arXiv:2301.01011v1 [math.SG] 3 Jan 2023

与具有 T-对称性的凯勒流形上的混合极化相关的几何量子化

梁乃冲、王丹

Abstract. 设 M 是一个配备预量子线丛 L的紧凯勒流形。利用 T-对称性，我们在 M 上构造了一个极化 $\mathcal{P}_{\text{mix}}$，它推广了托里克流形上的实极化。在本文中，我们对与 $\mathcal{P}_{\text{mix}}$ 相关的量子空间 $\mathcal{H}_{\text{mix}}$ 得到了以下结果。首先， $\mathcal{H}_{\text{mix}}$ 由 L 的支集包含于 $\mu^{-1}(\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}})$ 内的分布截面组成。这给出了$\mathcal{H}_{\text{mix}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\text{mix},\ \lambda}$。其次，上述 $\mathcal{H}_{\text{mix}}$ 的分解与 T-对称性的权分解一致。第三，对于正则的 λ，存在一个同构$\mathcal{H}_{\text{mix},\ \lambda} \cong H^0(M /\!\!/_\lambda T,$ $L /\!\!/_\lambda T)$。也就是说，几何量子化与辛约化相容。

1. Introduction

设 (M,ω) 是配备了预量子线丛 (L,∇) 的辛流形，特别地， $F_\nabla = -i\omega$。 $\mathcal{P}$ 上的极化 $\mathcal{P}$ 是 M 上的可积拉格朗日子丛$TM\otimes\mathbb{C}$。几何量子化将希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\mathcal{P}$ 赋予这些数据。也就是说,

$$\mathcal{H}_\mathcal{P} = \Gamma(M,L)\cap \mathrm{Ker}(\nabla)|_\mathcal{P}, \tag{1.1}$$

其中 $\Gamma(M,L)$ 是 L [1]的光滑截面空间。当 (M,ω,J) 是 K¨ahler 流形时，我们有一个 K¨ahler 极化 $\mathcal{P}_J = T^{0,\ 1}_{\ J}M$，以及 $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_J} = H^0(M,L)$。此外，若 M具有 T-对称性，我们便在 [9] 中利用 T-对称性构造了一个极化 $\mathcal{P}_{\text{mix}}$。本文研究与 M 上的 $\mathcal{P}_{\text{mix}}$ 相关联的量子空间 $\mathcal{H}_{\text{mix}}$。具体而言，本文始终采用以下假设。

(∗) (M,ω,J) 是一个实维数为 $2m$ 的紧致 K¨ahler 流形，配备了一个有效的哈密顿 n 维环面作用 $\rho\colon T^n\to \mathrm{Diff}(M,\omega,J)$，该作用由等距变换给出，并具有动量映射 $\mu\colon M\to\mathfrak{t}^*$。设 (L,∇,h) 是 M 上一个 T^n-不变的预量子线丛。

回顾 在这种情况下构造的（奇异）极化 ，

$$\mathcal{P}_{\text{mix}} = (\mathcal{P}_J\cap\mathcal{D}_\mathbb{C})\oplus\mathcal{I}_\mathbb{C},$$

其中 $\mathcal{D}_\mathbb{C} = (\mathrm{Ker}\, d\mu)\otimes\mathbb{C}$ 且 $\mathcal{I}_\mathbb{C} = (\mathrm{Im}\ d\rho)\otimes\mathbb{C}$。当 $n = m$ 时，即 M是托里克簇时，$\mathcal{P}_{\text{mix}}$ 与由动量映射定义的奇异实极化重合，而 $\mathcal{H}_{\text{mix}}$ 是玻尔–索末菲态空间。

[1] 事实上，我们需要允许分布截面。

回顾一下，利用刘维尔测度 $\mathrm{vol}_M = \frac{\omega^m}{m!}$，可以用一种自然的方式将光滑截面空间嵌入分布截面空间。也就是说，对于任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$,

$$\iota : \Gamma(M, L) \to \Gamma_c(M, L^{-1})',\ s \mapsto (\iota s)(\tau) = \int_M \langle s, \tau \rangle \, \mathrm{vol}_M .$$

那么，量子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 可描述如下:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \Gamma_c(M, L^{-1})' \cap \mathrm{Ker}(\nabla)|_{\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}},$$

我们的第一个结果表明， $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 由支集包含在 $\mu^{-1}(\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}})$ 内的分布截面组成，并且 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 的 λ-权子空间。

定理 1.1.（定理 3.2）在假设 $(*)$ 下,
(1) 对任意 $\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$，我们有 $\mathrm{supp}\delta \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mu^{-1}(\lambda)$。由此得到以下分解

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda},$$

其中 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda} = \{\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}} \,|\mathrm{supp}\ \ \delta \subset \mu^{-1}(\lambda)\}$;
(2) 对任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$中的一个 λ-权子空间。
因此，分解 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是关于 T^n-作用的权分解。

当 $n = m$时，这是托里克簇的一个结果（见 [1, 5]）。受 Guillemin 和 Sternberg 关于几何量子化与辛约化相交换的研究（见[3]）启发，我们给出了 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$的几何描述。我们的主要结果（定理 1.5 或定理 3.12）表明，当 λ 是 μ的一个整正则值，记作 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$时，我们有

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda} \cong H^0(M_\lambda, L_\lambda),$$

其中 $(M_\lambda, L_\lambda) = (M /\!\!/_\lambda T, L /\!\!/_\lambda T)$ 是 (M, L) 的辛约化。具体而言，$M_\lambda = \mu^{-1}/T$，我们也将水平集 $\mu^{-1}(\lambda)$ 记作 M^λ。预量子线丛 (L, ∇) 在 M^λ 上的限制 (L^λ, ∇) 可以下降到商空间 M_λ，记作 (L_λ, ∇)（见 [3]）。

我们的第二个结果表明，对于任意 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，都存在一个相应的分布截面 $\delta^s \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$，使得 $\imath(\delta^s)$ 属于 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$，其中 $\imath$: $\Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。

定义 1.2。（定义 3.4）对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$ 和 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，我们定义与 s 相关联的分布截面 $\delta^s \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$ 如下：对于任意 $\tau \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})$,

$$\delta^s(\tau) = \int_{M^\lambda} \langle \pi^* s, \tau \rangle \, \mathrm{vol}^\lambda,$$

wh其中 vol$^{\lambda}$是 M^{λ}上的体积形式，而 π：$M^{\lambda} \to M_{\lambda}$是商映射 .

