差异化产品伯特兰双寡头博弈再探

Xiaoliang Li[a] 和 Bo Li*[b]

[a]东莞城市学院数字经济学院，中国东莞 523419[b]安徽财经大学金融学院，中国蚌埠 233030

arXiv:2301.01007v1 [econ.TH] 3 Jan 2023

摘要

本文探讨了一个差异化产品的动态伯特兰双寡头博弈，其中企业具有有限理性，并假设消费者具有内在的 CES效用函数。我们主要关注两种不同的产品替代度。模型的解析研究采用了多种基于符号计算的工具，例如三角分解法和 PCAD方法。本文证明了非零均衡的唯一性，并首次建立了该均衡局部稳定性的严格条件。最重要的是，我们发现，提高可替代度或降低产品差异化程度会导致伯特兰模型失稳，这与古诺模型的相关结论相反。这一发现有助于揭示差异化商品的动态古诺与伯特兰寡头市场之间的本质区别。在边际成本相同的特殊情形下，我们推导出，产品差异化程度越低，价格越低、供给量越高、利润越低，社会福利也越低。此外，我们通过数值模拟报告了周期轨道和混沌等复杂动力学现象。

关键词：伯特兰双寡头；差异化产品；符号计算；局部稳定性

1 引言

众所周知，古诺 [12] 建立了寡头垄断的第一个形式化理论。寡头垄断是指仅由少数几家企业供给的市场。在古诺的框架中，假定企业根据产量作出决策，并且充分了解竞争对手的策略行为。在古诺寡头模型这一研究脉络中，许多经济学家为简化分析，通常假定市场需求函数为线性（例如，Fisher [16], McManus 和 Quandt[29]）。然而，在现实世界中，需求更可能是非线性的。Puu [33]研究了等弹性市场需求下的古诺双寡头博弈，其中价格只是总供给的倒数。此后，文献中对古诺博弈作出了许多重要贡献，包括 [2, 4, 7, 9, 10, 13, 20, 21, 22, 24, 28, 31], 。与我们的研究相关，Zhang and Zhang [39] 考察了一种古诺博弈，其中每家企业生产多种产品，并在多个市场销售。他们得出了古诺-纳什均衡局部稳定性的充分必要条件。

在古诺的开创性研究问世数十年后，伯特兰 [6] 提出了另一种描述寡头竞争的框架，在该框架中，竞争者的策略变量是价格而非数量。Singh and Vives [35] 分析了价格与数量的对偶关系，并发现，对于替代品，古诺竞争（伯特兰竞争）是伯特兰竞争（古诺竞争）的对偶形式。L´opez和Naylor [26] 比较了下游差异化双寡头市场中的古诺均衡与伯特兰均衡，并证明了这样一种经典结论可能发生逆转：对于不完全替代品，古诺均衡下的利润高于伯特兰竞争下的利润。Zhang等人 [40] 研究了基于线性反需求构建的伯特兰模型，并证明了均衡的存在性与稳定性。不同于 [40], Fanti等人， [15] 他们构建了一个具有扎实微观经济学基础的模型，用以决定差异化产品的需求，并指出可能出现同步动力学和间歇现象。Naimzada and Tramontana [32]也研究了一个产品差异化的古诺-伯特兰双寡头模型，并强调最佳反应动力学和自适应调整机制对稳定性的作用。Brianzoni等人 [8] 在研究水平产品差异化的伯特兰双寡头博弈时，假设成本为二次形式

*通讯作者：libomaths@163.com

并发现了同步动力学。此外，Ma和Guo[27] 研究了信息对动态伯特兰博弈的影响。他们指出，三寡头市场中存在一个不受信息量影响的不动点，而双寡头市场的调整参数稳定区域会随信息量增加而扩大。

在上述所有伯特兰博弈中，逆需求函数都假定为线性。与此不同，Gori和Sodini [17] 探讨了具有非线性需求和水平产品差异化的伯特兰双寡头市场的局部与全局动态。此外，Ahmed等人 [3] 提出了一种差异化产品的动态伯特兰双寡头博弈，其中企业具有有限理性，并假设消费者拥有潜在的CES效用函数。由于均衡的闭式解极难求得，他们仅通过数值模拟考察模型的动态行为。他们发现，随着调整速度提高，纳什均衡会通过倍周期分岔而失去稳定性。受 [3], 的启发，Agliari等人 [1] 研究了一种差异化商品的古诺双寡头博弈。值得一提的是，Agliari等人 [1] 使用了与 [3] 相同的CES效用函数来推导市场的需求函数。他们发现，较低的产品替代性或较高的产品差异化程度都可能使古诺博弈失稳。这一发现与Fanti和Gori [14], 的研究结果一致。在该研究中，作者引入了具有线性需求和异质参与者的古诺双寡头模型，以研究产品差异化对稳定性的影响，并发现较高的产品差异化程度可能导致市场均衡失稳。

本文重新研究Ahmed等人 [3] 提出的伯特兰双寡头博弈，采用多种基于符号计算的工具，例如三角分解法（参见 [23]）和PCAD方法（参见 [11]）。值得注意的是，符号计算的结果是精确的，因此能够为经济模型的系统分析提供理论基础。我们对模型的局部稳定性和分岔进行了解析研究。通过采用多种基于符号计算的工具，我们首次证明了非零均衡的唯一性，并得到了该均衡局部稳定性的严格条件。在两家企业具有相同边际成本这一特殊情形下，我们证明模型只能通过倍周期分岔失去稳定性。最重要的发现是，提高可替代度或降低产品差异化程度，会使唯一非零均衡趋于不稳定。一种可能的解释是，产品差异化程度降低可能导致市场竞争强度上升，甚至引发价格战，进而使均衡失稳。需要指出的是，我们的发现与Agliari等人 [1] 以及Fanti和Gori [14]的相关结论相矛盾。这一矛盾丰富了有关古诺和伯特兰寡头市场之间联系的文献，并有助于揭示二者的本质差异。在边际成本相同这一特殊情形下，我们推导出产品差异化程度越低，价格越低、供给量越高、利润越低、社会福利也越低。这一结论符合我们的经济直觉。数值模拟中可以观察到周期轨道和混沌等复杂动力学现象，也证实了在所考虑的模型中，可替代度上升会导致不稳定性的出现。此外，我们直接发现了均衡点上的Neimark-Sacker分岔，这是一个新发现，Ahmed等人 [3] 尚未发现这一现象。

本文其余部分安排如下：第 2 节重新审视本文研究的伯特兰双寡头博弈的构建。第 3 节和第 4 节分别对该模型在两种不同可替代度（即 $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$）下的稳定性与分岔进行解析探讨。第 5 节讨论可替代度对均衡局部稳定性的影响及相关比较静态分析。第 6 节给出数值模拟。第 7 节为结论。

2 模型

在本研究中，我们考虑一个由两家企业相互竞争并生产差异化商品的市场。两种商品的价格和数量分别记为 p_i 和 q_i，其中 $i = 1,\ 2$。此外，假设市场中存在由连续统个相同消费者构成的群体，其 CES效用函数形式如下

$$U(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} + q_2^{\alpha},$$

其中， α （$0 < \alpha < 1$）称为产品之间的可替代度。消费者通过在预算约束下最大化效用来选择其消费量

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1.$$

因此，我们得到以下需求函数（证明请参阅 [3] ）。

$$q_1 = \frac{p_2^\beta}{p_1} \frac{1}{p_1^\beta + p_2^\beta}, \quad q_2 = \frac{p_1^\beta}{p_2} \frac{1}{p_1^\beta + p_2^\beta},$$

其中 $\beta = \alpha/(1-\alpha)$。因此，两种商品的反需求函数为

$$p_1 = \frac{q_1^{\alpha-1}}{q_1^\alpha + q_2^\alpha}, \quad p_2 = \frac{q_2^{\alpha-1}}{q_1^\alpha + q_2^\alpha}. \tag{1}$$

相应地， α 的减少会使产品的可替代性降低，或使其差异化程度提高。特别地，如果 $\alpha = 0$，反需求函数变为 $p_1 = {}^1_{2q_1}$ 和 $p_2 = {}^1_{2q_2}$，这意味着两种商品完全独立。如果 $\alpha = 1$，我们得到反需求函数 $p_1 = p_2 = {}^1_{q_1+q_2}$，这与 Puu [33]提出的著名等弹性需求函数相同。在这种情况下，两种商品的价格相等。也就是说，消费者认为这两种商品不可区分或完全相同。

假设成本函数为线性的，即

$$C_1(q_1) = c_1 q_1, \quad C_2(q_2) = c_2 q_2,$$

其中 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$。那么，企业 i $(i = 1, 2)$ 的利润应为

$$\Pi_i(p_i, p_{-i}) = p_i q_i - c_i q_i = (p_i - c_i) \frac{p_{-i}^\beta}{p_i} \frac{1}{p_i^\beta + p_{-i}^\beta}, \tag{2}$$

其中， p_{-i} 表示竞争对手生产的商品价格。

此外，梯度调整机制可表示为

$$p_i(t+1) = p_i(t) + k_i \frac{\partial \Pi_i(t)}{\partial p_i(t)},$$

其中， $k_i > 0$ 控制企业 i的调整速度。已知

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = \frac{-p_{-i}^\beta p_i^{1+\beta} \beta + \left(p_{-i}^{2\beta} + p_{-i}^\beta p_i^\beta \left(1+\beta\right) \right) c_i}{p_i^2 \left(p_i^\beta + p_{-i}^\beta \right)^2}.$$

简言之，该模型可描述为以下迭代映射。

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + k_1 \dfrac{-p_2^\beta(t) p_1^{1+\beta}(t) \beta + \left(p_2^{2\beta}(t) + p_2^\beta(t) p_1^\beta(t) \left(1+\beta\right) \right) c_1}{p_1^2(t) \left(p_1^\beta(t) + p_2^\beta(t) \right)^2}, \\ p_2(t+1) = p_2(t) + k_2 \dfrac{-p_1^\beta(t) p_2^{1+\beta}(t) \beta + \left(p_1^{2\beta}(t) + p_1^\beta(t) p_2^\beta(t) \left(1+\beta\right) \right) c_2}{p_2^2(t) \left(p_2^\beta(t) + p_1^\beta(t) \right)^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Ahmed等人最初仅通过数值模拟研究了这一博弈 [3] ，因为纳什均衡不存在解析表达式。本文采用基于符号计算的方法重新研究这一博弈，并探讨可替代度对均衡局部稳定性的影响。可以看出，对于一般的 β，无法分析映射 (3) 的平衡点，因为方程组中会出现指数参数。对于这类含有指数参数的方程组，现有的解析工具相当有限。因此，与 [3], 类似，我们的研究主要聚焦于两个特定情形，即 $\beta = 1$ 和 $\beta = 1/2$，它们分别对应于 $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$。

3 $\alpha = 1/2$

若 $\alpha = 1/2$，则 $\beta = 1$。因此，映射 (3) 变为

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + k_1 \dfrac{-2\,p_2(t)p_1^2(t) + \left(p_2^2(t) + 2\,p_2(t)p_1(t)\right) c_1}{p_1^2(t)\left(p_1(t) + p_2(t)\right)^2}, \\ p_2(t+1) = p_2(t) + k_2 \dfrac{-2\,p_1(t)p_2^2(t) + \left(p_1^2(t) + 2\,p_1(t)p_2(t)\right) c_2}{p_2^2(t)\left(p_2(t) + p_1(t)\right)^2}. \end{cases} \tag{4}$$

从经济学视角来看，确定非零平衡点的数量（p_1，p_2）以及 $p_1 > 0$ 和 $p_2 > 0$非常重要。为了计算均衡，我们令 $p_1(t+1) = p_1(t) = p_1$ 以及$p_2(t+1) = p_2(t) = p_2$。由此得到以下均衡方程。

$$\begin{cases} -2p_2p_1^2 + \left(p_2^2 + 2p_2p_1\right) c_1 = 0, \\ -2p_1p_2^2 + \left(p_1^2 + 2p_1p_2\right) c_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

三角分解法可视为高斯消元法的扩展，它使我们能够分析非线性经济模型的均衡。三角分解法和高斯消元法都可以将方程组转化为三角形式。然而，三角分解法适用于多项式系统，而高斯消元法仅适用于线性系统。关于三角分解的更多信息，请参阅 [5, 19, 23, 36, 37]。具体而言，使用三角分解法，我们可以将方程组（5）的解分解为以下两个三角多项式集的零点。

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_{11} = [p_1,\ p_2]\,, \\ &\mathcal{T}_{12} = \left[p_1^3 - 4\,c_1p_1^2 + (4\,c_1^2 - 2\,c_1c_2)p_1 + 3\,c_1^2c_2,\ c_1p_2 - p_1^2 + 2\,c_1p_1\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathcal{T}_{11}$ 的零点对应于原点 (0,0)。此外，可以通过 $\mathcal{T}_{12}$计算非零平衡点。 $\mathcal{T}_{12}$ 的第一个多项式 $p_1^3 - 4\,c_1p_1^2 + (4\,c_1^2 - 2\,c_1c_2)p_1 + 3\,c_1^2c_2$ 是关于 p_1 的单变量多项式，而 $\mathcal{T}_{12}$ 的第二个多项式 $c_1p_2 - p_1^2 + 2\,c_1p_1$ 关于 p_2的次数为 1。因此，如果我们根据第一个多项式求出 p_1，就可以将 p_1 的解代入第二个多项式，从而轻松得到 p_2。由于 $\mathcal{T}_{12}$ 的第一个多项式关于 p_1的次数为 3，因此至多有 3 个正实解。虽然这些解存在解析表达式，但表达式相当复杂。

如果 $\mathcal{T}_{12}$ 的解析解很复杂，那么要确定正实解的确切数量并非易事。然而，本文第一作者及其合作者 [25] 提出了一种代数算法，无需求出闭式解，即可系统地确定半代数经济中的均衡重数。我们在命题1中总结了映射 (4) 的计算结果。感兴趣的读者可参阅 [25] 的第3节，了解该算法的更多细节。

命题1. 令 $\alpha = 1/2$。迭代映射 (4) 存在唯一的均衡 (p_1, p_2)，其中 $p_1 > 0$且 $p_2 > 0$。

为了探究均 衡的局部稳定性，以下雅可比矩阵发挥着重要作用 le.

