arXiv:2301.01005v1 [math.AG] 3 Jan 2023

芒福德-泰特群与霍奇猜想

Ananyo Dan 和 Inder Kaur

Abstract. 本文研究 *singular* 簇的（上同调）霍奇猜想。我们证明，对于能够嵌入某个芒福德-泰特群保持不变的族中的简单正规交叉簇，猜想成立。我们说明如何构造这样的族。此外，我们证明，对于具有更严重奇点的簇，该猜想可以完全用代数类来表述。

1. Introduction

底域始终为 $\mathbb{C}$。回顾一下，经典霍奇猜想断言：对于给定的光滑射影簇 X， X 中的每个（有理）霍奇类都是 X中某个代数循环的上同调类。该猜想在一些情形下已得到证明（已知结果的综述见 [20, 32] ，相关结果见 [6, 30] ），但一般情形仍未解决。一种典型策略是考察与已知情形双有理等价的光滑低维射影簇。这主要是因为，对不定点集进行消解时产生的例外除子满足霍奇猜想。然而，这种策略在高维情形下失效。另一种方法是考察簇族（例如阿贝尔簇的情形），然后利用诺特-勒夫谢茨型论证，得出该族中非常一般纤维里的霍奇类是某个线丛第一陈类的幂。这意味着霍奇猜想对非常一般纤维成立。本文结合了这两种方法的思路。

众所周知，任意光滑射影簇 X 都与射影空间 X_{hyp} 中的一个超曲面 X_{hyp} 双有理等价。这个超曲面 X_{hyp} 几乎总是奇异的。注意，Jannsen [13, 猜想7.2] 给出了一个针对奇异簇的霍奇猜想的同调版本（另见 [18]）。他证明了经典霍奇猜想与奇异版本等价（见 [13, 定理 7.9]，另见 [19]）。因此，证明 X_{hyp} 的奇异霍奇猜想将意味着 X的霍奇猜想成立。

在本文中，我们给出了奇异簇的霍奇猜想的一种上同调表述。显然，迄今为止这一解释尚未得到探讨，是有其原因的。首先，对于 X 奇异的情形，经典 Chow 群与拉回态射不相容。在 [9,第 17] 章（另见 [10, 命题 4]）中，Fulton 和 MacPherson 发展了运算 Chow 群，记作 $A^p(X)$；它与拉回态射相容，并且对于光滑簇而言与经典 Chow 群重合。然而，即使对于运算 Chow 群，我们也由 [29] 知道，一般而言，不存在具有良好性质的映射 $A^p(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Q})$。

Date: 2023年1月4日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 14C15、14C30、32S35、32G20、14D07、14C05。*Key words and phrases.* 霍奇猜想、极限混合霍奇结构、运算 Chow 群、循环类映射、旗希尔伯特概形、奇异簇。A.D. 获英国工程与自然科学研究理事会资助，资助编号为 EP/T019379/1。I. K. 曾获德国研究联合会、TRR 326 均匀化结构的几何与算术项目资助，项目编号为 444845124，目前获英国工程与自然科学研究理事会资助，资助编号为 EP/W026554/1。

然而，b 根据 Bloch-Gillet-Soul´e 的工作（见 [2]），存在一个（函子性的）循环类映射 :

$$\mathrm{cl}_p : A^p(X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

利用这一点，我们将上同调奇异霍奇猜想表述如下：

奇异霍奇猜想。设 X 是一个射影簇，且奇异轨迹的维数至多为 $p-1$。那么，循环类映射 cl_p 的像与

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X) := \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap F^p \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(X, \mathbb{C}).$$

如果 X 的维数为 n，且上述猜想对 X 成立，那么我们称 X 满足 SHC(p, n)。当然，如果 X 是非奇异的，那么奇异霍奇猜想就等同于经典霍奇猜想。在这种情况下，我们称 X 满足 HC(p, n)。Lefschetz (1, 1) 定理表明，对于任意 n，HC(1, n) 都成立。

回顾一下，任意维数的非常一般超曲面都满足霍奇猜想（因为上同调环由超平面截面的类生成）。因此，我们总能将 X_{hyp} 嵌入一个超曲面的单参数族中，使得一般纤维满足霍奇猜想。于是，人们预期 X_{hyp} 上的霍奇类会“扩展”为该族中的霍奇类。由于该族的一般成员满足霍奇猜想，我们知道，远离中心的霍奇类是某个代数循环的上同调类。通过取闭包这一简单操作，便可将一般纤维上的代数循环延拓到中心纤维。还需要检验中心纤维上这个“新的”代数循环的上同调类是否与我们最初的霍奇类一致。然而，这里存在若干技术问题。从启发式角度看，特化映射并非单射，因此霍奇类未必能够“扩展”。即使某个霍奇类确实能够扩展，它也可能不会限制为一般纤维上的霍奇类！本文研究这些问题，并给出若干簇族的例子，在这些例子中可以规避上述问题。下面将对此作出精确表述。

设 X 是一个维数为 n 的奇异射影簇，且 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个在 Δ^* 上光滑、中心纤维为 X 的射影簇平坦族。固定一个整数 p。记 $\mathfrak{h}$ 为 Δ^* 的万有覆盖，记 $\mathcal{X}_\infty$ 为 $\mathcal{X}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的拉回。根据 Ehresmann 定理，对每个 $u \in \mathfrak{h}$，都有一个上同调群同构 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 和 $H^{2p}(\mathcal{X}_u, \mathbb{Q})$。$H^{2p}(\mathcal{X}_u, \mathbb{Q})$ 上的自然霍奇过滤在 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 上诱导出一个过滤 F^p_u。$H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 上的极限霍奇过滤，是当 u 的虚部趋于 ∞ 时该过滤的极限（详情见 §2.3）。然而，极限霍奇过滤的有理点 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \cap F^p H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})$ 中，可能存在一些并非来自过滤 F^p_u 的有理点的点。即使对于光滑族，Noether-Lefschetz 轨迹也提供了这种现象的例子（见例 3.3）。因此，$H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 中可能包含比一般纤维上更多的霍奇类！这意味着，尽管 $\mathcal{X}_0$ 上的一个霍奇类通过特化映射映到 $\mathcal{X}_\infty$ 上的一个霍奇类，但它未必能延拓为该族上的霍奇类。

霍奇格秩的跃变由芒福德-泰特群刻画（定义见 §3.1）。如果芒福德-泰特群的秩“在极限中保持不变”（精确定义见 §3.2），我们就称 π 为芒福德-泰特族。此外，如果一个奇异射影簇可以嵌入为某个芒福德-泰特族的中心纤维，且其一般纤维满足霍奇猜想，我们就称该簇为 MT-可平滑化。我们证明如下：

定理 1.1. 设 X 是一个具有严格正规交叉奇点、维数为 4 的射影簇。如果 X 是 MT-可平滑化的，那么对于每个 p，X 都满足 SHC(p, 4)。

在下文的定理 5.2 中，我们将证明定理 1.1 对任意维数都成立。显然，定理 1.1 引出了以下问题：

- 问题 1：如何找到 Mumford-Tate族?
- 问题 2：我们能否将定理 1.1 推广到具有更严重奇点的簇?

要全面回答问题 1，需要完整描述所有维数大于 3 的超曲面族的诺特-勒夫谢茨轨迹。这个问题在很大程度上仍未解决。不过，在 §6 中，我们利用对应理论，给出一种从已知的 Mumford-Tate 族构造新族的一般方法。回顾一下，对于两个光滑射影簇 $X \times Y$ 的乘积上的一个相干层 $\mathcal{E}$，其 i 阶陈类会对所有满足 X 维数为 $m =$ 的整数 i 和 k，诱导一个从 $H^{2m-k}(X)$ 到 $H^{2i-k}(Y)$ 的纯霍奇结构态射（见 §6.2）。我们将这种态射记作 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(i,k)}$。如果上同调环 $H^*(Y)$ 作为环由形如 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(i,k)}$ 的态射的像生成，其中 i 和 k 遍历所有整数（见定义 6.3），则称 Y 由 $(X,\mathcal{E})$ 上同调生成。值得注意的是，现有文献中已有若干上同调生成簇的例子。例如，[23] 中，芒福德和纽斯特德证明，对于曲线 C 上带有奇数次行列式的稳定秩二向量丛的模空间，它由数对 $(C,\mathcal{U})$ 上同调生成，其中 $\mathcal{U}$ 是与该模空间相关联的泛丛。在 [21,22] 中，Markmann 对某些曲面上的层的模空间证明了类似结果。在 §6 中，我们将展示这一上同调生成的概念如何帮助构造更多 Mumford-Tate 族。

定理 1.2. 设 $\pi_1\colon \mathcal{X}^* \to \Delta^*$ 和 $\pi_2\colon \mathcal{Y}^* \to \Delta^*$ 是两个光滑射影族。假设存在一个定义在 $\mathcal{X}^* \times_{\Delta^*} \mathcal{Y}^*$ 上的相干层 $\mathcal{U}$，且它在 Δ^*上平坦。设对于一般的 $t \in \Delta^*$，$\mathcal{Y}_t$ 由（$\mathcal{X}_t$，$\mathcal{U}_t$）上同调生成，其中 $\mathcal{U}_t := \mathcal{U}|_{\mathcal{X}_t \times \mathcal{Y}_t}$。若族$\pi_1$ 是（严格的）Mumford-泰特族，则族 π_2也是如此。

精确表述见定理 6.5。一个显而易见的选择是取一个退化到奇异曲线（具有任意奇点）的光滑曲线族。若奇异曲线是节点曲线，证明见命题 6.1。

现在转向问题 2。设 X 是一个维数为 n 的奇异射影簇，且 p 为~整数，使得 $\dim(X_{\mathrm{sing}}) \leq p-1$。设 $\phi\colon X \to X$ 是任意一个奇点消解，且 E 是例外除子。根据 [25, 推论—定义 5.37]，我们在上同调上有一个正合列

$$H^{2p}(X) \to H^{2p}(\widetilde{X}) \to H^{2p}(E).$$

我们猜想，取 代数上同调群会保持该序列的正合性 :

猜想 A. 下列序列是正合的:

$$H_A^{2p}(X) \to H_A^{2p}(\widetilde{X}) \to H_A^{2p}(E).$$

请注意，这一猜想并不涉及霍奇类。令人惊讶的是，我们证明，若X 是 MT-可平滑化的，那么这一猜想等价于奇异霍奇猜想。特别是，

定理 1.3. 设 X 如上所述。若 X 满足 SHC(p,n)，则 X 满足猜想 A。反之，若 HC$(p-1,n-1)$ 成立，且 X是 MT-可平滑化的并满足猜想 A，则X 满足 SHC(p,n)。

精确表述见定理5.5。

提纲：本文结构如下：§2 简要回顾极限混合霍奇结构和旗希尔伯特概形所需的预备知识。§3 回顾芒福德-泰特群的定义，并介绍 Mumford-Tate 族。我们给出这类族的正例和反例。§4 定义极限代数上同调群和极限霍奇类。我们回顾运算 Chow 群和 Bloch-Gillet-Soul´e 循环

类映射的预备知识。我们给出奇异霍奇猜想，并证明一些后文将用到的初步结果。§5 证明本文的主要结果。最后，§6 给出一种构造 Mumford-Tate 族的方法。

2. Preliminaries

本节简要回顾极限混合霍奇结构和旗希尔伯特概形的一些基础知识。极限混合霍奇结构在本文中始终发挥着重要作用。关于这一主题的详细论述，见 [25, §11] 。

2.1. 设置。考虑一个射影簇的平坦族,

$$\pi : \mathcal{X} \to \Delta,$$

在 Δ^* 上光滑，相对维数为 n。假设中心纤维 $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ 是一个约化的简单正规交叉除子。记 $\pi' : \mathcal{X}_{\Delta^*} \to \Delta^*$ 为 π 在穿孔圆盘 Δ^* 上的限制。记 $X_1, ..., X_r$ 为中心纤维 $\mathcal{X}_0$ 的不可约分支。对于 $m \geq 2$，记 $X(m)$ 为 m 个不可约分支交集的不交并， $\mathcal{X}_0$ 即

$$X(m) := \coprod_{\substack{|I|=m \\ I=(1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq r)}} \left(\bigcap_{k=1}^{m} X_{i_k} \right).$$