为了考察 $\imath(\delta^{s}) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$，我们需要研究 L 的光滑截面空间上的协变导数与 L^{λ} 的分布截面空间上的协变导数之间的相互作用。我们的第三个结果（定理 3.6）指出，下图

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(M,L) & \xhookrightarrow{\mathrm{vol}_M} & \Gamma_c(M,L^{-1})' & \xrightarrow{\nabla_\xi} & \Gamma_c(M,L^{-1})' \\ \downarrow & & \imath\uparrow & & \imath\uparrow \\ \Gamma(M^{\lambda},L^{\lambda}) & \xhookrightarrow{\mathrm{vol}^{\lambda}} & \Gamma_c(M^{\lambda},(L^{\lambda})^{-1})' & \xrightarrow{\nabla_\xi} & \Gamma_c(M^{\lambda},(L^{\lambda})^{-1})', \end{array}$$

对于任意满足 $\xi|_{M^{\lambda}} \in \Gamma(M^{\lambda}, TM^{\lambda} \otimes \mathbb{C})$ 的 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，都是交换图。

为了证明上述图是交换图，我们使用 Weinstein 提出的余各向同性嵌入定理 [13]，该定理随后由 Guillemin 在 [2] 中进一步研究，用以关联体积形式 vol_M 和 vol$^{\lambda}$。由此我们得到以下定理：

定理 1.3。（定理 3.6）对于任意满足 $\xi|_{M^{\lambda}} \in \Gamma(M^{\lambda}, TM^{\lambda} \otimes \mathbb{C})$ 的 $\lambda \in \mathfrak{t}^{*}_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$, $\delta \in \Gamma_c(M^{\lambda}, (L^{\lambda})^{-1})'$ 和 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，有

$$\nabla_{\xi}(\imath(\delta)) = \imath(\nabla_{\xi}\delta), \tag{1.2}$$

其中 $\imath$：$\Gamma_c(M^{\lambda}, (L^{\lambda})^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。

命题 论 1.4.（命题 3.7）对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^{*}_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$ 和 $s \in H^{0}(M_{\lambda}, L_{\lambda})$，我们有 e

$$\imath(\delta^{s}) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda},$$

其中 $\imath$：$\Gamma_c(M^{\lambda}, (L^{\lambda})^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。

这使我们能够定义一个映射 κ：$H^{0}(M_{\lambda}, L_{\lambda}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$，其定义为 $s \mapsto \kappa(s) = \imath(\delta^{s})$。最后，我们证明 κ是一个同构。

定理 1.5.（定理 3.12）对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^{*}_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$,

$$\kappa : H^{0}(M_{\lambda}, L_{\lambda}) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$$

是一个同构。

我们通过以下步骤证明 κ 的满射性。首先，我们证明 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$ 中的任意元素 $\tilde{\delta}$ 在局部上都是沿着 $\mu^{-1}(\lambda)$ 的 δ函数，且不涉及 δ函数的导数。这意味着，对于某个 $\delta \in \Gamma_c(M^{\lambda}, (L^{\lambda})^{-1})'$，有 $\tilde{\delta} = \imath(\delta)$。

其次，我们证明 L^{λ} 的 T^{n}-不变分布截面可以下降为 L_{λ} 的分布截面。也就是说，对于满足 $\nabla_{\xi^{\#}}\delta = 0$ 的任意 $\delta \in \Gamma_c(M^{\lambda}, (L^{\lambda})^{-1})'$，存在一个分布截面 $\eta \in \Gamma_c(M_{\lambda}, L_{\lambda}^{-1})'$，使得 $\delta = \pi^{*}\eta$（引理 3.8）。

第三，我们证明，若 $\nabla_{\zeta}(\pi^{*}\eta) = 0$对所有 $\zeta \in \Gamma(M^{\lambda}, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$成立，则 η是 $\bar{\partial}$-闭的（定理¯ ¯3.11）。由椭圆算子 $\Delta = \partial^{*}\partial$的正则性可知， η 是光滑的（即 $\eta = \iota(s)$，其中某个 $s \in H^{0}(M_{\lambda}, L_{\lambda})$）。最后，我们证明 $\tilde{\delta} = \kappa(s)$。

1.1. 致谢。我们衷心感谢 Siye Wu 提出的深刻见解和有益讨论。D. Wang 谨向 Qingyuan Jiang、Yutung Yau 和 Ki Fung Chan 致谢，感谢他们进行了许多有帮助的讨论。本研究主要获中国香港特别行政区研究资助局拨款资助（项目编号：CUHK14301619 和 CUHK14301721），并获香港中文大学直接拨款资助。

2. Preliminary

2.1. Marsden-Weinstein 构造。本小节回顾哈密顿作用和辛约化的基本概念，以便确定本文所采用的记号（更多详情请参阅 [3], [10]）。

2.1.1. 哈密顿作用。设 (M,ω) 是一个紧辛流形。对于 $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，与 f 相关联的哈密顿向量场 X_f 由 $\imath_{X_f}\omega=-df$ 确定。这给出了一个李代数同构

$$\psi:(C^\infty(M;\mathbb{R}),\{\cdot,\cdot\})\to(\mathrm{Vect}(M,\omega),[\cdot,\cdot])$$

由 $\psi(f)=X_f$ 定义，其中 $\{,\}$ 是两个函数 $f,g\in C^\infty(M;\mathbb{R})$ 的泊松括号，由 $\{f,g\}=\omega(X_f,X_g)$ 确定。设 T^n 是一个实维数为 n 的环面，且 $\rho\colon T^n\to\mathrm{Diff}(M,\omega)$ 是 T^n 在 M 上保持 ω 的作用。令 $\mathfrak{t}$ 为 T^n 的李代数。在恒等元处对 ρ 求导，得到

$$d\rho:\mathfrak{t}\to\mathrm{Vect}(M,\omega),\ \xi\mapsto\xi^\#,$$

其中，$\mathfrak{t}$ 是 T^n 的李代数，$\xi^\#$ 称为与ξ关联的基本向量场。若 $d\rho$ 可通过 ψ分解，则称 T^n 在 M 上的作用是哈密顿的。

设 $\langle,\rangle\colon \mathfrak{t}^*\times\mathfrak{t}\to\mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{t}^*$与 $\mathfrak{t}$之间的自然配对。对于每个点 $p\in M$，我们可以通过以下公式将其与一个元素 $\mu(p)\in\mathfrak{t}^*$ 关联起来

$$\langle\mu(p),\xi\rangle=-\mu^\xi(p),\ \forall\xi\in\mathfrak{t}.$$

由此得到一个动量映射 $\mu\colon M\to\mathfrak{t}^*$，它是一个 T^n-等变映射。

2.1.2. 辛约化。我们用 $\mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}$表示 μ 的正则值集合，即

$$\mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}=\{\lambda\in\mathfrak{t}^*|\ \lambda\text{ is a regular value of }\mu\}.$$