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{p_1^6 + 3\,p_1^5p_2 + 3\,p_1^4p_2^2 + \left(p_2^3 + 2\,k_1p_2\right) p_1^3 - 6\,k_1p_2p_1^2c_1 - 6\,k_1p_2^2p_1c_1 - 2\,c_1k_1p_2^3}{p_1^3\left(p_1 + p_2\right)^3}, \\ J_{12} &= \frac{k_1\left(2\,c_1 - p_1 + p_2\right)}{\left(p_1 + p_2\right)^3}, \\ J_{21} &= \frac{k_2\left(2\,c_2 + p_1 - p_2\right)}{\left(p_1 + p_2\right)^3}, \\ J_{22} &= \frac{p_2^6 + 3\,p_1p_2^5 + 3\,p_1^2p_2^4 + \left(p_1^3 + 2\,k_2p_1\right) p_2^3 - 6\,k_2p_1p_2^2c_2 - 6\,k_2p_1^2p_2c_2 - 2\,c_2k_2p_1^3}{p_2^3\left(p_1 + p_2\right)^3}. \end{aligned}$$

那么， J 的特征多项式为

$$CP(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(J)\lambda + \mathrm{Det}(J),$$

其中，$\mathrm{Tr}(J) = J_{11} + J_{22}$和 $\mathrm{Det}(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$分别是 J 的迹和行列式。根据 Jury判据 [18], ，局部稳定性的条件包括:

1. $CD_1^J \equiv CP(1) = 1 - \mathrm{Tr}(J) + \mathrm{Det}(J) > 0$,
2. $CD_2^J \equiv CP(-1) = 1 + \mathrm{Tr}(J) + \mathrm{Det}(J) > 0$,
3. $CD_3^J \equiv 1 - \mathrm{Det}(J) > 0$。

备注 1。 此外，已知当均衡在 $CD_1^J = 0$、 $CD_2^J = 0$ 或 $CD_3^J = 0$ 处失去稳定性时，离散动力系统可能分别发生折叠分岔、倍周期分岔或 Neimark-Sacker分岔。

3.1 $c_1 = c_2$ 的特殊情形

若在（5）中令 $c_1 = c_2 = c$ ，则三角分解法可将平衡方程（5）转化为以下三个三角集合。

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{21} &= [p_1,\ p_2],\\
\mathcal{T}_{22} &= [p_1 - 3\,c,\ p_2 - 3\,c],\\
\mathcal{T}_{23} &= [p_1^2 - cp_1 - c^2,\ p_2 + p_1 - c].
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_{21}$ 的零点显然是 (0，0)。由 $\mathcal{T}_{23}$，我们得到两个零点[1]

$$\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)c, \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)c\right), \quad \left(\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)c, \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)c\right),$$

由于分量 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)c$ 为负，因此这两个零点均无用。因此，唯一的非零均衡为 $(3\,c,\ 3\,c)$，可由 $\mathcal{T}_{22}$ 得到。

定理1。 设 $\alpha = 1/2$ 和 $c_1 = c_2 = c$。唯一的非零均衡 $(3\,c, 3\,c)$ 局部稳定，当

$$c^2 > \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1k_2 + 4\,k_2^2}}{216}.$$

当满足以下条件时，方程组可能发生倍周期分岔

$$c^2 = \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1k_2 + 4\,k_2^2}}{216}.$$

此外，均衡不存在其他分岔。

证明。 代入 将 $p_1 = 3\,c$和 $p_2 = 3\,c$代入 J，我们得到在 $(3\,c, 3\,c)$ 处关于 b 的雅可比矩阵 e

$$J(3\,c, 3\,c) = \begin{bmatrix} \frac{27\,c^2 - k_1}{27\,c^2} & \frac{k_1}{216\,c^2} \\ \frac{k_2}{216\,c^2} & \frac{27\,c^2 - k_2}{27\,c^2} \end{bmatrix}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(J) &= \frac{54\,c^2 - k_1 - k_2}{27\,c^2},\\
\mathrm{Det}(J) &= \frac{5184\,c^4 - 192\,c^2k_1 - 192\,c^2k_2 + 7\,k_1k_2}{5184\,c^4}.
\end{aligned}$$

[1]也可以通过在（6）中令 $c_1 = c_2 = c$，从 $\mathcal{T}_{12}$ 得到这些零点。

可以验证　　局部稳定性的第一个条件始终成立，因为 k_1，k_2，$c>0$ 一个　　d

$$CD_1^J \equiv 1 - \mathrm{Tr}(J) + \mathrm{Det}(J) = \frac{5\,k_1 k_2}{3888\,c^4}.$$

第二个条件是

$$CD_2^J \equiv 1 + \mathrm{Tr}(J) + \mathrm{Det}(J) = \frac{15552\,c^4 + (-288\,k_1 - 288\,k_2)\,c^2 + 5\,k_1 k_2}{3888\,c^4} > 0,$$

这意味着

$$15552\,c^4 + (-288\,k_1 - 288\,k_2)\,c^2 + 5\,k_1 k_2 > 0,$$

即，

$$c^2 > \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216} \quad \text{or} \quad c^2 < \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 - \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216}.$$

第三个条件是

$$CD_3^J \equiv 1 - \mathrm{Det}(J) = \frac{(144\,k_1 + 144\,k_2)\,c^2 - 5\,k_1 k_2}{3888\,c^4} > 0,$$

这意味着

$$(144\,k_1 + 144\,k_2)\,c^2 - 5\,k_1 k_2 > 0,$$

即，

$$c^2 > \frac{5\,k_1 k_2}{144\,(k_1 + k_2)}.$$

此外，可以证明

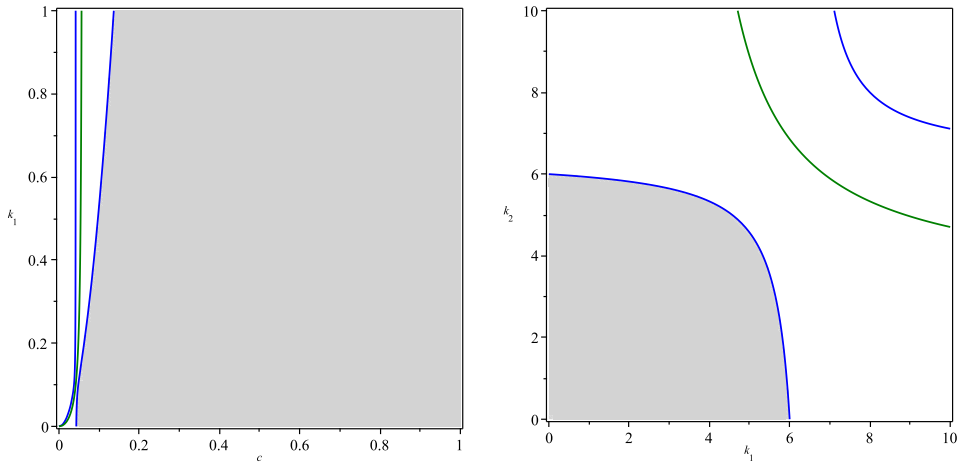
$$\frac{2\,k_1 + 2\,k_2 - \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216} < \frac{5\,k_1 k_2}{144\,(k_1 + k_2)} < \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216}.$$

因此，当满足以下条件时，均衡是局部稳定的

$$c^2 > \frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216}.$$

证明的其余部分可由注1直接得出。 □

图1展示了定理1中所述稳定区域的两个二维截面。可以观察到，边际成本 c 增加或调整速度 k_1，k_2 降低，均有助于稳定唯一非零均衡。



(a) $k_2 = 1/10$　　(b) $c = 1/3$

图1：所考虑的模型在 $\alpha = 1/2$ and$c_1 = c_2 = c$ 下的稳定区域二维截面。 $CD_2^J = 0$ and $CD_3^J = 0$ 的曲线分别以蓝色和绿色标出。

3.2 一般情形

如果 $c_1 \neq c_2$，那么唯一非零均衡的解析表达式会相当复杂。因此，定理1的证明无法奏效，因为不可能将均衡的解析表达式代入雅可比矩阵并得到简洁的结果。关于分岔分析，我们需要确定参数满足哪些条件，使得在非零均衡处 $CD_1^J = 0$、 $CD_2^J = 0$和 $CD_3^J = 0$ 成立。为此，需要引入以下记号。

定义 1. 设

$$A = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i, \quad B = \sum_{j=0}^{l} b_j\, x^j$$

是关于 x 的两个一元多项式，其系数为 a_i, b_j 和 $a_m, b_l \neq 0$。行列式

$$\left|\begin{array}{ccccccc} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & \\ b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & b_l & b_{l-1} & \cdots & b_0 & \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\} l \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\} m \end{array}$$

称为 A 和 B 关于 x 的 *Sylvester*结式 （或简称 结式），记作 res(A, B, x)。

以下引理 揭示了结式的主要性质，该性质也可见于 [30].

引理1。 设 A 和 B 是 x中的两个一元多项式。存在 x中的两个多项式 F 和 G ，使得

$$FA + GB = \mathrm{res}(A, B, x).$$

此外， A 和 B 在复数域中有公共零点，当且仅当 $\mathrm{res}(A, B) = 0$。

对于三角集合 $\mathcal{T} = [T_1(x)\ T_2(x,\ y)]$ 和多项式 $H(x,\ y)$，我们定义

$$\mathrm{res}(H, \mathcal{T}) \equiv \mathrm{res}(\mathrm{res}(H, T_2, y), T_1(x), x).$$

根据引理1，如果 $T_1 = 0$ 和 $T_2 = 0$ （或简记为 $\mathcal{T} = 0$），那么可知 $H = 0$ 蕴含 res$(H,\ \mathcal{T}) = 0$, 这意味着 res$(H,\ \mathcal{T}) = 0$ 是 $H = 0$的必要条件。因此，得到以下命题。需要强调的是，命题2仅报告了 $k_1 = k_2$ 情形的结果，因为篇幅所限，本文无法列出 $k_1 \neq k_2$ 的条件。然而，读者可以看出，证明思路同样适用于 $k_1 \neq k_2$ ，并可自行推导出完整条件。

命题2。 设 $\alpha = 1/2$ 和 $k_1 = k_2 = k$。当$R_1 = 0$ 时，方程组可能发生倍周期分岔；当 $R_2 = 0$时，可能发生 *Neimark-Sacker*分岔，其中 R_1 和 R_2 见附录。

证明。 应注意，结式仅适用于多项式。对于 CD_1^J，我们考虑其分子 Num(CD_1^J)。于是可得

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_1^J), \mathcal{T}_{12}) = 81\, k^6 c_1^{18} c_2^6\, (c_1 + c_2)\left(32c_1^2 + 61c_1c_2 + 32c_2^2\right).$$

由于 $c_1 > 0$、 $c_2 > 0$和 $k > 0$，只要$\mathcal{T}_{12} = 0$，就不可能有 res(Num(CD_1^J) $\mathcal{T}_{12}) = 0$或 $CD_1^J = 0$。因此，均衡不可能通过折叠分岔失去其稳定性。此外，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_2^J), \mathcal{T}_{12}) &= -729\, c_1^{32} c_2^8 (c_1 + c_2) R_1, \\ \mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_3^J), \mathcal{T}_{12}) &= 729\, k^3 c_1^{32} c_2^8 (c_1 + c_2) R_2, \end{aligned}$$

仅当 $R_1 = 0$ 和 $R_2 = 0$时，它们才分别为零。因此，当 $R_1 = 0$ 时，方程组可能发生倍周期分岔；当 $R_2 = 0$ 时，可能发生Neimark-Sacker分岔。

□

根据命题1，存在唯一的均衡 $(p_1,\ p_2)$，其满足 $p_1>0$ 和 $p_2>0$，尽管其解析表达式较为复杂。为探究其局部稳定性，我们需要在不使用其闭式解的情况下，确定该均衡处 CD_1^J、CD_2^J和CD_3^J的符号。需要注意的是，CD_1^J、CD_2^J和 CD_3^J均为有理函数。假设

$$CD_i^J=\frac{\mathrm{Num}(CD_i^J)}{\mathrm{Den}(CD_i^J)},$$

其中，Num(·) 和 Den(·) 分别表示分子和分母。于是，当 Den(CD_i^J) $\neq 0$ 时，CD_i^J 的符号与 Num(CD_i^J) · Den(CD_i^J) 的符号相同。可以计算得

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_1^J)\cdot\mathrm{Den}(CD_1^J),\mathcal{T}_{12})=-1594323\,k^6c_1^{50}c_2^{17}(c_1+c_2)^6(32\,c_1^2+61\,c_1c_2+32\,c_2^2),$$

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_2^J)\cdot\mathrm{Den}(CD_2^J),\mathcal{T}_{12})=129140163\,c_1^{70}c_2^{22}(c_1+c_2)^6R_1,$$

and

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_3^J)\cdot\mathrm{Den}(CD_3^J),\mathcal{T}_{12})=-129140163\,k^3c_1^{70}c_2^{22}(c_1+c_2)^6R_2.$$

我们需要强调，res(Num(CD_i^J) ·Den(CD_i^J) $\mathcal{T}_{12}$) 的符号可能与 Num(CD_i^J)·Den(CD_i^J) 或 CD_i^J 的符号不同。然而，已知 res(Num(CD_i^J)·Den(CD_i^J) $\mathcal{T}_{12}$) 仅涉及参数，其零点将参数空间划分为若干区域。在每个区域内，CD_i^J 的符号保持不变。因此，我们只需从每个区域中选取一个样本点，并确定 CD_i^J 在所选样本点处的符号。一般而言，样本点的选取可能极其复杂，但可以通过例如 PCAD方法 [11] 实现自动化。

