h}_y(u,v) = \mathbf{g}_y(u,v) - F^{-2}(y)\mathbf{g}_y(y,u)\mathbf{g}_y(y,v)$ 是方向 y上的角形式，$\mathbf{C}$ 表示 F 的 Cartan 挠率，且 $c \in C^\infty(M)$。每个 Berwald 度量都是满足 $c = 0$的各向同性 Berwald 度量。Funk 度量是满足 $c = 1/2$的各向同性 Berwald 度量。由定理 1.2 可直接得到以下结论。

推论 1.4. 每个左不变各向同性 Berwald 曲面都必须是具有常截面曲率的黎曼曲面。

2 预备知识

设 M 是一个 n 维 C^∞ 流形，$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ 是切空间，$TM_0 := TM - \{0\}$ 是 M 的挖去零截面的切空间。设 (M, F) 是一个芬斯勒流形。以下二次型 $\mathbf{g}_y : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ 称为基本张量

$$\mathbf{g}_y(u,v) := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\Big[F^2(y+su+tv)\Big]_{s=t=0}, \quad u,v \in T_xM.$$

设 $x \in M$和 $F_x := F|_{T_xM}$。为了度量 F_x的非欧几里得特征，可以定义 $\mathbf{C}_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\mathbf{C}_y(u,v,w) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\mathbf{g}_{y+tw}(u,v)\right]_{t=0}, \quad u,v,w \in T_xM.$$

族 $\mathbf{C} := \{\mathbf{C}_y\}_{y\in TM_0}$ 称为 Cartan 挠率。

对于芬斯勒流形 (M, F)，其在 TM上诱导的喷射记为 $\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y)$，在 TM_0的标准坐标 (x^i, y^i) 下可表示为 $\mathbf{G} = y^i\partial/\partial x^i - 2G^i(x, y)\partial/\partial y^i$，其中

$$G^i := \frac{1}{4}g^{il}\Big[\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^l}y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l}\Big].$$

对于 M上的一个 n维流形上的芬斯勒度量 F，布斯曼-豪斯多夫体积形式$dV_F = \sigma_F(x)dx^1 \cdots dx^n$ 定义如下:

$$\sigma_F(x) := \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathbb{B}^n(1)\big)}{\mathrm{Vol}\Big\{(y^i) \in R^n \;\Big|\; F\big(y^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\big) < 1\Big\}}.$$

设 G^i 表示同一局部坐标系下 F 的测地线系数。那么对于 $\mathbf{y} = y^i\partial/\partial x^i|_x \in T_xM$，S-曲率定义为

$$\mathbf{S}(\mathbf{y}) := \frac{\partial G^i}{\partial y^i}(x,y) - y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\Big[\ln\sigma_F(x)\Big]. \tag{2.1}$$

对于向量 $y \in T_xM_0$，Berwald 曲率 $\mathbf{B}_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \to T_xM$ 定义为 $\mathbf{B}_y(u, v, w) := B^i{}_{jkl}(y)u^jv^kw^l\partial/\partial x^i|_x$，其中

$$B^i{}_{jkl} := \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}.$$

F 称为 Berwald 度量，当且仅当 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$。每个 Berwald 度量都满足 $\mathbf{S} = 0$ (见 [22])。

对于 $y \in T_xM$，Landsberg 曲率 $\mathbf{L}_y : T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathbf{L}_y(u,v,w) := -\frac{1}{2}\mathbf{g}_y\big(\mathbf{B}_y(u,v,w), y\big).$$

芬斯勒度量 F 称为 Landsberg 度量，当且仅当 $\mathbf{L} = 0$。

对 Berwald 曲率 $\mathbf{B}$ 求迹，得到平均贝尔瓦尔德曲率 $\mathbf{E}$，其定义为 $\mathbf{E}_y : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$，其中

$$\mathbf{E}_y(u,v) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g^{ij}(y)\mathbf{g}_y\big(\mathbf{B}_y(u,v,\partial_i),\partial_j\big). \tag{2.2}$$

其中 $\{\partial_i\}$ 是 $x \in M$处的 T_xM基。在局部坐标中，$\mathbf{E}_y(u, v) := E_{ij}(y)u^iv^j$，其中

$$E_{ij} := \frac{1}{2}B^m{}_{mij}.$$

沿 Finsler 测地线对平均贝尔瓦尔德曲率 E 取水平导数，可得 H-曲率 H $=$H(x,y)，其定义为 $\mathrm{H}_y = H_{ij}dx^i \otimes dx^j$，其中

$$H_{ij} := E_{ij|m}y^m.$$

这里，“|”表示关于 F 的 Berwald 联络的水平协变微分。

对于非零向量 $y \in T_xM_0$，可以定义 D$_y$： $T_xM \times T_xM \times T_xM \to T_xM$ by D$_y(u,v,w)$: $= D^i{}_{jkl}(y)u^iv^jw^k\partial/\partial x^i|_x$，其中

$$D^i{}_{jkl} := \frac{\partial^3}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}\left[G^i - \frac{2}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m}y^i\right]. \tag{2.3}$$

D 称为 Douglas 曲率。若 D $=$ **0**，则 F 称为 Douglas 度量。

对于非零向量 $y \in T_xM_0$，黎曼曲率是一族线性变换 R$_y$： $T_xM \to T_xM$，其定义为 R$_y(u)$: $= R^i_k(y)u^k\partial/\partial x^i$，其中

$$R^i_k(y) = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j\partial y^k}y^j + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j\partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \tag{2.4}$$

这一族 R $:=\{\mathrm{R}_y\}_{y\in TM_0}$ 称为黎曼曲率。

对于旗 P:$=$span$\{y,u\} \subset T_xM$，其旗杆为 y，旗曲率 K $=$K(P,y) 定义为

$$\mathbf{K}(x,y,P) := \frac{\mathbf{g}_y\big(u,\mathbf{R}_y(u)\big)}{\mathbf{g}_y(y,y)\mathbf{g}_y(u,u) - \mathbf{g}_y(y,u)^2}. \tag{2.5}$$

旗曲率 K(x,y,P) 是切平面 $P=$span$\{y,v\} \subset T_xM$ 的函数。若芬斯勒度量 F 满足 K(x,y,P) $=$K(x,y) 与 P 无关，则称其具有标量旗曲率。此外，若 K $=$K(x)，则称 F 具有各向同性旗曲率；若 K $= constant$，则称其具有常旗曲率。

本文中，我们在 Finsler 流形上使用 Berwald 联络。拉回丛 π^*TM 上存在唯一的线性联络，称为 Berwald 联络。设 (M,F) 是一个 n 维芬斯勒流形。设 $\{e_j\}$ 是 π^*TM 的局部标架，$\{\omega^i,\omega^{n+i}\}$ 是 $T*(TM_0)$ 的对应局部余标架，$\{\omega^i_j\}$ 是关于 $\{e_j\}$ 的局部 Berwald 联络形式集。于是，联络形式由以下结构方程刻画