对于任意 $\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}$，记水平集 $\mu^{-1}(\lambda)$为 M^λ。则 M^λ是一个 T^n-不变的余isotropic子流形（$i\colon M^\lambda\hookrightarrow M$），且 T^n的作用是局部自由的（见 [10]）。为简单起见，我们假设 T^n在 M^λ上自由作用。于是投影映射

$$\pi:M^\lambda\to M_\lambda$$

是一个主 T^n-纤维丛。此外，存在唯一的辛形式 ω_λ，定义在 M_λ 上，满足 $\pi^*\omega_\lambda=i^*\omega$。将体积形式 $\frac{1}{(m-n)!}\omega_\lambda^{m-n}$ 记为定义在 M_λ ~~上的~~ vol_λ。取一个联络

$\alpha \in \Omega^1(M^\lambda, \mathfrak{t})$ 定义在 M^λ 上，$\pi^*\mathrm{vol}_\lambda \wedge \alpha^n$ 是 M^λ 上的体积形式，记为 vol^λ（此处 α^n 是定义在 M^λ 上的 n-形式，由 $\frac{\alpha\wedge\cdots\wedge\alpha}{v}$ 给出，其中 $v \in \wedge^n\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{t}$ 上的一个 T^n-不变顶形式）。

$$\begin{array}{ccc} (M^\lambda = \mu^{-1}(\lambda), \mathrm{vol}^\lambda) & \xhookrightarrow{\quad i \quad} & M \\ \Big\downarrow \pi & & \\ (M_\lambda = \mu^{-1}(\lambda)/T^n, \mathrm{vol}_\lambda). & & \end{array}$$

2.2. 预量子数据。本小节首先回顾 T^n-不变预量子线丛的定义。随后，在我们的设定下（装备有 T^n-对称性的 K¨ahler 流形），重述 Guillemin 和 Sternberg 关于预量子线丛总能下降到约化空间上的结果。

定义 2.1. 设 (M, ω, J) 为一个辛流形，M 上的预量子线丛 (L, ∇, h) 是一个复线丛 L，连同一个 Hermitian 度量 h 和 Hermitian 联络 ∇，使得曲率形式 $F_\nabla = -i\omega$。

在 M 上存在预量子线丛 L 等价于 $[\frac{\omega}{2\pi}]$ 是整的（见 [8]）。当 M 为 K¨ahler 时，L 是一个丰正全纯线丛。在 L 的光滑截面空间上，李代数 $\mathfrak{t}$有一个由以下算子给出的典范表示

$$\nabla_{\xi^\#} + i\mu^\xi, \xi \in \mathfrak{t}. \tag{2.1}$$

如果存在T^n 对 L 的整体作用，且由此诱导的 $\mathfrak{t}$ 作用由 (2.1) 给出，则称预量子线丛是 T^n不变的。如果 M 上的T^n作用是哈密顿的，则总能做到这一点（见 [8]）。

设 $\mathfrak{t}_\mathbb{Z}$ 是指数映射 $\exp : T^n \to \mathfrak{t}$ 的核，$\mathfrak{t}^*_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{t}^*$ 是 $\mathfrak{t}_\mathbb{Z}$的对偶格。我们用$\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$表示 μ 的整正则值集合，即$\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}} = \mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}} \cap \mathfrak{t}^*_\mathbb{Z}$。

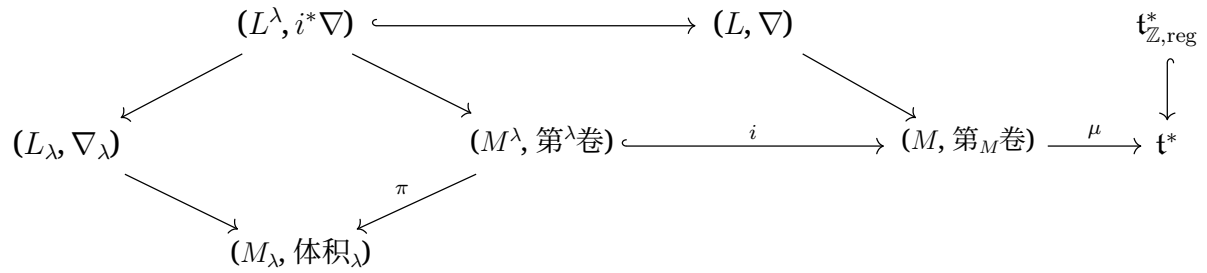
Guillemin 和 Sternberg 在 [3]中证明，对于$\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$，约化空间 M_λ上存在相应的预量子数据。

定理 2.2. [3, 定理 3.2] 存在唯一的带联络的线丛（$L_\lambda, \nabla_\lambda$）位于 M_λ 上，使得

$$\pi^*L_\lambda = i^*L =: L^\lambda, \ \mathit{and} \ \ \pi^*\nabla_\lambda = i^*\nabla. \tag{2.2}$$

推论 2.3。 [3, 推论 3。4] 联络的曲率 ∇_λ 是辛形式 ω_λ。

因此，我们得到如下交换图：



为避免记号滥用，我们用 ∇ 同时表示 $i^*\nabla$ 和 ∇_λ。为了稍后将分布截面从 M_λ 拉回到 M^λ，我们先回顾如何将线丛 L^λ 的截面推前。

注 2.4. 设 $\pi: P \to B$ 是 B 上的一个主 T^n-丛，$E \to B$ 是B上的一个线丛，$\pi^*E \to P$ 是其拉回线丛。于是我们可以定义对偶映射

$$\pi^* : \Gamma_c(B, L^{-1})' \to \Gamma_c(P, (\pi^*L)^{-1})', \eta \mapsto \pi^*\eta$$

为 $(\pi^*\eta)(\tau) = \eta(\pi_*\tau)$，对任意 $\tau \in \Gamma_c(P, L^{-1})$

本文始终固定 T^n 上一个 T^n-不变的 n-形式 $d\theta$，使得 $\int_{T^n} d\theta = 1$。当我们讨论 L_λ 的分布截面的拉回时，指的是相对于 $d\theta$，按照注 2.4 中的含义进行拉回。

2.3. 辛约化空间上的复结构。为了研究与 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 相关的几何量子化和辛约化之间的关系，我们回顾关于辛约化空间上复结构存在性的研究M_λ （参见 [3]）。

回忆一下，反全纯拉格朗日子丛 $TM^{0,1}_J \subset TM \otimes \mathbb{C}$是一个 K¨ahler 极化，记作 $\mathcal{P}_J$。我们定义 $F \subset TM^\lambda \otimes \mathbb{C}$如下：

$$F_p = (\mathcal{P}_J)_p \cap (TM^\lambda \otimes \mathbb{C})_p, \tag{2.3}$$

对任意 $p \in M^\lambda$，F 都可以下降为约化空间 M_λ上的一个丛$\mathcal{P}_{J,\lambda}$，它是 $TM_\lambda \otimes \mathbb{C}$的一个正定拉格朗日子丛。在假设（$*$）下，对任意 $p \in M^\lambda$，有（$\mathcal{D}_\mathbb{C} \cap \mathcal{P}_J$）$_p = F_p$。