表1列出了所有选定样本点，以及关于非零均衡是否稳定（即 $CD_1^J>0$、$CD_2^J>0$和 $CD_3^J>0$ 是否同时成立）的相应信息。此外，表1还显示了这些样本点处 R_1 和 R_2 的符号。可以观察到，当 $R_1>0$ 且 $R_2>0$时，均衡稳定，反之亦然。需要指出的是，表1中的计算精确且严谨。也就是说，计算结果为系统分析局部稳定性提供了理论基础。因此，我们得到以下定理。

定理2。若 $k_1=k_2=k$，则唯一非零均衡 (p_1,p_2) 在 $p_1>0$ 且 $p_2>0$ 时，若 $R_1>0$ 且 $R_2>0$，则局部稳定，其中 R_1 和 R_2 可在附录中找到。

表1：$\alpha=1/2$下 $\{(c_1,c_2,k)\,|\,c_1>0,c_2>0,k>0\}$ 中的选定样本点

$(c_1,\ c_2,\ k)$	稳定	R_1	R_2	$(c_1,\ c_2,\ k)$	稳定	R_1	R_2
$(1,1/4,1)$	yes	+	+	$(1,5/16,1)$	yes	+	+
$(1,1/4,7)$	no	−	+	$(1,5/16,10)$	no	−	+
$(1,1/4,29)$	no	−	−	$(1,5/16,30)$	no	−	−
$(1,1/4,51)$	no	+	−	$(1,5/16,51)$	no	+	−
$(1,1/2,1)$	yes	+	+	$([1,7/8,1)$	yes	+	+
$(1,\ 1/2,\ 18)$	no	−	+	$(1,\ 7/8,\ 38)$	no	−	+
$(1,1/2,35)$	no	−	−	$(1,7/8,51)$	no	−	−
$(1,1/2,53)$	no	+	−	$(1,7/8,65)$	no	+	−
$(1,9/8,1)$	yes	+	+	$(1,\ 2,\ 1)$	yes	+	+
$(1,9/8,49)$	no	−	+	$(1,\ 2,\ 70)$	no	−	+
$(1,9/8,66)$	no	−	−	$(1,\ 2,\ 140)$	no	−	−
$(1,9/8,83)$	no	+	−	$(1,\ 2,\ 209)$	no	+	−
$(1,\ 3,\ 1)$	yes	+	+	$(1,\ 4,\ 1)$	yes	+	+
$(1,\ 3,\ 91)$	no	−	+	$(1,\ 4,\ 112)$	no	−	+
$(1,\ 3,\ 272)$	no	−	−	$(1,\ 4,\ 462)$	no	−	−
$(1,\ 3,\ 453)$	no	+	−	$(1,\ 4,\ 811)$	no	+	−

4 $\alpha = 1/3$

若 $\alpha = 1/3$，则 $\beta = 1/2$。我们得到迭代映射

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + k_1 \dfrac{-p_1(t)\sqrt{p_1(t)p_2(t)} + \left(2\,p_2(t) + 3\sqrt{p_1(t)p_2(t)}\right) c_1}{2\,p_1^2(t)\left(\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)}\right)^2}, \\ p_2(t+1) = p_2(t) + k_2 \dfrac{-p_2(t)\sqrt{p_1(t)p_2(t)} + \left(2\,p_1(t) + 3\sqrt{p_1(t)p_2(t)}\right) c_2}{2\,p_2^2(t)\left(\sqrt{p_1(t)} + \sqrt{p_2(t)}\right)^2}. \end{cases} \tag{7}$$

令 $p_1(t+1) = p_1(t) = p_1$ 和 $p_2(t+1) = p_2(t) = p_2$，可得均衡方程

$$\begin{cases} -p_1\sqrt{p_1p_2} + (2\,p_2 + 3\sqrt{p_1p_2})\,c_1 = 0, \\ -p_2\sqrt{p_1p_2} + (2\,p_1 + 3\sqrt{p_1p_2})\,c_2 = 0. \end{cases}$$

记 $\sqrt{p_1} = \overline{x}$ 和 $\sqrt{p_2} = \overline{y}$。上述方程变为

$$\begin{cases} -x^3y + (2\,y^2 + 3\,xy)c_1 = 0, \\ -y^3x + (2\,x^2 + 3\,xy)c_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

使用三角分解法，我们将方程组 (8) 的解分解为以下两个三角集的零点。

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_{31} = [x,\ y]\,, \\ &\mathcal{T}_{32} = \left[x^8 - 9\,c_1x^6 + 27\,c_1^2x^4 + (-27\,c_1^3 - 12\,c_1^2c_2)x^2 + 20\,c_1^3c_2,\ 2\,c_1y - x^3 + 3\,c_1x\right]. \end{aligned}$$

显然，$\mathcal{T}_{31}$ 对应于原点 (0，0)。因此，非零均衡数量的确定可转化为求解以下半代数系统实数解数量的问题。

$$\begin{cases} x^8 - 9\,c_1x^6 + 27\,c_1^2x^4 + (-27\,c_1^3 - 12\,c_1^2c_2)x^2 + 20\,c_1^3c_2 = 0, \\ 2\,c_1y - x^3 + 3\,c_1x = 0, \\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

利用 Li 和 Wang [25], 提出的代数方法，我们知道，对于任意参数值 c_1，$c_2 > 0$，上述方程组有唯一实数解，这意味着以下命题成立。

命题3。设 $\alpha = 1/3$。迭代映射 (7) 存在唯一均衡 (p_1, p_2)，且满足 $p_1 > 0$和 $p_2 > 0$。

为研究该均衡的局部稳定性，我们考虑雅可比矩阵

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$M_{11} = \frac{12\,p_1^{\frac{9}{2}}\sqrt{p_2} + 4\,p_1^{\frac{7}{2}}p_2^{\frac{3}{2}} - 15\,c_1k_1p_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_2} - 8\,c_1k_1p_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_1} + 3\,k_1p_1^{\frac{5}{2}}\sqrt{p_2} + 4\,p_1^5 + 12\,p_1^4p_2 - 21\,c_1k_1p_1p_2 + k_1p_1^2p_2}{4\,p_1^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^3},$$

$$M_{12} = \frac{k_1\left(\sqrt{p_2}\,p_1^{\frac{3}{2}} - p_1^2 + c_1\sqrt{p_2}\sqrt{p_1} + 3\,p_1c_1\right)}{4\,p_1^2\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^3\sqrt{p_2}},$$

$$M_{21} = \frac{k_2\left(\sqrt{p_1}\,p_2^{\frac{3}{2}} + c_2\sqrt{p_2}\sqrt{p_1} + 3\,p_2c_2 - p_2^2\right)}{4\,p_2^2\left(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}\right)^3\sqrt{p_1}},$$

$$M_{22}=\frac{4\,p_1^{\frac{3}{2}}p_2^{\frac{7}{2}}+12\,p_2^{\frac{9}{2}}\sqrt{p_1}-8\,c_2k_2p_1^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_2}-15\,c_2k_2p_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{p_1}+3\,k_2p_2^{\frac{5}{2}}\sqrt{p_1}+12\,p_1\,p_2^4+4\,p_2^5-21\,c_2k_2p_1p_2+k_2p_1p_2^2}{4p_2^{\frac{7}{2}}\left(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}\right)^3}.$$

与第3节一样，我们记

$$\begin{aligned}CD_1^M&\equiv 1-\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Det}(M),\\CD_2^M&\equiv 1+\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Det}(M),\\CD_3^M&\equiv 1-\mathrm{Det}(M).\end{aligned}$$

4.1 $c_1=c_2$的特殊情形

若设 $c_1=c_2=c$，则三角分解法可以将平衡方程（8）转化为以下三角集。

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{41}&=[x,y],\\\mathcal{T}_{42}&=[x^2-c,y+x],\\\mathcal{T}_{43}&=[x^2-5\,c,y-x],\\\mathcal{T}_{44}&=[x^4-3\,c\,x^2+4\,c^2,2\,cy-x^3+3\,cx].\end{aligned}$$

显然， $\mathcal{T}_{41}$和 $\mathcal{T}_{42}$的零点在经济学上并无意义。此外， $\mathcal{T}_{44}$的 $x^4-3\,c\,x^2+4\,c^2$ 的所有根，即

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{7}c\,\mathrm{i}+6\,c}}{2},-\frac{\sqrt{2\sqrt{7}c\,\mathrm{i}+6\,c}}{2},\frac{\sqrt{-2\sqrt{7}c\,\mathrm{i}+6\,c}}{2},-\frac{\sqrt{-2\sqrt{7}c\,\mathrm{i}+6\,c}}{2},$$

均为虚数，也不在我们关注之列。只有一个非零均衡（p_1， p_2） $=$（$5\,c$， $5\,c$），它对应于分支 $\mathcal{T}_{43}$。

将 $p_1=5\,c$和 $p_2=5\,c$代入 M，可得均衡点（$5\,c$， $5\,c$）处的雅可比矩阵为

$$M(5\,c,5\,c)=\begin{bmatrix}\frac{500\,c^2-3\,k_1}{500\,c^2} & \frac{k_1}{1000\,c^2}\\ \frac{k_2}{1000\,c^2} & \frac{500\,c^2-3\,k_2}{500\,c^2}\end{bmatrix}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M)&=\frac{1000\,c^2-3\,k_1-3k_2}{500\,c^2},\\\mathrm{Det}(M)&=\frac{200000\,c^4-1200\,c^2k_1-1200\,c^2k_2+7\,k_1k_2}{200000\,c^4}.\end{aligned}$$

定理3. 设 $\alpha=1/3$和 $c_1=c_2=c$。唯一非零均衡 $(5\,c,5\,c)$局部稳定，当

$$c^2>\frac{3\,k_1+3\,k_2+\sqrt{9\,k_1^2-17\,k_1k_2+9\,k_2^2}}{2000}.$$

当满足以下条件时，方程组可能发生倍周期分岔

$$c^2=\frac{3\,k_1+3\,k_2+\sqrt{9\,k_1^2-17\,k_1k_2+9\,k_2^2}}{2000}.$$

此外，均衡不会发生其他分岔。

证明. 局部稳定性的第一个条件始终成立，因为

$$CD_1^M\equiv 1-\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Det}(M)=\frac{7\,k_1k_2}{200000c^4}.$$

第二个条件应为

$$CD_2^M\equiv 1+\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Det}(M)=\frac{800000\,c^4+(-2400\,k_1-2400\,k_2)\,c^2+7\,k_1k_2}{200000\,c^4}>0,$$

这意味着

$$800000\,c^4 + (-2400\,k_1 - 2400\,k_2)\,c^2 + 7\,k_1k_2 > 0,$$

即,

$$c^2 > \frac{3\,k_1 + 3\,k_2 + \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1k_2 + 9\,k_2^2}}{2000} \quad \text{or} \quad c^2 < \frac{3\,k_1 + 3\,k_2 - \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1k_2 + 9\,k_2^2}}{2000}.$$

第三个条件应为

$$CD_3^M \equiv 1 - \mathrm{Det}(M) = \frac{(1200\,k_1 + 1200\,k_2)\,c^2 - 7\,k_1k_2}{200000\,c^4} > 0,$$

由此可得

$$(1200\,k_1 + 1200\,k_2)\,c^2 - 7\,k_1k_2 > 0,$$

即,

$$c^2 > \frac{7\,k_1k_2}{1200\,(k_1 + k_2)}.$$

可以证明

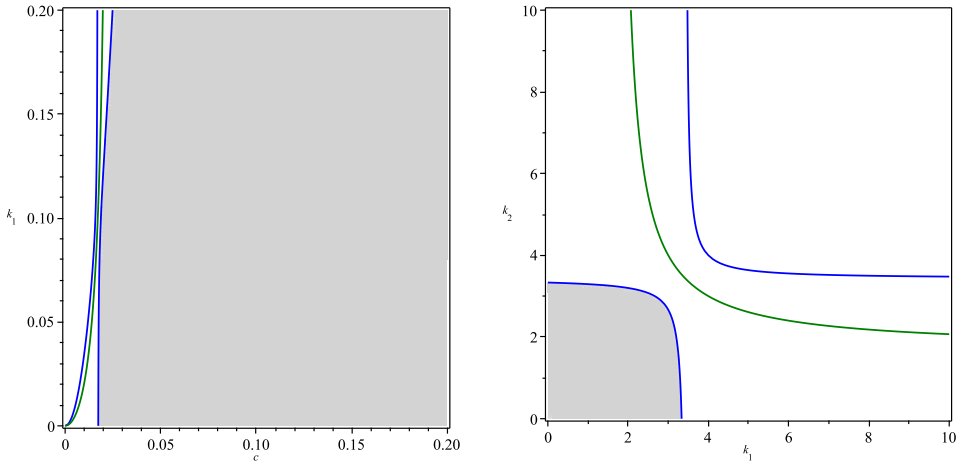
$$\frac{3\,k_1 + 3\,k_2 - \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1k_2 + 9\,k_2^2}}{2000} < \frac{7\,k_1k_2}{1200\,(k_1 + k_2)} < \frac{3\,k_1 + 3\,k_2 + \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1k_2 + 9\,k_2^2}}{2000}.$$

因此，当.....时，均衡是局部稳定的

$$c^2 > \frac{3\,k_1 + 3\,k_2 + \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1k_2 + 9\,k_2^2}}{2000}.$$

证明的其余部分由注1得出。 □

在图2中，我们展示了定理3所报告的稳定区域的两个二维截面。可以看到，如果调整速度 k_1， k_2 足够大，或边际成本 c 足够小，均衡可能会失去稳定性。



(a) $k_2 = 1/10$ (b) $c = 1/10$

图2：所考虑的模型在 $\alpha = 1/3$ 和$c_1 = c_2 = c$下的稳定区域二维截面。 $CD_2^M = 0$ 和 $CD_3^M = 0$ 的曲线分别以蓝色和绿色标出。

4.2 一般情形

与第 3.2 节一样，我们设定 $k_1 = k_2 = k$。需要指出的是，本节采用的方法同样适用于 $k_1 \neq k_2$的情况。然而，由于篇幅所限， $k_1 \neq k_2$ 的条件较为繁琐，因此本节不予列出。感兴趣的读者可以使用我们的方法自行计算完整条件。 $c_1 = c_2$ 的情况已在第 4.1 节中探讨，因此下文假设 $c_1 \neq c_2$ 。以下命题将分析这些分岔。

