arXiv:2301.01004v1 [math.RT] 3 Jan 2023

自旋范数与 λ 范数

董超平和杜成宇

Abstract. 给定一个 K型 π，已知其自旋范数（由第一作者提出）不小于其 λ 范数（由 Vogan 提出）。也就是说，$\|\pi\|_{\text{spin}} \geq \|\pi\|_{\text{lambdao}}$。本文旨在描述哪些 π 实际上可以取等号。我们将这一结果应用于温和狄拉克级数。在实群的情形下，我们证明，在所有具有实无穷小特征的温和模中，温和狄拉克级数分为 $\#W^1$ 部分。

1. Introduction

设 G 是一个 Harish-Chandra类 [5]中的线性实约化李群。也就是说，

- G 只有有限个连通分支;
- 导出群 $[G, G]$ 的中心是有限的;
- 任意 $g \in G$的伴随作用 $\mathrm{Ad}(g)$都是 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$的内自同构，其中$\mathfrak{g}_0$ 是 G的李代数。

设 θ 是 G的 Cartan对合。我们假设 θ 的不动点子群 $K = G^\theta$ 是 G的极大紧子群。设 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{s}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$相应的 Cartan分解。复化时省略下标。

令 $\hat{}_G{}^{\text{temp},\ \text{o}}$ 表示具有实无穷小特征（按等价类计）的不可约温和表示集合。令 K 表示 K-型的集合。Trapa [10], 在 Vogan 的论文 [12]之后指出了以下双射。

定理 1.1. 设 X 是任意具有实无穷小特征的不可约温和 $(\mathfrak{g}, K)$-模。那么 X 有唯一的最低 K-型，且其重数为一。此外，映射

$$\phi : \hat{G}^{\text{temp,o}} \to \hat{K}$$

通过取最低的 K-型定义，是一个定义良好的双射。

受 Vogan 引入的 λ 范数启发，第一作者为狄拉克级数（即具有非零狄拉克上同调的 G 的不可约酉表示）的分类引入了自旋范数。关于狄拉克上同调的概念，请参阅 [6] 及其中的参考文献。文献 [4] 证明，K-型 π 的自旋范数不小于其 λ 范数。也就是说，

$$\|\pi\|_{\text{spin}} \geqslant \|\pi\|_{\text{lambda}}. \tag{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 22E46。

Key words and phrases. λ 范数、自旋范数、温和表示。

这个不等式在定理 1.1 的框架下有一个很好的解释。事实上，令 $\hat{}_{G^{\text{temp, d}}}$ 收集 $\hat{}_{G^{\text{temp, o}}}$ 中具有非零狄拉克上同调的成员。设

$$\hat{K}_e := \{\pi \in \hat{K} |\ \|\pi\|_{\text{spin}} = \|\pi\|_{\text{lambda}}\}.$$

定理 1.2。([2])映射 ϕ 限制为 $\hat{}_{G^{\text{temp, d}}}$ 是到 $\hat{}\ K_e$上的双射。更确切地说，任意成员 $\pi \in \hat{}_{G^{\text{temp, o}}}$ 是狄拉克级数，当且仅当不等式 (1) 在其唯一的最低 K-型上成为等式。

给定任意一个 K-型 π，计算 $\|\pi\|_{\text{lambda}}$ 和 $\|\pi\|_{\text{spin}}$都并不容易。因此，判断不等式 (1) 是否为严格不等式颇为微妙。本文旨在为这一问题给出一个判据。我们的主要结果是定理 3.4。其主要思想是在 $\|\pi\|_{\text{lambda}}$ 和 $\|\pi\|_{\text{spin}}$之间插入一个中间值。作为应用，我们的结果表明，温和狄拉克级数应当分为 $\#W^1$ 部分。 W^1的定义见 (5)。

本文的结构如下：在第 2 节中，我们回顾 λ 范数和自旋范数。然后在第 3 节中推导我们的主要结果。最后一节讨论温和狄拉克级数。

2. Preliminaries

在本 节中，我们简要回顾自旋范数和 λ 范数的定义 .