- 无挠性:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i{}_j. \tag{2.6}$$

- 几乎度量相容性:

$$dg_{ij} - g_{kj}\omega^k{}_i - g_{ik}\omega^k{}_j = -2L_{ijk}\omega^k + 2C_{ijk}\omega^{n+k}, \tag{2.7}$$

其中 $\omega^i := dx^i$ 且 $\omega^{n+k} := dy^k + y^j\omega^k{}_j$。

分别将关于 Berwald 联络的水平和垂直协变导数记为“|”和“, ”。更多详情请参见 [13]。

3 定理 1.1 和 1.2 的证明

对于一个 (α,β)-度量，定义 $b_{i;j}$ 如下： $b_{i;j}\theta^j := db_i - b_j\theta_i^j$，其中 $\theta^i := dx^i$ 和 $\theta_i^j := \gamma_{ik}^j dx^k$ 表示 α 的 Levi-Civita 联络形式。令

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j}+b_{j;i}), \quad s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j}-b_{j;i}), \quad r_{i0} := r_{ij}y^j, \quad r_{00} := r_{ij}y^iy^j, \quad r_j := b^ir_{ij}, \tag{3.1}$$

$$s_{i0} := s_{ij}y^j, \quad s_j := b^is_{ij}, \quad s^i{}_j = a^{im}s_{mj}, \quad s^i{}_0 = s^i{}_jy^j, \quad r_0 := r_jy^j, \quad s_0 := s_jy^j. \tag{3.2}$$

Put

$$Q := \frac{\phi'}{\phi - s\phi}, \qquad \Delta := 1 + sQ + (b^2-s^2)Q', \qquad \Theta := \frac{Q-sQ'}{2\Delta}, \tag{3.3}$$

$$\Phi := -(Q-sQ')(n\Delta + 1 + sQ) - (b^2-s^2)(1+sQ)Q'', \tag{3.4}$$

$$\Psi := \frac{\phi''}{2\big[(\phi - s\phi') + (b^2-s^2)\phi''\big]},$$

其中 $b := \|\beta\|_{\alpha}$。令 $G^i = G^i(x,y)$ 和 $\bar{G}_\alpha^i = \bar{G}_\alpha^i(x,y)$ 分别表示同一坐标系中 F 和 α的系数。根据定义，我们有

$$G^i = G_\alpha^i + \alpha Q s_0^i + \alpha^{-1}(r_{00} - 2Q\alpha s_0)(\Theta y^i + \alpha\Psi b^i). \tag{3.5}$$

显然，若 β 关于 α平行，即 $r_{ij} = s_{ij} = 0$，则 $G^i = G_\alpha^i = \gamma_{jk}^i(x)y^jy^k$ 是关于 y的二次式。在这种情况下， F 退化为 Berwald 度量。

对于 n 维流形 M上的 (α,β)-度量 $F = \alpha\phi(s)$， $s = \beta/\alpha$，其 S-曲率由下式给出

$$\mathbf{S} = \Big[2\Psi - \frac{f'(b)}{bf(b)}\Big](r_0+s_0) - \frac{\Phi}{2\alpha\Delta^2}(r_{00}-2\alpha Qs_0), \tag{3.6}$$

其中

$$f(b) := \frac{\int_0^\pi \sin^{n-2}t\; T(b\cos t)dt}{\int_0^\pi \sin^{n-2}tdt}, \qquad T(s) := \phi(\phi - s\phi')^{n-2}\big[(\phi-s\phi') + (b^2-s^2)\phi''\big].$$

更多详情请参见 [6]。

为证明定理 1.1，我们需要以下关键引理。

引理 3.1. ([4][20]) 设 $s = \beta/\alpha(s)$, α 是流形 β 上的一个 (M,F)-度量。那么，当且仅当 α 相对于具有常长度时， β 才是广义 Berwald 度量。

证明. 在 [20], 中，Tayebi-Barzegari 证明了，具有符号性质的每个 (α,β)-度量 $F = \alpha\phi(s)$, $s = \beta/\alpha$ 都是广义 Berwald 度量，当且仅当其对偶向量场 $\beta^\sharp$ 具有常黎曼长度。在 [9], 中，Ivanov 证明了，二维芬斯勒度量是广义 Berwald 度量，当且仅当它是单色的，即任意两个切空间均作为赋范空间彼此同构。在 [4], 中，Bartelmeß-Matveev 将其结果推广到了 n 维芬斯勒度量。由此可得，一个 (α,β)-度量是广义 Berwald 度量，当且仅当对偶向量场 $\beta^\sharp$ 具有常黎曼长度。 □

在 [6], Cheng-Shen 刻画了维数为 $n \geq 3$ 的流形 M 上具有各向同性 S-曲率的 (α,β)-度量。很快，他们发现这一结果仅适用于具有常长度 1-形式的 (α,β)-度量类。本文对消失的 S-曲率的广义 Berwald 度量类给出刻画。

引理 3.2. 设 $F = \alpha\phi(s)$, $s = \beta/\alpha$ 是定义在一个 n 维流形 M 上的广义 Berwald (α, β)-度量。那么，$\mathsf{S} = 0$ 当且仅当 F 是黎曼度量，或者 β 是具有常长度的 Killing 形式。

证明。设 $b := \|\beta\|_\alpha = \sqrt{a^{mj}b_j b_m} = \sqrt{b_m b^m}$。则有如下结论

$$\frac{\partial b}{\partial x^i} = \frac{1}{b} b^m b_{m|i} = \frac{1}{b}(r_i + s_i). \tag{3.7}$$

由引理 3.1，得 $b = constant$。然后，由 (3.7) 可得 $r_i + s_i = 0$。在此情形下，化简为以下 (3.6) 形式

$$\mathsf{S} = -\frac{\Phi}{2\alpha\Delta^2}(r_{00} - 2\alpha Q s_0), \tag{3.8}$$

根据 (3.8)，$\mathsf{S} = 0$ 当且仅当 $\Phi = 0$ 或 β 满足

$$r_{00} = 2\alpha Q s_0. \tag{3.9}$$

当 $\Phi = 0$ 时， F 化为黎曼度量（参见 [11] 中的命题 2.2）。现在，设 (3.9) 成立。我们将化简 (3.9)。为此，可以在某一点将 y-坐标 (y^i), $i = 1, \cdots, n$ 变换为极坐标 (s, u^A)，其中 $A = 2, \cdots, n$ （参见 [6]）。对于任意固定点 $x \in M$，取 x 处的标准正交基 e_i，使得黎曼度量写作 $\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}$，其相应的~~一形式为~~ $\beta = by^1$，其中 $b := ||\beta||_\alpha$。任取一个满足 $|s| < b$ 的数 s。定义