定理 2.5。 [3,定理 3.5] 在约化空间 M_λ上，存在一个与 $\mathcal{P}_J$ 典范相关的正定极化$\mathcal{P}_{J,\lambda}$。

根据定义 4.2 和引理 4.3， [3] $\mathcal{P}_{J,\lambda}$ 确定了一个复结构 J_λ 于 M_λ，使得

$$\mathcal{P}_{J,\lambda} = TM^{0,1}_\lambda, \tag{2.4}$$

其中 $TM^{0,1}_\lambda$ 是相对于 J_λ 的 $TM_\lambda \otimes \mathbb{C}$ 的反全纯子丛。

2.4. 具有 T-对称性的 K¨ahler 流形上的极化。在 [9], 中，我们构造了具有 T-对称性的 K¨ahler 流形上的极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$。本节中不需要假设 (∗) 中预量子线丛 L 的存在。

对于任意点 $p \in M$，考虑映射 ρ_p： $T^n \to M$，其定义为 $\rho_p(g) = \rho(g)(p)$。令 $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \subset TM$为由 Im $d\rho$ 中的基本向量场生成的奇异分布，即 $(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})_p =$ Im $d\rho_p(e)$。令 $\mathcal{D}_{\mathbb{R}} =$ (Ker $d\mu$) $\subset TM$为由 $d\mu$ 的核定义的分布。注意，在 K¨ähler 流形 (M, ω, J) 上，与复结构 J 相对应的 K¨ähler 极化为 $\mathcal{P}_J = TM^{0,1}_J$。

定义 2 .6. [9, 定义] 我们定义奇异分布 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ by:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{mix}} = (\mathcal{P}_J \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \oplus \mathcal{I}_{\mathbb{C}}, \tag{2.5}$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathbb{C}} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ 分别是 $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ 的复化 .

˘ 令 H_p为 T^n在点 $p \in M$处的稳定子群。用 M表示 M中所有 n维轨道的并集，即

$$\breve{M} = \{p \in M | \dim H_p = 0\},$$

这是 M中的一个开稠密子集。

定理 2.7. [9, 定理 1.1] 在假设（∗）下， $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 是一个奇异极化，并且在˘M上光滑。此外，rank$(\mathcal{P}_{\mathrm{mix}} \cap \bar{\mathcal{P}}_{mix} \cap TM)|_{\breve{M}} = n$。

根据定义 4.6，当 $n = m$时， $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 是 M上的奇异实极化，也就是说， M 是环面流形；当 $1 \leq n < m$时， $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 是 M上的奇异混合极化。

3. Main results

我们如下定义与极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}} = (\mathcal{P}_J \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \oplus \mathcal{I}_{\mathbb{C}}$ 相关的量子空间。设 (L, ∇, h) 是 M 上的预量子线丛。我们首先回顾与极化 $\mathcal{H}$ $\mathcal{P}$ 相关的量子空间的定义（见 [14]）。

定义 3.1. 与极化 $\mathcal{H}$ $\mathcal{P}$ 相关的量子空间是 $\Gamma_c(M, L^{-1})'$ 的以下子空间：

$$\mathcal{H} = \{\delta \in \Gamma_c(M, L^{-1})' \mid \nabla_\xi \delta = 0, \ \forall\, \xi \in \Gamma(M, \mathcal{P})\},$$

其中 ∇_ξ 是作用于由方程 (3.2) 定义的分布截面空间上的协变导数算子。

在我们的设定中，即使极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 是奇异的，我们仍继续使用上述量子空间的定义。我们将其记为 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$。当 $n = m$, M 是托里克簇且 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 是奇异实极化时， $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 的定义与 [1]中研究的奇异实极化所对应的量子空间定义一致。

此外，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$，我们将支集位于 $\mu^{-1}(\lambda)$ 上的那些截面所构成的子空间定义为：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda} = \{\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}} \mid \operatorname{supp} \delta \subset \mu^{-1}(\lambda)\}.$$

3.1. 与 $H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 中截面相关的 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 中的分布截面。本小节首先确认，对于任意分布截面 $\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$，我们有（见定理 3.2）：

$$\operatorname{supp} \delta \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mu^{-1}(\lambda).$$

将 T^n 作用从光滑截面空间扩展到 L 的分布截面空间后，我们证明，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$，$\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 的一个 λ-权子空间。这给出了 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 的权分解，即 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$.

受到 Guillemin 和 Sternberg 在 [3], 关于几何量子化与辛约化相交换的研究启发，我们希望建立 $H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 与 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 之间的同构，其中 (M_λ, L_λ) 是 M 在正则整水平 λ 处的辛约化。

在本小节末尾，对于任意全纯截面 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，我们定义一个相应的分布截面 $\delta^s \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$（见定义 3.4），它是相对于体积形式 vol^λ 而言的。随后我们证明，$\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$ 中与 $H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 中的截面相对应的分布截面（见命题 3.7）。也就是说，$\imath(\delta^s) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$，其中 $\imath\colon \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。

为了研究量子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$，我们回顾如何将协变微分延拓到 L 的分布截面（见 [1]）。首先，可以通过刘维尔测度 $\mathrm{vol}^M = \frac{\omega^m}{m!}$，以一种自然的方式将光滑截面空间嵌入分布截面空间：

$$\begin{aligned} \iota : \Gamma(M, L) &\to \Gamma_c(M, L^{-1})' \\ s &\mapsto (\iota s)(\tau) = \int_M \langle s, \tau \rangle \operatorname{vol}_M . \end{aligned}$$

这里 $\langle , \rangle\colon L \times L^{-1} \to \mathbb{C}$ 是 L 与 L^{-1} 之间的自然配对。设 ∇ 为 L^{-1} 上的联络，使得 $d\langle s, \tau\rangle = \langle \nabla s, \tau\rangle + \langle s, \nabla\tau\rangle$。必须要求算子 ∇ 作用于分布截面 $\iota(s)$ 时，对于任意光滑截面 s 得到的结果，与算子 ∇ 作用于 s 的结果一致，即下图

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, L) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \Gamma_c(M, L^{-1})' \\ \big\downarrow \nabla_\xi & & \big\downarrow \nabla_\xi \\ \Gamma(M, L) & \xrightarrow{\ \iota\ } & \Gamma_c(M, L^{-1})' \end{array}$$