令 $e : \mathfrak{h} \to \Delta^*$ 为从上半平面 $\mathfrak{h}$ 到穿孔圆盘 Δ^* 的指数映射。记 $\mathcal{X}_\infty := \mathcal{X}_{\Delta^*} \times_{\Delta^*} \mathfrak{h}$ 为 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 经指数映射 e 到 $\mathfrak{h}$ 的基变换。

2.2。单值算子。由于 $\mathfrak{h}$ 是单连通的，自然包含

$$i_s : \mathcal{X}_{e(s)} \hookrightarrow \mathcal{X}_\infty$$

对任意 $s \in \mathfrak{h}$，诱导出上同调群的一个同构:

$$i_s^* : H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Z}).$$

注意，即使 $e(s)$ 不变，态射 i_s^* 也会发生变化。特别地，对于由复合给出的族 π ，我们得到相应的单值算子:

$$T : H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{i_{s+1}^*} H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{(i_s^*)^{-1}} H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Z}).$$

进一步细节参见 [16, 第 67 页， （2.4.13）]。记 $N := -(1/2\pi i)\log(T)$。利用此算子N ，我们将回顾极限霍奇过滤。

2.3. 极限霍奇过滤。记

$$F_s^\bullet H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}) := (i_s^*)^{-1}(F^\bullet H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{C}))$$

$H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{C})$ 上霍奇过滤的原像。 $F_s^k H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})$ 的维数记为m_k，且不依赖于 $s \in \mathfrak{h}$ 的选择。考虑参数化 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})$ 中 m_k 维子空间的格拉斯曼簇，记为 $\mathrm{Grass}(m_k, H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}))$。存在一个自然映射:

$$\mathfrak{h} \to \mathrm{Grass}(m_k, H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})) \text{ sending } s \in \mathfrak{h} \text{ to } \exp(2\pi i s N) F_s^k H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}).$$

此映射在平移 $s \mapsto s + 1$ 下保持不变，并且当 s 的虚部趋于 ∞ 时，它趋于极限 $F^k H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})$，也就是说,

$$F^k H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}) := \lim_{\mathrm{Im}(s)\to\infty} \exp(2\pi i s N) F_s^k H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}).$$

更多细节参见 [16, §I.2.6] 或 [26, 第 254, 255] 页。显然,

$$\lim_{\mathrm{Im}(s)\to\infty} \exp(2\pi i s N)(F_s^p H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{C}) \cap H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})) \subset F^p H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{C}) \cap H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q}). \quad (2.1)$$

这种包含 n 将在 § 中 Mumford-泰特族的定义中发挥重要作用。 3.

2.4. 极限权重滤过。可以观察到，递减滤过

$$F^0 H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{C}) \supseteq F^1 H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{C}) \supseteq \ldots \supseteq F^{2p} H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{C}) \supseteq 0$$

未必是霍奇过滤，即 $F^k \cap \overline{F}^{2p+1-k}$ 未必为 0。Schmid 注意到， $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 可以配备一个递增的极限权重滤过 $W_\bullet$，它由 T 的单值作用导出，使得两个滤过 $F^\bullet$ 和 $W_\bullet$ 共同在 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 上定义一个混合霍奇结构（见 [26, 定理 6.16]）。Steenbrink 在 [28] 中利用谱序列重新得到了极限权重滤过。我们回顾谱序列的 E_1 项:

定理 2.1（ [25, 推论 11.23]）。谱序列

$${}^\infty E_1^{p,q} := \bigoplus_{k\geq \max\{0,p\}} H^{q+2p-2k}(X(2k-p+1),\mathbb{Q})(p-k)$$

其中微分映射 $d: {}^\infty E^{p-1}{}_{,1}{}^q \to {}^\infty E^p{}_{,1}{}^q$ 是限制态射与 Gysin 态射的组合，并在 E_2 处退化。此外， ${}^\infty E^p{}_{,1}{}^q \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 的权重滤过由 ${}^\infty E^p{}_{,2}{}^q = \mathrm{Gr}_q^W H^{p+q}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 给出。

2.5. 特化映射。根据上文提到的 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Z})$ 与 $H^{2p}(\mathcal{X}_s,\mathbb{Z})$ 之间的识别，我们得到一个特化态射（见 [1, §2]），它是混合霍奇结构之间的态射:

$$\mathrm{sp}: H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Z}) \to H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Z}),$$

其中 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 配备了极限混合霍奇结构。利用 Mayer-Vietoris 序列可知， $H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})$ 上的权重滤过来自具有 E_1-项的谱序列:

$$E_1^{p,q} = H^q(X(p+1),\mathbb{Q}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})$$

其中微分 $d: E^{p-1}{}_{,1}{}^q \to E^p{}_{,1}{}^q$ 是限制态射（见 [28, 例 3.5]）。请注意，该谱序列在 E_2 处退化。

注 2.2. 根据上述 $E^j{}_{,1}{}^q$ 和 ${}^\infty E^j{}_{,1}{}^q$ 的定义，我们有一个从 $E^j{}_{,1}{}^q$ 到 ${}^\infty E^j{}_{,1}{}^q$ 的自然态射，它与相应的微分映射 d交换。因此，这诱导出一个谱序列之间的态射:

$$\phi: E_2^{p,q} \to {}^\infty E_2^{p,q}. \quad (2.2)$$

现在我们计 算特化态射在权重分次部分上的核 m:

命题 2.3. 对于 $p \geq 0$，我们有如下形式的正合列:

$$H^{q-2}(X(p+2),\mathbb{Q}) \to E_2^{p,q} \xrightarrow{\phi} {}^\infty E_2^{p,q}$$

其中第一个态射由 Gysin 态射诱导

$$H^{q-2}(X(p+2),\mathbb{Q}) \to H^q(X(p+1),\mathbb{Q}) = E_1^{p,q}$$

并且 ϕ与 (2.2) 中相同。

证明。注意，复合态射

$$H^{q-2}(X(p+2),\mathbb{Q}) \to H^q(X(p+1),\mathbb{Q}) \to H^q(X(p+2),\mathbb{Q}) \text{ is the zero map,}$$

其中，第一个态射就是 Gysin 态射，第二个态射是限制映射。因此，从 $H^{q-2}(X(p+2)\ \mathbb{Q})$ 到 $E^{p,\ q}_{2}$ 存在一个自然映射。谱序列 $E^{p,\ q}_{1}$ 与 $^{\infty}E^{p,\ q}_{1}$ 的区别在于，后一种情况下的微分映射还允许使用 Gysin 态射。因此，态射 ϕ 的核同构于 Gysin 映射的像。这证明了该命题。□

2.6. 旗希尔伯特概形。关于旗希尔伯特概形的详细研究，请参阅 [27, §4.5] 。令

$$\pi : \mathcal{X}_{\Delta^*} \to \Delta^*$$

是穿孔圆盘 Δ^* 上的光滑射影态射。固定 $\mathcal{L}$ 上的相对极化 $\mathcal{L}$，它诱导出将 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 闭浸入相对射影空间 $\mathbb{P}^N_{\Delta^*}$ 的闭浸入，其中 N 为某个整数。由平坦射影族中希尔伯特多项式的恒定性，π 的每个纤维都具有相同的希尔伯特多项式（相对于极化 $\mathcal{L}$），记为 Q（见 [12, 定理 III.9.9]）。回忆一下，给定希尔伯特多项式 P，存在一个射影概形，记作 $\mathrm{Hilb}_{P,\ Q}$，称为旗希尔伯特概形，它参数化形如（$Y \subset X \subset \mathbb{P}^N$）的对，其中 Y（分别为 X）的希尔伯特多项式为 P（分别为 Q）。

旗希尔伯特概形 $\mathrm{Hilb}_{P,Q}$ 配备了一个万有族 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{\text{univ}}$，其 $\mathcal{Y}, \mathcal{X}_{\text{univ}}$ 在 $\mathrm{Hilb}_{P,Q}$ 上平坦；对于每个 $s \in \mathrm{Hilb}_{P,Q}$，相应的纤维 $\mathcal{Y}_s$（分别为 $\mathcal{X}_s$）具有希尔伯特多项式 P（分别为 Q），并满足如下泛性质：若存在一个闭子概形$\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$，它在 Δ^* 上平坦且各纤维的希尔伯特多项式为 P，则存在唯一的态射 $f\colon \Delta^* \to \mathrm{Hilb}_{P,Q}$，使得万有族 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{\text{univ}}$ 在 Δ^* 上的拉回与 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$ 同构（见 [27, 定理 4.5.1]）。

引理 2.4. 对任意足够小的 $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$，存在一个距离原点小于$\epsilon$ 的 $s_\epsilon \in \Delta^*$，使得 $\mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 中余维为 p 的每个闭子簇 Z_{s_ϵ} 都可扩张为一个Δ^*-平坦闭子概形 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$，且其在 s_ϵ 上的纤维 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 与 Z_{s_ϵ} 同构。

证明。由于 π 的纤维的希尔伯特多项式为 Q，由希尔伯特概形的泛性质，存在一个自然态射

$$f : \Delta^* \to \mathrm{Hilb}_Q$$

使得万有族在 Hilb_Q 上到 Δ^* 的拉回同构于 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$。令 S 为所有次数为 $n-p$ 的希尔伯特多项式 P 的集合，其中从 $\mathrm{Hilb}_{P,\ Q}$ 到 Hilb_Q 的自然投影态射的像不包含 f 的像，即与 f 的像正常相交。显然，S 是一个可数集。注意，在 Δ^* 中，可数个真闭子集的并不包含任何开子集。因此，对于每个足够小的 $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$，都存在一个距原点小于 ϵ 的 $s_\epsilon \in \Delta^*$，使得当 P 在集合 S 中变化时，$f(s_\epsilon)$ 不属于从 $\mathrm{Hilb}_{P,\ Q}$ 到 Hilb_Q 的投影的像。换言之，$\mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 中的每个闭子概形都能延拓为 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 中一个 Δ^*-平坦闭子概形。这就证明了该引理。□

3. Mumford-Tate families

本节将介绍 Mumford-Tate 族的概念。这类族是由射影簇组成的光滑族，其相应的极限混合霍奇结构所含的霍奇类“数量不少于”该族一般纤维中的霍奇类。之所以这样命名，是因为芒福德-泰特群由相应张量代数中的霍奇类集合唯一确定。我们先回顾芒福德-泰特群的定义。

3.1. 芒福德-泰特群。记 $\mathbb{S}$ 为域扩张$\mathbb{C}/\mathbb{R}$的魏尔限制标量。设 V 为一个 $\mathbb{Q}$-向量空间。 V 上的权为 n 的纯霍奇结构由以下非恒定的 $\mathbb{R}$-代数群同态给出

$$\phi : \mathbb{C}^* = \mathbb{S}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(V)(\mathbb{R})$$

使得对所有 $r \in \mathbb{R}^* \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$, $\phi(r) = r^n\mathrm{Id}$。令 $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$。与这个群同态相对应的是霍奇分解:

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q} \text{ where } V^{p,q} := \{v \in V_{\mathbb{C}} |\, \phi(z)v = z^p\bar{z}^q v \text{ for all } z \in \mathbb{C}^*\}.$$

与纯霍奇结构 (V, ϕ) 相关联的 Mumford-Tate 群，记作 $\mathrm{MT}(V, \phi)$，是包含 ϕ 像的实点集合的 $\mathrm{GL}(V)$ 的最小 $\mathbb{Q}$-代数子群。记

$$T^{m,n}(V) := V^{\otimes m} \otimes \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})^{\otimes n}.$$

注意， V 上的霍奇结构在 $T^{m,n}(V)$ 上诱导出一个纯霍奇结构。元素

$$F^0(T^{m,n}(V_{\mathbb{C}})) \cap T^{m,n}(V)$$

称为霍奇张量。芒福德-泰特群是 $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}})$ 中固定这些霍奇张量的最大子群（见 [11, §I.B]）。