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\sum_{A=2}^{n} (y^A)^2}.$$

然后，由 $\beta = s\alpha$ 可得

$$y^1 = \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{\alpha}, \quad y^A = u^A. \tag{3.10}$$

此外，我们有

$$\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{\alpha}, \qquad \beta = \frac{bs}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{\alpha}. \tag{3.11}$$

令

$$\bar{r}_{10} := \sum_{A=2}^{n} r_{1A} y^A, \quad \bar{s}_{10} := \sum_{A=2}^{n} s_{1A} y^A, \quad \bar{r}_{00} := \sum_{A,B=2}^{n} r_{AB} y^A y^B, \quad \bar{r}_0 := \sum_{A=2}^{n} r_A y^A, \quad \bar{s}_0 := \sum_{A=2}^{n} s_A y^A.$$

于是得到以下有用关系

$$r_1 = b r_{11}, \quad r_A = b r_{1A}, \quad s_1 = 0, \quad s_A = b s_{1A}, \tag{3.12}$$

$$r_{00} = \frac{s^2}{b^2 - s^2}\bar{\alpha}^2 r_{11} + \frac{2s}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{\alpha}\bar{r}_{10} + \bar{r}_{00}, \tag{3.13}$$

$$r_{10} = \frac{s}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{\alpha} r_{11} + \bar{r}_{10}, \qquad s_0 = \bar{s}_0 = b\bar{s}_{10}. \tag{3.14}$$

利用 (3.11)-(3.14)，方程 (3.9) 可写为如下形式

$$\bar{r}_{00} + \frac{s^2}{b^2 - s^2}\bar{\alpha}^2\, r_{11} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - s^2}}\left[b^2 Q\bar{s}_{10} - s\bar{r}_{10}\right]\bar{\alpha}. \tag{3.15}$$

由 (3.15)，我们得到以下两个关系式

$$\bar{r}_{00} + \frac{s^2}{b^2 - s^2}\bar{\alpha}^2 r_{11} = 0, \tag{3.16}$$

$$b^2 Q\bar{s}_{10} - s\bar{r}_{10} = 0. \tag{3.17}$$

另一方面，(3.11)意味着

$$\frac{s^2}{b^2 - s^2}\bar{\alpha}^2 - \frac{1}{b^2}\beta^2 = 0. \tag{3.18}$$

由(3.16)和(3.18)，可得

$$b^2\bar{r}_{00} + \beta^2 r_{11} = 0. \tag{3.19}$$

以下结论成立

$$\frac{\partial \bar{r}_{00}}{\partial y^1} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial y^1} = b.$$

然后，对(3.19)关于 y^1 求导，得到 $\beta/br_{11} = 0$。因此， $r_{11} = 0$ ，将其代入(3.19)，可得 $\bar{r}_{00} = 0$。将这些关系代入(3.13)和(3.14)，可推出

$$r_{00} = \frac{2s\bar{\alpha}}{\sqrt{b^2 - s^2}}\bar{r}_{10} = \frac{2\beta}{b}\bar{r}_{10}, \tag{3.20}$$

$$r_{10} = \bar{r}_{10}. \tag{3.21}$$

现在，考虑(3.20)和(3.21)，我们将问题分为两种情况：(a) $\bar{r}_{10} = 0$ 和(b) $\bar{r}_{10} \neq 0$。

情况(a)：$\bar{r}_{10} = 0$。在这种情况下，由(3.20)可得 $r_{ij} = 0$。将其代入(3.9)，可推出 $s_i = 0$。在此情况下， β 化为关于 α的一个常长度 Killing 一形式。

情形 (b)： $\bar{r}_{10} \neq 0$。我们有 $\partial\bar{r}_{10}/\partial y^1 = 0$和 $\partial\bar{s}_{10}/\partial y^1 = 0$。因此，对 (3.17) 关于 y^1 求导，得到

$$(s)_{y^1}\bar{r}_{10} = b^2(Q)_{y^1}\bar{s}_{10}. \tag{3.22}$$

将 (3.17) 与 $(s)_{y^1}$ 缩并，得到

$$s(s)_{y^1}\bar{r}_{10} = b^2 Q(s)_{y^1}\bar{s}_{10}. \tag{3.23}$$

由 (3.22) 和 (3.23)，可得

$$\Big[(s)_{y^1}Q - s(Q)_{y^1}\Big]\bar{s}_{10} = 0. \tag{3.24}$$

根据 (3.24)，可得 $\bar{s}_{10} = 0$ 或 $Q(s)_{y^1} = s(Q)_{y^1}$。设 $\bar{s}_{10} = 0$ 成立。则 (3.17) 化简为 $s = 0$，这不可能。因此，我们有

$$Q(s)_{y^1} = s(Q)_{y^1},$$

这等于

$$\frac{(Q)_{y^1}}{Q} = \frac{(s)_{y^1}}{s}. \tag{3.25}$$

利用 $s_{y^1} \neq 0$ 和 $(Q)_{y^1} = s_{y^1}(Q)_s$，则由 (3.25) 得到

$$\frac{(Q)_s}{Q} = \frac{1}{s}$$

由此可得

$$\ln(Q) - \ln(s) = c,$$

其中 c 是一个实常数。因此 $Q = ks$，其中 k 是一个非零实常数。在这种情况下，我们得到 $\phi = \sqrt{1 + ks^2}$，这表明 F 是一个黎曼度量。证明完毕。 □

这里，我们求解一个常微分方程，该方程将在定理 1.1 的证明中出现。

引理 3.3. 设 $F = \alpha\phi(s)$、 $s = \beta/\alpha$ 是流形 M 上的一个 (α, β)-度量。假设 ϕ满足以下条件

$$\alpha\Theta_2 + 2\Lambda_1\Theta_1 + \Lambda_2 Q = 0, \tag{3.26}$$

其中

$$\Lambda_1 := b^i\alpha_{y^i}, \quad \Lambda_2 := b^i b^j \alpha_{y^i y^j}, \quad \Theta_1 := b^i Q_{y^i}, \quad \Theta_2 := b^i b^j Q_{y^i y^j}.$$

则 F 是由下式给出的奇异芬斯勒度量

$$\phi = c\exp\left[\int_0^s \frac{k_1 t + k_2\sqrt{b^2 - t^2}}{1 + t\big(k_1 t + k_2\sqrt{b^2 - t^2}\big)}dt\right], \tag{3.27}$$