对任意 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，该图可交换。设 div ξ为 ξ关于 $\mathrm{vol}^M = \frac{\omega^m}{m!}$ 的散度，等价地， $\mathcal{L}_\xi(\mathrm{vol}_M) = (\mathrm{div}\ \xi)\,\mathrm{vol}_M$。可以看出：

$$\begin{aligned} 0 = \int_M \mathcal{L}_\xi(\langle s,\tau\rangle \,\mathrm{vol}_M) &= \int_M (\mathcal{L}_\xi\langle s,\tau\rangle)\,\mathrm{vol}_M + \int_M \langle s,\tau\rangle \mathcal{L}_\xi(\mathrm{vol}_M) \\ &= \int_M \langle \nabla_\xi s,\tau\rangle\,\mathrm{vol}_M + \int_M \langle s,\nabla_\xi\tau\rangle\,\mathrm{vol}_M + \int_M \langle s,\tau\rangle(\mathrm{div}\,\xi)\,\mathrm{vol}_M\,. \end{aligned}$$

这意味着，对于任意光滑截面 $s \in \Gamma(M,L)$ 和光滑测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$,

$$(\nabla_\xi \iota(s))(\tau) = \int_M \langle \nabla_\xi s,\tau\rangle\,\mathrm{vol}_M = \int_M \langle s, -((\mathrm{div}\,\xi)\tau + \nabla\tau)\rangle\,\mathrm{vol}_M\,. \tag{3.1}$$

为了确定一般分布截面 σ （其并非形如 $\iota(s)$）对应的 $\nabla_\xi\sigma$，我们通过对算子 ∇_ξ 分部积分构造其转置。具体而言， ∇_ξ 由其转置 ${}^t\nabla_\xi$ 如下刻画：对于任意 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$,

$$(\nabla_\xi\sigma)(\tau) = \sigma({}^t\nabla_\xi\tau),\ \text{with } {}^t\nabla_\xi\tau = -(\mathrm{div}\,\xi\tau + \nabla_\xi\tau). \tag{3.2}$$

类似地，我们可以将作用于光滑截面空间的 T^n-作用扩展到分布截面空间，使得嵌入 $\iota: \Gamma(M,L) \hookrightarrow \Gamma_c(M,L^{-1})'$ （相对于Liouville体积形式 vol_M）是 T^n-等变的。也就是说，对于任意 $\xi \in \mathfrak{t}$，以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M,L) & \xrightarrow{\mathrm{vol}_M} & \Gamma_c(M,L^{-1})' \\ \big\downarrow{\scriptstyle \xi\cdot} & & \big\downarrow{\scriptstyle \xi\cdot} \\ \Gamma(M,L) & \xrightarrow{\mathrm{vol}_M} & \Gamma_c(M,L^{-1})' \end{array}\ ,\ i.e.\ \xi\cdot(\iota(s)) = \iota(\xi\cdot s).$$

也就是说，对于任意的 $\delta \in \Gamma_c(M,L^{-1})'$、 $\tau \in \Gamma_c(M,L^{-1})$，以及 $\xi \in \mathfrak{t}$, $\xi\cdot\delta$，其特征如下：

$$(\xi\cdot\delta)(\tau) = \delta(\xi\cdot\tau), \text{with } \xi\cdot\tau = \nabla_{\xi^\#}\tau + i\mu^\xi\tau. \tag{3.3}$$

T^n 在 L 上的作用保持联络 ∇，这意味着 T^n 作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$。我们得到以下结果。

定理 3.2. 在假设 $(*)$ 下，

(1) 对任意 $\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$，有 $\mathrm{supp}\delta \subset \bigcup_{\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mu^{-1}(\lambda)$。由此得到以下分解

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda},$$

其中 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda} = \{\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix}} \mid \mathrm{supp}\ \ \delta \subset \mu^{-1}(\lambda)\}$;

(2) 对任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$， $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix}}$ 中的一个 λ-权子空间。

因此，$\mathcal{H}_{\mathrm{mix}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 是关于 T^n-作用的权分解。

证明。（1）对于由向量 $b \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$指定的环路 $\gamma_b \subset T^n$，任意测试函数 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$, 按照联络 ∇ 沿环路$\gamma_b \cdot p \subset M$对 $\tau(p)$进行平行移动，结果是将 $\tau(p)$ 乘以 $e^{-2i\pi\langle \mu(p),\ b\rangle}$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathfrak{t}^*$ 与 $\mathfrak{t}$ 之间的自然配对。原因如下。回顾一下，给定带有等变曲率 $F_A + \mu$ 的 T^1-等变线丛 $L \to M$，在 $p \in M$ 处沿任意 T^1-轨道的整体单值群由 $e^{2\pi i \mu(p)}$ 给出。将其应用于我们的情形，对于由 $b \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ 指定的环路 $\gamma_b \subset T^n$，(L^{-1}, ∇) 沿 M 中由 $b \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ 指定的环路的整体单值群定义了一个光滑函数:

$$f_b : M \to \mathbb{C}, p \mapsto f_b(p) := e^{-2i\pi\langle \mu(p), b\rangle}.$$

因此，$\nabla_{b^\#}\tau = 0$ 蕴含 $f_b \cdot \tau = \tau$。将此传递到对偶空间后，对于满足 $\nabla_{b^\#}\delta = 0$的任意 $\delta \in \Gamma_c(M, L^{-1})'$，我们有 $f_b \cdot \delta = \delta$。对于 $\delta \in \mathcal{H}_{\text{mix}}$，有$\nabla_{\xi^\#}\delta = 0, \forall \xi \in \mathfrak{t}$，特别是 $\nabla_{b^\#}\delta = 0, \forall b \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$。这意味着，对于任意 $b \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$，$f_b$在 $\operatorname{supp}\delta$ 上恒等于 1。因此我们得出结论，δ 应当支集于μ取整数值的集合中。也就是说，

$$\operatorname{supp}\delta \subset \bigcup_{\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}} \mu^{-1}(\lambda).$$

为证明 (2)，给定任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 和$\delta \in \mathcal{H}_{\text{mix},\ \lambda}$，我们需要证明对于任意 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$和 $\xi \in \mathfrak{t}$,

$$(\xi \cdot \delta)(\tau) = i\langle \lambda, \xi\rangle \delta(\tau),$$

其中 $\langle , \rangle : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ 是自然配对。注意，Liouville体积形式 vol_M 是T^n-不变的，$\operatorname{div} \xi^\# = 0$。这意味着,

$$(\nabla_{\xi^\#}\delta)(\tau) = -\delta(\nabla_{\xi^\#}\tau) = 0, \text{ and } (\xi \cdot \delta)(\tau) = -\delta(\xi \cdot \tau). \tag{3.4}$$