2.1. λ 范数。我们沿用上一节中的记号 K、G、$\mathfrak{k}$、$\mathfrak{s}$、θ 等。设 T 是 K 的一个极大环面， $\mathfrak{t}_0$ 是 T 的李代数。回顾一下，解析 Weyl 群定义为

$$W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = N_K(T)/A_K(T).$$

它作用于根系 $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$。固定一组正根 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$，并定义

$$R(G) := \{r \in W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) | r\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})\}.$$

给定一个 K 型 π，根据 [9], 的引理 0.1， π 作为 $\mathfrak{k}$-模 ˆ ˆ 的最高权集合，是 $R(G)$ 在 $T \in i\mathfrak{t}_0^*$ 上的单个轨道，其中 T 是 T 的特征阿贝尔群。

现在，给定任意一个 K 型 π，取其一个最高权 μ。那么 $\mu \in i\mathfrak{t}_0^*$ 是 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 的支配整元。记 ρ_c 为 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 中所有根之和的一半。选取一个正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$，使 $\mu + 2\rho_c$ 为支配的。记 ρ 为 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 中所有根之和的一半。令 P 为对应于 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的到支配室 $C(\mathfrak{g})$ 的投影映射。那么 $\|P(\mu + 2\rho_c - \rho)\|$ 与 μ 和 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的选择无关，参见 [9] 的第1节和推论 2.4。现在我们可以讨论 λ 范数了。

ˆ 定义 2.1. ([11, 1]) 对于任意 $\pi \in K$， π 的 λ 范数定义为

$$\|\pi\|_{\text{lambda}} := \|P(\mu + 2\rho_c - \rho)\|, \tag{2}$$

其中 μ 是 π 的任意最高权。对于任意不可约容许 $(\mathfrak{g}, K)$-模 X， X 的 λ 范数定义为

$$\|X\|_{\text{lambda}} := \min_{\pi} \|\pi\|_{\text{lambda}}, \tag{3}$$

其中 π 遍历 X中出现的所有 K型。若 K型 π 出现在 X 和 $\|\pi\|_{\text{lambda}} = \|X\|_{\text{lambda}}$中，则称其为 X 的最低 K型。

2.2. 自旋范数。尽管自旋范数的原始定义涉及克利福德代数 $C(\mathfrak{s})$的自旋模 S_G ，但我们的讨论并不需要深入理解它。我们主要使用的工具是根系及其韦伊群。

ˆ 定义 2.2. ([4]) 对任意 $\pi \in K$，其自旋范数定义为

$$\|\pi\|_{\text{spin}} := \min \|\gamma + \rho_c\|,$$

˜其中 γ 遍历 $\pi \otimes S_G$ 中所有 K-型的最高权。对于任意不可约可容许 $(\mathfrak{g}, K)$-模 X，其自旋范数定义为

$$\|X\|_{\text{spin}} := \min_{\pi} \|\pi\|_{\text{spin}},$$

其中 π 遍历 X 中出现的所有 K-型。若 π 在 X 中出现且满足 $\|\pi\|_{\text{spin}} = \|X\|_{\text{spin}}$，则称 π 为 X 的自旋最低 K-型。

3. When is the inequality (1) strict?

我们固定一个正根系 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$，并用 ρ_c 表示其中根的半和。令$W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$（分别为 $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$）表示 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$（分别为 $\Delta(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$）的韦伊群。令 $C(\mathfrak{k})$ 表示 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 的闭支配韦伊尔室。对于任意 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，我们用 $\{\mu\}$ 表示 $C(\mathfrak{k})$ 中唯一一个在 $W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 的作用下与 μ 共轭的权。令 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 为 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的一个包含 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 的正根系。

Lemma 3.1. ([4, 引理 3.5]) 对于任何 K-型 π，其最高权为 $\mu \in \mathfrak{t}^*$，我们有 e

$$\|\mu\|_{\text{spin}} = \min_{w \in W^1} \|\{\mu - w\rho + \rho_c\} + \rho_c\|, \tag{4}$$

其中

$$W^1 := \{w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t}) | wC(\mathfrak{g}) \subseteq C(\mathfrak{k})\}. \tag{5}$$

引理 3.2. ([7, §13.3, 引理 B]) 设 $\lambda \in C(\mathfrak{k})$。则

$$\|\lambda + \rho_c\| \geqslant \|w\lambda + \rho_c\|$$

对于任意 $w \in W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$。此外，当且仅当 $\lambda = w\lambda$ 时等号成立。