其中 k_1 和 k_2 是实常数，而 $c > 0$ 是一个非零常数。

证明。令

$$A_{jk} := \alpha^2 a_{jk} - y_j y_k.$$

于是，以下结论成立

$$\begin{aligned}
\alpha_{y^i} &= \frac{1}{\alpha}y_i, \\
\alpha_{y^j y^k} &= \frac{1}{\alpha^3}A_{jk}, \\
\alpha_{y^j y^k y^l} &= -\frac{1}{\alpha^5}\Big[A_{jk}y_l + A_{jl}y_k + A_{lk}y_j\Big].
\end{aligned}$$

此外，可以得到以下结果

$$\Lambda_1 = s, \tag{3.28}$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\alpha}(b^2 - s^2), \tag{3.29}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{\alpha}(b^2 - s^2)Q', \tag{3.30}$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{\alpha^2}(b^2 - s^2)\big[(b^2 - s^2)Q'' - 3sQ'\big]. \tag{3.31}$$

假设（3.26）成立。将（3.28）—（3.31）代入（3.26），得到

$$Q'' - \frac{s}{b^2 - s^2}Q' + \frac{1}{b^2 - s^2}Q = 0,$$

这意味着

$$Q = k_1 s + k_2\sqrt{b^2 - s^2}, \tag{3.32}$$

其中， k_1 和 k_2 是实常数。由（3.3）可知，方程（3.32）等于以下表达式

$$\Big[1 + k_1 s^2 + k_2 s\sqrt{b^2 - s^2}\Big]\phi' = \Big[k_1 s + k_2\sqrt{b^2 - s^2}\Big]\phi. \tag{3.33}$$

由（3.33）可得（3.27）。这是一个几乎正则的（α, β）-度量，即它在任意点 x 处沿两个方向 y $=$（$\pm b$, 0, 0）$\in T_x M$是奇异的（更多详情见 [12]）。 □

（3.27）中的函数 ϕ 最早见于 Asanov 的论文 [3]，其形式如下

$$\phi = c\exp\left[\int_0^s \frac{k\sqrt{b^2 - t^2}}{1 + tk\sqrt{b^2 - t^2}}dt\right]. \tag{3.34}$$

随后，Shen 在 [12], 中找到了它更一般的形式（3.27），当时他正在寻找独角兽度量，即非 Berwald 型的 Landsberg 度量。Shen 发现，（3.27）中的函数$\phi = \phi\,(b, s)$可以用初等函数表示。见 [12]中的（7.2）。

这里，我们证明芬斯勒曲面的 Douglas 曲率满足一个特殊关系。更准确地说，我们证明如下结论。

引理 3.4. 任意芬斯勒曲面 (M, F) 的 Douglas 曲率满足

$$D^i{}_{jkl|s}y^s = \mathfrak{D}_{jkl}y^i \tag{3.35}$$

for 某个张量 $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$，其关于 y 是 -1 次齐次的 .

证明. 根据定义，二维 Finsler 度量的 Douglas 曲率为

$$D^i{}_{jkl} = B^i{}_{jkl} - \frac{2}{3}\Big\{E_{jk}\delta^i{}_l + E_{kl}\delta^i{}_j + E_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l}y^i\Big\}. \tag{3.36}$$

沿 Finsler 测地线对 (3.36) 作水平导数，并利用 $y^i{}_{|s} = 0$，可得

$$D^i{}_{jkl|m}y^m = B^i{}_{jkl|m}y^m - \frac{2}{3}\Big\{H_{jk}\delta^i{}_l + H_{kl}\delta^i{}_j + H_{lj}\delta^i{}_k + E_{jk,l|m}y^m y^i\Big\}. \tag{3.37}$$

每个芬斯勒 曲面的旗曲率都是标量 K $=$ K(x, y)。于是，由 [13] 中的 (11.24)，我们有 e

$$\begin{aligned} B^i{}_{jml|k}y^k = {} & 2\mathbf{K}C_{jlm}y^i - \frac{1}{3}\Big\{y_l\delta^i_m + y_m\delta^i_l - 2g_{lm}y^i\Big\}\mathbf{K}_j - \frac{1}{3}\Big\{y_j\delta^i_m + y_m\delta^i_j - 2g_{jm}y^i\Big\}\mathbf{K}_l \\ & -\frac{1}{3}\Big\{y_j\delta^i_l + y_l\delta^i_j - 2g_{jl}y^i\Big\}\mathbf{K}_m - \frac{1}{3}F^2\Big\{\mathbf{K}_{jm}h^i_l + \mathbf{K}_{jl}h^i_m + \mathbf{K}_{lm}h^i_j\Big\}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

其中 $y_i = FF_{y^i}$，Kj:=K$^{y^j}$ 和 K^{jk}:=K$^{y^j y^k}$。对 (3.38) 取迹，得到 s

$$H_{jl} = -\frac{1}{2}\Big\{y_l\mathbf{K}_j + y_j\mathbf{K}_l + F^2\mathbf{K}_{jl}\Big\}. \tag{3.39}$$

将 (3.38) 和 (3.39) 代入 (3.37)，得到

$$\begin{aligned} D^i{}_{jkl|m}y^m = {} & \frac{1}{3}\Big\{6\mathbf{K}C_{jkl} + 2\big(g_{kl}\mathbf{K}_j + g_{kj}\mathbf{K}_l + g_{jl}\mathbf{K}_k\big) + \big(y_j\mathbf{K}_{kl} + y_k\mathbf{K}_{jl} + y_l\mathbf{K}_{kj}\big) \\ & -2E_{jk,l|m}y^m\Big\}y^i. \end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.40) 得出 (3.35)。 □

现在，我们证明具有消失的 S-曲率的二维广义 Berwald (α,β)-度量的 Berwald 曲率的协变导数满足一个有趣的关系，该关系将在定理 1.1 的证明中发挥重要作用。

引理 3.5. 任意具有消失的 S-曲率的非黎曼二维广义伯瓦尔德 (α,β)-度量的 Berwald 曲率满足以下关系

$$\begin{aligned} h_p^m B^p{}_{jkl|s}y^s = \;& s^m{}_{0|0}(\alpha_{jkl}Q+\alpha_{jk}Q_l+\alpha_{lk}Q_j+\alpha_{lj}Q_k+\alpha Q_{jkl}+\alpha_l Q_{jk}+\alpha_j Q_{lk}+\alpha_k Q_{jl}) \\ & +s^m{}_0(\alpha_{jkl}Q_{|0}+\alpha_{jk}Q_{l|0}+\alpha_{lk}Q_{j|0}+\alpha_{lj}Q_{k|0}+\alpha Q_{jkl|0}+\alpha_l Q_{jk|0}+\alpha_j Q_{lk|0} \\ & +\alpha_k Q_{jl|0})+A^m{}_l X_{jk}+A^m{}_j X_{lk}+A^m{}_k X_{jl}+B^m{}_l Y_{jk}+B^m{}_j Y_{lk}+B^m{}_k Y_{jl}=0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