例 3.1。现在回顾一些众所周知的芒福德-泰特群的例子。

(1) 设 X 为阿贝尔簇，且 $V = H^1(X, \mathbb{Q})$。与 V 上的纯霍奇结构相关联的 Mumford-Tate 群记作 $\mathrm{MT}(X)$。 X 上的极化对应于一个非退化交错形式 $\phi\colon V \otimes V \to \mathbb{Q}$。将关于辛形式 ϕ 的辛相似变换群记作 $\mathrm{GSp}(V, \phi)$:

$$\mathrm{GSp}(V, \phi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ such that } \phi(gv, gw) = \lambda\phi(v, w)\ \forall\ v, w \in V\}.$$

回顾一下，对于任意阿贝尔簇 X， X 的 Mumford-Tate 群包含于辛相似变换群中，即 $\mathrm{MT}(X) \subseteq \mathrm{GSp}(V, \phi)$。若一个阿贝尔簇不含除 0 和 X 以外的阿贝尔子簇，则称其为单的。若 X 是单的，且 $\dim(X) = p$，其中 p 是素数，则 $\mathrm{MT}(X) = \mathrm{GSp}(V, \phi)$。

(2) 设 c 为正整数。设 X 是包含于 $\mathbb{P}^{2m+c}$ 中、余维为 c 的一般完全交子簇，其中 $m \geq 1$。假设 X 的次数至少为 5。记 $V := H^n(X, \mathbb{Q})^{\mathrm{prim}}$，并将 V 上的极化记作 $\phi\colon V \otimes V \to \mathbb{Q}$。将关于 ϕ 的正交相似变换群记作 $\mathrm{GO}(V, \phi)$:

$$\mathrm{GO}(V, \phi) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ 使得 } \phi(gv, gw) = \lambda\phi(v, w)\ \forall\ v, w \in V\}.$$

那么 X 的芒福德-泰特群 $\mathrm{MT}(X) = \mathrm{GO}(V, \phi)$。

3.2. Mumford-Tate族。设置与 §2.1 相同。给定任意 $s \in \mathfrak{h}$，回顾指数映射 e from $\mathfrak{h}$ to Δ^* 以及自然包含 i_s from $\mathcal{X}_{e(s)}$ into $\mathcal{X}_\infty$。回顾,

$$\pi : \mathcal{X}_{\Delta^*} \to \Delta^*$$

光滑射影簇族。对于任意 $s \in \mathfrak{h}$， $H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Q})$ 配备了自然的纯霍奇结构。将与 $H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Q})$ 上这一纯霍奇结构相关联的芒福德-泰特群记为 $\mathrm{MT}_p(\mathcal{X}_{e(s)})$。我们称 π 为权 p 的 Mumford-泰特族，若对于任意满足 $N\gamma = 0$ 的类 $\gamma \in F^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}) \cap H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$，其拉回 $i_s^*(\gamma) \in H^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Q})$ 对一般的 $s \in \mathfrak{h}$ 都被 $\mathrm{MT}_p(\mathcal{X}_{e(s)})$ 固定。若 π 在所有权下都是 Mumford-Tate 的，则称其为 Mumford-Tate。

例 3.2. 下面给出一些 Mumford-Tate族的例子:

(1) 根据Lefschetz超平面截面定理，对于任意光滑超曲面 X in $\mathbb{P}^{2m}$ for$m \geq 2$，我们有 $H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ for any $0 \leq p \leq 2m-1$。这意味着，如果 π 参数化了 $\mathbb{P}^{2m}$中的光滑超曲面，那么 π 是Mumford-Tate的。
(2) 设 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一个素维阿贝尔簇的光滑族，且中心纤维 $\pi^{-1}(0)$ 是单的。那么 π 是一个 Mumford- 泰特族。事实上，由于 π 是一个光滑族，局部系统 $\mathbb{V}_p := R^{2p}\pi_*\mathbb{Q}$ 在穿孔圆盘上没有单值化。因此，对于所有 p， $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 与 $\cong H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})$ 作为纯霍奇结构同构，且局部系统 $\mathbb{V}_p$ 是平凡的。由同样的论证， $R^1\pi_*\mathbb{Q}$ 是平凡局部系统。选取一种平凡化，即可确定如下同一化：

$$\psi_t : V_0 \xrightarrow{\sim} V_t, \text{ where } V_t := H^1(\mathcal{X}_t,\mathbb{Q}) \text{ for any } t \in \Delta.$$

注意， V_0 和 V_t 上的自然极化与同一化 ψ_t 相容。由此得到一个同构：

$$\mathrm{GSp}(V_t,\phi_t) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GSp}(V_0,\phi_0) \text{ sending } \left(V_t \underset{\sim}{\xrightarrow{g}} V_t\right) \text{ to } \left(V_0 \underset{\sim}{\xrightarrow{\psi_t}} V_t \underset{\sim}{\xrightarrow{g}} V_t \underset{\sim}{\xrightarrow{\psi_t^{-1}}} V_0\right). \tag{3.1}$$

现在， $\gamma_0 \in H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q}) = H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})$ 是霍奇类，当且仅当它被 Mumford-Tate 群 MT($\mathcal{X}_0$) 固定。由于 $\mathcal{X}_0$ 是单的，MT($\mathcal{X}_0$) = GSp(V_0,ϕ_0)。利用同一化 (3.1)，由于霍奇类 γ_0 被 GSp(V_0,ϕ_0) 固定，对于任意 $s \in \Delta^*$， $i_s^*(\gamma) = \phi_s(\gamma)$ 都被 GSp(V_s,ϕ_s) 固定。由于 MT($\mathcal{X}_s$) 包含于 GSp(V_s,ϕ_s)， $\phi_s(\gamma)$ 被 MT($\mathcal{X}_s$) 固定。因此， $\phi_s(\gamma)$ 是 $H^{2p}(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q})$ 中的霍奇类。这就证明了 π 是一个 Mumford-泰特族。
(3) 设 π： $\mathcal{X} \to \Delta$ 是余维为c的复交子簇的光滑族，且 $\pi^{-1}(0) = \mathcal{X}_0$。假设 MT($\mathcal{X}_0$) = GO($H^n(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})_{\mathrm{prim}},\phi$)。那么 π是一个 Mumford-Tate族。其证明与上文 (2) 的证明相同，只需将 GSp 替换为 GO。

例 3.3。（非 Mumford-Tate 族的例子）回顾一下，对于 $d \geq 4$，Noether-Lefschetz 定理指出，在 $\mathbb{P}^3$ 中非常一般的光滑 d次曲面的皮卡数为 1。Noether-Lefschetz 轨迹参数化了 $\mathbb{P}^3$ 中皮卡数至少为 2 的光滑 d 次曲面。关于其几何性质，参见 [3–5] 。这意味着存在超曲面的光滑族π： $\mathcal{X} \to \Delta$ ，其中 $0 \in \Delta$ 位于 Noether-Lefschetz 轨迹上，而 Δ^*与 Noether-Lefschetz 轨迹不相交。由于 π 是一个光滑族，局部系统$R^2\pi_*\mathbb{Q}$ 在穿孔圆盘上没有任何单值化。于是，$H^2(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q}) \cong H^2(\mathcal{X}_0.\mathbb{Q})$作为纯霍奇结构同构。特别地，根据关于中心纤维 $\mathcal{X}_0$的条件， $H^2(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$中霍奇格的秩至少为 2。但对于任意 $s \in \Delta^*$， $H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q})$中霍奇格的秩为 1。由于拉回态射 i_s^*是同构，这意味着 $H^2(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$上存在一个霍奇类，它拉回后并非 $H^2(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q})$上的霍奇类。因此，$\pi$不可能是 Mumford-Tate族。

4. A cohomological version of the Hodge conjecture for singular varieties

本节定义极限代数上同调类和极限霍奇类。我们证明，极限代数上同调类包含于单值群不变的极限霍奇类中；对于 Mumford-Tate 族，反过来也成立。在第 4.3 和 4.4 小节中，我们回顾运算 Chow 群以及 Bloch-Gillet-Soul´e 循环类映射所需的预备知识。在第 4.5 节中，我们陈述奇异霍奇猜想；在第 4.6 节中，我们证明，简单正规交叉簇上的代数循环的上同调类包含于霍奇类中。

我们先回顾经典霍奇猜想。

4.1. 经典霍奇猜想。设 X 是一个光滑射影簇。给定一个整数 $p > 0$，用 $Z^p(X)$ 表示由余维为 p 的代数子簇生成的自由阿贝尔群。存在一个自然的循环类映射：

$$\mathrm{cl}_p : Z^p(X) \to H^{2p}(X, \mathbb{Z})$$

它将余维为 p 的代数子簇 $W \subset X$ 关联到基本类$[W] \in H^{2p}(X, \mathbb{Z})$（更多细节见 $[31, §11.1.2]$），并作线性延拓。此外，根据 [31,命题 11.20]，循环类映射 cl_p 的像属于 $H^{p,p}(X, \mathbb{C}) \cap H^{2p}(X, \mathbb{Z})$，也就是说，代数簇的上同调类是霍奇类。将循环类映射张量乘以有理数，得到：

$$\mathrm{cl}_p : Z^p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X, \mathbb{C}).$$

我们用 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X) := H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X, \mathbb{C})$ 表示霍奇类空间，而代数类空间 $H^{2p}_A(X) \subset H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ 是（有理）循环类映射 cl_p 的像。（有理）霍奇猜想断言，对于所有 p，（有理）循环类映射 cl_p 都是满射；也就是说，对所有 p，自然包含 $H^{2p}_A(X) \subset H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X)$ 是等式。

定义 4.1. 设 X 是一个维数为 n 的光滑射影簇。若自然包含 $H^{2p}_A(X) \subset H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X)$ 是等式，我们称 X 满足 $\mathrm{HC}(p, n)$。若对每个 $p \geq 0$，X 都满足 $\mathrm{HC}(p, n)$，则称 X 满足霍奇猜想。若每个维数为 n 的光滑射影簇都满足 $\mathrm{HC}(p, n)$，则称 $\mathrm{HC}(p, n)$ 成立。

4.2. 相对循环类。设

$$\pi : \mathcal{X}_{\Delta^*} \to \Delta^*$$

是一个相对维数为 n 的光滑射影态射。设 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$ 是 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 的一个闭子概形，在 Δ^* 上平坦且相对维数为 $n - p$。$\mathcal{Z}$ 的基本类定义了局部系统 $\mathbb{H}^{2p} := R^{2p}\pi_*\mathbb{Z}$ 的一个整体截面 $\gamma_{\mathcal{Z}}$，使得对于每个 $t \in \Delta^*$，$\gamma_{\mathcal{Z}}$ 在点 t 处的值 $\gamma_{\mathcal{Z}}(t) \in H^{2p}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$ 就是 $\mathcal{Z}_t := \mathcal{Z} \cap \mathcal{X}_t$ 在 $\mathcal{X}_t$ 中的基本类（详见 $[9, §19.2]$ 和 $[25, §B.2.9]$）。局部系统 $\mathbb{H}^{2p}$ 在指数映射 $e : \mathfrak{h} \to \Delta^*$ 下的拉回是一个纤维为 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Z})$ 的平凡局部系统。整体截面 $\gamma_{\mathcal{Z}}$ 定义了 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Z})$ 中的一个元素，我们仍记作 $\gamma_{\mathcal{Z}}$，使得对于每个 $s \in \mathfrak{h}$，像 $i_s^*(\gamma_{\mathcal{Z}})$ 是 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}_{e(s)}$ 在 $\mathcal{X}_{e(s)}$ 中的基本类，其中 i_s 是将 $\mathcal{X}_{e(s)}$ 自然包含到 $\mathcal{X}_\infty$ 中的自然包含。

定义 4.2. 记 $H^{2p}_A(\mathcal{X}_\infty)$ 为 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 中由所有形如 $\gamma_{\mathcal{Z}}$ 的元素生成的子向量空间，其中这些元素来自 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 中相对维数为 $n - p$ 的 Δ^*-平坦闭子概形。我们称 $H^{2p}_A(\mathcal{X}_\infty)$ 为极限代数上同调群。我们定义极限霍奇上同调群