命题 4。 设 $\alpha = 1/3$、 $k_1 = k_2 = k$ 和 $c_1 \neq c_2$。当 $R_3 = 0$ 时，迭代映射 (7) 可能发生倍周期分岔；当 $R_4 = 0$时，可能发生 *Neimark-Sacker*分岔，其中 R_3 和 R_4 见附录。

证明。 计算 Num(CD_1^M) 关于 $\mathcal{T}_{32}$ 的结式，可得

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_1^M), \mathcal{T}_{32}) = 879609302220800000\, k^{16} c_1^{51} c_2^{11}\, (c_1 - c_2)^2 \left(2187\, c_1^2 - 4031\, c_1 c_2 + 2187\, c_2^2\right)^2.$$

显然,

$$2187\, c_1^2 - 4031\, c_1 c_2 + 2187\, c_2^2 = 2187 (c_1 - c_2)^2 + 343\, c_1 c_2 > 0.$$

因此，res(Num(CD_1^M) $\mathcal{T}_{32}$) $\neq 0$，这意味着在唯一非零均衡处， $CD_1^M \neq 0$ 。因此，映射 (7) 中不存在折叠分岔。此外，我们有

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_2^J), \mathcal{T}_{32}) = 990352031428304219919299379200000000\, c_1^{101} c_2^{13}\, (c_1 - c_2)^2\, R_3^2,$$

and

$$\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_3^J), \mathcal{T}_{32}) = 990352031428304219919299379200000000\, k^8 c_1^{101} c_2^{13} (c_1 - c_2)^{10} R_4^2.$$

因此，当 $R_3 = 0$ 时可能发生倍周期分岔，而当 $R_4 = 0$ 时可能发生 Neimark-Sacker分岔。

□

为了考察局部稳定性，我们需要考虑 Num(CD_i^J) $\cdot$ Den(CD_i^J)，并计算其关于 $\mathcal{T}_{32}$ 的结式。由此可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}(\mathrm{Num}(CD_1^J) \cdot \mathrm{Den}(CD_1^J), \mathcal{T}_{32}) = \\
&\quad 57089907708238395242331438777979805455309864 96 \cdot 10^{20} \\
&\quad \cdot k^{16} c_1^{156} c_2^{36} (c_1 - c_2)^{12} (2187\, c_1^2 - 4031\, c_1 c_2 + 2187\, c_2^2)^2, \\
&\mathrm{res}((\mathrm{Num}(CD_2^J) \cdot \mathrm{Den}(CD_2^J), \mathcal{T}_{32}) = \\
&\quad 65820182292848241686198767302294020199309434625343194533944360 96 \cdot 10^{24} \\
&\quad \cdot c_1^{218} c_2^{42} (c_1 - c_2)^{10} R_3^2, \\
&\mathrm{res}((\mathrm{Num}(CD_3^J) \cdot \mathrm{Den}(CD_3^J), \mathcal{T}_{32}) = \\
&\quad 65820182292848241686198767302294020199309434625343194533944360 96 \cdot 10^{24} \\
&\quad \cdot k^8 c_1^{218} c_2^{42} (c_1 - c_2)^{10} R_4^2.
\end{aligned}$$

这些 res(Num(CD_i^J) $\cdot$Den(CD_i^J) $\mathcal{T}_{32}$) 仅涉及参数，其零点将参数集 $\{(c_1,\ c_2,\ k) \,|\, c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ k > 0\}$ 划分为若干区域。在每个区域中， CD_1^M、 CD_2^M 和 CD_3^M 的符号均固定，可通过检查一个选定样本点来确定。表2列出了40个选定样本点，以及 R_3、 R_4 在这些样本点处的符号。此外，表2还提供了非零均衡是否稳定的信息，即稳定性条件$CD_1^M > 0$、 $CD_2^M > 0$ 和 $CD_3^M > 0$ 是否同时满足。感兴趣的读者可以自行核验表2的正确性。经过一系列计算，我们得到以下定理。

定理4. 令 $k_1 = k_2 = k$ 和 $c_1 \neq c_2$。映射 (7) 的唯一非零均衡在满足以下任一条件时局部稳定：

1. $R_3 > 0, R_4 > 0$;
2. $R_3 < 0, R_4 > 0$ 且 $A_1 > 0, A_2 < 0, A_3 > 0$,

其中， R_3, R_4, A_1, A_2和 A_3 可在附录中找到。

注 2. 从表2中可以看出，当 $R_3 > 0$ 和 $R_4 > 0$时，均衡是稳定的。因此， $R_3 > 0, R_4 > 0$是局部稳定性的充分条件。然而，这个条件并非必要条件。例如，在表2所列的第一个样本点 $(1, 1/4, 1/512)$ 处，均衡是局部稳定的，但可以验证，在该点 $R_3 < 0$ 和 $R_4 > 0$ 。因此，定理4的第二个条件是必要的。

第二个条件的必要性也可以通过图4（b、d、f）来说明，其中，第一和第二个条件所界定的区域分别用浅灰色和深灰色标出。从经济

直觉上，我们知道，对于给定的边际成本 c_2，降低调整速度 k 有利于均衡的局部稳定性。也就是说，第二个条件所界定的深灰色区域更有可能被纳入稳定区域。

需要指出的是，第二个条件中涉及的 A_1、 A_2和 A_3 包含在所谓的广义判别式列表中，可以通过反复试验将其筛选出来。关于广义判别式列表，读者可参阅 [38] 以了解更多详情。这里需要使用多项式 A_1、 A_2 和 A_3，因为 $R_3 < 0$ 和 $R_4 > 0$ 的条件并不足以保证局部稳定性。例如，在$(1,\ 1/4,\ 1/512)$处，模型是稳定的，其中 $R_3 < 0$和 $R_4 > 0$。但是，在$(1,\ 1/4,\ 34)$处，模型是不稳定的，而 $R_3 < 0$和$R_4 > 0$ 也同样满足。因而，需要增加多项式，以收缩由 $R_3 < 0$ 和 $R_4 > 0$ 所定义的区域，从而获得完整的稳定性条件。

表2： $\{(c_1,\ c_2,\ k)$中 $\alpha = 1/3$的选定样本点 $| \, c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ k > 0\}$

(c_1, c_2, k)	稳定	R_3	R_4	(c_1, c_2, k)	稳定	R_3	R_4
$(1,\ 1/4,\ 1/512)$	yes	$-$	$+$	$(1,\ 3/8,\ 1/128)$	yes	$-$	$+$
$(1,\ 1/4,\ 1)$	yes	$+$	$+$	$(1, 3/8, 1)$	yes	$+$	$+$
$(1,\ 1/4,\ 34)$	no	$-$	$+$	$(1, 3/8, 64)$	no	$-$	$+$
$(1, 1/4, 153)$	no	$-$	$-$	$(1, 3/8, 175)$	no	$-$	$-$
$(1,\ 1/4,\ 273)$	no	$+$	$-$	$(1,\ 3/8,\ 287)$	no	$+$	$-$
$(1,\ 5/8,\ 1/32)$	yes	$-$	$+$	$(1,\ 7/8,\ 1/128)$	yes	$-$	$+$
$(1,\ 5/8,\ 1)$	yes	$+$	$+$	$(1,\ 7/8,\ 1)$	yes	$+$	$+$
$(1, 5/8, 145)$	no	$-$	$+$	$(1, 7/8, 244)$	no	$-$	$+$
$(1,\ 5/8,\ 231)$	no	$-$	$-$	$(1, 7/8, 302)$	no	$-$	$-$
$(1, 5/8, 317)$	no	$+$	$-$	$(1,\ 7/8,\ 361)$	no	$+$	$-$
$(1, 5/4, 1/32)$	yes	$-$	$+$	$(1,\ 3/2,\ 1/16)$	yes	$-$	$+$
$(1,\ 5/4,\ 1)$	yes	$+$	$+$	$(1,\ 3/2,\ 1)$	yes	$+$	$+$
$(1, 5/4, 335)$	no	$-$	$+$	$(1, 3/2, 362)$	no	$-$	$+$
$(1, 5/4, 436)$	no	$-$	$-$	$(1, 3/2, 544)$	no	$-$	$-$
$(1, 5/4, 538)$	no	$+$	$-$	$(1, 3/2, 726)$	no	$+$	$-$
$(1,\ 2,\ 1/16)$	yes	$-$	$+$	$(1,\ 3,\ 1/16)$	yes	$-$	$+$
$(1,\ 2,\ 1)$	yes	$+$	$+$	$(1,\ 3,\ 1)$	yes	$+$	$+$
$(1,\ 2,\ 403)$	no	$-$	$+$	$(1, 3, 471)$	no	$-$	$+$
$(1, 2, 804)$	no	$-$	$-$	$(1,\ 3,\ 1503)$	no	$-$	$-$
$(1,\ 2,\ 1205)$	no	$+$	$-$	$(1,\ 3,\ 2536)$	no	$+$	$-$

5 可替代度的影响

首先，我们分析可替代度 α 对均衡稳定区域大小的影响。我们从考察 $c_1 = c_2$ 的特殊情况开始。

命题5。 设 $c_1 = c_2$。 $\alpha = 1/2$ 的稳定区域是 $\alpha = 1/3$ 的稳定区域的真子集。

证明。 回顾定理1和定理3。我们需要证明

$$\frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216} > \frac{3\,k_1 + 3\,k_2 + \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1 k_2 + 9\,k_2^2}}{2000},$$

这等价于

$$\left(\frac{2\,k_1 + 2\,k_2 + \sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{216}\right)^2 - \left(\frac{3\,k_1 + 3\,k_2 + \sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1 k_2 + 9\,k_2^2}}{2000}\right)^2 > 0.$$

上述不等式的左边可简化为

$$-\frac{(4374\,k_1 + 4374\,k_2)\sqrt{9\,k_1^2 - 17\,k_1 k_2 + 9\,k_2^2}}{2916000000} + \frac{(250000\,k_1 + 250000\,k_2)\sqrt{4\,k_1^2 - 7\,k_1 k_2 + 4\,k_2^2}}{2916000000}$$

$$+\frac{243439\,k_1^2}{1458000000}+\frac{61771\,k_1k_2}{2916000000}+\frac{243439\,k_2^2}{1458000000}.$$

不难验证

$$\frac{(4374\,k_1+4374\,k_2)\sqrt{9\,k_1^2-17\,k_1k_2+9\,k_2^2}}{2916000000}<\frac{(250000\,k_1+250000\,k_2)\sqrt{4\,k_1^2-7\,k_1k_2+4\,k_2^2}}{2916000000},$$

至此，证明完毕。

□

然而，如果 $c_1\neq c_2$，上述命题的结论便不成立。例如，假设 $k_1=k_2=k$，并取 $(c_1,\ c_2,\ k)=(261/65536,\ 1/2,\ 79/1024)$，则

$$R_1=\frac{588713082686404258452596575293972215811486125608829}{612998216346355543343338810860123673447495648873440870 4}>0,$$
$$R_2=\frac{108130364702270905134254005155560019343}{340282366920938463463374607431768211456}>0.$$

因此，对于 $\alpha=1/2$，$(261/65536,\ 1/2,\ 79/1024)$ 位于该模型的稳定区域内。但是，在同一参数点，即 $(c_1,\ c_2,\ k)=(261/65536,\ 1/2,\ 79/1024)$，我们有

$$R_3=-\frac{791461358900213183480020700044263844445257635142615074110540187}{263280729171392966744795069209176080797237738501372778135777443 84}<0,$$
$$R_4=\frac{526438846625624761986017962528229497389068363385599391}{374144419156711147060143317175368453031918731001856}>0,$$

and

$$A_1=\frac{44864955}{4294967296}>0,\quad A_2=-\frac{84224094748398371427544026 7}{81129638414606681695789005144064}<0,$$
$$A_3=-\frac{639365471826665601638454584575 77}{64903710731685345356631204115251 2}<0.$$

这意味着定理4中关于 $\alpha=1/3$ 的稳定性条件不满足 .