其中

$$\begin{aligned} X_{jk} &:= Q_{|0}\alpha_{jk}+Q_{k|0}\alpha_j+Q_{j|0}\alpha_k+Q_{jk|0}\alpha, \\ Y_{jk} &:= Q\alpha_{jk}+Q_k\alpha_j+Q_j\alpha_k+\alpha Q_{jk}, \\ A^m{}_l &:= s^m{}_l-F^{-2}s^0{}_l y^m, \\ B^m{}_l &:= A^m{}_{l|s}y^s = s^m{}_{l|0}-F^{-2}s^0{}_{l|0}y^m. \end{aligned}$$

证明. 根据引理 3.2，我们有 $r_{ij}=0$ 和 $s_j=0$。此时，(3.5) 化简为以下形式

$$G^i = G^i_\alpha + \alpha Q s^i{}_0. \tag{3.42}$$

对 (3.42) 关于 y^j, y^l 和 y^k 取三次垂直导数，得到 u s

$$\begin{aligned} B^i{}_{jkl} = \;& s^i{}_0\big\{\alpha Q_{jkl}+\alpha_l Q_{jk}+\alpha_j Q_{lk}+\alpha_k Q_{jl}+\alpha_{jkl}Q+\alpha_{jk}Q_l+\alpha_{lk}Q_j+\alpha_{lj}Q_k\big\} \\ & +s^i{}_j\big\{Q\alpha_{lk}+Q_k\alpha_l+Q_l\alpha_k+\alpha Q_{lk}\big\}+s^i{}_k\big\{Q\alpha_{jl}+Q_j\alpha_l+Q_l\alpha_j+\alpha Q_{jl}\big\} \\ & +s^i{}_l\big\{Q\alpha_{jk}+Q_k\alpha_j+Q_j\alpha_k+\alpha Q_{jk}\big\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

将 (3.43) 与 h_i^m收缩可得

$$\begin{aligned} h_i^m B^i{}_{jkl} = \;& \big\{\alpha_{jkl}Q+\alpha_{jk}Q_l+\alpha_{lk}Q_j+\alpha_{lj}Q_k+\alpha Q_{jkl}+\alpha_l Q_{jk}+\alpha_j Q_{lk}+\alpha_k Q_{jl}\big\}s^m_0 \\ & +\big\{Q\alpha_{jk}+Q_k\alpha_j+Q_j\alpha_k+\alpha Q_{jk}\big\}(s^m_l-F^{-2}s^0{}_l y^m) \\ & +\big\{Q\alpha_{lk}+Q_k\alpha_l+Q_l\alpha_k+\alpha Q_{lk}\big\}(s^m_j-F^{-2}s^0{}_j y^m) \\ & +\big\{Q\alpha_{jl}+Q_j\alpha_l+Q_l\alpha_j+\alpha Q_{jl}\big\}(s^m_k-F^{-2}s^0{}_k y^m). \end{aligned} \tag{3.44}$$

另一方面，沿 Finsler 测地线对 Douglas 曲率取水平导数，并将结果与 h_i^m收缩，可得

$$h_i^m D^i{}_{jkl|s}y^s = h_i^m B^i{}_{jkl|s}y^s - \frac{2}{3}\Big\{H_{jk}h^m_l+H_{kl}h^m_j+H_{lj}h^m_k\Big\}. \tag{3.45}$$

将 (3.35) 与 h_i^m缩并，得到

$$h_i^m D^i{}_{jkl|s}y^s = 0. \tag{3.46}$$

S由于 S $=0$，根据定义可得 H $=0$。因此，(3.45) 和 (3.46) 表明 th at

$$h_i^m B^i{}_{jkl|s}y^s = 0. \tag{3.47}$$

我们有 $h^m_{i|s}=0$。然后，考虑 (3.47)，可得

$$\big(h_i^m B^i{}_{jkl}\big)_{|s}y^s = h_i^m B^i{}_{jkl|s}y^s = 0. \tag{3.48}$$

因此，沿着芬斯勒测地线对 (3.44) 取水平导数，并考虑 (3.48)，即可得到 (3.41)。

□

定理 1.1 的证明：对 $y_m s^m_{\ 0} = 0$ 关于 F 的 Berwald 联络取水平导数，可得

$$y_{m|0}s^m_{\ 0} + y_m s^m_{\ 0|0} = 0. \tag{3.49}$$

由于 $y_{m|0} = 0$，因此 (3.49) 化简为

$$y_m s^m_{\ 0|0} = 0. \tag{3.50}$$

将 (3.41) 与 y_m 收缩，并结合 (3.50)，可得

$$s^0_{\ l}X_{jk} + s^0_{\ j}X_{lk} + s^0_{\ k}X_{jl} + s^0_{\ l|0}Y_{jk} + s^0_{\ j|0}Y_{lk} + s^0_{\ k|0}Y_{jl} = 0. \tag{3.51}$$

由于 $s_j = 0$，因此可得

$$0 = (s_j)_{|0} = (r_{m0} + s_{m0})s^m_{\ j} + b_m s^m_{\ j|0}$$

结合 $r_{ij} = 0$，可将其化简为

$$b_m s^m_{\ j|0} = -s_{m0}s^m_{\ j}. \tag{3.52}$$

将 (3.52) 乘以 y^j，得到

$$b_i s^i_{\ 0|0} + s_{i0}s^i_{\ 0} = 0. \tag{3.53}$$

此外，将 (3.52) 与 b^j 收缩可得

$$b_i s^i_{\ j|0}b^j = 0. \tag{3.54}$$

将 (3.51) 乘以 $b^j b^k b^l$，并结合 (3.53) 和 (3.54)，可得

$$(\alpha\Theta_2 + 2\Lambda_1\Theta_1 + \Lambda_2 Q)s_{m0}s^m_{\ 0} = 0. \tag{3.55}$$

由 (3.55)，我们有两种情况：若 $s^m_0 s_{m0} = 0$，由于 α 是正定度量，因此可知 β 是闭的。因此，由 (3.43) 可得，F 归结为一个 Berwald 度量。根据 Szabo 针对芬斯勒曲面的刚性结果，F 归结为一个局部闵可夫斯基度量或黎曼度量。另一方面，每个芬斯勒曲面都具有标量旗曲率 $\mathrm{K} = \mathrm{K}(x, y)$。根据 [1], 中的 Akbar-Zadeh 定理，标量旗曲率为 $\mathrm{K} = \mathrm{K}(x, y)$ 的芬斯勒流形 (M, F) 具有各向同性旗曲率 $\mathrm{K} = \mathrm{K}(x)$，当且仅当其 H 曲率 $\mathrm{H} = 0$ 消失。因此，所得的黎曼度量具有各向同性截面曲率。