引理 3.3. 设 Δ 为一个根系，其韦伊群为 W。固定一个正根集 Δ^+，并记 ρ 为所有正根之和的一半。对于任意支配权 λ，有以下不等式

$$\|\lambda - \rho\| \leqslant \|\lambda - w\rho\|, \ \forall w \in W. \tag{6}$$

此外，若 λ 关于 $w\Delta^+$ 是支配的，则有

$$\|\lambda - \rho\| = \|\lambda - w\rho\|$$

否则，不等式 (6) 是严格的。

证明。我们先证明该不等式。计算以下差值

$$\|\lambda - \rho\|^2 - \|\lambda - w\rho\|^2 = -2(\lambda, \rho - w\rho). \tag{$*$}$$

众所周知， $\rho - w\rho$ 是正根之和。根据假设，权 λ 是支配的。因此，配对 $(\lambda, \rho - w\rho)$ 非负，结论 (6) 得证。

现在假设 λ 相对于 $w\Delta^+$是支配的。注意，相对于 $w\Delta^+$ 的正根半和为 $w\rho$。将 (6) 应用于 λ、 $w\Delta^+$ 和 $w\rho$，得到

$$\|\lambda - w\rho\| \leqslant \|\lambda - w^{-1}(w\rho)\| = \|\lambda - \rho\|.$$

因此，在当前情形下，(6) 成为等式。

No现在假设 λ 关于新的正集 $w\Delta^+$不是支配的。定义 ne

$$D_w := \{\gamma \in \Delta^- | \gamma \in w\Delta^+\},$$

其中 $\Delta^- = -\Delta^+$。众所周知,

$$\rho - w\rho = \sum_{\gamma \in D_w} (-\gamma).$$

根据假设， λ 关于 $w\Delta^+$不是支配的。必定存在 $\beta \in w\Delta^+$ ，使得$(\lambda, \beta) < 0$。但它不可能属于 Δ^+，因为 λ 关于 Δ^+是支配的。因此， $\beta \in D_w$。继续考察(∗)，可得

$$-(\lambda, \rho - w\rho) = -\left(\lambda, \sum_{\gamma \in D_w} (-\gamma)\right) = \left(\lambda, \sum_{\gamma \in D_w} \gamma\right) \leqslant (\lambda, \beta) < 0.$$

因此，在这种情况下，(6) 是严格不等式。 □

我们来陈述本节的主要结果。

定理 3.4. 设 π 是 K 的一个不可约表示，其最高权为 μ。选取正根系 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$，使得 $\mu + 2\rho_c$ 是支配的。令 $C(\mathfrak{g})$ 为对应于 $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的闭支配韦伊尔室。那么，不等式 (1) 严格成立，当且仅当以下条件之一成立:

(a) $\mu + 2\rho_c$ 对于 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 是非正则的。(b) 对所有满足 $\mu + 2\rho_c \in wC(\mathfrak{g})$ 的 $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$， $\mu - w\rho + \rho_c \notin C(\mathfrak{k})$。

Proof. 令 $P(\cdot)$ 为到锥 $C(\mathfrak{g})$ 的投影映射。只需证明

$$\|\pi\|_{\text{lambda}} = \|P(\mu + 2\rho_c - \rho)\| \leq \|\mu + 2\rho_c - \rho\| \leq \|\pi\|_{\text{spin}}, \tag{7}$$

第一个等式成立当且仅当 (a) 成立，第二个等式成立当且仅当 (b) 成立。

根据勾股定理，(7) 中的第一个不等式成立，并且当且仅当 $P(\mu + 2\rho_c - \rho) = \mu + 2\rho_c - \rho$ 时取等号，这等价于 $\mu + 2\rho_c - \rho \in C(\mathfrak{g})$。后者等价于 (a)，因为 $\mu + 2\rho_c \in C(\mathfrak{g})$ 且 $\mu + 2\rho_c$ 是整数。

现在考虑 (7) 中的第二个不等式。我们将所有满足 $\mu + 2\rho_c \in wC(\mathfrak{g})$ 的 $w \in W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 收集为 $W^1(\mu)$。由于 $\mu + 2\rho_c \in C(\mathfrak{k})$，可得 $W^1(\mu) \subseteq W^1$。此外，由于 $\mu + 2\rho_c \in C(\mathfrak{g})$，单位元 $e \in W^1(\mu)$。