另一方面，也可以找到一些参数点，使模型在 $\alpha=1/3$ 时稳定，但在 $\alpha=1/2$ 时不稳定。例如，在 $(c_1,\ c_2,\ k)=(3/8,\ 1/2,\ 827/64)$ 处，我们知道

$$R_3=\frac{400791857418895802951520030 15}{288230376151711744}>0,\quad R_4=\frac{29339436396656781}{17179869184}>0.$$

因此，$(3/8,\ 1/2,\ 827/64)$ 对于 $\alpha=1/3$ 位于稳定区域内。然而，

$$R_1=-\frac{24200272602071108539}{17592186044416}<0,\quad R_2=-\frac{96467864887}{67108864}<0.$$

也就是说，$(3/8,\ 1/2,\ 827/64)$ 对于 $\alpha=1/2$ 是一个不稳定的参数点。

图3展示了 $\alpha=1/2$ 和 $\alpha=1/3$的稳定区域的二维截面。为便于比较，我们将 $\alpha=1/2$ 的截面置于左侧，将 $\alpha=1/3$ 的截面置于右侧。我们设定 $k_1=k_2=k$，并为参数 k选取三个不同的值，即 $k=1/2$，1，10，以观察 k 的变化对稳定区域大小的影响。 $R_1=0$ 和 $R_3=0$ 的曲线标为蓝色； $R_2=0$ 和 R_3 的曲线标为绿色； $A_1=0$、 $A_2=0$ 和 $A_3=0$ 的曲线标为红色。稳定区域以浅灰色标示。从图3中可以看出，对于 $\alpha=1/2$ 和 $\alpha=1/3$，如果企业更快地作出反应或调整产出，稳定区域就会缩小。同样，在图4中，我们假设 k_1 和 k_2 相同，并为 c_1选取三个不同的值，即 $c_1=1/2$，1，10。 $R_1>0$、 $R_2>0$ 以及 $R_3>0$、 $R_4>0$ 所对应的区域以浅灰色标示，而由$R_3<0$、 $R_4>0$、 $A_1>0$、 $A_2<0$、 $A_3>0$ 定义的区域则以深灰色标示。从图4中可以观察到，提高第一家企业的边际成本 c_1 可能会扩大 $\alpha=1/2$ 和 $\alpha=1/3$的稳定区域。

如前所述，对于 $c_1\neq c_2$ 和 $k_1=k_2$的情形，无法证明 $\alpha=1/3$ 的稳定区域涵盖 $\alpha=1/2$的稳定区域。然而，从图3和图4来看，似乎$\alpha=1/3$ 的稳定区域大于 $\alpha=1/2$的稳定区域。因此，对于本文所考虑的伯特兰双寡头模型，我们可以得出结论：提高可替代度 α 会在某种意义上使唯一

非零均衡变得不稳定。换言之，产品差异化可能会使所考虑的模型更加稳定，这从经济学视角来看是一项重要发现。Shy [34] 讨论了关于产品差异化程度的传统观点，即产品差异化程度降低可能导致市场竞争强度上升，甚至引发相关企业之间的价格战。对这一发现的一种可能解释是，价格战可能会使差异化商品伯特兰博弈的均衡变得不稳定。需要指出的是，我们的结论与Agliari等人[1]的结论相反。具体而言，Agliari等人 [1] 研究了差异化产品的古诺双寡头模型，并采用了与我们研究相同的CES效用函数和线性成本函数。然而，他们发现，产品差异化程度越高或可替代度越低，模型就越不稳定。这一矛盾或许有助于揭示差异化商品的伯特兰与古诺寡头市场之间的本质差异。

从经济学视角来看，改变可替代度对价格和利润等经济变量的影响颇为有趣。下文中，我们将重点讨论相同边际成本这一特殊情形下的比较静态分析。令 $c_1 = c_2 = c$。根据（3），均衡满足

$$\begin{cases} -p_2^{\beta} p_1^{1+\beta}\beta + p_2^{2\beta} c + (p_1^{\beta} p_2^{\beta})(1+\beta)c = 0, \\ -p_1^{\beta} p_2^{1+\beta}\beta + p_1^{2\beta} c + (p_1^{\beta} p_2^{\beta})(1+\beta)c = 0. \end{cases} \tag{9}$$

因此，

$$-p_2^{\beta} p_1^{1+\beta}\beta + p_2^{2\beta} c = -p_1^{\beta} p_2^{1+\beta}\beta + p_1^{2\beta} c,$$

这意味着

$$(p_1^{2\beta} - p_2^{2\beta})c = (p_2 - p_1) p_1^{\beta} p_2^{\beta}\beta.$$

不失一般性，假设 $p_1 \geq p_2$。由于 $c > 0$ 和 $\beta > 0$，我们知道（$p_1^{2\beta} - p_2^{2\beta}$）$c \geq 0$ 且（$p_2 - p_1$）$p_1^{\beta} p_2^{\beta}\beta \leq 0$，这意味着 $p_1 = p_2$。将 $p_1 = p_2$ 代入（9）的第一个方程，可以求得$p_1 = p_2 = \frac{c}{(2+\beta)\beta}$。因此，在均衡时 $q_1 = q_2 = \frac{\beta}{2c(2+\beta)}$。由于 $\beta = \alpha/(1-\alpha)$，我们得到

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = -\frac{2c}{\alpha^2} < 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{(-2+\alpha)^2 c} > 0.$$

根据（2），两家企业的利润为

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \left(\frac{c(2+\beta)}{\beta} - c\right)\frac{\beta}{2c(2+\beta)} = \frac{1}{2+\beta} = 1 + \frac{1}{\alpha - 2}.$$

因此，对于 $i = 1,\ 2$,

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{(\alpha-2)^2} < 0.$$

回顾反需求函数（1），对于无差异曲线上的点（$q_1^*,\ q_2^*$），我们将第一种产品的消费者剩余定义为

$$CS_1 = \int_0^{q_1^*} \frac{q_1^{\alpha-1}}{q_1^{\alpha} + q_2^{*\alpha}} dq_1 = \frac{1}{\alpha}\int_0^{q_1^*} \frac{d(q_1^{\alpha} + q_2^{*\alpha})}{q_1^{\alpha} + q_2^{*\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 + \left(\frac{q_1^*}{q_2^*}\right)^{\alpha}\right].$$

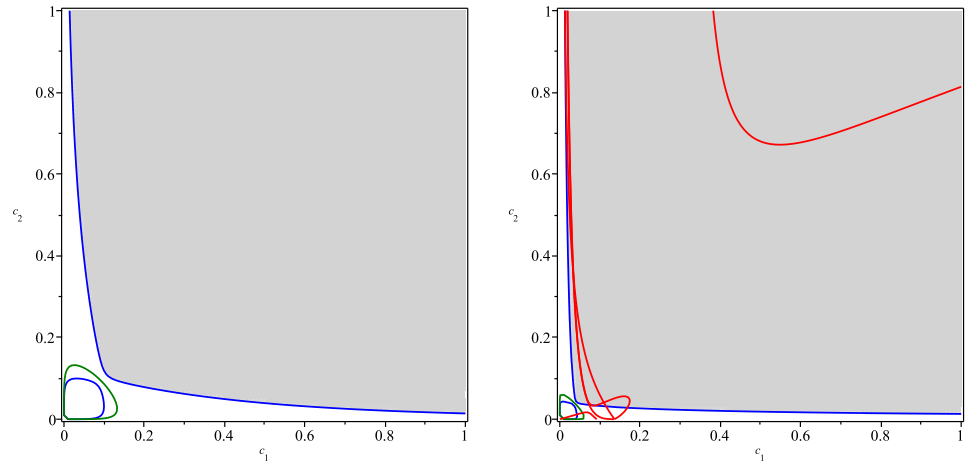
当 $c_1 = c_2$ 时，两种产品的产出在均衡时相等。因此，我们有 $CS_1 = CS_2 = \frac{1}{\alpha}\ln 2$。相应地，社会福利为

$$W = CS_1 + CS_2 + \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{2}{\alpha}\ln 2 + \frac{2}{\alpha - 2} + 2.$$

于是可知

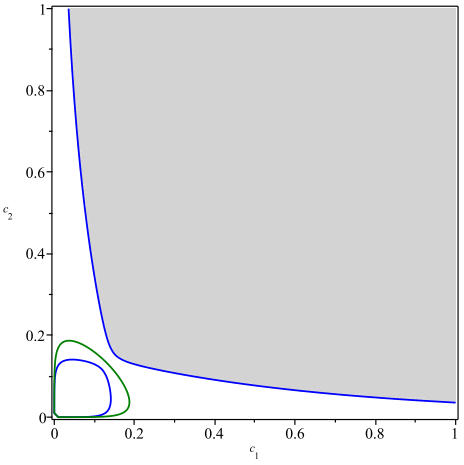
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{2\ln 2}{\alpha^2} - \frac{2}{(\alpha-2)^{\alpha}} < 0.$$

总之，在边际成本相同这一特殊情形下，可替代度α 的提高会带来价格更低、供给量更高、利润更低且社会福利更低的稳定均衡。换言之，产品差异化程度与商品价格、相关企业的利润以及社会福利均呈正相关，这与我们的经济直觉一致。

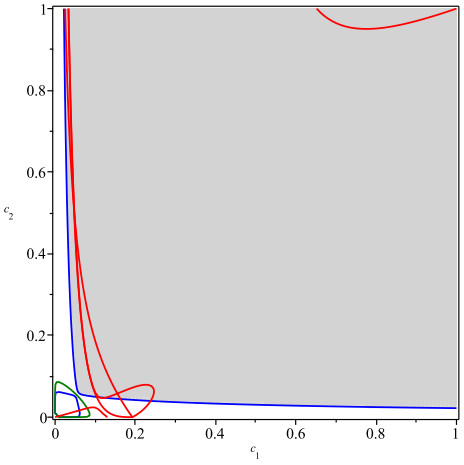


(a) $\alpha = 1/2, \quad k = 1/2$

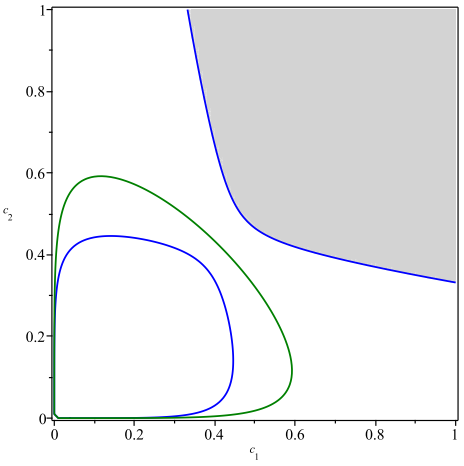
(b) $\alpha = 1/3, \quad k = 1/2$



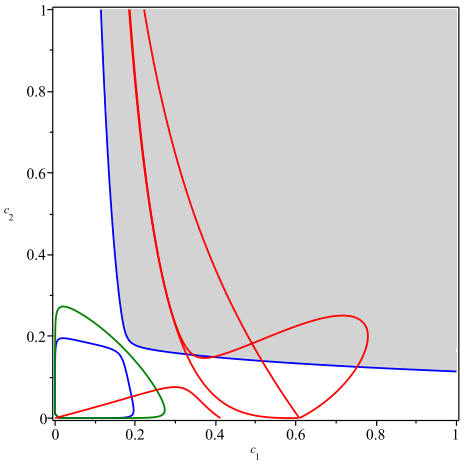
(c) $\alpha = 1/2, \quad k = 1$



(d) $\alpha = 1/3, \quad k = 1$

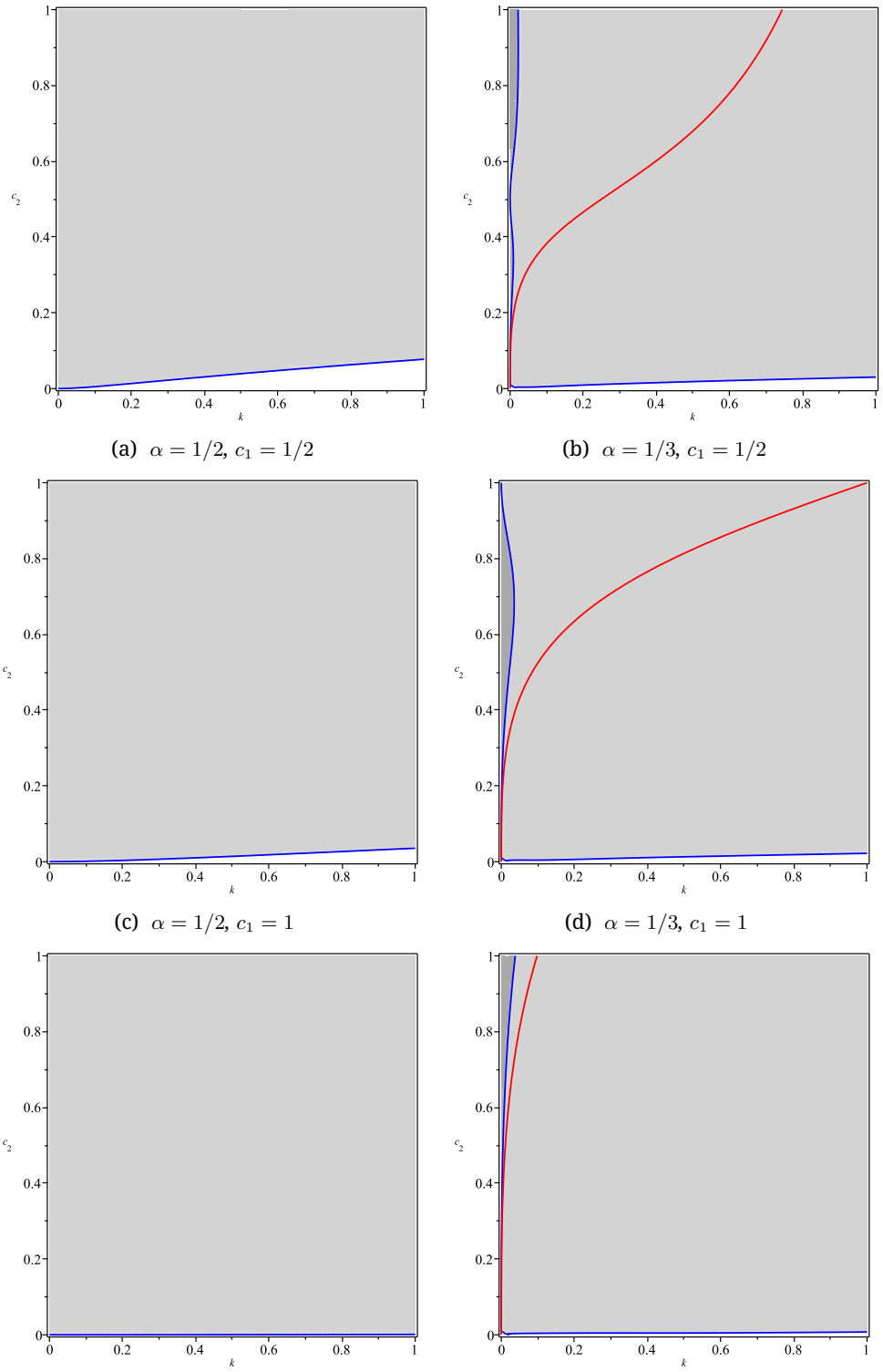


(e) $\alpha = 1/2, \quad k = 10$



(f) $\alpha = 1/3, \quad k = 10$

图3：当设定$k_1 = k_2 = k$ 并固定 $k = 1/2$，1，10时， $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$ 稳定区域的二维截面。$R_1 = 0$ 和 $R_3 = 0$ 的曲线以蓝色标示；$R_2 = 0$ 和 R_3 的曲线以绿色标示； $A_1 = 0$、 $A_2 = 0$ 和 $A_3 = 0$ 的曲线以红色标示。稳定区域以浅灰色填充。