现在，假设 F 既不是黎曼度量，也不是局部闵可夫斯基度量。那么，由 (3.55) 可得 $\alpha\Theta_2 + 2\Lambda_1\Theta_1 + \Lambda_2 Q = 0$。根据引理 3.3，我们得到 (1.1)。在这种情况下，由于 $\mathrm{S} = 0$，因此 F 不可能是 Douglas 度量。另一方面，二维芬斯勒流形的 Berwald 曲率由下式给出

$$B^i_{\ jkl} = -\frac{2}{F^2}L_{jkl}y^i + \frac{2}{3}\Big\{E_{jk}h^i_l + E_{kl}h^i_j + E_{jl}h^i_k\Big\}. \tag{3.56}$$

参见 [21] 中的关系式 (15)。如果 F 是 Landsberg 度量，那么考虑 $\mathrm{S} = 0$ 后，(3.56) 表明 F 是 Berwald 度量。这就产生了矛盾。因此，(1.1) 是一个既不是 Berwald 度量，也不是 Landsberg 度量或 Douglas 度量的广义 Berwald 度量。□

推论 1.1 的证明：在 [23], Xu-Deng 证明了，每个具有各向同性 S-曲率的齐性芬斯勒度量都具有消失的 S-曲率。于是，根据假设可得 $\mathrm{S} = 0$。

[1] 中的 Akbar-Zadeh 定理指出，若标量旗曲率的芬斯勒流形 (M, F) 满足 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x, y)$，则其具有各向同性旗曲率 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$，当且仅当它具有消失的 H 曲率 $\mathbf{H} = 0$。另一方面，每个芬斯勒曲面都具有标量旗曲率 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x, y)$。因此，根据 Akbar-Zadeh 定理可得 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$。$M$ 上任何在 (M, F) 的等距变换下不变的标量函数都是常数函数。(M, F) 的齐性以及旗曲率在 F 的等距变换下的不变性意味着 $\mathbf{K} = constant$。于是，由定理 1.1 即得证。

□

推论 1.2 的证明：设 $F = \alpha\phi(s)$、$s = \beta/\alpha$ 是一个二维正规齐性广义伯瓦尔德 (α, β)-度量。在 [24], Xu-Deng 证明了每个正规齐性流形都具有消失的 S-曲率和非负旗曲率。根据定理 1.1 以及推论 1.1 证明中所用的相同方法，可知 F 是一个具有非负常截面曲率的黎曼度量，或是一个局部闵可夫斯基度量。

□

推论 1.3 的证明：设 $(G/H, F)$ 是一个广义正规齐性 Randers 流形。在 [30], Zhang-Deng 证明了 F 具有消失的 S-曲率（推论 3.11）。此外，他们还证明，任意广义正规齐性 Randers 度量都具有非负旗曲率（见 [30]中的命题 3.13）。于是，根据定理 1.1 即得证明。

□

根据定理 1.1，每个具有消失的 S-曲率的二维广义伯瓦尔德（α, β）-度量都是黎曼度量或局部闵可夫斯基度量。每个左不变芬斯勒度量都是广义 Berwald 度量 [2]。在此，我们证明定理 1.2，该定理指出，具有消失的 S-曲率的左不变芬斯勒度量只能是黎曼度量。定理 1.2 的证明方法与定理 1.1 完全不同。

定理 1.2 的证明：要证明具有 $\mathbf{S} = 0$ 的齐性曲面是黎曼曲面，我们只需考虑非平凡情形，即带有左不变芬斯勒度量 F 的二维非阿贝尔李群 G。在每个满足 $F(y) = 1$ 的 $y \in \mathfrak{g}$ 处，都存在一个 $\mathfrak{g}_y$ 标准正交基 $e_1 = y$，且 e_2 与 $F = 1$ 相切。对于几乎所有非零的 y，喷射向量场 η 非零，即 $\eta(y)$ 是 e_2 的非零倍数。根据齐性 S-曲率公式，我们有

$$\mathbf{S}(y) = -\mathbf{I}(\eta) = -\mathbf{C}_y(\eta, e_2, e_2) = 0.$$

于是，$\mathbf{C}_y(e_2, e_2, e_2) = 0$ 处处成立。二维空间的特殊性意味着 $\mathbf{C} = 0$ 处处成立，因此 F 是黎曼的。采用证明推论 1.1 的相同方法，可以得出该黎曼度量具有常截面曲率。证明完毕。

□

推论 1.4 的证明：根据假设，F 具有各向同性 Berwald 曲率

$$B^i{}_{jkl} = cF^{-1}\Big\{h_{jk}h^i_l + h_{jl}h^i_k + h_{kl}h^i_j + 2C_{jkl}y^i\Big\}. \tag{3.57}$$

其中 $c = c(x)$ 是 M 上的一个标量函数。在 [22], 中证明了，每个具有各向同性 Berwald 曲率 (3.57) 度量的芬斯勒曲面都具有各向同性 S-曲率 $\mathbf{S} = 3cF$。根据 Xu-Deng 在 [24] 中的结果，F 具有消失的 S-曲率 $\mathbf{S} = 0$。于是，由定理 1.2，F 化为一个黎曼度量。

□

4 广义伯瓦尔德流形的一些例子

本节将给出广义 Berwald 流形类的一些重要例子。首先，我们利用超 Sasakian 结构构造一族奇数维广义 Berwald Randers 度量。

例 3. (奇数维广义 Berwald Randers 度量) 设 M 是一个维数为 $2n+1$ 的可微流形。假设 $\eta = \eta_i(x)dx^i$、$\xi = \xi^i\partial/\partial x^i$ 和 $\varphi = \varphi^i_j\partial/\partial x^i \otimes dx^j$ 分别是 M 上的一个 1-形式、一个向量场和一个 (1, 1)-张量。若三元组 (η, ξ, φ) 满足以下条件，则称其为 M 上的几乎接触结构：

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

具有几乎接触结构的奇数维 $2n+1$ 可微流形称为几乎接触流形。设带有 (η, ξ, φ) 结构的流形 M 存在一个黎曼度量 g，使得

$$\mathbf{g}(\varphi X, \varphi Y) = \mathbf{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

则称 M 为几乎接触度量结构，并称 g 为相容度量。在这种情况下，$(\eta, \xi, \varphi, \mathbf{g})$ 称为几乎接触度量结构。若 M 上的几乎接触度量结构 $(\eta, \xi, \varphi, \mathbf{g})$ 满足以下条件，则称其为超 Sasakian 结构：

$$(\nabla_X\varphi)Y = c_1\{\mathbf{g}(X, Y)\xi - \eta(Y)X\} + c_2\{\mathbf{g}(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\}$$