利用引理 3.1 和 3.2，我们有

$$\|\pi\|_{\text{spin}} = \min_{w \in W^1} \|\{\mu - w\rho + \rho_c\} + \rho_c\| \geqslant \min_{w \in W^1} \|\mu - w\rho + 2\rho_c\|. \tag{8}$$

取引理 3.3 中的 $\lambda = \mu + 2\rho_c$ 和 $\Delta^+ = \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$。我们有

$$\|\mu - w\rho + 2\rho_c\| \geq \|\mu - \rho + 2\rho_c\|. \tag{9}$$

此外，当 $w \notin W^1(\mu)$ 时，不等式 (9) 是严格的；然而，当 $w \in W^1(\mu)$ 时，它是等式。现在，(7) 中的第二个不等式由 (8) 和 (9) 得出。

假设 (b) 成立。对于任意 $w \in W^1 \setminus W^1(\mu)$，有

$$\|\{\mu - w\rho + \rho_c\} + \rho_c\| \geqslant \|\mu - w\rho + 2\rho_c\| > \|\mu - \rho + 2\rho_c\|.$$

另一方面，对于所有 $w \in W^1(\mu)$，有

$$\|\{\mu - w\rho + \rho_c\} + \rho_c\| > \|\mu - w\rho + 2\rho_c\| = \|\mu - \rho + 2\rho_c\|.$$

第一个严格不等式源于假设 $\mu - w\rho + \rho_c \notin C(\mathfrak{k})$。假设 (b) 不成立。那么存在某个 $w_0 \in W^1(\mu)$，使得 $\mu - w_0\rho + \rho_c \in C(\mathfrak{k})$。因此，

$$\|\{\mu - w_0\rho + \rho_c\} + \rho_c\| = \|\mu - w_0\rho + 2\rho_c\| = \|\mu - \rho + 2\rho_c\|.$$

由于我们已经证明

$$\min_{w \in W^1} \|\{\mu - w\rho + \rho_c\} + \rho_c\| \geq \|\mu - \rho + 2\rho_c\|,$$

我们必有 $\|\pi\|_{\text{spin}} = \|\mu - \rho + 2\rho_c\|$.

总之，式 (7) 中的两个不等式分别由 (a) 和 (b) 控制。因此，$\|\pi\|_{\text{spin}} > \|\pi\|_{\text{lambda}}$ 成立，当且仅当 (a) 和 (b) 中至少有一个成立。□

我们从上述证明中记录一个有趣的推论。

推论 3.5. 若对于某个 $w \in W^1(\mu)$，$\mu + \rho_c - w\rho \in C(\mathfrak{k})$。则

$$\|\mu\|_{\text{spin}} = \|\mu + 2\rho_c - \rho\|. \tag{10}$$

4. Application to tempered Dirac series

我们将具有非零狄拉克上同调的不可约温和表示称为温和狄拉克级数。结合定理 3.4 和定理 1.2，可得以下结果。

定理 4.1. 设 X 是具有实无穷小特征的温和 $(\mathfrak{g}, K)$-模。设 π 是 X 的唯一最低 K-型，其最高权为 μ。则 $H_D(X) = 0$ 当且仅当

(a) $\mu + 2\rho_c$ 对于 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 是非正则的；或 (b) 对任意 $w \in W^1(\mu)$，
$\mu - w\rho + \rho_c$ 对于 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 都不是支配的。

例 4.2. 在特殊情形下，$W^1 = \{e\}$适用于复李群，$SL(2n+1, \mathbb{R})$、$SL(n, \mathbb{H})$ 以及线性 $E_{6(-26)}$，此时我们总有 $\mu + 2\rho_c$ 对于 $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 是正则的。因此，$H_D(X) = 0$ 当且仅当 $\mu - \rho + \rho_c$ 对于 $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ 是支配的。

当 $\#W^1 > 1$ 时，从 W^1 中选取两个不同的元素 w_1、w_2，使得 $w_1 C(\mathfrak{g}) \cap w_2 C(\mathfrak{g})$ 是 $w_1 C(\mathfrak{g})$ 的一个余维为一的面。于是，对任意满足 $\mu + 2\rho_c \in w_1 C(\mathfrak{g}) \cap w_2 C(\mathfrak{g})$ 的 μ，条件 (a) 都成立。这表明，G 的温和狄拉克级数应由那些使 $H_D(X)$ 为零的不可约温和 X 分成 $\#W^1$ 部分。