(a) $\alpha = 1/2$, $c_1 = 1/2$ (b) $\alpha = 1/3$, $c_1 = 1/2$

(c) $\alpha = 1/2$, $c_1 = 1$ (d) $\alpha = 1/3$, $c_1 = 1$

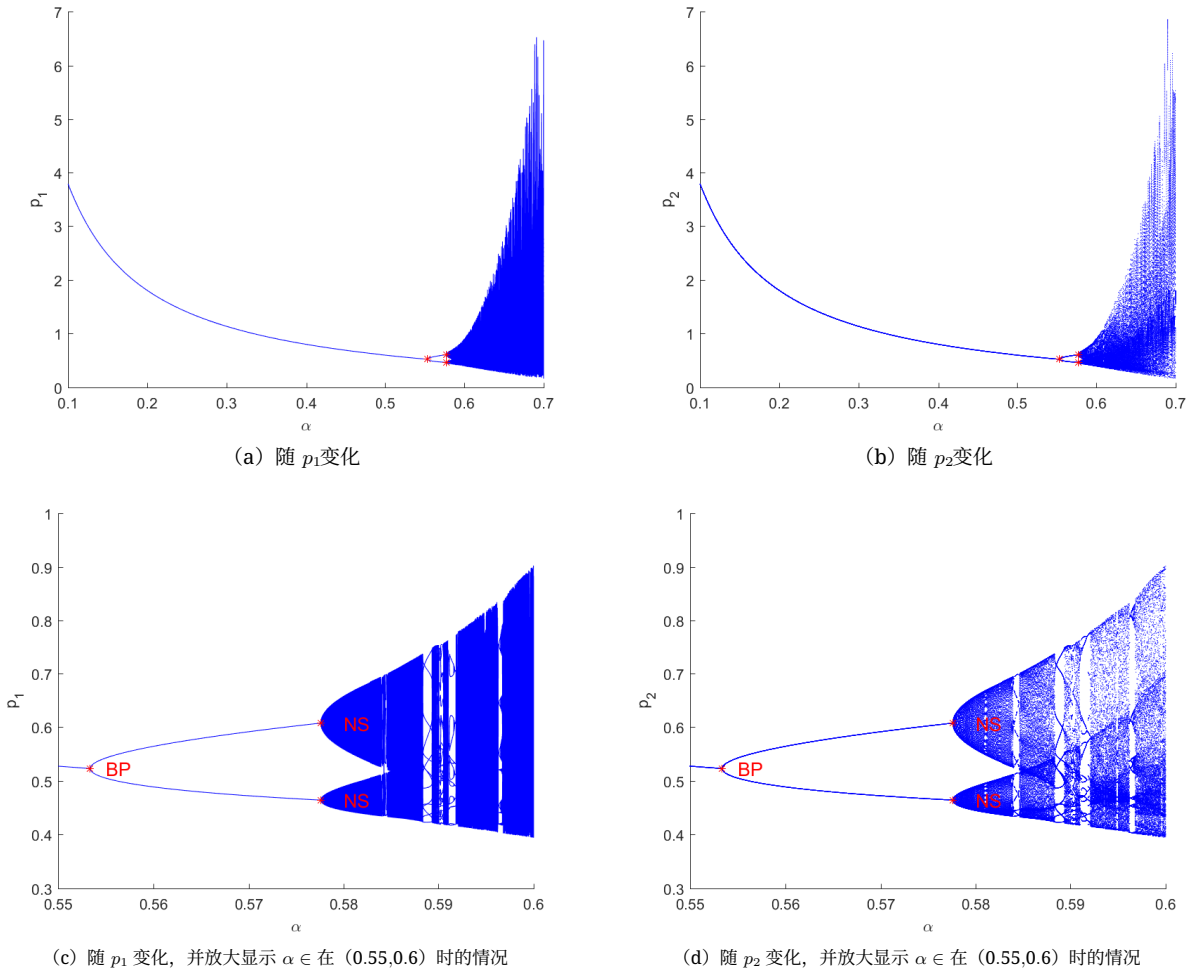
(e) $\alpha = 1/2$, $c_1 = 10$ (f) $\alpha = 1/3$, $c_1 = 10$

图4：当设定$k_1 = k_2 = k$ 并固定 $c_1 = 1/2$，1，10时， $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$ 稳定区域的二维截面。 $R_1 = 0$ 和 $R_3 = 0$ 的曲线标为蓝色； $R_2 = 0$ 和 R_3 的曲线标为绿色； $A_1 = 0$、 $A_2 = 0$ 和 $A_3 = 0$ 的曲线标为红色。 $R_1 > 0$、 $R_2 > 0$ 的区域以及 $R_3 > 0$、 $R_4 > 0$ 的区域以浅灰色标示，而由 $R_3 < 0$、 $R_4 > 0$、 $A_1 > 0$、 $A_2 < 0$、 $A_3 > 0$ 定义的区域以深灰色标示。

6 数值模拟

本节通过数值模拟展示所研究的伯特兰双寡头模型的复杂动力学。模拟的首要目的是验证第5节的主要结论：提高可替代度 α 可能会使唯一非零均衡失稳。图5给出了关于 α 的一维分岔图，其中固定其他参数 $k_1 = k_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 0.2$ ，并将初始点设为 (0.56,1.06)。关于p_1和 p_2的分岔图分别见图5（a, c）和（b, d）。可以观察到，当 α 足够大时，会出现复杂动力学。具体而言，随着 α 从 0.1 增至 0.7，系统起初存在一个唯一的稳定均衡，随后出现稳定的二周期轨道，最终形成混沌集。为清晰展示这一转变，图（c, d）放大了 $\alpha \in$(0.55,0.6) 范围内的一维分岔图。可以看到，当$\alpha = 0.553372$时，会出现一个分支点，唯一的不动点分岔为二周期轨道；然而，该点并非倍周期分岔点。该二周期轨道并非通过倍周期分岔，而是在 $\alpha = 0.577570$ 处通过 Neimark-Sacker 分岔失去稳定性。

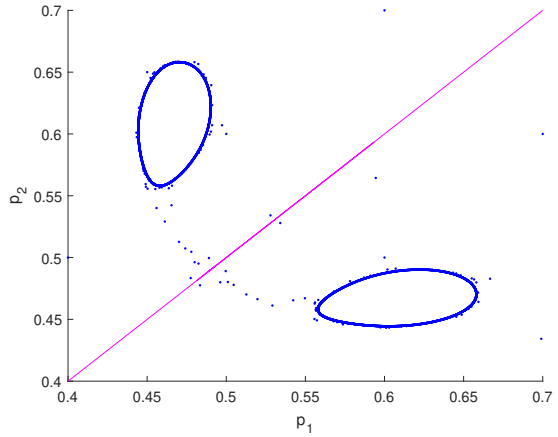
更多细节见图6，其中我们绘制了 $k_1 = k_2 = 1$和 $c_1 = c_2 = 0.2$在初始点(0.56,1.06)下的相图。从图6(a)可以观察到，发生Neimark-Sacker分岔后，当 $\alpha = 0.58$时，二周期轨道(P_{21}(0.464194, 0.607384)和 P_{21}(0.607384,0.464194))变得不稳定，并分岔为两个不变闭轨；唯一均衡 E_1(0.492557,0.492557)在 $\alpha = 0.58$时变为 E_{1new}(0.489655,0.489655)。此外，对角线 $x = y$上的所有点都收敛到 E_{1new}。蓝色标记的两个不变闭轨是稳定的，其内外的点都会收敛到它们。图6(b)展示了 $\alpha = 0.59$ 时的相图，其他参数与(a)相同。从(b)中可以发现具有对称性的混沌吸引子。上述观察表明，在所考虑的模型中，可替代度 α 的增加会导致不稳定性、复杂动力学，甚至混沌的出现。



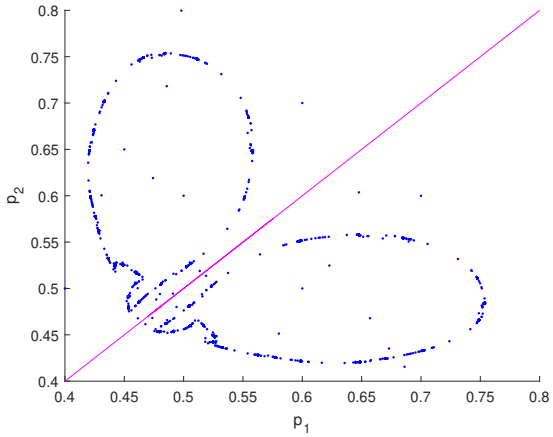
（a）随 p_1变化　（b）随 p_2变化

（c）随 p_1 变化，并放大显示 $\alpha \in$ 在（0.55,0.6）时的情况　（d）随 p_2 变化，并放大显示 $\alpha \in$ 在（0.55,0.6）时的情况

图5：固定 $k_1 = k_2 = 1$、 $c_1 = c_2 = 0.2$ 并将初始点设为（0.56,1.06）时，关于 α 的一维分岔图。



(a) $\alpha = 0.58$



(b) $\alpha = 0.59$

图6： $k_1 = k_2 = 1$ 和 $c_1 = c_2 = 0.2$ 的相图，初始点为 (0.56,1.06)。

为说明其他参数的影响，下面计算并展示若干二维分岔图。图7展示了映射(4)($\alpha = 1/2$)关于 k_1 和 k_2 的二维分岔图，其中固定 $c_1 = 0.3$、 $c_2 = 0.4$ ，并将初始点设为(0.5,0.8)。我们检测到不同阶数的周期轨道，并在图7中用不同颜色标出相应的参数点。还需指出，存在阶数大于25的周期轨道的参数点也以浅黄色标出。可以观察到从唯一稳定均衡通向复杂动力学的两条不同路径。例如，固定 $k_2 = 7.5$ 并将 k_1 的值从0.0变为10.0时，方程组的动力学从唯一稳定均衡（深蓝色区域）开始，随后转变为稳定的二周期轨道（浅蓝色区域），最终演变为不变闭轨和混沌（浅黄色区域）。这与图5所示的路径类似，其中稳定的二周期轨道通过Neimark-Sacker分岔失去稳定性。另一条路径也可以观察到，例如，固定 $k_2 = 2.5$ 并保持k_1 为自由参数。随后可以观察到，唯一稳定均衡通过倍周期分岔级联失去稳定性。

图8绘出了映射(7)（$\alpha = 1/3$）关于 k_1和 k_2 的二维分岔图，其中固定 $c_1 = 0.1$，并将初始点设为(0.6,0.9)。与图7类似，图8中也可以观察到上述从局部稳定性通向复杂动力学的两条路径。

图9和图10分别展示了 $\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$ 关于 c_1 和 c_2 的二维分岔图。可以看到，当成本参数 c_1, c_2 中的一个足够小时，会出现复杂的动力学现象。类似地，我们发现了上述通向混沌行为的两条路径，即经由倍周期分岔级联，以及经由二周期轨道上的Neimark-Sacker分岔；Ahmed等人 [3]已经发现了这两种路径。然而，从图9中我们还发现，唯一均衡上直接发生Neimark-Sacker分岔，这是一项尚未被Ahmed等人 [3] 观察到的新结果。具体而言，图9显示，若固定 $c_1 = 0.9$ 并将 c_2 的值从1.0逐渐降至0.0，方程组的动力学会直接从唯一稳定均衡（深蓝色区域）转变为不变闭轨（浅黄色区域）。在这种情况下，市场行为会在某个临界点突然从有序状态转变为无序状态，即使是理性参与者也很难预见这一变化。

7 结论

本文研究了差异化产品动态伯特兰双寡头博弈的局部稳定性、分岔和比较静态分析。该双寡头市场假设由两名采用梯度调整机制的有限理性参与者，以及具有 CES 效用函数的连续统个相同消费者构成。此外，假设成本函数为线性。值得一提的是，与广泛使用的线性需求伯特兰模型相比，基于效用推导出的需求函数具有非线性，这使我们能够将伯特兰博弈应用于更现实的经济体。

所研究的博　　弈最初由Ahmed等人 [3]，探讨，他们仅进行了数值模拟，且　　re

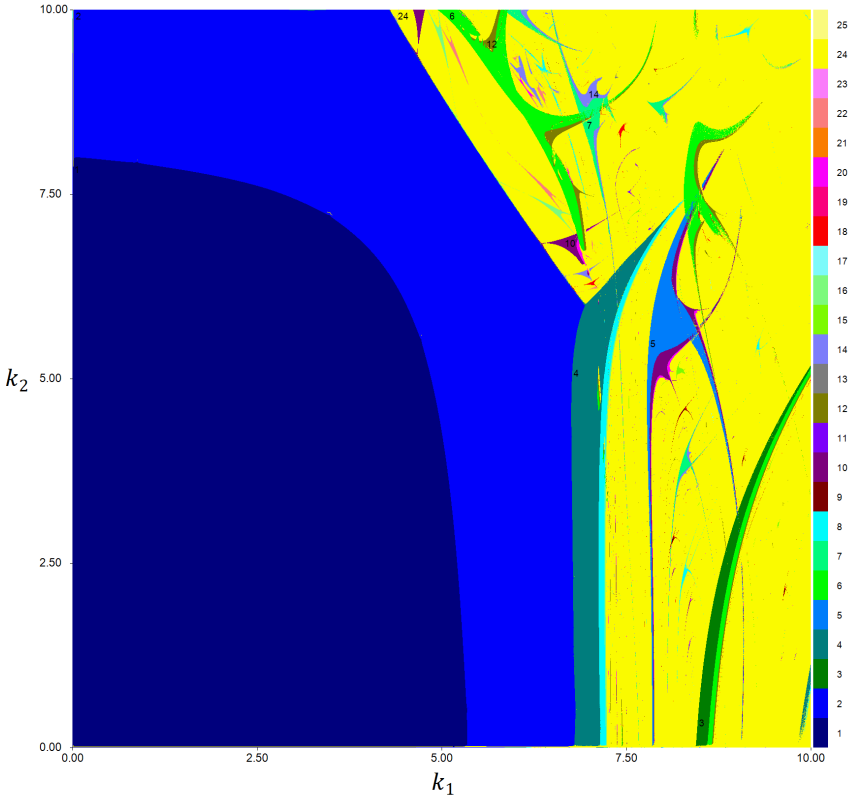


图7：映射（4）（$\alpha = 1/2$）关于 k_1 和 k_2 的二维分岔图，其中固定$c_1 = 0.3$、 $c_2 = 0.4$，并将初始点设为(0.5,0.8)。