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty) := F^p H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C}) \cap W_{2p} H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}).$$

注意，$H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)$ 不一定是单值化不变的。回顾一下，N 是从 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 到 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})(-1)$ 的混合霍奇结构态射。我们用 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$ 表示 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)$ 的单值化不变部分，即，

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}} := \ker\left(H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty) \hookrightarrow H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})\right).$$

现在我们证明，极限代数上同调群包含于极限霍奇上同调群中。这是霍奇理论中一个经典结果的渐近版本。

命题 4.3。极限代数上同调群包含于极限霍奇上同调群的单值化不变部分中，即自然包含 $H^{2p}_A(\mathcal{X}_\infty) \subset H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 经由 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$。

证明。取 $\gamma \in H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$。根据构造，存在相对维数为 $n-p$ 的 Δ^*-平坦闭子概形 $\mathcal{Z}_1, ..., \mathcal{Z}_r$，它们包含于 $\mathcal{X}_{\Delta^*}$ 中，使得 $\gamma = \sum a_i \gamma_{\mathcal{Z}_i}$ 对于 $a_i \in \mathbb{Q}$ 成立；并且 $\gamma_{\mathcal{Z}_i} \in H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$ 如上定义，由 $\mathcal{Z}_i$ 的基本类导出。根据构造，每个 $\gamma_{\mathcal{Z}_i}$ 都来自局部系统 $\mathbb{H}^{2p}$ 的一个整体截面。因此，$\gamma_{\mathcal{Z}_i}$ 是单值化不变的，即对于 $1 \le i \le r$，$T(\gamma_{\mathcal{Z}_i}) = \gamma_{\mathcal{Z}_i}$。这意味着对于 $1 \le i \le r$，$N\gamma_{\mathcal{Z}_i} = 0$ 成立。

由于 $\mathcal{Z}_i \cap \mathcal{X}_{e(s)}$ 的上同调类属于 $F^pH^{2p}(\mathcal{X}_{e(s)}, \mathbb{Q})$，因此对于所有 $s \in \mathfrak{h}$（记号同 §2.3），都有 $\gamma_{\mathcal{Z}_i} \in F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$。这意味着对于每个 $s \in \mathfrak{h}$，$\gamma_{\mathcal{Z}_i}$ 都属于 $\exp(2\pi i s N)F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$。回顾 §2.3，$F^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 包含 $\exp(2\pi i s N)F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{C})$ 在 $\mathrm{Im}(s)$ 趋近于 ∞ 时的极限。因此，$\gamma_{\mathcal{Z}_i} \in F^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$。由于 $\gamma_{\mathcal{Z}_i}$ 是单值化不变的有理类，它必属于 $W_{2p}H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$（利用不变循环定理，以及中心纤维的 $2p$ 次上同调的权至多为 $2p$ 这一事实）。因此，$\gamma \in H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$。这证明了命题的第一部分。□

现在我们来问，$H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$何时与 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$同构？可以天真地猜测，如果族 π 的一般纤维满足霍奇猜想，那么这种情况就会发生。然而，这还不够（见上文例 3.3）。特别是，还需要额外假设族 π 是 Mumford-Tate 的。我们证明：

命题 4.4. 假设 π 是一个权为 p的 Mumford-Tate 族。若 π的一般纤维满足 HC(p, n)，则从 $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$到 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$ 的包含是一个同构。

注意，命题中的“一般”是指穿孔圆盘 Δ^*中有限个真闭子簇的补集。

证明. 我们需要证明，$H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}}$ 中的每个元素都属于 $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$。由于 π 是一个 Mumford-Tate 族，我们有

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}} = \lim_{\mathrm{Im}(s)\to\infty} (F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \cap H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}}). \tag{4.1}$$

因此，只需证明

$$\lim_{\mathrm{Im}(s)\to\infty} (F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \cap H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}})$$

包含于 $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$ 中。

根据引理 2.4，对于每个足够小的 $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$，都存在距离原点小于 ϵ 的 $s_\epsilon \in \Delta^*$，使得 $\mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 满足霍奇猜想(p, n)，且 $\mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 中每个余维为p 的闭子簇 Z_{s_ϵ} 都延拓为一个 Δ^*-平坦闭子概形 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$，其在 s_ϵ 上的纤维 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}_{s_\epsilon}$ 同构于 Z_{s_ϵ}。正如定义 4.2 之前所述，$\mathcal{Z}$ 的基本类定义了一个截面 $\gamma_{\mathcal{Z}} \in H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$，并且是单值化不变的。由于 $F^pH^{2p}(\mathcal{X}_{s_\epsilon}, \mathbb{Q})$ 同构于$H_A^{2p}(\mathcal{X}_{s_\epsilon})$，这意味着

$$H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}} \cap F_{s_\epsilon}^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) = (i_{s_\epsilon}^*)^{-1}(H_A^{2p}(\mathcal{X}_{s_\epsilon})) \subseteq H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty),$$

其中 i_{s_ϵ} 是 $\mathcal{X}_{e(s_\epsilon)}$ 到 $\mathcal{X}_\infty$中的自然包含。因此，当 $\mathrm{Im}(s)$ 趋于 ∞时，$H^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})^{\mathrm{inv}} \cap F_s^pH^{2p}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q})$ 的极限包含于 $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$ 中。这就证明了该命题。□

4.3. 运算 Chow 群。设 Y 是一个维数为 n 的拟射影簇（可能是奇异的）。考虑 Y 的一个紧化的非奇异超包络（超包络的定义和基本性质见 [10,§1.4.1] ）。该超包络导出一个动机的上链复形（见 [10, §2.1]）。对于任意正整数 p，将函子 $\mathrm{CH}^p(-)$ 作用于该复形后，便可得到一个阿贝尔群 $R^0\mathrm{CH}^p(Y)$，它是相应的上同调群。

作用于动机的上链复形（见 [10, §3.1.4]）。注意， $R^0\mathrm{CH}^p(Y)$ 与紧化或超包络的选择无关。注意,

定理 4.5。固定一个正整数 p。则对 $R^0\mathrm{CH}^p(Y)$，以下结论成立：

(1) 若 Y 是射影的，则 $R^0\mathrm{CH}^p(Y)$ 是由 Fulton 和 MacPherson 定义的运算 Chow 群 $A^p(Y)$（见 [9, 第 17] 章）；(2) 若 Y 是非奇异的（但不一定是射影的），则 $A^p(Y)$ 是由 Y 中余维为 p 的子簇生成的自由阿贝尔群，模去有理等价；(3) 若 Y 是非奇异的，且 $\overline{Y}$ 是 Y 的紧化，其边界为 $Z := \overline{Y}\backslash Y$，则有正合列：

$$0 \to R^0\mathrm{CH}^p(Y) \to R^0\mathrm{CH}^p(\overline{Y}) \to R^0\mathrm{CH}^p(Z) \tag{4.2}$$

(4) 若 Y 是两个真闭子簇 Y_1 和 Y_2 的并，则有正合列：

$$0 \to R^0\mathrm{CH}^p(Y) \to R^0\mathrm{CH}^p(Y_1) \oplus R^0\mathrm{CH}^p(Y_2) \to R^0\mathrm{CH}^p(Y_1 \cap Y_2). \tag{4.3}$$

证明。(1) 这是 [10, 命题 4]。

(2) 这是 [9, 命题 17.3.1 和推论 17.4]。(3) 这是 [10, 定理 2(iii) 和 §3.1.1]。(4) 这是 [10, 定理 2(iv) 和 §3.1.1]。

□

记号 4.6. 若 Y 是拟射影的但非射影的，我们用 $A^p_c(Y) := R^0\mathrm{CH}^p(Y)$ 表示紧支撑运算 Chow 上同调。给定任意紧化 $\overline{Y}$ of Y，定理 4.5 蕴含我们有以下正合列

$$0 \to A^p_c(Y) \to A^p(\overline{Y}) \to A^p(\overline{Y}\backslash Y) \tag{4.4}$$

对于 Y 这个射影簇，存在自然的函子性循环类映射（见 [2] 或 [17, §2]）：

$$\mathrm{cl}_p : A^p(Y) \to \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Y, \mathbb{Q}) \text{ and } \mathrm{cl}^c_p : A^p_c(Y_{\mathrm{sm}}) \to \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}_c(Y_{\mathrm{sm}}, \mathbb{Q})$$

若 Y 非奇异，这些映射与通常的循环类映射一致（见 [31, §11.1.2]）（此处 Y_{sm} 表示 Y 的光滑轨迹）。对于射影的 Y，定义代数上同调群，记为 $H^{2p}_A(Y) \subset \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Y, \mathbb{Q})$，它是循环类映射 cl_p 的像。

4.4. Bloch-Gille-Soul´e 循环类映射。设 Y 是一个概形，且 $\phi\colon U \to Y, \gamma\colon V \to U \times_Y U$ 是包络。令 $p_i\colon V \to U$ 表示 γ 与投影 $U \times_Y U \to U$ 的复合。

定理 4.7.（ [2, 定理 A.3]）存在一个周上同调群的左正合列

$$0 \to CH^*(Y) \xrightarrow{\phi^*} CH^*(U) \xrightarrow{p_1^* - p_2^*} CH^*(V).$$

利用光滑拟射影簇上的循环映射 U 和 V，Bloch-Gillet-Soul´e 使用上述定理得出：

推论 4.8。（ [2, 推论 A.4]）在 $\mathbb{C}$上的簇范畴中，存在一个取值于交换分次环范畴的反变函子之间的“循环类”自然变换：

$$\bigoplus_p \mathrm{cl}_p : \bigoplus_p CH^p(-) \to \bigoplus_p Gr^W_0 H^{2p}(-\ , \mathbb{Q}(p)).$$

4.5. 奇异霍奇猜想。现在我们可以给出奇异簇的霍奇猜想的表述。设 Y 是一个维数为 n的射影簇。固定一个正整数 $p \leq n$。如果 Y 的奇异轨迹维数至多为 $p-1$，且代数上同调群$H_A^{2p}(Y)$与.....相同，我们就称 Y 满足 SHC(p,n)。

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(Y) := \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Y,\mathbb{Q}) \cap F^{2p}\mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Y,\mathbb{C}).$$

当 Y是非奇异且射影的情形下，这就是经典霍奇猜想（权为 p），我们将其记为 HC(p,n)。

4.6. 简单正规交叉除子上的代数循环。现在我们证明，简单正规交叉簇上代数循环的上同调类是霍奇类。这是经典霍奇理论中一个结果向奇异情形的推广。回顾一下，若 $\mathcal{X}_0$ 满足以下条件，则称其为简单正规交叉簇： $\mathcal{X}_0$ 是连通的， $\mathcal{X}_0 = X_1 \cup ... \cup X_r$ 具有 X_i 个不可约分支，且对所有 i 均非奇异；并且对于任意 $p \geq 1$， $\mathcal{X}_0$ 的任意 p 个不可约分支的交集都是余维为 p的非奇异簇。

引理 4.9. 设 $\mathcal{X}_0$ 是一个简单正规交叉簇。那么，循环类映射 cl^p ，从$A^p(\mathcal{X}_0)$ 到 $\mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q})$，可分解为

$$H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_0) := F^p\mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{C}) \cap \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(\mathcal{X}_0,\mathbb{Q}).$$

证明。我们对 $\mathcal{X}_0$ 的分量使用递归。设 X_0, ..., X_r 是 $\mathcal{X}_0$ 的不可约分支。记 $Z_i := \mathcal{X}_0 \backslash (X_1 \cup ... \cup X_i)$ 为去掉 X_1, ..., X_i （$i \geq 1$）这些分量后的补集。令 $Z_0 := \mathcal{X}_0$。由于对所有 i, X_i、 X_j 和 $X_i \cap X_j$ 都是非奇异的，因此它们具有纯霍奇结构。此外，由定理 [25, 定理 5.39], $H^{2p-1}(X_i \cap Z_i,\mathbb{Q})$ 的权至多为 $2p-1$，即对所有 $1 \leq i \leq r-1$，$\mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p-1}(X_i \cap Z_i,\mathbb{Q}) = 0$。因此，对所有 $1 \leq i \leq r-1$，我们有如下纯霍奇结构的正合列：

$$0 \to \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Z_{i-1},\mathbb{Q}) \to H^{2p}(X_i,\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Z_i,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(X_i \cap Z_i,\mathbb{Q}) \tag{4.5}$$