从现在起，我们用圆圈表示一种 K 型，并且当且仅当 (1) 取等号时将其涂色。下面来看几个具体例子。



FIGURE 1. 若干种 K型的 $SL(2,\mathbb{R})$

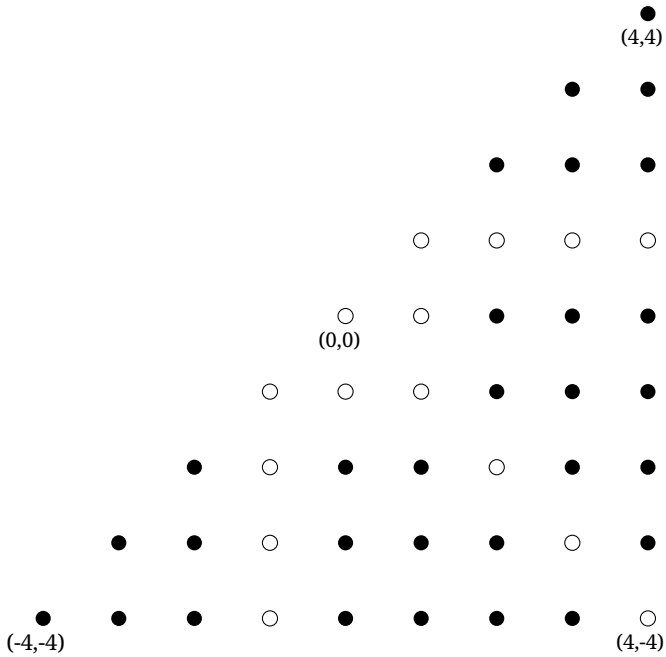

FIGURE 2. K 型的某些 $Sp(4,\mathbb{R})$

例4.3。考虑 SL(2, $\mathbb{R}$), 其中 $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \Delta(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) = \{\pm 2\}$。那么 $\#W^1 = 2$ and$C(\mathfrak{g}) \cap sC(\mathfrak{g}) = \{0\}$, 其中 s 是 W^1 中的非平凡元素。由于 $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ 为空集, 条件 (b) 在此不起作用。因此, $\mu = 0$ 是满足 $\|\mu\|_{\text{spin}} > \|\mu\|_{\text{lambda}}$ 的唯一 K 型, 而 $SL(2,\mathbb{R})$ 的温和狄拉克级数分为两部分。见图1。

例4.4。考虑 $G = Sp(4,\mathbb{R})$。令 $K = U(2)$ 和 $T = U(1) \times U(1)$。因此 $\mathfrak{k}$ 有一个一维中心。固定

$$\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t}) = \{(1,-1)\}, \quad \Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t}) = \{(1,-1),(2,0),(0,2),(1,1)\}.$$

相应的简单根为 $\alpha_1 = (1,-1) = 2\rho_c$, 以及 $\alpha_2 = (0,2)$。 K 型的最高权由一对整数 (x,y) 表示, 其中 $x \geq y$。

的条件 (a) 表示, 三条直线 $y = 1$、 $x = -1$ 和 $y = -x$ 上的 K 型不应被涂色。这些直线交于点 $(-1,1)$, 即 $-2\rho_c$。条件 (b) 进一步表示, (1, 0) 和 (0, -1) 不应被涂色。现在, 图2表明, $Sp(4,\mathbb{R})$ 的温和狄拉克级数分为四部分。

例4.5. 令 G be $G_{2(2)}$ 为线性分裂的 G_2, 它是无中心的、连通的, 但不是单连通的。我们采用 Knapp [8] 中所述的 $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 和 $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ 的简单根。令