回顾一下，$\xi \cdot \tau = \nabla_{\xi^\#}\tau + i\mu^\xi\tau$。根据方程 (3.4)，我们有

$$(\xi \cdot \delta)(\tau_k) = -\delta(\xi \cdot \tau_k) = -\delta(\nabla_{\xi^\#}\tau_k + i\mu^\xi\tau_k) = -\delta(i\mu^\xi\tau_k). \tag{3.5}$$

假设 $\tau = \tau_k \in \Gamma_c(M, L^{-1})$ 的权为 k，即 $\xi \cdot \tau_k = i\langle k, \xi\rangle\tau_k$，根据方程 (3.4)，可得

$$(\xi \cdot \delta)(\tau_k) = -\delta(\xi \cdot \tau_k) = -\delta(i\langle k, \xi\rangle\tau_k). \tag{3.6}$$

结合方程 (3.4) 和 (3.6)，我们得到

$$\delta(i(\mu^\xi - \langle k, \xi\rangle)\tau_k) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{t}. \tag{3.7}$$

对于任意 $k \neq \lambda$，存在 $\xi \in \mathfrak{t}$，使得 $\langle \lambda, \xi\rangle \neq \langle k, \xi\rangle$。对于这样的 ξ，由于 $\mu^\xi|_{M^\lambda} = \langle \lambda, \xi\rangle$，$\mu^\xi - \langle k, \xi\rangle$ 在 T^n-不变的 M^λ 的开邻域上处处不为零。因此有:

$$\delta(\tau_k) = \delta(i(\mu^\xi - \langle k, \xi\rangle)\frac{1}{i(\mu^\xi - \langle k, \xi\rangle)}\tau_k). \tag{3.8}$$

由于动量映射是 T^n-不变的，$i \quad {}^{1}{}_{(\mu^\xi - \langle k,\ \xi\rangle)}\ \tau_k$ 仍具有 k 权。因此，根据上述讨论（即在方程 3.7 中，以 $i \quad {}^{1}{}_{(\mu^\xi - \langle k,\ \xi\rangle)}\ \tau_k$ 替换 τ_k ），有：

$$\delta(\tau_k) = 0. \tag{3.9}$$

给定 $\tau = \sum_k \tau_k$ 的权分解（即 $\xi \cdot \tau_k = i\langle k、\ \xi\rangle\tau_k$），由 δ 的线性性及方程 (3.9)，我们得到：

$$(\xi \cdot \delta)(\tau) = i\langle\lambda, \xi\rangle\delta(\tau_{\langle\lambda,\xi\rangle}) = i\langle\lambda, \xi\rangle\delta(\tau).$$

因此，我们有： $\xi \cdot \delta = i\langle\lambda、\ \xi\rangle\delta$。 □

下一个推论表明，$\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$ 中的任意元素在局部上都是沿着$\mu^{-1}(\lambda)$的 δ函数，并且不涉及任何 δ函数的导数。

推论 3.3。对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$、 $\delta \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$，以及满足$\tau|_{M^\lambda} = 0$的任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M,\ L^{-1})$，我们有

$$\delta(\tau) = 0. \tag{3.10}$$

证明。对于任意满足 $\tau|_{M^\lambda} = 0$ 的 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$，令 $\tau = \sum_k \tau_k$ 为其权分解，其中 $\tau_k = \int_{e^{it}\in T^n}(e^{it} \cdot \tau)e^{-ikt}dt$。由定理 3.2， δ相对于T^n-作用具有权 λ。这意味着，对于 $k \neq \lambda$,

$$\delta(\tau_k) = 0.$$

注意

$$\tau_k(p) = \int_{e^{it}\in T^n}(e^{-it} \cdot \tau)(p)e^{ikt}dt = \int_{e^{it}\in T^n}\tau(e^{-it} \cdot p)e^{ikt}dt.$$

对于任意 $p \in M^\lambda$和 $t \in \mathfrak{t}$，由于 M^λ是 T^n-不变的，因此有 $e^{it} \cdot p \in M^\lambda$。因此 $\tau_k|_{M^\lambda} = 0$，因为 $\tau|_{M^\lambda} = 0$。特别地， $\tau_\lambda|_{M^\lambda} = 0$。所以存在权为 λ的测试截面 τ'，使得对于某个 $\xi \in \mathfrak{t}$，$\tau_\lambda = i(\mu^\xi - \langle\lambda, \xi\rangle)\tau'_\lambda$。因此，对于 $k = \lambda$，由方程 (3.7) 可得

$$\delta(\tau_\lambda) = \delta(i(\mu^\xi - \langle\lambda, \xi\rangle)\tau'_\lambda) = 0. \tag{3.11}$$

因此，由于 δ 的线性性，我们有 $\delta(\tau) = 0$。 □

为了建立 $H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 与 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$ 之间的同构，其中 $(M_\lambda, L_\lambda) = (M, L)//_\lambda T$ 是 M 在正则整水平 λ 处的辛约化。我们首先如下定义 $M^\lambda \subset M$ 上与 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 相关的分布截面 $\delta^s \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$。

定义 3.4. 对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$ 和 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，我们定义与 s相关的分布截面$\delta^s \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$如下：对于任意 $\tau \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})$,

$$\delta^s(\tau) = \int_{M^\lambda}\langle\pi^* s, \tau\rangle\ \mathrm{vol}^\lambda. \tag{3.12}$$

事实上， $\delta^s = \iota(\pi^* s)$ 在由 $\sigma \mapsto (\iota\sigma)(\tau) = \int_M \langle \sigma, \tau \rangle \underline{\mathrm{vol}^\lambda}$ 相对于 vol^λ 定义的嵌入 $\iota : \Gamma(M^\lambda, L^\lambda)\, \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \mathrm{vol}^\lambda$ 下， $\imath(\delta^s) \in \Gamma_c(M, L^{-1})'$， 其中 $\imath : \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是由下式定义的自然包含:

$$(\imath(\delta))(\tau) = \delta(\tau|_{M^\lambda}), \forall \delta \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'. \tag{3.13}$$

为了证明 $\imath(\delta^s) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$，我们首先需要像之前一样，将光滑截面空间上的协变导数 ∇_ξ 扩展到相对于 vol^λ的 L^λ 分布截面空间。也就是说，对于任意 $\sigma \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$ 和 $\xi \in \Gamma(M^\lambda, TM^\lambda \otimes \mathbb{C})$,

$$(\nabla_\xi \sigma)(\tau) = \sigma({}^t\nabla_\xi \tau), \text{ with } {}^t\nabla_\xi \tau = -(\mathrm{div}\, \xi \tau + \nabla_\xi \tau), \tag{3.14}$$

其中 $\mathrm{div}^2 \xi = {}^{\mathcal{L}_\xi}\underline{\mathrm{vol}^\lambda}\ \mathrm{vol}^\lambda$。