此外，由定理 4.5，我们有如下正合列：

$$0 \to A^p(Z_{i-1}) \to A^p(X_i) \oplus A^p(Z_i) \to A^p(X_i \cap Z_i) \tag{4.6}$$

由循环类映射 cl^p 的函子性，我们得到以下图表

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A^p(Z_{i-1}) & \longrightarrow & A^p(X_i) \oplus A^p(Z_i) & \longrightarrow & A^p(X_i \cap Z_i) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_p} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_p} \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Z_{i-1},\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^{2p}(X_i,\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(Z_i,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^W_{2p} H^{2p}(X_i \cap Z_i,\mathbb{Q})
\end{array}$$

对于基例，考虑 $i = r-1$。注意， $Z_{r-1} = X_r$。由于 X_r是非奇异的， $A^p(Z_{r-1})$ 是通常的 Chow 群。因此，cl$^p(A^p(Z_{r-1})) \subset H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(Z_{r-1})$。

现在进行递归步骤。假设 cl$^p(A^p(Z_i)) \subset H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(Z_i)$成立。由于正合列 (4.5) 是纯霍奇结构的态射，左侧方块的交换性蕴含 cl$^p(A^p(Z_{i-1})) \subset H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(Z_{i-1})$成立。这就证明了该引理。□

5. Main results

本节介绍 MT-可平滑化簇的概念。考虑一个简单正规交叉簇 X （定义见 §4.6）。记 X (2) 为 X 的任意 2 个不可约分支交集的不交并。我们证明，如果 X 是 MT-可平滑化的，并且 X(2) 满足 HC($p-1, n-1$)，那么 X 满足 SHC(p, n) （见定理 5.2 ）。这是引言中定理 1.1 的推广。此外，如果存在 X 的一个不可约分支 X_i ，使得上同调上的限制态射是满射，那么 X_i 满足经典霍奇猜想（见推论 5.3）。最后，如果该簇具有比简单正规交叉更严重的奇点，那么我们将奇异霍奇猜想归结为一个完全关于代数类的问题（见定理5.5）。

定义 5.1. 设 X 是一个维数为 n 的奇异射影簇，且 p 是满足 $\dim(X_{\mathrm{sing}}) \leq p-1$ 的整数。若存在一个平坦、射影的 Mumford-Tate 族

$$\pi_0 : \mathcal{Y} \to \Delta$$

在 Δ^* 上光滑，以 X 为中心纤维，且一般纤维满足 HC(p, n)，则称 π_0 是权为 p 的 MT-可平滑化。我们称 X 的权为 p 的 MT-平滑化为 π_0 。

给定一个正规交叉簇 X，我们证明：

定理 5.2. 设 X 是一个维数为 n 的简单正规交叉簇。假设 X 的每个不可约分支 (2) 都满足 HC($p-1, n-1$)。若 X 是权为 p 的 MT-可平滑化，则 X 满足 SHC(p, n)，即，

$$H_A^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cong H_{\mathrm{Hdg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

此外，对于 X 的每个不可约分支 X_i ，从$H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X, \mathbb{Q})$ 到 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X_i, \mathbb{Q})$ 的限制态射的像都是代数循环的上同调类，即该像

$$\mathrm{Im}(H_{\mathrm{Hdg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}) \to H_{\mathrm{Hdg}}^{2p}(X_i, \mathbb{Q}))$$

包含于 $H_A^{2p}(X_i, \mathbb{Q})$ 中。

证明。由于 X 是权 p 的 MT-可平滑化对象，存在一个权为 p 的 Mumford-泰特族

$$\pi : \mathcal{X} \to \Delta$$

其中心纤维为 X ，且一般纤维满足 HC(p, n)。由命题 4.4 和引理 4.9，我们得到一个态射 sp_A ，从 $H_A^{2p}(X)$ 到 $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$，由以下复合给出：

$$\mathrm{sp}_A : H_A^{2p}(X) \hookrightarrow H_{\mathrm{Hdg}}^{2p}(X) \xrightarrow{\mathrm{sp}} H_{\mathrm{Hdg}}^{2p}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}} \cong H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty).$$

我们断言 sp_A 是满射。根据定义 4.2， $H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty)$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间由类 $\gamma_{\mathcal{Z}}$ 生成，其中 $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_{\Delta^*}$ 是相对维数为 $n-p$ 的 Δ^*-平坦闭子概形。

用 $\overline{\mathcal{Z}}$ 表示 $\mathcal{X}$ 中 $\mathcal{Z}$ 的闭包。根据 $[9, \S 6.1]$， $\overline{\mathcal{Z}}$ 与 X_i 的交乘积 $\overline{\mathcal{Z}}.X_i$ 在 X_i 中的余维为 p 。用 $\gamma_i \in H^{2p}(X_i, \mathbb{Q})$ 表示 $1 \leq i \leq r$ 的交乘积 $\overline{\mathcal{Z}}.X_i$ 的上同调类。由交乘积的结合性（见 $[9,$ 命题 8.1.1 或命题 $8.3]$），对于任意一对整数 $1 \leq i < j \leq r$， γ_i （分别为 γ_j ）在从 $H^{2p}(X_i, \mathbb{Q})$ （分别为 $H^{2p}(X_j, \mathbb{Q})$）到 $H^{2p}(X_i \cap X_j, \mathbb{Q})$ 的限制态射下的像相同。利用 (4.5) 可以看出，存在一个代数上同调类 $\gamma \in H_A^{2p}(X)$，使得 γ 在从 $H_A^{2p}(X)$ 到 $H_A^{2p}(X_i)$ 的限制态射下的像为 γ_i ，其中 $1 \leq i \leq r$。换言之， $\overline{\mathcal{Z}}$ 在 $H^{2p}(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ 中的上同调类（见 $[25, \S \mathrm{B}.2.9]$）拉回为 $H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ 中的 γ，并且对于任意 $t \in \Delta^*$，在 $\mathcal{X}_t$ 上拉回为上同调类 $[\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}_t] \in H^{2p}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q})$。这

意味着在从 $H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ 到 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 的特化态射 sp 下，γ 映为 $\gamma_{\mathcal{Z}^\circ}$。这就证明了我们的论断。

根据命题 2.3，特化态射的核

$$\mathrm{Gr}_{2p}^W H^{2p}(X,\mathbb{Q}) = E_2^{0,2p} \xrightarrow{\mathrm{sp}} {}^\infty E_2^{0,2p} = \mathrm{Gr}_{2p}^W H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$$

同构于从 $H^{2p-2}(X(2)\ \mathbb{Q})$ 到 $H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ 的 Gysin 态射的像（由于 $X(2)$ 非奇异，$H^{2p-2}(X(2)\ \mathbb{Q})$ 具有权为 $2p-2$ 的纯霍奇结构）。根据假设，$X(2)$ 的每个不可约分支都满足霍奇猜想 $(p-1,n-1)$。于是，我们得到以下正合列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
H_A^{2p}(X(2)) & \longrightarrow & H_A^{2p}(X) & \xrightarrow{\mathrm{sp}_A} & H_A^{2p}(\mathcal{X}_\infty) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow\cong & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\cong & & \\
H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X(2)) & \longrightarrow & H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X) & \xrightarrow{\mathrm{sp}} & H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{X}_\infty)^{\mathrm{inv}} & &
\end{array}$$

通过图追逐（或者对正合列的交换图使用四引理），我们得出从 $H_A^{2p}(X)$ 到 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X)$ 的中间态射是满射，因而是同构。这就证明了定理的第一部分。定理的第二部分可由以下交换图立即推出，该图源自 Mayer-Vietoris 序列：

$$\begin{array}{ccc}
H_A^{2p}(X) & \hookrightarrow & H_A^{2p}(X_i)\oplus H_A^{2p}(\overline{X\backslash X_i}) \\
\downarrow\cong & \circlearrowleft & \downarrow \\
H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X) & \hookrightarrow & H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_i)\oplus H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(\overline{X\backslash X_i})
\end{array}$$

这就证明了该定理。 □

推论 5.3. 记号和假设同定理 5.2。设 X_1 是 X 中的一个不可约分支，且其补集 $X_1^c := \overline{X\backslash X_1}$（$X\backslash X_1$ 在 X 中的闭包）满足：

$$\mathrm{Im}(H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1)\to H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c\cap X_1)) \subset \mathrm{Im}(H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c)\to H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c\cap X_1)). \tag{5.1}$$

那么，X_1 满足 HC(p,n)。

证明. 利用 Mayer-Vietoris 序列，我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & H_A^{2p}(X) & \longrightarrow & H_A^{2p}(X_1)\oplus H_A^{2p}(X_1^c) \\
 & & \downarrow\cong & \circlearrowleft & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X) & \hookrightarrow & H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1)\oplus H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c) \longrightarrow H^{2p}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c\cap X_1)
\end{array}$$

其中，第一个垂直箭头为同构是由定理 5.2 得出的，且底行是正合的。若满足 (5.1)，那么对于任意 $\gamma\in H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X_1)$，都存在 $\gamma'\in H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c)$，使得它们在 $X_1\cap X_1^c$ 上的限制相等。换言之，$\gamma\oplus\gamma'$ 在 $H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X_1^c\cap X_1)$ 中映射为零。通过图追逐，可以观察到存在 $\gamma_A\in H_A^{2p}(X_1)$，其映射为 γ。这证明了$H_A^{2p}(X_1)\cong H^{2p}{}_{\mathrm{Hdg}}(X_1)$。换言之，$X_1$ 满足 HC(p,n)。这就证明了推论。□

人们会立即问，是否存在满足 (5.1) 的例子?

例5.4. 设 X 是一个维数为 n 且仅具有普通双重点奇点的射影簇。再假设 X 可平滑化。那么，存在一个平坦射影族

$$\pi_0 : \mathcal{Y} \to \Delta$$

在 Δ^*上光滑， X 为中心纤维，且 $\mathcal{Y}$ 是正则簇。此外，存在 π_0的一个半稳定约化：

$$\pi : \mathcal{X} \to \Delta$$

~，使得中心纤维 $\mathcal{X}_0 := X \cup E$，其中 E 是$\mathbb{P}^{n+1}$ 中的二次超曲面的不交并，而 $E \cap \widetilde{X}_0$ 是由超平面在 $\mathbb{P}^{n+1}$的若干份拷贝中截取 E 所得的交。若对某个p有 $n = 2p$ ，则 $\mathbb{P}^n$ 中二次超曲面的 n阶有理上同调同构于 $\mathbb{Q}$。这意味着从 $H^{2p}(E)$到 $H^{2p}(E \cap \widetilde{X})$的自然限制态射是满射。在此情形下，~取 $X_1 := X$，则（5.1）成立。

由我们的观察自然地引出了一个猜想：

~猜想 A. 设 X 是一个奇异射影簇， $\phi :$ $X \to X$ 是任意一个奇点消解， E是例外除子。设 p是一个整数，使得 $\dim(X_{\text{sing}}) \leq p-1$。于是，我们得到一个上同调正合列（见 [25, 推论-定义 5.37]）：

$$H^{2p}(X) \to H^{2p}(\widetilde{X}) \to H^{2p}(E)$$

我们猜想，取代数上同调群会保持该正合列的正合性，即下列序列是正合的：

$$H_A^{2p}(X) \to H_A^{2p}(\widetilde{X}) \to H_A^{2p}(E).$$

现在我们观察到，这个猜想与奇异霍奇猜想密切相关（后者等价于霍奇猜想）。

定理5.5. 设 X 是一个维数为 n 的奇异射影簇，且 p 是一个整数，使得 $\dim(X_{\text{sing}}) \leq p-1$。若 X 满足 SHC(p,n)，则 X 满足猜想 A。反之，若 HC$(p-1,n-1)$成立， X 是权为 p 的 MT-可平滑化对象且满足猜想 A，则X 满足 SHC(p,n)。