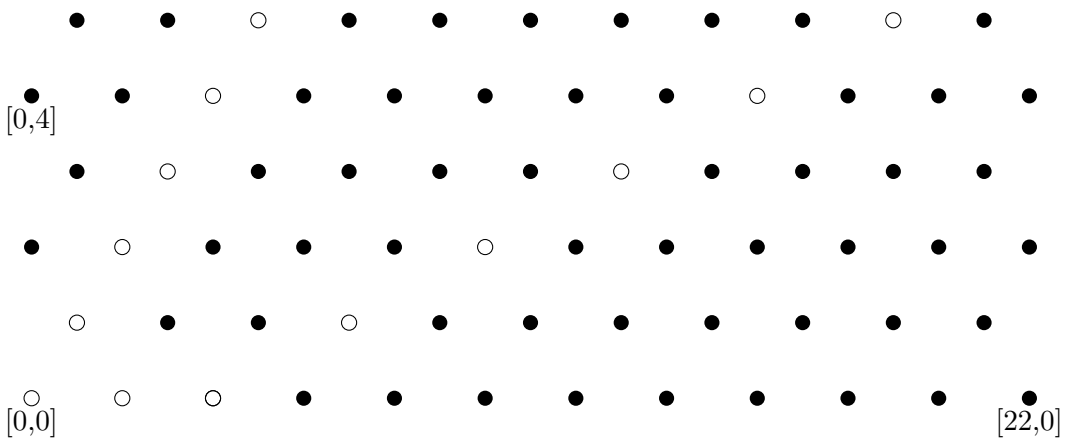

FIGURE 3. 若干 K-型线性分裂 G_2

α_1 be 为短单根， α_2 be 为长单根。在此情况下， $\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ 属于 G_2，型，而 $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ 属于 $\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_1$ 型。我们固定 $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})=\{\gamma_1,\gamma_2\}$，其中 $\gamma_1:=\alpha_1$ 且 $\gamma_2:=3\alpha_1+2\alpha_2$。令 ω_1,ω_2 为 $\Delta(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ 的基本权，使得 $(\omega_i,\alpha_j^\vee)=\delta_{ij}$.。根据最高权定理， K 型由 $[a,b]:=a\omega_1+b\omega_2$， a，$b\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 参数化，其中 $a+b$ 为偶数。

我们在图 3 中展示了部分 K-型，其中底行的 a 坐标为 0、2、4、6、8、.....，最左列的 b 坐标也如此。

现在，条件 (a) 表示，不应给两条直线 $a=b$ 和 $a=3b+4$ 上的 K-型着色。这两条直线交于 $[-2,-2]=-2\rho_c$。从图 3 可以看出，这两条直线将温和狄拉克级数分成三部分。条件 (b) 进一步表示，不应给 $[2,0]$ 着色。

总而言之，我们重新得到了 Dong 的推论 8.4。

FUNDING

Dong 是 su 由国家自然科学基金（资助编号：12171344）支持。

REFERENCES

[1] J. Carmona, *Sur la classification des modules admissibles irréductibles*, 见《非交换调和分析与李群》第11–34页，J. Carmona 和 M. Vergne 编，《数学讲义》第1020卷，施普林格出版社，纽约，1983年。[2] J. Ding 和 C.-P. Dong, *Spin Norm, K-Types, and Tempered Representations*, 《李理论杂志》26 (2016)，651–658。[3] J. Ding、C.-P. Dong 和 L. Yang, *Dirac series for some real exceptional Lie groups*, 《代数杂志》559 (2020) 379–407。[4] C.-P. Dong, *On the Dirac cohomology of complex Lie group representations*, 《变换群》18 (2013), 61 79 [**18** 2013 595 597] -。勘误：《变换群》（），–。Harish-Chandra, [5] *Harmonic analysis on real reductive Lie groups. I. The theory of the constant term*, 《泛函分析杂志》19 (1975)，104–204。[6] J.-S. Huang 和 P. Pandˇzi ´ *Dirac cohomology unitary representations and a proof of a conjecture of* c, , *Vogan* **15** 2002 185 202 《美国数学会杂志》（），–。

[7] J Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 施普林格出版社, 纽约, 1972年。[8] A. Knapp, *Lie Groups, Beyond an Introduction, 2nd edition*, Birkh¨auser, 2002年。[9] S. Salamanca-Riba 和 D.Vogan, *On the classification of unitary representations of reductive Lie groups*, 《数学年刊》148（1998）, 1067–1133。[10] P. Trapa, *A parametrization of ˆK (after Vogan)*, 来自 AIM研讨会 的笔记, 2004年7月。[11] D. Vogan, *Representations of Real Reductive Groups*, Birkh¨auser, 1981年。[12] D. Vogan, *Unitarizability of certain series of representations*, 《数学年刊》120（1984）, 141–187。

(Dong) School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, P . R. China*Email address*: chaopindong@163.com

(Du) School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, P. R. China
Email address: cydu0973@suda.edu.cn