特别地， $\imath(\delta^s) \in \Gamma_c(M, L^{-1})'$。我们还需要研究 L^λ 的分布截面空间上的协变导数与 L的分布截面空间之间的关系。我们期望下图

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(M, L) & \xrightarrow{\mathrm{vol}_M} & \Gamma_c(M, L^{-1})' & \xrightarrow{\nabla_\xi} & \Gamma_c(M, L^{-1})' \\
\downarrow & & \uparrow \imath & & \uparrow \imath \\
\Gamma(M^\lambda, L^\lambda) & \xrightarrow{\mathrm{vol}^\lambda} & \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' & \xrightarrow{\nabla_\xi} & \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})',
\end{array}$$

对于任意满足 $\xi|_{M^\lambda} \in \Gamma(M^\lambda, TM^\lambda \otimes \mathbb{C})$ 的 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，该图都可交换。为了证明上述图可交换，我们使用 Weinstein [13] 提出、并由 Guillemin 在 [2] 中进一步研究的余各向同性嵌入定理，通过（联系 vol_M 与 vol^λ）证明以下引理。

3.1.1. 限制与取散度可交换。对于任意 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，我们将 ξ（相对于 vol_M）的散度在 M^λ 上的限制记为 div^1_ξ，并将 $\xi|_{M^\lambda}$ （相对于 vol^λ）的散度记为 div^2_ξ ，即:

$$\mathrm{div}^1_\xi = \frac{d(i_\xi \mathrm{vol}_M)}{\mathrm{vol}_M}|_{M^\lambda}, \text{ and } \mathrm{div}^2 \xi = \frac{d(i_{\xi|_{M^\lambda}} \mathrm{vol}^\lambda)}{.} \mathrm{vol}^\lambda.$$

引理 3.5。在假设 $(*)$ 下，对于任意 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$ 和 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}$， 有

$$\mathrm{div}^1 \xi = \mathrm{div}^2 \xi,$$

作为 M^λ 上的函数。

证明。 不失一般性，假设 $\lambda = 0$ and $n = 1$。为证明 $\mathrm{div}^1 \xi = \mathrm{div}^2 \xi$，我们先建立 M 的体积形式 vol_M 与 M^λ的体积形式 vol_{M^λ}之间的联系。取 M^0上的一个主 T^1-联络 $\alpha \in \Omega^1(M^0, \mathfrak{t})$，选取 $\mathfrak{t}$的一组基 ξ_1，并将其在 $\mathfrak{t}^*$ 中的对应对偶基记为 ξ_1^*，其坐标函数为 t。用 ξ_1 表示,

我们写作 $\alpha = \xi_1 \otimes \alpha_1$，其中 α_1 是一个标量值形式。按照记号滥用的惯例，我们用 α表示α_1。通过嵌入，将 M^0视为 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$的一个子流形

$$i_0 : M^0 \to M^0 \times \mathfrak{t}^*, i_0(p) = (p, 0).$$

二形式

$$\tilde{\omega} = \pi^*\omega_0 + d(t\alpha)$$

在 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$中 U的某个邻域内是辛的，并满足 $i_0^*\tilde{\omega} = \pi^*\omega_{0\circ}$

注意，$(dt \wedge \alpha)^2 = 0$ 且 $(i^*\omega)^m = 0$。接下来，我们将注意力限制在证明$\mathcal{L}_\xi t = 0$, $\forall\, \xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\text{mix}})$。我们以平凡的方式将 T^1 在 M^0 上的作用延拓到 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$。于是 $\tilde{\omega}$ 是 T^1-不变的，并且 T^1 在 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$ 上的作用是哈密顿的，其动量映射为

$$\mu_0 : M^0 \times \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*, (p, t) \mapsto t.$$

根据 [2], 中的定理 2.2，在 M^0 的邻域 U 内，哈密顿 T^1-空间 (M, ω) 与 $(M^0 \times \mathfrak{t}^*, \tilde{\omega})$ 同构（见附录）。由此可得 $\mathcal{L}_\zeta t = 0$，对于任意 $\zeta \in \Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ 以及

$$\text{vol}_M = \frac{1}{m!}(i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \alpha \wedge dt,$$

在 M^0的邻域 U内。由于 $\mathcal{P}_{\text{mix}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$，显然 $\Gamma(U, \mathcal{P}_{\text{mix}}) \subset \Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$。由此可知，对于任意 $\xi \in \Gamma(U, \mathcal{P}_{\text{mix}})$,

$$\mathcal{L}_\xi t = 0. \tag{3.15}$$

由此可得:

$$\mathcal{L}_\xi(i^*\omega + td\alpha)^{m-1} = (m-1)(\mathcal{L}_\xi(i^*\omega) + t\mathcal{L}_\xi d\alpha) \wedge (i^*\omega + td\alpha)^{m-2},\ \forall \xi \in \Gamma(U, \mathcal{P}_{\text{mix}}).$$

因此，我们得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\text{vol}_M} d(i_\xi \text{vol}_M) = \frac{1}{\text{vol}_M}\mathcal{L}_\xi \text{vol}_M = \frac{1}{\text{vol}_M}\frac{1}{m!}\mathcal{L}_\xi((i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \alpha \wedge dt) \\
&= \frac{1}{\text{vol}_M}\frac{1}{m!}(\mathcal{L}_\xi(i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \alpha \wedge dt + (i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \mathcal{L}_\xi\alpha \wedge dt) \\
&= \frac{(m-1)(\mathcal{L}_\xi i^*\omega + t\mathcal{L}_\xi d\alpha) \wedge (i^*\omega + td\alpha)^{m-2} \wedge \alpha + (i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \mathcal{L}_\xi\alpha)}{(i^*\omega + td\alpha)^{m-1} \wedge \alpha}.
\end{aligned}$$

回顾一下，$\text{vol}^0 = \frac{1}{(m-1)!}(i^*\omega)^{m-1} \wedge \alpha_\circ$ 记号滥用一词中， $i_\xi \text{vol}^0$ 表示 $i_{\xi|_{M^0}} \text{vol}^0$。于是，经过直接计算，

$$\begin{aligned}
\text{div}^2\,\xi &= \frac{1}{\text{vol}^0} d(i_\xi \text{vol}^0) = \frac{1}{\text{vol}^0}\mathcal{L}_\xi \text{vol}^0 \\
&= \frac{1}{\text{vol}^0}\frac{1}{(m-1)!}\mathcal{L}_\xi((i^*\omega)^{m-1} \wedge \alpha) \\
&= \frac{(m-1)(\mathcal{L}_\xi i^*\omega) \wedge (i^*\omega)^{m-2} \wedge \alpha + (i^*\omega)^{m-1} \wedge \mathcal{L}_\xi\alpha)}{(i^*\omega)^{m-1} \wedge \alpha}.
\end{aligned}$$