证明。若 X 满足 SHC(p,n)，则 $H_A^{2p}(X) \cong H^{2p}{}_{\text{Hdg}}(X)$。令

$$\phi : \widetilde{X} \to X$$

为 X 的一个消解， E 为例外除子。于是我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} H_A^{2p}(X) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & H_A^{2p}(E) \\ \cong \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ H^{2p}_{\text{Hdg}}(X) & \hookrightarrow & H^{2p}_{\text{Hdg}}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & H^{2p}_{\text{Hdg}}(E) \end{array} \tag{5.2}$$

其中底行是正合的，左侧为单射，而顶行是一个复形。要证明猜想 A，我们需要证明顶行在中间处正合。为此，取 $\gamma \in H_A^{2p}(\widetilde{X})$，其在 $H_A^{2p}(E)$ 中的像为零。通过图追逐，容易验证存在 $\gamma' \in H_A^{2p}(X)$，其映射到 γ。换言之，(5.2) 的顶行在中间处正合。这就证明了定理的第一部分。

现在假设 X 满足猜想 A。设 $\pi_0 : \mathcal{Y} \to \Delta$ 是 X的权为p 的 MT-平滑化。根据半稳定约化定理（见 [15, 第二章]），存在一个平坦射影族 $\pi : \mathcal{X} \to \Delta$，它在 Δ^* 上的纤维与 π_0 相同，$\mathcal{X}$ 是正则的，中心纤维 $\mathcal{X}_0$ 是一个约化简单正规交叉除子，其中一个不可约分支（记为 $\widetilde{X}$）与 X 真双有理。此外，补集 $X^c := \mathcal{X}_0 \backslash X$ 满足：

$$\mathcal{X}_0 \backslash \widetilde{X}^c \cong \widetilde{X} \backslash (\widetilde{X}^c \cap \widetilde{X}) \cong X \backslash X_{\text{sing}}$$

即，$\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 在 X_{sing}之外同构。利用 Mayer-Vietoris 序列和猜想 A，我们得到如下正合列交换图：

$$\begin{array}{ccccc} H_A^{2p}(X) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X}) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X} \cap \widetilde{X}^c) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft \quad \cong & \downarrow \\ H_A^{2p}(\mathcal{X}_0) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X}) \oplus H_A^{2p}(\widetilde{X}^c) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X} \cap \widetilde{X}^c) \end{array} \tag{5.3}$$

其中，第一个竖直态射由从 X 到 $\mathcal{X}_0$ 的拉回诱导，第二个则是自然包含。由蛇引理可得正合列：

$$0 \to H_A^{2p}(X) \to H_A^{2p}(\mathcal{X}_0) \to H_A^{2p}(\widetilde{X}^c) \tag{5.4}$$

由于 X_{sing} 的维数至多为 $p-1$，对 $H^i(X_{\text{sing}})$而言，$= 0$ 对 $i \geq 2p-1$成立。于是，与对偶(X, X_{sing})和$(\mathcal{X}_0, X^c)$相关的上同调长正合序列（见 [25, 命题 5.46 和推论 B.14]）蕴含 $\text{Gr}_{2p}^W H_c^{2p}(U) \cong \text{Gr}_{2p}^W H^{2p}(X)$，其中 $U := X \backslash X_{\text{sing}}$。此外，

$$0 \to \text{Gr}_{2p}^W H_c^{2p}(U, \mathbb{Q}) \to \text{Gr}_{2p}^W H^{2p}(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q}) \to \text{Gr}_{2p}^W H^{2p}(\widetilde{X}^c, \mathbb{Q})$$

是纯霍奇结构的正合列。这导出正合列：

$$0 \to H_{\text{Hdg}}^{2p}(X) \to H_{\text{Hdg}}^{2p}(\mathcal{X}_0) \to H_{\text{Hdg}}^{2p}(\widetilde{X}^c) \tag{5.5}$$

$\mathbb{Q}$向量空间之间。因此，存在一个从 (5.4) 到 (5.5) 的正合列的自然态射：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_A^{2p}(X) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\mathcal{X}_0) & \longrightarrow & H_A^{2p}(\widetilde{X}^c) \\ & & \downarrow & \circlearrowleft \quad \cong & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_{\text{Hdg}}^{2p}(X) & \longrightarrow & H_{\text{Hdg}}^{2p}(\mathcal{X}_0) & \longrightarrow & H_{\text{Hdg}}^{2p}(\widetilde{X}^c) \end{array}$$

中间垂直箭头所对应的同构由定理 5.2 得出。再次应用蛇引理，我们得出第一个垂直态射是满射。换言之，X满足 SHC(p, n)。这证明了逆命题，从而证明了该定理。□

6. Examples of Mumford-Tate families

在 §3 中，我们引入了 Mumford-Tate族。对于这类族，中心纤维具有一些有趣的性质。例如，如果中心纤维光滑，那么很容易验证：若一般纤维满足霍奇猜想，则中心纤维也满足霍奇猜想。更一般地，如果中心纤维是约化的简单正规交叉除子，那么若一般纤维满足霍奇猜想，中心纤维就满足奇异霍奇猜想（见定理 5.2）。本节中，我们利用对应给出构造 Mumford-Tate族的一般方法（见定理 6.5）。我们在推论 6.6 中给出一些例子。

6.1. 严格芒福德-泰特族。设 $\pi_1:\mathcal{X}^*\to\Delta^*$ 是穿孔圆盘 Δ^* 上的一个光滑射影态射。回忆一下，如果对每个 p，每个单值化不变霍奇类在 $H^{2p}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 上的拉回在一般纤维上都被相应的芒福德-泰特群固定，那么称 π_1 为一个 Mumford-Tate族。这里我们将这一条件推广到上同调环 $H^*(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 的张量代数。这是一个稍强的概念。特别地，两个奇数次上同调群中的元素的楔积有可能成为霍奇类，尽管它们各自都不是霍奇类。例如，这种现象常见于阿贝尔簇的上同调中。下文将利用这一点构造新的 Mumford-Tate族，这将发挥关键作用。

为了更有效地研究张量代数，我们将奇次上同调群与偶次上同调群分开。我们取奇次上同调群的外代数和偶次上同调群的对称代数。这样做是为了保持与杯积的相容性。给定两个r元正整数 $\underline{m}:=(m_1,...,m_r)$ 和 $\underline{k}:=(k_1,...,k_r)$，记

$$\mathbb{T}^{\underline{k}}_{\underline{m}}:=\bigwedge^{k_1}H^{m_1}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})\otimes...\otimes\bigwedge^{k_r}H^{m_r}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q}),\ \text{if each } m_i \text{ is odd},$$
$$\mathbb{T}^{\underline{k}}_{\underline{m}}:=\mathrm{Sym}^{k_1}H^{m_1}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})\otimes...\otimes\mathrm{Sym}^{k_r}H^{m_r}(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q}),\ \text{if each } m_i \text{ is even}.$$

给定一个偶正整数的 r元组 $\underline{m}:=(m_1,...,m_r)$、一个奇正整数的 l元组$\underline{n}:=(n_1,...,n_l)$，以及一个任意正整数的 r（分别为 l）元组 $\underline{k}:=(k_1,...,k_r)$（分别为$\underline{k}':=(k'_1,...,k'_l)$），记

$$\mathbb{T}^{(\underline{k},\underline{k}')}_{(\underline{m},\underline{n})}\text{ the pure part of }\mathbb{T}^{\underline{k}}_{\underline{m}}\otimes\mathbb{T}^{\underline{k}'}_{\underline{n}}\text{ i.e., }\mathbb{T}^{(\underline{k},\underline{k}')}_{(\underline{m},\underline{n})}:=\mathrm{Gr}^W_a\mathbb{T}^{\underline{k}}_{\underline{m}}\otimes\mathbb{T}^{\underline{k}'}_{\underline{n}},$$

其中 $a:=\sum_{i=1}^r m_ik_i+\sum_{j=1}^l n_jk'_j$。记

$$\mathbb{T}_{(\underline{m},\underline{n})}:=\bigoplus_{(\underline{k},\underline{k}')}\mathbb{T}^{(\underline{k},\underline{k}')}_{(\underline{m},\underline{n})},\tag{6.1}$$

其中 $\underline{k}$ 和 $\underline{k}'$ 分别遍历所有由正整数组成的 k元组和 l元组。记

$$\mathbb{T}^s_{(\underline{m},\underline{n})}\text{ the same as }\mathbb{T}_{(\underline{m},\underline{n})}\text{ with }\mathcal{X}_\infty\text{ replaced by }\mathcal{X}_s\text{ for any }s\in\Delta^*.$$

注意，对于所有 m，$H^m(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q})$ 上的霍奇结构都是纯的，因此在此情形下，“纯部分”条件是多余的。令 $\mathbf{MT}^s_m$ 为与纯霍奇结构 $H^m(\mathcal{X}_s,\mathbb{Q})$ 相关联的芒福德-泰特群。于是，芒福德-泰特群的乘积

$$\mathrm{MT}^s_{(\underline{m},\underline{n})}:=\mathrm{MT}^s_{m_1}\times\mathrm{MT}^s_{m_2}\times...\times\mathrm{MT}^s_{m_r}\times\mathrm{MT}^s_{n_1}\times\mathrm{MT}^s_{n_2}\times...\times\mathrm{MT}^s_{n_l}$$

作用于 $\mathbb{T}^s_{(\underline{m},\underline{n})}$。若对于任意霍奇类 $\gamma\in\mathbb{T}_{(\underline{m},\underline{n})}$ 和一般的 $s\in\mathfrak{h}$，$j_s^*(\gamma)$ 都被 $\mathbf{MT}^s_{(\underline{m},\underline{n})}$ 固定，则称族 π 关于 $(\underline{m},\underline{n})$ 是严格的芒福德-泰特，其中

$$j_s^*:\mathbb{T}_{(\underline{m},\underline{n})}\to\mathbb{T}^s_{(\underline{m},\underline{n})}$$

是由 $\mathcal{X}_s$ 在 $\mathcal{X}_\infty$ 内的自然包含的拉回所诱导的。

命题 6.1. 设 $\pi_1:\mathcal{X}\to\Delta$ 是一个以 $g\geq 2$ 为底、亏格为 g 的曲线的平坦射影族。假设 π_1 在 Δ^* 上光滑，且中心纤维是非常一般的不可约节点曲线（定义见 [7]）。那么，π_1 关于 $((0,2),(1))$ 是严格的芒福德-泰特。

证明。考虑与曲线族 π_1 相关联的雅可比簇族，

$$\pi_2:\mathbf{J}\to\Delta^*\text{ i.e., for all }t\in\Delta^*,\ \pi_2^{-1}(t)=\mathrm{Jac}(\mathcal{X}_t).$$

根据阿贝尔簇的上同调的定义，$H^1(\mathcal{X}_\infty,\mathbb{Q})$ 与 $H^1(\mathbf{J}_\infty,\mathbb{Q})$ 之间存在一个混合霍奇结构的自然同构。这诱导出一个混合

霍奇结构，

$$\bigwedge^{*} H^1(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathbf{J}_\infty, \mathbb{Q}).$$

根据 [7, 定理 4.3]，我们有

$$H^*_{\mathrm{Hdg}}(\mathbf{J}_\infty, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\theta]/(\theta^{g+1}), \text{ where } g = \mathrm{genus}(\mathcal{X}_t),\ t \in \Delta^*.$$