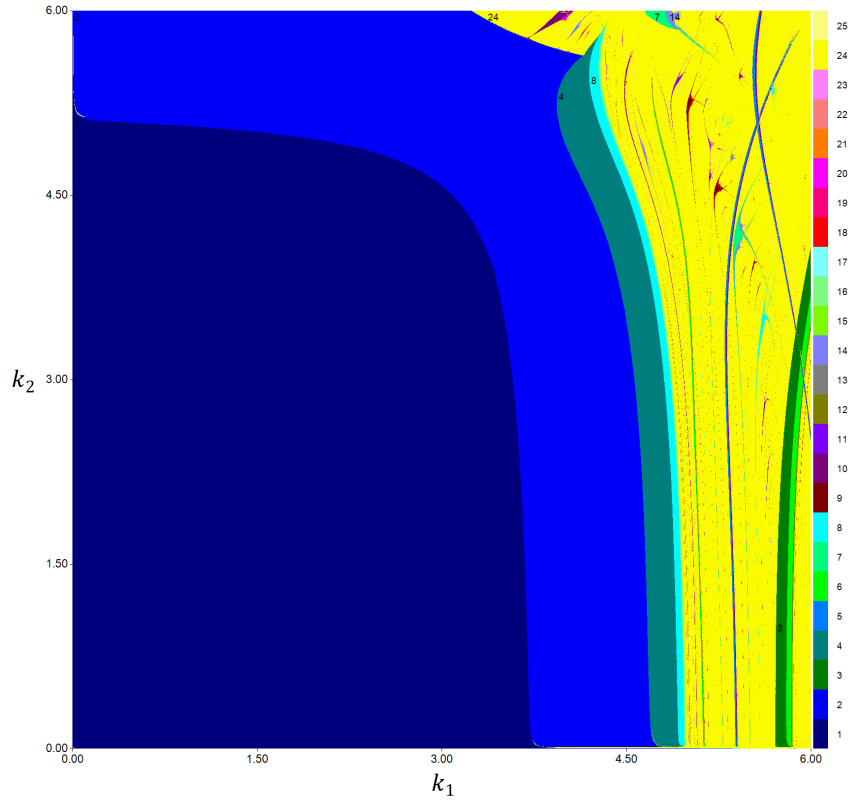


图8：映射（7）（$\alpha = 1/3$）关于 k_1 和 k_2 的二维分岔图，其中固定$c_1 = 0.1$、 $c_2 = 0.15$，并将初始点设为(0.6,0.9)。

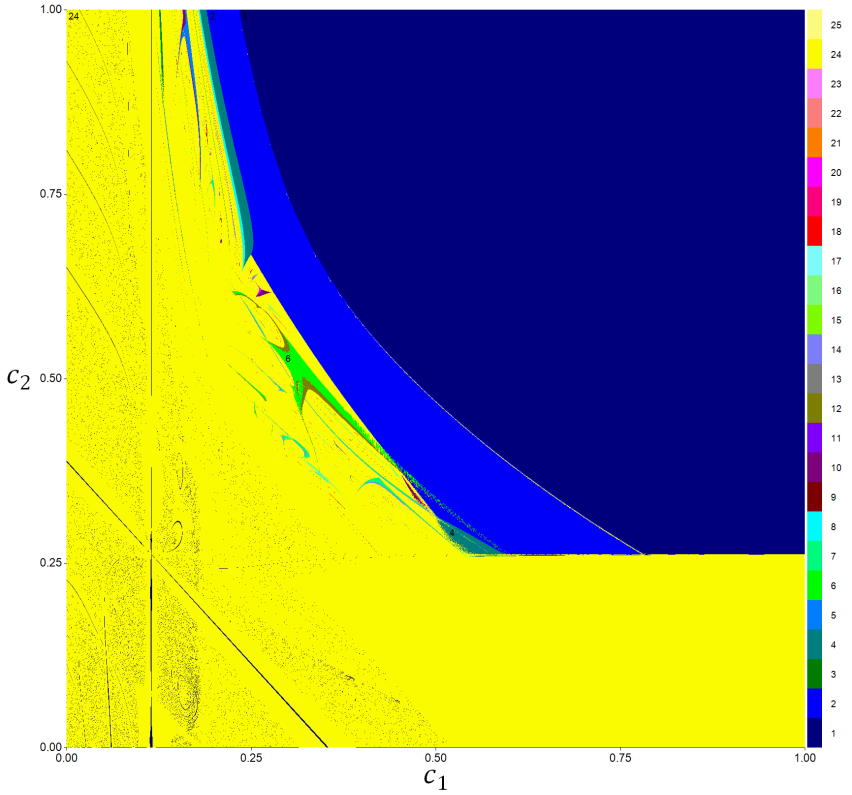


图9：映射 (4) ($\alpha = 1/2$) 关于 c_1 和 c_2 的二维分岔图，其中固定$k_1 = 6$、 $k_2 = 12$ ，并将初始点设为 (0.5,0.8)。

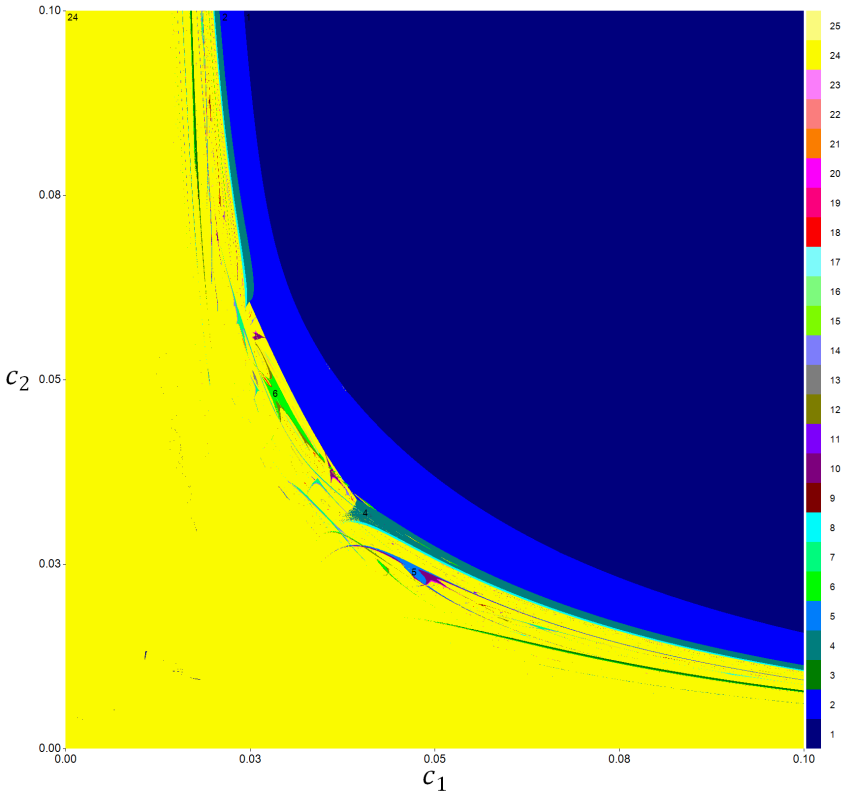


图10：映射 (7) ($\alpha = 1/3$) 关于 c_1 和 c_2 的二维分岔图，其中固定$k_1 = 0.3$、 $k_2 = 0.6$ ，并将初始点设为 (0.6,0.9)。

本文采用相关方法研究动态行为，发现随着调整速度提高，纳什均衡会通过倍周期分岔而失去稳定性。然而，在本研究中，我们使用了多种基于符号计算的工具重新研究这一博弈，例如三角分解法（参见 [23]）和 PCAD 方法（参见 [11]）。符号计算的结果是精确的，因此为系统分析经济模型提供了理论基础。

为简便起见，我们的工作主要聚焦于两种特定的产品替代度，即$\alpha = 1/2$ 和 $\alpha = 1/3$。对于这两种情况，我们都采用第一作者及其合作者提出的、用于检测均衡重数的代数方法，证明了非零均衡的唯一性[25]。我们介绍了多种基于符号计算的工具，并首次利用这些工具得出了唯一非零均衡局部稳定性的严格条件。在两家企业具有相同边际成本这一特殊情形下，我们证明模型只能通过倍周期分岔而失去稳定性。从经济学视角来看，最有趣的发现是，替代度提高或产品差异化降低会导致伯特兰模型失稳。这是因为，当替代度足够高时，可能会发生价格战，从而使均衡失稳。我们应当指出，我们的发现与 Agliari等人 [1] 以及 Fanti和Gori [14]的结论相反。这一矛盾丰富了关于古诺和伯特兰寡头市场之间联系的文献，也有助于揭示二者的本质区别。此外，我们还针对边际成本相同这一特殊情形进行了比较静态分析。所得结论是，产品差异化程度越低，价格越低、供给量越高、利润越低、社会福利也越低，这与我们的经济学直觉一致。

最后给出了数值模拟，通过这些模拟可以观察到周期轨道和混沌等复杂动力学现象。模拟结果证实，在所考虑的模型中，可替代度α 的提高会导致不稳定性、复杂动力学，甚至混沌的出现。文中还给出了二维分岔图，以展示通向混沌行为的不同可能路径，例如通过倍周期分岔级联，以及通过二周期轨道上的 Neimark-Sacker 分岔。此外，我们发现均衡上直接发生 Neimark-Sacker 分岔，这是一项新发现，Ahmed等人 [3]尚未发现这一现象。

附录

$$R_1 = 15552\,c_1^{10}c_2^6 + 62208\,c_1^9c_2^7 + 93312\,c_1^8c_2^8 + 62208\,c_1^7c_2^9 + 15552\,c_1^6c_2^{10} + 73728\,c_1^{11}c_2^3k + 327168\,c_1^{10}c_2^4k$$
$$+ 576576\,c_1^9c_2^5k + 541440\,c_1^8c_2^6k + 436608\,c_1^7c_2^7k + 541440\,c_1^6c_2^8k + 576576\,c_1^5c_2^9k + 327168\,c_1^4c_2^{10}k$$
$$+ 73728\,c_1^3c_2^{11}k + 32768\,c_1^{11}c_2\,k^2 + 94208\,c_1^{10}c_2^2k^2 + 284160\,c_1^9c_2^3k^2 + 1163712\,c_1^8c_2^4k^2 + 2855520\,c_1^7c_2^5k^2$$
$$+ 3825168\,c_1^6c_2^6k^2 + 2855520\,c_1^5c_2^7k^2 + 1163712\,c_1^4c_2^8k^2 + 284160\,c_1^3c_2^9k^2 + 94208\,c_1^2c_2^{10}k^2 + 32768\,c_1c_2^{11}k^2$$
$$+ 77824\,c_1^9c_2\,k^3 + 359936\,c_1^8c_2^2k^3 + 644608\,c_1^7c_2^3k^3 + 610976\,c_1^6c_2^4k^3 + 494368\,c_1^5c_2^5k^3 + 610976\,c_1^4c_2^6k^3$$
$$+ 644608\,c_1^3c_2^7k^3 + 359936\,c_1^2c_2^8k^3 + 77824\,c_1c_2^9k^3 - 4096c_1^8k^4 - 12288\,c_1^7c_2\,k^4 + 4544\,c_1^6c_2^2k^4$$
$$+ 70360\,c_1^5c_2^3k^4 + 114600\,c_1^4c_2^4k^4 + 70360\,c_1^3c_2^5k^4 + 4544\,c_1^2c_2^6k^4 - 12288\,c_1c_2^7k^4 - 4096\,c_2^8k^4$$
$$- 1024\,c_1^5c_2\,k^5 - 3232\,c_1^4c_2^2k^5 - 4488\,c_1^3c_2^3k^5 - 3232\,c_1^2c_2^4k^5 - 1024\,c_1c_2^5k^5 + 32\,c_1^3c_2\,k^6 + 61\,c_1^2c_2^2k^6 + 32\,c_1c_2^3k^6,$$

$$R_2 = 1152\,c_1^8c_2^2 + 5832\,c_1^7c_2^3 + 12960\,c_1^6c_2^4 + 16560\,c_1^5c_2^5 + 12960\,c_1^4c_2^6 + 5832\,c_1^3c_2^7 + 1152\,c_1^2c_2^8 + 1024\,c_1^8k$$
$$+ 3584\,c_1^7c_2\,k + 5920\,c_1^6c_2^2k + 6224\,c_1^5c_2^3k + 5836\,c_1^4c_2^4k + 6224\,c_1^3c_2^5k + 5920\,c_1^2c_2^6k + 3584\,c_1c_2^7k$$
$$+ 1024\,c_2^8k + 512\,c_1^5c_2\,k^2 + 1616\,c_1^4c_2^2k^2 + 2244\,c_1^3c_2^3k^2 + 1616\,c_1^2c_2^4k^2 + 512\,c_1c_2^5k^2 - 32\,c_1^3c_2\,k^3 - 61\,c_1^2c_2^2k^3 - 32\,c_1c_2^3k^3,$$