在 M 上的某些标量函数 $c_1 = c_1(x)$ 和 $c_2 = c_2(x)$，其中 ∇ 表示 g 的 Levi-Civita 联络。

现在，设 $(\eta, \xi, \varphi, \mathbf{g})$ 是 M 上的一个超 Sasakian 结构。定义 $\alpha, \beta\colon TM \to [0, \infty)$ 如下：

$$\forall (x, y) \in TM, \quad \alpha(x, y) := \sqrt{\mathbf{g}_x(y, y)}, \quad \beta(x, y) := \epsilon\,\eta_x(y), \tag{4.1}$$

其中 $0 < \epsilon < 1$ 为常数。于是，对于 Randers 度量 $F := \alpha + \beta$，有

$$||\beta||_\alpha = \epsilon.$$

由此可知，由超 Sasakian 流形 $(M, \eta, \xi, \varphi, \mathbf{g})$ 诱导的 Randers 度量类是 M 上的 $(2n+1)$ 维广义 Berwald 度量。

这里，我们给出一个具有消失的 S-曲率的二维Randers度量 $F = \alpha + \beta$。我们证明，如果 F 是广义 Berwald 度量，则它退化为黎曼度量。

例 4. 令 $\mathbf{y} = u\partial/\partial x + v\partial/\partial y \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$。考虑 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$，其中 $\alpha = \alpha(\mathbf{y})$ 和 $\beta = \beta(\mathbf{y})$ 给定为

$$\alpha := \frac{\sqrt{\Big(1 + (1-\epsilon^2)(x^2+y^2)\Big)(u^2+v^2) + \Big(1 + \epsilon^2 + x^2 + y^2\Big)(xv - yu)^2}}{\Big(1 + (1-\epsilon^2)(x^2+y^2)\Big)\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

$$\beta := -\frac{\epsilon(xv - yu)}{1 + (1-\epsilon^2)(x^2+y^2)},$$

且 ϵ 是一个实常数（见 [15]）。 F 在 $|\epsilon|<1$ 的整个球面上定义。值得注意的是，可以将 F 改写为极坐标系下的形式： $x=r\cos(\theta)$， $y=r\sin(\theta)$。表示

$$\alpha=\sqrt{a_{11}\mu^2+a_{12}\mu\nu+a_{21}\nu\mu+a_{22}\nu^2},\quad \beta=b_1\mu+b_2\nu,$$

其中

$$a_{11}=\frac{1}{(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)},\quad a_{12}=a_{21}=0,\quad a_{22}=\frac{r^2(1+r^2)}{\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^2},$$
$$b_1=0,\qquad b_2=-\frac{\epsilon r^2}{1+(1-\epsilon^2)r^2}.$$

令 $A:=det(a_{ij})$。于是，得到

$$a^{11}=\frac{r^2(1+r^2)}{A\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^2},\quad a^{22}=\frac{1}{A(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)},\quad a^{12}=a^{21}=0,$$
$$b^1=0,\quad b^2=-\frac{\epsilon r^2}{A(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^2}.$$

因此，我们得到

$$\|\beta\|_\alpha^2=a^{ij}b_ib_j=b_ib^i=\frac{\epsilon^2r^4}{A(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^3}\neq constant. \tag{4.2}$$

(4.2) 表明 F 不是广义 Berwald 度量。另一方面，直接计算可得

$$r_{11}=r_{22}=0,\qquad r_{12}=r_{21}=\frac{\epsilon^3r^3}{(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^2},$$
$$s_{11}=s_{22}=0,\qquad s_{12}=\frac{\epsilon r}{\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^2}=-s_{21}$$
$$s_1=\frac{\epsilon^2r}{(1+r^2)\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)},\qquad s_2=0,$$
$$r_1=-\frac{\epsilon^4r^5}{A(1+r^2)^2\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^4},\quad r_2=0.$$

容易发现 $r_{ij}+b_is_j+b_js_i=0$。于是，由 [5], 中的引理 3.2.1 可得 S $=0$。此外，可以看出以下结论成立

$$r_i+s_i=\frac{\epsilon^2r\big[A(1+r^2)(1+(1-\epsilon^2)r^2)^3-\epsilon^2r^4\big]}{A(1+r^2)^2\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^4}. \tag{4.3}$$

根据 (4.3)， F 是广义 Berwald 度量（等价地， $r_i+s_i=0$）当且仅当$\epsilon=0$ ，或者以下结论成立

$$\big(1+(1-\epsilon^2)r^2\big)^4=0. \tag{4.4}$$

(4.4) 与 $|\epsilon|<1$ 矛盾。因此， F 是广义 Berwald 度量，当且仅当 $\epsilon=0$，或等价地，当 $\beta=0$。在这种情况下， F 化为标准黎曼度量 $F=\alpha$。

例 5。（Xu）已证明，芬斯勒度量 $F = F(x, y)$ 是 Randers 型 $F = \alpha+\beta$，当且仅当它是黎曼流形（M, h）上的导航问题的解（见 [5]）。齐默洛导航是研究具有特定黎曼曲率和非黎曼曲率性质的 Randers 度量的有效方法。更确切地说，流形 M 上的任意 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 都是以下齐默洛导航问题的解

$$\mathbf{h}\Big(x, \frac{y}{F} - \mathcal{W}_x\Big) = 1,$$

其中，h $= \sqrt{h_{ij}(x)y^iy^j}$ 是黎曼度量， $\mathcal{W} = \mathcal{W}^i(x)\partial/\partial x^i$ 是满足下列条件的向量场

$$\mathbf{h}(x, -\mathcal{W}_x) = \sqrt{h_{ij}(x)\mathcal{W}^i(x)\mathcal{W}^j(x)} < 1.$$

事实上， α 和 β 分别为

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda h^2 + \mathcal{W}_0}}{\lambda}, \qquad \beta = -\frac{\mathcal{W}_0}{\lambda},$$

并且，此外，

$$\lambda := 1 - \|\mathcal{W}\|_h^2, \qquad W_0 := h_{ij}\mathcal{W}^i y^j.$$

更多详情请参见 [5]。于是， F 可写为

$$F = \frac{\sqrt{\lambda \mathbf{h}^2 + \mathcal{W}_0^2}}{\lambda} - \frac{\mathcal{W}_0}{\lambda}. \tag{4.5}$$