注意，$\mathrm{Sym}^* H^0(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[T_0]$ 和 $\mathrm{Sym}^* H^2(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[T_1]$，其中 T_0 和 T_1 是霍奇类。考虑向量空间的直和 $\mathbb{T}_{(0,2),\ (1)}$，如(6.1)中与族 π_1 相关联的那样。那么，$\mathbb{T}_{\mathrm{Hdg}}$ 中 $\mathbb{T}_{(0,2),\ (1)}$ 的霍奇类空间同构于 $\mathbb{Q}[T_0, T_1, \theta]/(\theta^{g+1})$。类似地，$\mathbb{T}^s_{(0,2),\ (1)}$ 中的霍奇类集合 $\mathbb{T}^s_{\mathrm{Hdg}}$ 包含 $\mathbb{Q}[T_0^s, T_1^s, \theta^s]/((\theta^s)^{g+1})$，其中 $(-)^s := j_s^*(-)$。因此，T_0^s、T_1^s 和 θ^s 均由芒福德-泰特群 $\mathbf{MT}^s_{(0,2),\ (1)}$ 固定。因此，相对于 $((0,2),(1))$，π_1 是严格的芒福德-泰特。这证明了该命题。□

6.2. 由陈类生成的上同调。设 X、Y 分别为维数为 m 和 n 的光滑射影簇。结合 K¨unneth 分解与庞加莱对偶，对于任意 i、$k \geq 0$，我们有

$$H^{2i-k}(X \times Y) \simeq \bigoplus_k H^{2n-k}(X) \otimes H^{2i-k}(Y)^\vee \simeq \bigoplus_k \mathrm{Hom}(H^{2m-k}(X), H^{2i-k}(Y)). \tag{6.2}$$

设 $\mathcal{E}$ 是纤维积 $X \times Y$ 上的一个相干层，$c_i(\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{E}$ 的第 i 个陈类。记 $\Phi_{\mathcal{E}}^{(i,k)}$ 为 $c_i(\mathcal{E})$ 在 $H^{2i-k}(Y)$ 中到分量 $\mathrm{Hom}(H^{2m-k}(X)\ H^{2i-k}(Y))$ 的投影。由 [31, 引理 11.41]，诱导态射

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{(i,k)} : H^{2m-k}(X) \to H^{2i-k}(Y) \text{ is a morphism of pure Hodge structures.} \tag{6.3}$$

定理 6.2。设 $\pi_1 : \mathcal{X}^* \to \Delta^*$ 和 $\pi_2 : \mathcal{Y}^* \to \Delta^*$ 是相对维数分别为 m 和 n 的两个光滑射影族。假设存在 $\mathcal{X}^* \times_{\Delta^*} \mathcal{Y}^*$ 上的相干层 $\mathcal{U}$，且它在 Δ^* 上平坦。那么态射

$$\Phi_{\mathcal{U}_t}^{(i,k)} : H^{2m-k}(\mathcal{X}_t) \to H^{2i-k}(\mathcal{Y}_t)$$

诱导出（极限）混合霍奇结构的态射：

$$\Phi_{\mathcal{U},\infty}^{(i,k)} : H^{2m-k}(\mathcal{X}_\infty) \to H^{2i-k}(\mathcal{Y}_\infty).$$

此外，态射 $\Phi_{\mathcal{U}\ \infty}^{(i,k)}$，和 $\Phi_{\mathcal{U}_t}^{(i,k)}$ 与拉回到闭纤维相交换。也就是说，对于任意满足 $e(u) = t$ 的 $u \in \mathfrak{h}$（其中 e 是指数映射），我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H^{2m-k}(\mathcal{X}_\infty) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{U},\infty}^{(i,k)}} & H^{2i-k}(\mathcal{Y}_\infty) \\ \downarrow (j_u)^* \cong & \circlearrowleft & \downarrow (j'_u)^* \cong \\ H^{2m-k}(\mathcal{X}_t) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{U}_t}^{(i,k)}} & H^{2i-k}(\mathcal{Y}_t) \end{array} \tag{6.4}$$

其中 $j_u : \mathcal{Y}_t \hookrightarrow \mathcal{Y}_\infty$ 和 $j'_u : \mathcal{X}_t \hookrightarrow \mathcal{X}_\infty$ 是自然包含。

证明。考虑自然的射影态射：

$$\pi : \mathcal{X}^* \times_{\Delta^*} \mathcal{Y}^* \to \Delta^*,\ \pi_1 : \mathcal{X}^* \to \Delta^* \text{ and } \pi_2 : \mathcal{Y}^* \to \Delta^*.$$

考虑 Δ^* 上的局部系统 $\mathbb{H}^{2i} := R^{2i}\pi_*\mathbb{Z}$。我们记

$$\mathbb{H}^i_{\mathcal{X}^*} := R^i\pi_{1*}\mathbb{Z} \text{ and } \mathbb{H}^i_{\mathcal{Y}^*} := R^i\pi_{2*}\mathbb{Z}.$$

根据族中的 K¨unneth 分解（见 [14, Ex. II.18]），我们有

$$\mathbb{H}^{2i} \simeq \bigoplus_k (\mathbb{H}^k_{\mathcal{X}^*} \otimes \mathbb{H}^{2i-k}_{\mathcal{Y}^*})$$

对局部系统 $\mathbb{H}^k_{\mathcal{X}^*}$ 应用庞加莱对偶（见 [16, §I.2.6]），得到:

$$\mathbb{H}^{2i} \simeq \bigoplus_k (\mathbb{H}^{2m-k}_{\mathcal{X}^*})^\vee \otimes \mathbb{H}^{2i-k}_{\mathcal{Y}^*} \simeq \bigoplus_k \mathrm{Hom}(\mathbb{H}^{2m-k}_{\mathcal{X}^*}, \mathbb{H}^{2i-k}_{\mathcal{Y}^*}).$$

对于任意 i，第 i 个陈类 $c_i(\mathcal{U})$ 定义了 $\mathbb{H}^{2i}$ 的一个整体截面。考虑将 $c_i(\mathcal{U})$ 投影到 $\mathrm{Hom}(\mathbb{H}^{2m-k}_{\mathcal{X}^*}, \mathbb{H}^{2i-k}_{\mathcal{Y}^*})$ 上的投影ϕ。将局部系统在 Δ^* 上的态射 ϕ 拉回到上半平面 $\mathfrak{h}$，并取整体截面，得到态射

$$\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U},\infty} : H^{2m-k}(\mathcal{X}_\infty) \to H^{2i-k}(\mathcal{Y}_\infty).$$

将该态射限制到 $u \in \mathfrak{h}$ 上方的纤维，得到态射 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}$，其中 $t := e(u)$。特别地，我们有交换图 (6.4)。

还需验证 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}\,\infty}$，是混合霍奇结构的态射。由 (6.3)， $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}$ 是纯霍奇结构的态射。由于 $\mathcal{X}_\infty$ 和 $\mathcal{Y}_\infty$ 上的极限霍奇滤过只是这些霍奇过滤的极限，因此我们得出 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}\,\infty}$，保持极限霍奇滤过。还需验证 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}\,\infty}$，保持极限权重滤过。等价地，利用图 (6.4)，我们需要证明 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}$ 保持权重滤过，其中 $\mathcal{X}_t$ 和 $\mathcal{Y}_t$ 上的权重滤过分别由 $\mathcal{X}_\infty$ 和 $\mathcal{Y}_\infty$诱导（分别通过同构 j_u^*和 $j_u'^*$）。回顾一下， $\mathcal{X}_t$ 和 $\mathcal{Y}_t$ 上的权重滤过由单值化算子的对数诱导（见 [25,引理-定义 11.9]）：

$$N_{\mathcal{X}} := \log(T_{\mathcal{X}}) \text{ and } N_{\mathcal{Y}} := \log(T_{\mathcal{Y}}).$$

因此，只需验证对于所有的 $\gamma \in H^{2m-k}(\mathcal{X}_t)$，都有 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(N_{\mathcal{X}}(\gamma)) = N_{\mathcal{Y}}\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma)$。由于$c_i(\mathcal{U})$是局部系统的整体截面，因此它是单值化不变的。这意味着从 $\mathbb{H}^{2m-k}_{\mathcal{X}^*}$ 到 $\mathbb{H}^{2i-k}_{\mathcal{Y}^*}$ 的诱导态射 ϕ 与单值化算子交换，即对于每个$t \in \Delta^*$，都有以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^{2m-k}(\mathcal{X}_t) & \xrightarrow{\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}} & H^{2i-k}(\mathcal{Y}_t) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T_{\mathcal{X}}} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle T_{\mathcal{Y}}} \\ H^{2m-k}(\mathcal{X}_t) & \xrightarrow{\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}} & H^{2i-k}(\mathcal{Y}_t) \end{array} \tag{6.5}$$

其中 $T_{\mathcal{X}}$ 和 $T_{\mathcal{Y}}$ 是单值化算子， $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}$ 如(6.3)所示。这意味着对于所有$\gamma \in H^{2m-k}(\mathcal{X}_t)$，都有 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}}(\gamma)) = T_{\mathcal{Y}}\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma)$。因此，

$$\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})(\gamma) = \Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}}(\gamma)) - \Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma) = T_{\mathcal{Y}}(\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma)) - \Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma) = (T_{\mathcal{Y}} - \mathrm{id})\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma).$$

更一般地，这意味着对于所有 $m \geq 1$,

$$\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})^m(\gamma) = \Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})^{m-1}(\gamma) = (T_{\mathcal{Y}} - \mathrm{Id})\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})^{m-1}(\gamma)$$

因此，通过递归可得 $\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(T_{\mathcal{X}} - \mathrm{Id})^m(\gamma) = (T_{\mathcal{Y}} - \mathrm{Id})^m\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma)$。利用 $N_{\mathcal{X}}$ 和 $N_{\mathcal{Y}}$ 的对数展开，我们得到:

$$\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(N_{\mathcal{X}}(\gamma)) = N_{\mathcal{Y}}\Phi^{(i,k)}_{\mathcal{U}_t}(\gamma), \text{ for all } \gamma \in H^{2m-k}(\mathcal{X}_t).$$

这意味着 $\Phi_{\mathcal{U}_t}^{(i,k)}$ 保持极限权重滤过不变。定理得证。 □

定义 6.3. 设 X、Y 分别是维数为 m 和 n 的光滑射影簇。记 $\mathcal{E}$ 为 $X \times_k Y$ 上的一个相干层。若存在一组 $S_Y(X,\mathcal{E})$，由整数对 (k,i) 构成，使得 $H^*(Y)$ 由以下各项的像的直和作为上同调环生成，则称簇 Y 由 $(X,\mathcal{E})$ 上同调生成：

$$\Phi_{\mathcal{E}}^{(i,k)} : H^{2m-k}(X) \to H^{2i-k}(Y)$$

其中，整数对 (k,i) 遍历 $S_Y(X,\mathcal{E})$ 中的所有元素。注意，$\mathrm{pr}_1(S_Y(X,\mathcal{E}))$ 未必包含从 0 到 $2m$ 的所有整数。我们称 $S_Y(X,\mathcal{E})$ 为关联指标集。

记号与约定 6.4. 我们固定以下记号：

$$S_{\text{even}} := \{(k,i) \in S_Y(X,\mathcal{E}) \mid k \text{ even}\} \text{ and } S_{\text{odd}} := \{(k,i) \in S_Y(X,\mathcal{E}) \mid k \text{ odd}\}$$
$$p(S_{\text{even}}) := \{2m-k | (k,i) \in S_{\text{even}}\} \text{ and } p(S_{\text{odd}}) := \{2m-k | (k,i) \in S_{\text{odd}}\}$$
$$q(S_{\text{even}}) := \{2i-k | (k,i) \in S_{\text{even}}\} \text{ and } q(S_{\text{odd}}) := \{2i-k | (k,i) \in S_{\text{odd}}\}$$

定理 6.5. 设 $\pi_1 : \mathcal{X}^* \to \Delta^*$ 和 $\pi_2 : \mathcal{Y}^* \to \Delta^*$ 是两个相对维数分别为 m 和 n 的光滑射影族。假设存在 $\mathcal{X}^* \times_{\Delta^*} \mathcal{Y}^*$ 上的一个相干层 $\mathcal{U}$，使其在 Δ^* 上平坦，并且对于一般的 $t \in \Delta^*$，$\mathcal{Y}_t$ 由 $(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t)$ 上同调生成，其指标集为 $S_{\mathcal{Y}_t}(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t)$，且 π_1 关于 $(p(S_{\text{even}})\ p(S_{\text{odd}}))$ 是严格的芒福德-泰特。则族 π_2 是 Mumford-Tate。