$$R_3 = -209715200000\,c_1^{12}c_2^8 + 838860800000\,c_1^{11}c_2^9 - 1258291200000\,c_1^{10}c_2^{10} + 838860800000\,c_1^9c_2^{11}$$
$$- 209715200000\,c_1^8c_2^{12} + 1160950579200\,c_1^{13}c_2^5k - 5170397184000\,c_1^{12}c_2^6k + 9284105011200\,c_1^{11}c_2^7k$$
$$- 9178054656000\,c_1^{10}c_2^8k + 7806792499200\,c_1^9c_2^9k - 9178054656000\,c_1^8c_2^{10}k + 9284105011200\,c_1^7c_2^{11}k$$
$$- 5170397184000\,c_1^6c_2^{12}k + 1160950579200\,c_1^5c_2^{13}k + 626913312768\,c_1^{13}c_2^3k^2 - 1827529703424\,c_1^{12}c_2^4k^2$$
$$+ 6377496477696\,c_1^{11}c_2^5k^2 - 24562717922304\,c_1^{10}c_2^6k^2 + 56911413825536\,c_1^9c_2^7k^2$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - 74841436780544\,c_1^{8}c_2^{8}k^{2} + 56911413825536\,c_1^{7}c_2^{9}k^{2} - 24562717922304\,c_1^{6}c_2^{10}k^{2} \\
&+ 6377496477696\,c_1^{5}c_2^{11}k^{2} - 1827529703424\,c_1^{4}c_2^{12}k^{2} + 626913312768\,c_1^{3}c_2^{13}k^{2} - 117546246144\,c_1^{12}c_2^{2}k^{3} \\
&+ 2268751389696\,c_1^{11}c_2^{3}k^{3} - 8446241806848\,c_1^{10}c_2^{4}k^{3} + 13848228389376\,c_1^{9}c_2^{5}k^{3} - 12871123435008\,c_1^{8}c_2^{6}k^{3} \\
&+ 10570707526656\,c_1^{7}c_2^{7}k^{3} - 12871123435008\,c_1^{6}c_2^{8}k^{3} + 13848228389376\,c_1^{5}c_2^{9}k^{3} \\
&- 8446241806848\,c_1^{4}c_2^{10}k^{3} + 2268751389696\,c_1^{3}c_2^{11}k^{3} - 117546246144\,c_1^{2}c_2^{12}k^{3} + 7346640384\,c_1^{11}c_2\,k^{4} \\
&+ 23872802112\,c_1^{10}c_2^{2}k^{4} - 79144786368\,c_1^{9}c_2^{3}k^{4} - 389232360000\,c_1^{8}c_2^{4}k^{4} + 1762366805056\,c_1^{7}c_2^{5}k^{4} \\
&- 2639431381760\,c_1^{6}c_2^{6}k^{4} + 1762366805056\,c_1^{5}c_2^{7}k^{4} - 389232360000\,c_1^{4}c_2^{8}k^{4} - 79144786368\,c_1^{3}c_2^{9}k^{4} \\
&+ 23872802112\,c_1^{2}c_2^{10}k^{4} + 7346640384\,c_1c_2^{11}k^{4} - 153055008\,c_1^{10}k^{5} + 444048480\,c_1^{9}c_2\,k^{5} \\
&- 2281361760\,c_1^{8}c_2^{2}k^{5} - 6359031360\,c_1^{7}c_2^{3}k^{5} + 33853070112\,c_1^{6}c_2^{4}k^{5} - 51945109632\,c_1^{5}c_2^{5}k^{5} \\
&+ 33853070112\,c_1^{4}c_2^{6}k^{5} - 6359031360\,c_1^{3}c_2^{7}k^{5} - 2281361760\,c_1^{2}c_2^{8}k^{5} + 444048480\,c_1c_2^{9}k^{5} \\
&- 153055008\,c_2^{10}k^{5} + 36636624\,c_1^{7}c_2\,k^{6} - 65578896\,c_1^{6}c_2^{2}k^{6} + 239834412\,c_1^{5}c_2^{3}k^{6} - 377249916\,c_1^{4}c_2^{4}k^{6} \\
&+ 239834412\,c_1^{3}c_2^{5}k^{6} - 65578896\,c_1^{2}c_2^{6}k^{6} + 36636624c_1c_2^{7}k^{6} - 669222\,c_1^{5}c_2\,k^{7} + 1023534\,c_1^{4}c_2^{2}k^{7} \\
&- 951468\,c_1^{3}c_2^{3}k^{7} + 1023534\,c_1^{2}c_2^{4}k^{7} - 669222\,c_1c_2^{5}k^{7} + 2187\,c_1^{3}c_2\,k^{8} - 4031\,c_1^{2}c_2^{2}k^{8} + 2187\,c_1c_2^{3}k^{8},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_4 &= 17714700\,c_1^{10}c_2^{2} - 84798900\,c_1^{9}c_2^{3} + 166819500\,c_1^{8}c_2^{4} - 187523100\,c_1^{7}c_2^{5} + 175575600\,c_1^{6}c_2^{6} - 187523100\,c_1^{5}c_2^{7} \\
&+ 166819500\,c_1^{4}c_2^{8} - 84798900\,c_1^{3}c_2^{9} + 17714700\,c_1^{2}c_2^{10} + 19131876\,c_1^{10}k - 55506060\,c_1^{9}c_2\,k \\
&+ 70441812\,c_1^{8}c_2^{2}k - 70683840\,c_1^{7}c_2^{3}k + 106503012\,c_1^{6}c_2^{4}k - 136123200\,c_1^{5}c_2^{5}k + 106503012\,c_1^{4}c_2^{6}k \\
&- 70683840\,c_1^{3}c_2^{7}k + 70441812\,c_1^{2}c_2^{8}k - 55506060\,c_1c_2^{9}k + 19131876\,c_2^{10}k - 9159156\,c_1^{7}c_2\,k^{2} \\
&+ 23480604\,c_1^{6}c_2^{2}k^{2} - 24625107\,c_1^{5}c_2^{3}k^{2} + 19286271\,c_1^{4}c_2^{4}k^{2} - 24625107\,c_1^{3}c_2^{5}k^{2} + 23480604\,c_1^{2}c_2^{6}k^{2} \\
&- 9159156\,c_1c_2^{7}k^{2} + 334611\,c_1^{5}c_2\,k^{3} - 511767\,c_1^{4}c_2^{2}k^{3} + 475734\,c_1^{3}c_2^{3}k^{3} - 511767\,c_1^{2}c_2^{4}k^{3} + 334611\,c_1c_2^{5}k^{3} \\
&- 2187\,c_1^{3}c_2\,k^{4} + 4031\,c_1^{2}c_2^{2}k^{4} - 2187\,c_1c_2^{3}k^{4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 243\,c_1^{2} + 352\,c_1c_2 - 9\,k, \\
A_2 &= \quad - 8000\,c_1^{5}c_2^{3} + 19683\,c_1^{6}k - 17496\,c_1^{5}c_2\,k + 3024\,c_1^{4}c_2^{2}k + 1728\,c_1^{3}c_2^{3}k - 2187\,c_1^{4}k^{2} + 3564\,c_1^{3}c_2\,k^{2} \\
&\quad - 432\,c_1^{2}c_2^{2}k^{2} + 81\,c_1^{2}k^{3} + 36\,c_1c_2\,k^{3} - k^{4}, \\
A_3 &= 12754584\,c_1^{7} - 12171384\,c_1^{6}c_2 + 3708504\,c_1^{5}c_2^{2} + 84096\,c_1^{4}c_2^{3} + 2519424\,c_1^{3}c_2^{4} - 72171\,c_1^{5}k - 3576744\,c_1^{4}c_2\,k \\
&\quad + 5126856\,c_1^{3}c_2^{2}k - 629856\,c_1^{2}c_2^{3}k - 25272\,c_1^{3}k^{2} + 98966\,c_1^{2}c_2\,k^{2} + 52488\,c_1c_2^{2}k^{2} + 387\,c_1\,k^{3} - 1458\,c_2\,k^{3}.
\end{aligned}
$$

致谢

作者谨向李苏博士表示感谢，感谢其提出的宝贵意见。作者还感谢匿名审稿人提出的有益意见。

本研究得到广东省哲学社会科学基金（项目编号：GD21CLJ01）、安徽省自然科学基金（项目编号：2008085QA09）、安徽省高校自然科学研究项目（项目编号：KJ2021A0482）以及东莞城市学院重大研究与培育项目（项目编号：2021YZDYB04Z）的资助。

参考文献

[1] A. Agliari、A. Naimzada 和 N. Pecora。具有差异化产品的古诺双寡头博弈的非线性动力学。《应用数学与计算》，281：1–15，2016年。[2] E. Ahmed、H. Agiza 和 S. Hassan。论 Puu 动态双寡头的修正。《混沌、孤子与分形》，11(7)：1025–1028，2000年。[3] E. Ahmed、A. Elsadany 和 T. Puu。论具有差异化商品的伯特兰双寡头博弈。《应用数学与计算》，251：169–179，2015年。[4] S. Askar。由于需求函数不存在拐点，古诺双寡头博弈中复杂现象的涌现。《非线性科学与数值模拟通讯》，19(6)：1918–1925，2014年。

[5] P. Aubry 和 M. Moreno Maza。求解多项式系统的三角集合：四种方法的比较实现。《符号计算杂志》，28(1–2)：125–154，1999年。[6] J. Bertrand。对《社会财富的数学理论》和《社会财富原理研究》的评论。《学者杂志》，第499–508页，1883年。[7] G. I. Bischi、A. Naimzada 和 L. Sbragia。采用局部垄断近似的寡头垄断博弈。《经济行为与组织杂志》，62(3)：371–388，2007年。[8] S. Brianzoni、L. Gori 和 E. Michetti。具有差异化产品和非线性成本的伯特兰双寡头动力学：分析、比较与新发现。《混沌、孤子与分形》，79：191–203，2015年。[9] J. S. C´anovas 和 M. Mu˜noz-Guillermo。论 Kopel 的古诺双寡头模型的动力学。《应用数学与计算》，330：292–306，2018年。[10] F. Cavalli、A. Naimzada 和 F. Tramontana。异质古诺双寡头的非线性动力学与全局分析：局部垄断方法与具有内生反应性的梯度规则之比较。《非线性科学与数值模拟通讯》，23(1-3)：245–262，2015年。[11] G. E. Collins 和 H. Hong。用于量词消去的部分柱形代数分解。《符号计算杂志》，12(3)：299–328，1991年。[12] A. A. Cournot。《财富理论的数学原理研究》。L. Hachette，巴黎，1838年。[13] A. A. Elsadany。基于相对利润最大化和有限理性的古诺双寡头博弈动力学。《应用数学与计算》，294：253–263，2017年。[14] L. Fanti 和 L. Gori。数量竞争下差异化双寡头的动力学。《经济建模》，29(2)：421–427，2012年。[15] L. Fanti、L. Gori、C. Mammana 和 E. Michetti。具有差异化产品的伯特兰双寡头动力学：同步、间歇性与全局动力学。《混沌、孤子与分形》，52：73–86，2013年。[16] F. M. Fisher。古诺寡头垄断解的稳定性：调整速度和递增边际成本的影响。《经济研究评论》，28(2)：125，1961年。[17] L. Gori 和 M. Sodini。非线性差异化双寡头市场中的价格竞争。《混沌、孤子与分形》，104：557–567，2017年。[18] E. Jury、L. Stark 和 V. Krishnan。动态系统的内点与稳定性。《IEEE 系统、人类与控制论汇刊》，(10)：724–725，1976年。[19] M. Kalkbrener。用于计算代数簇三角表示的广义欧几里得算法。《符号计算杂志》，15(2)：143–167，1993年。[20] M. Kopel。古诺双寡头模型中的简单与复杂调整动态。《混沌、孤子与分形》，7(12)：2031–2048，1996年。[21] B. Li、Q. He 和 R. Chen。具有不同调整速度的 Kopel 寡头垄断模型的 Neimark-Sacker 分岔及一般情形。《差分方程进展》，2020(1)：1–18，2020年。[22] B. Li、H. Liang、L. Shi 和 Q. He。寡头之间存在非对称响应的 Kopel 模型的复杂动力学。《混沌、孤子与分形》，156：111860，2022年。[23] X. Li、C. Mou 和 D. Wang。有限域上多项式集分解为简单集合：零维情形。《计算机与应用数学》，60(11)：2983–2997，2010年。[24] X. Li 和 L. Su。等弹性需求和规模不经济下的异质双寡头博弈。《分形与分数阶》，6(8)：459，2022年。

[25] X. Li 和 D. Wang. 使用三角分解和实解分类计算半代数经济的均衡。《数学经济学杂志》，54:48–58，2014年。[26] M. C. L´opez 和 R. A. Naylor. 古诺–伯特兰利润差：工资谈判背景下差异化双寡头市场中的反转结果。《欧洲经济评论》，48(3):681–696，2004年。[27] J. Ma 和 Z. Guo. 信息对动态伯特兰博弈稳定性的影响。《非线性科学与数值模拟通讯》，30(1-3):32–44，2016年。[28] A. Matsumoto、Y. Nonaka 和 F. Szidarovszky. 两种有限理性垄断模型中的非线性动力学与附加利润。《非线性科学与数值模拟通讯》，116:106868，2022年。[29] M. McManus 和 R. E. Quandt. 关于古诺寡头模型稳定性的评论。《经济研究评论》，28(2):136–139，1961年。[30] B. Mishra.《算法代数》。施普林格出版社，纽约，1993年。[31] A. Naimzada 和 F. Tramontana. 通过局部知识控制混沌。《混沌、孤子与分形》，42(4):2439–2449，2009年。[32] A. Naimzada 和 F. Tramontana. 差异化产品古诺–伯特兰双寡头博弈的动态特性。《经济建模》，29(4):1436–1439，2012年。[33] T. Puu. 双寡头定价中的混沌。《混沌、孤子与分形》，1(6):573–581，1991年。[34] O. Shy.《产业组织：理论与应用》。麻省理工学院出版社，剑桥，1995年。[35] N. Singh 和 X. Vives. 差异化双寡头市场中的价格竞争与数量竞争。《兰德经济学杂志》，15(4):546–554，1984年。[36] D. Wang. 三角系统与正则系统的计算。《符号计算杂志》，30(2):221–236，2000年。[37] W.-T. Wu. 初等几何中机械化定理证明的基本原理。《自动推理杂志》，2(3):221–252，1986年。[38] L. Yang、X. Hou 和 B. Xia. 一类不等式型定理的自动发现完整算法。《中国科学》*F*辑，44:33–49，2001年。[39] A. Zhang 和 Y. Zhang. 古诺–纳什均衡的稳定性：多产品情形。《数学经济学杂志》，26(4):441–462，1996年。[40] J. Zhang、Q. Da 和 Y. Wang. 有限理性下伯特兰模型的动态特性。《混沌、孤子与分形》，39(5):2048–2055，2009年。