在这种情况下，(h $\mathcal{W}$)这一对称为 F的导航数据。

现在，设 G/H 为任意齐性流形， $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ 为其约化分解。假设 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1$ 是一个 Ad(H)- 不变分解，其中 $\mathfrak{m}_0$ 是一维的，并且 Ad(H) 在 $\mathfrak{m}_0$ 上的作用是平凡的。设 h 是 G/H上的一个 G-不变黎曼度量，使得 $\mathfrak{m}_0$ 和 $\mathfrak{m}_1$ 彼此 h-正交。设 $\mathcal{W}$ 是G/H上的一个 G-不变向量场，且满足 $\mathcal{W}(o) \in \mathfrak{m}_0\backslash\{0\}$。那么，使用数据(h $\mathcal{W}$)进行导航过程，可得到一个具有 S $= 0$ 的 G-不变广义 Berwald Randers 度量（见 [7]）。

例 6。（Xu）正如我们在引言中提到的， $\mathbb{S}^3$ 上的 Bao-Shen 的 Randers 度量是具体的广义 Berwald 度量，也就是说，它们不是 Berwald 型的。任意非黎曼齐性 Randers 球面 $\mathbb{S}^3 = SU(3)/SU(2)$（包括 Bao-Shen 的 Randers 度量）都满足 S $= 0$ ，且具有常数的逐点 $\|\beta\|_\alpha$- 范数。于是，每个非黎曼齐性 Randers 球面都是广义 Berwald 度量。一个 $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$（其中 $\mathbb{S}^3 = SU(3)/SU(2)$，且导航场与 $\mathbb{S}^3$-因子相切）是一个四维广义 Berwald Randers 度量（见 [29]）。

致谢：作者非常感谢 Ming Xu 对本手稿提出的宝贵意见。同时，感谢他为我们提供例5和例6，这些例子提升了我们手稿的质量。此外，我们还感谢 Behzad Najafi、Mansoor Barzegari 和 Libing Huang 阅读本手稿并提出意见。

参考文献

[1] H. Akbar-Zadeh，关于具有常截面曲率的芬斯勒空间， ´比利时皇家科学院公报，5e S´érie - Tome LXXXIV（1988），281-322。[2] B. Aradi，左不变芬斯勒流形是广义 Berwald 流形，欧洲纯粹与应用数学杂志 8(1)（2015），118–125。[3]G. S. Asanov，具有 Berwald 条件和 Landsberg 条件的 Finsleroid- 芬斯勒空间，arXiv:math0603472。[4] N. Bartelmeß 和 V. S. Matveev，单色度量是广义 Berwald 度量，Differ. Geom. Appl. 58（2018），264-271。[5] X. Cheng 和 Z. Shen，《芬斯勒几何——经由兰德斯空间的一种方法》，施普普林格，海德堡和科学出版社，北京，2012。[6] X. Cheng 和 Z. Shen，具有各向同性 S-曲率的一类芬斯勒度量，Israel J. Math. 169（2009），317-340。[7] Z. Hu 和 S. Deng，具有各向同性 S-曲率和正旗曲率的齐性兰德斯空间，Math. Z. 270（2012），989-1009。[8] L. Huang 和 X. Mo，李群上不变芬斯勒度量的测地线，预印本。[9] S. Ivanov，单色芬斯勒曲面与局部椭球特征刻画，Proc. Am. Math. Soc. 146（2018），1741-1755。[10] X. Mo 和 X. Wang，关于常S曲率的芬斯勒度量，Bull. Korean Math. Soc. 50(2)（2013），639-648。[11] X. Cheng、H. Wang 和 M. Wang，具有相对各向同性平均兰斯伯格曲率的（α, β）-度量，Publ. Math. Debrecen. 72（2008），475-485。[12] Z. Shen，芬斯勒几何中的一类 Landsberg 度量，Canadian. J. Math. 61(6)（2009），1357-1374。[13] Z. Shen，《喷射与芬斯勒空间微分几何》，克吕维尔学术出版社，2001。[14] Z. Shen，具有 $\mathbf{K} = 0$ 和 $\mathbf{S} = 0$的芬斯勒度量，Canadian J. of Math. 55（2003），112-132。[15] Z. Shen，具有常曲率的二维芬斯勒度量，Manuscripta Mathematica. 109(3)（2002），349-366。[16] Z. I. Szab´o，具有许多等距变换的广义空间，专论几何，11（1981），369-383。[17] Sz. Szak´al 和 J. Szilasi，广义 Berwald 流形的新方法 I，SUT J. Math. 37（2001），19–41。[18]J. Szilasi 和 Sz. Szak´al，广义 Berwald 流形的新方法 II，Publ. Math. Debrecen，60（2002），429–453。

[19] J. Szilasi、R. L. Lovas 和 D. Cs. Kert´esz，《联络、喷射与芬斯勒结构》，World Scientific，2014年。[20] A. Tayebi 和 M. Barzegari，关于带有 (α, β)-度量的广义 Berwald 空间，《Indagationes. Math. (N.S.)》27（2016年），670-683。[21]A. Tayebi 和 E. Peyghan，关于 Douglas 曲面，《Bull. Math. Soc. Science. Math. Roumanie》55（103）卷，第3期（2012年），327-335。[22] A. Tayebi 和 M. Rafie Rad，各向同性 Berwald 度量的 S-曲率，《Sci. China. Series A: Math.》51（2008年），2198-2204。[23] M. Xu 和 S. Deng，齐性芬斯勒空间的 Killing 标架与 S-曲率，《Glasgow. Math. Journal》57（2015年），457-464。[24]M. Xu 和 S. Deng，正规齐性芬斯勒空间，《《变换群》》22（2017年），1143-1183。[25] C. Vincze，关于一种特殊类型的广义 Berwald 流形：保持切向量芬斯勒长度的半对称线性联络，《European Journal of Math.》3（2017年），1098-1171。[26] C. Vincze，关于带有半对称相容线性联络的 Randers 流形，《Indagationes. Math. (N.S.)》26（2015年），363-379。[27] C. Vincze，关于带有半对称相容线性联络的广义 Berwald 流形，《Publ. Math. Debrecen》83（2013年），741-755。[28] C. Vincze、T. R. Khoshdani、S. M. Z. Gilani 和 M. Ol´ah，关于二维广义 Berwald 流形的相容线性联络：一种经典方法，《Commun. Math.》27（2019年），51-68。[29] M. Xu，芬斯勒几何中的测地轨道球面与常曲率，《Differ. Geom. Appl.》61（2018年），197-206。[30] L. Zhang 和 S. Deng，关于广义正规齐性 Randers 空间，《Publ. Math. Debrecen》90（2017年），507-523。

Akbar Tayebi 和 Faezeh Eslami 数学系，理学院，库姆大学，伊朗库姆。电子邮箱：akbar.tayebi@gmail.com 电子邮箱：faezeh.eslami70@gmail.com