证明。令 $t \in \Delta^*$ 满足：$\mathcal{Y}_t$ 由 $(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t)$ 上同调生成，指标集为 $S_{\mathcal{Y}_t}(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t)$，且 π_1 相对于 $(p(S_{\text{even}})\ p(S_{\text{odd}}))$ 是严格的芒福德-泰特。利用 Ehresmann 定理可以验证，对于任意 $s \in \Delta^*$，$\mathcal{Y}_s$ 都由 $(\mathcal{X}_s,\mathcal{U}_s)$ 上同调生成，并且指标集相等：$S_{\mathcal{Y}_t}(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t) = S_{\mathcal{Y}_s}(\mathcal{X}_s,\mathcal{U}_s)$。记

$$\mathbb{T}_{\mathcal{X}} := \mathbb{T}_{(p(S_{\text{even}}),p(S_{\text{odd}}))} \text{ and } \mathbb{T}_{\mathcal{Y}} := \mathbb{T}_{(q(S_{\text{even}}),q(S_{\text{odd}}))} \text{ with } \mathcal{X}_\infty \text{ replaced by } \mathcal{Y}_\infty.$$

回顾一下，对于任意 $(k,i) \in S_{\mathcal{Y}_t}(\mathcal{X}_t,\mathcal{U}_t)$，我们都有一个从 $H^{2m-k}(\mathcal{X}_\infty)$ 到 $H^{2i-k}(\mathcal{Y}_\infty)$ 的混合霍奇结构态射 $\Phi_{\mathcal{U}_\infty}^{(i,k)}$，。这诱导出一个混合霍奇结构态射：

$$\phi : \mathbb{T}_{\mathcal{X}} \to \mathbb{T}_{\mathcal{Y}}.$$

回顾一下，杯积态射是引理 6.16] 中的混合霍奇结构态射 [8, 。因此，杯积态射与 ϕ 的复合：

$$\Phi : \mathbb{T}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\phi} \mathbb{T}_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\bigcup} H^*(\mathcal{Y}_\infty, \mathbb{Q})$$

是混合霍奇结构的态射。给定 $s \in \Delta^*$，记为（见 §6.1）

$$\mathbb{T}_{\mathcal{X}_s} := \mathbb{T}^s_{(p(S_{\text{even}}),p(S_{\text{odd}}))} \text{ and } \mathbb{T}_{\mathcal{Y}_s} := \mathbb{T}^s_{(q(S_{\text{even}}),q(S_{\text{odd}}))} \text{ with } \mathcal{X}_s \text{ replaced by } \mathcal{Y}_s.$$

与前面一样，我们有以下由霍奇结构态射复合而成的映射：

$$\Phi_s : \mathbb{T}_{\mathcal{X}_s} \to \mathbb{T}_{\mathcal{Y}_s} \xrightarrow{\bigcup} H^*(\mathcal{Y}_s, \mathbb{Q}),$$

其中，第一个态射由 $\Phi_{\mathcal{U}_s}^{(i,k)}$ 导出，因为 (k,i) 遍历 $S_{\mathcal{Y}_s}(\mathcal{X}_s,\mathcal{U}_s)$ 中的各项。由定理 6.2，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\mathcal{X}} & \xrightarrow{\Phi} & H^*(\mathcal{Y}_\infty, \mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle j_s^*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle (j_s')^*} \\ \mathbb{T}_{\mathcal{X}_s} & \xrightarrow{\Phi_s} & H^*(\mathcal{Y}_s, \mathbb{Q}) \end{array}$$

其中， j_s （分别地， j_s'）是将 $\mathcal{X}_s$ （分别地， $\mathcal{Y}_s$）自然包含到 $\mathcal{X}_\infty$ （分别地， $\mathcal{Y}_\infty$ 中的映射 ）.

取 $\gamma \in F^pH^{2p}(\mathcal{Y}_\infty, \mathbb{Q})$，即 γ 是一个霍奇类。我们需要证明 $j_s'^*(\gamma)$ 是 $H^{2p}(\mathcal{Y}_s, \mathbb{Q})$ 中的一个霍奇类。由于 $\mathcal{Y}_s$ 由（$\mathcal{X}_s, \mathcal{U}_s$）上同调生成，且 Φ 是混合霍奇结构之间的态射，因此存在一个霍奇类 $\gamma' \in \mathbb{T}_{\mathcal{X}}$，使得 $\Phi(\gamma') = \gamma_\circ$ 由于相对于（$p(S_{\text{even}})\ p(S_{\text{odd}})$），$\pi_1$ 是严格的芒福德-泰特，我们有 $j_s^*(\gamma')$ 被 MT $_{(p(S_{\text{even}})\ p(S_{\text{odd}}))}^{s}$ 固定。因此， $j_s^*(\gamma')$ 是 $\mathbb{T}_{\mathcal{X}_s}$ 中的一个霍奇类。由于 Φ_s 是霍奇结构之间的态射，这意味着

$$(j_s')^*(\gamma) = \Phi_s \circ j_s^*(\gamma') \text{ is a Hodge class.}$$

因此， π_2 是一个 Mumford-泰特族。这就证明了定理。 □

现在我们利用上述定理给出一个具体例子。

推论 6.6. 设 $\pi_1 : \mathcal{X} \to \Delta$ 是一族满足命题 6.1 中假设的平坦射影曲线。固定穿孔圆盘 Δ^* 上 $\mathcal{X}^* := \pi_1^{-1}(\Delta^*)$ 上的一个（相对）奇数度可逆层 $\mathcal{L}$。令

$$\pi_2 : \mathcal{M}(2, \mathcal{L}) \to \Delta^*$$

为 $\mathcal{X}^*$ 上行列式固定为 $\mathcal{L}$ 的秩 2 半稳定层的相对模空间。那么， π_2 是一个 Mumford-泰特族。

证明. 考虑 $\mathcal{X}^* \times_{\Delta^*} \mathcal{M}(2, \mathcal{L})$ 上的泛丛 $\mathcal{U}$。众所周知，对于每个 $t \in \Delta^*$，纤维 $\mathcal{M}(2, \mathcal{L})_t := \pi_2^{-1}(t)$ 都由 $(\mathcal{X}_t, \mathcal{U}_t)$ 上同调生成，其关联指标集为（参见 [24, 定理 1]）：

$$\{(0,1), (0,2), (1,2), (2,2)\}$$

根据命题 6.1， π_1 是严格的芒福德-泰特。于是，定理 6.5 蕴含 π_2 是一个 Mumford-泰特族。由此证明了该推论。□

注 6.7. 事实上，推论 6.6 中提到的相对模空间 $\mathcal{M}(2, \mathcal{L})$ 退化为一个奇异簇。该簇的消解奇异性满足经典霍奇猜想。详情请参见 [7, 定理 5.2] 。

Acknowledgements

本文的研究受到 C. Simpson 教授提出的一些问题的启发。这些问题是在第二作者于 ICTS、印度班加罗尔举办的“丛模空间及相关结构”研讨会上作了一场关于文章 [7] 的报告后提出的。我们感谢 Simpson 教授的关注，也感谢研讨会组织者的精心筹办。我们还感谢 R. Laterveer 教授对早期稿件提出的意见。

References

[1] S. Basu、A. Dan 和 I. Kaur。中间雅可比簇的退化与托雷利定理。 *Documenta Mathematica* 24 1739 1767, 2019 , : – . [2] S. Bloch、H. Gillet 和 C. Soul´e。非阿基米德阿拉克洛夫理论。 *Journal of Algebraic Geometry*, 4(4):427– 486, 1995. [3] A. Dan。关于 Griffiths 和 Harris 有关某些诺特–勒夫谢茨轨迹的猜想。 *Communications in Contemporary Mathematics* 17 5 1550002, 2015 , ( ): . [4] A. Dan。关于光滑曲线希尔伯特概形的泛型非约化分量。 *Mathematische Nachrichten* 290 17 18 2800 2814, 2017 , (-): – . [5] A. Dan。关于 Harris 的一个猜想。 *Communications in Contemporary Mathematics*, 23(07):2050028, 2021. [6] A. Dan 和 I. Kaur。半正则簇与变分霍奇猜想。 *Comptes Rendus Mathematique*, 354 3 297 300, 2016 ( ): – . [7] A. Dan 和 I. Kaur。结曲线上半稳定层的模空间的霍奇猜想。 *di Matematica Pura ed Applicata (1923-)* 1 20, 2022 *Annali*, 页码 – 。

[8] T. Fujisawa。极限混合霍奇结构上的极化。 *Journal of Singularities*, 8:146–193, 2014. [9] W. Fulton。 *Intersection theory*, 第2卷。Springer Science & Business Media，2013。[10] H Gillet 和 C Soul´e。下降、动机与K理论。 *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 478 127 176, 1996 : – . [11] M. Green、P. A. Griffiths 和 M. Kerr。 *Mumford-Tate Groups and Domains, Their Geometry and Arithmetic*,《 *Annals of Mathematics Studies*》第183卷。普林斯顿大学出版社，2012。[12] R. Hartshorne。 *Algebraic Geometry*。《数学研究生教材》-52。施普林格出版社，1977。[13] U. Jannsen。 *Mixed motives and algebraic K-theory*，第1400卷。Springer，2006。[14] M. Kashiwara 和 P. Schapira。流形上的层。 *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 292。[15] G. Kempf、F. Knudsen、D. Mumford 和 B. Saint-Donat。 *Toroidal embeddings 1*，第339卷。Springer，2006。[16] V. S. Kulikov。 *Mixed Hodge structures and singularities*，第132卷。剑桥大学出版社，1998。[17] R. Laterveer。奇异簇循环映射的满射性。 *Geometriae Dedicata*, 179(1):265–278, 2015. [18] J. D. Lewis。Mumford定理的推广，II。 *Illinois Journal of Mathematics*, 39(2):288–304, 1995. [19] J. D. Lewis。某类奇异簇的霍奇猜想。 *Mathematische Zeitschrift*, 224 1 25 31, 1997 ( ): – . [20] J. D. Lewis 和 B. B. Gordon。 *A survey of the Hodge conjecture*，第10卷。美国数学会，2016。[21] E. Markman。辛曲面上层的模空间的上同调环的生成元。*fur die reine und angewandte Mathematik* 544 2002 *Journal* , , . [22] E. Markman。泊松曲面上层的模空间上同调环的整系数生成元。*Advances in Mathemetry*, 208(2):622–646, 2007. [23] D. Mumford 和 P. Newstead。曲线上向量丛模空间的周期。 *American Journal of Mathematics* 90 4 1200 1208, 1968 , ( ): – . [24] P. E. Newstead。代数曲线上秩为 2 *Transactions of* 的稳定向量丛的特征类。,: – . [25] C. Peters 和 J. H. M. Steenbrink。 *Mixed Hodge structures*，第52卷。Springer Science & Business Media，2008。[26] W. Schmid。霍奇结构的变分：周期映射的奇点。 *Inventiones mathematicae*, 22 3 4 211 319, 1973 (-): – . [27] E. Sernesi。 *Deformaions of Algebraic Schemes*。《数学基础原理》-334。施普林格出版社，2006。[28] J. Steenbrink。霍奇结构的极限。 *Inventiones mathematicae*, 31:229–257, 1976. [29] B. Totaro。Chow 群、周上同调和线性簇。载于 *Forum of Mathematics, Sigma*，第2卷。剑桥大学出版社，2014。[30] C. Voisin。将霍奇猜想推广到K ¨ *International Mathematics Research Notices* 2002 20 1057 1075, 2002 ahler簇的一个反例。,( ): – . [31] C. Voisin。 *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry-I*。《剑桥高等数学研究》-76。剑桥大学出版社，2002。[32] C. Voisin。霍奇猜想的若干方面。 *Japanese Journal of Mathematics*, 2(2):261–296, 2007。

School of Mathematics and Statistics, University of Sheffield, Hicks building, Hounsfield Road, S3 7RH, UK

Email address: a.dan@sheffield.ac.uk

Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, LE11 3TU, U.K

Email address: i.kaur@lboro.ac.uk