因此，对于 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$，我们有：

$$\mathrm{div}^1 \xi = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_M} d\left(i_\xi \mathrm{vol}_M\right) \right) |_{M^0} = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_M} d\left(i_\xi \mathrm{vol}_M\right) \right) |_{t=0} = \mathrm{div}^2 \xi.$$

□

于是我们得到以下定理：

定理 3.6. 对于任意满足$\xi|_{M^\lambda} \in \Gamma(M^\lambda, TM^\lambda \otimes \mathbb{C})$的 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$, $\delta \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$和 $\xi \in \Gamma(M, TM \otimes \mathbb{C})$，我们有

$$\nabla_\xi(\imath(\delta)) = \imath(\nabla_\xi \delta), \tag{3.16}$$

其中 $\imath$：$\Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$是自然包含。

证明. 对于任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$，根据方程 (3.2)，有

$$(\nabla_\xi(\imath(\delta)))(\tau) = \imath(\delta)({}^t\nabla_\xi \tau) = \delta(i^*({}^t\nabla_\xi \tau)), \tag{3.17}$$

and

$$(\imath(\nabla_\xi \delta))(\tau) = (\nabla_\xi \delta)(i^*\tau) = \delta({}^t\nabla_\xi (i^*\tau)), \tag{3.18}$$

其中 i：$M^\lambda \hookrightarrow M$ 是嵌入。

为证明方程（3.16），根据（3.17）和（3.18），只需证明

$$i^*({}^t\nabla_\xi \tau) =^t \nabla_\xi (i^*\tau). \tag{3.19}$$

根据方程 (3.2)，我们有：

$$i^*({}^t\nabla_\xi \tau) = -i^*\left(\mathrm{div}\, \xi \tau + \nabla_\xi \tau\right), \tag{3.20}$$

其中 $\mathrm{div}\ \xi = \frac{i_\xi}{\mathrm{vol}_M \mathrm{vol}\ M}$。类似地，将方程（3.1）应用于 $L|_{M^\lambda}$，我们有：

$${}^t\nabla_\xi (i^*\tau) = -((\mathrm{div}^2 \xi)(i^*\tau) + \nabla_\xi (i^*\tau)) \tag{3.21}$$

其中 $\mathrm{div}^2 \xi = \frac{i_\xi}{\mathrm{vol}^\lambda \mathrm{vol}^\lambda}$，$i^*\tau = \tau|_{M^\lambda} = \tau$中的 div 是记号滥用。记 $i^*(\mathrm{div}\ \xi)$ 为 $\mathrm{div}^1 \xi$，即 $\mathrm{div}^1 \xi = \frac{i_\xi}{\mathrm{vol}_M}^M |_{M^\lambda} \mathrm{vol}_\circ$ 由于 $i^*(\nabla_\xi \tau) = \nabla_\xi (i^*\tau)$ 是记号滥用 $\xi|_{M^\lambda} = \xi$，我们有

$$-i^*\left(\mathrm{div}\, \xi \tau + \nabla_\xi \tau\right) = -(\mathrm{div}^1 \xi (i^*\tau) + \nabla_\xi (i^*\tau)). \tag{3.22}$$

根据引理 3.5,

$$\mathrm{div}^1 \xi = \mathrm{div}^2 \xi. \tag{3.23}$$

结合方程 (3.20)、(3.21)、(3.22) 与 (3.23)，可得

$$\delta(i^*({}^t\nabla_\xi \tau)) = \delta({}^t\nabla_\xi (i^*\tau)).$$

因此我们有： $\nabla_\xi(\imath(\delta)) = \imath(\nabla_\xi \delta)$. □

命题 3.7. 对任意正则 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$ 以及 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，我们有 $e:$

$$\imath(\delta^s) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda},$$

其中 $\imath:\ \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。

证明。根据 δ^s 的定义，我们有 $\imath(\delta^s) \in \Gamma_c(M, L^{-1})'$，且 $\mathrm{supp}\,\imath(\delta^s) \subset \mu^{-1}(\lambda)$。剩下需要证明的是，对于任意 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$,

$$\nabla_\xi(\imath(\delta^s)) = 0. \tag{3.24}$$

注意，对于任意 $\xi \in (M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$, $\xi|_{M^\lambda} \in \Gamma(M^\lambda, TM^\lambda \otimes \mathbb{C})$。要验证方程 (3.24)，根据定理 3.6，只需证明对于任意 $\xi \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$

$$\nabla_\xi \delta^s = 0. \tag{3.25}$$

Take 任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})$，根据方程 (3.2)，我们有 :

$$(\nabla_\xi \delta^s)(\tau) = \delta^s\left({}^t\nabla_\xi \tau\right) = -\delta^s\left((\mathrm{div}^2\,\xi)\tau + \nabla_\xi \tau\right), \tag{3.26}$$

其中 $\mathrm{div}^2\,\xi = {}^{i_\xi}\underline{\mathrm{vol}^\lambda}\,\mathrm{vol}^\lambda$。根据 δ^s 的定义，可知:

$$-\delta^s\left((\mathrm{div}^2\,\xi)\tau + \nabla_\xi \tau\right) = -\int_{M^\lambda} \left\langle \pi^* s, (\mathrm{div}^2\,\xi)\tau + \nabla_\xi \tau \right\rangle \mathrm{vol}^\lambda. \tag{3.27}$$

同样，将方程（3.1）应用于 $L|_{M^\lambda}$，可得:

$$\int_{M^\lambda} \langle \nabla_\xi(\pi^* s), \tau\rangle\, \mathrm{vol}^\lambda = -\int_{M^\lambda} \left\langle \pi^* s, (\mathrm{div}^2\,\xi)\tau + \nabla_\xi \tau \right\rangle \mathrm{vol}^\lambda. \tag{3.28}$$

结合方程（3.26）、（3.27）和（3.28），可得

$$(\nabla_\xi \delta^s)(\tau) = \int_{M^\lambda} \langle \nabla_\xi(\pi^* s), \tau\rangle\, \mathrm{vol}^\lambda. \tag{3.29}$$

由于 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$ 是全纯截面，因此有 $\nabla s \in \Gamma(M_\lambda, T^*M^{1,}{}_\lambda{}^0 \otimes L_\lambda)$。对于任意 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$ 和 $q \in M^\lambda$，由于 $(\mathcal{P}_{\mathrm{mix}})_q \subset (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})_q = T_q M^\lambda \otimes \mathbb{C}$，有 $\pi_*(\xi_q) \in T_{\pi(q)}M^{0,}{}_\lambda{}^1$。这意味着，对于任意 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$, $\nabla_\xi(\pi^* s)$ 在 M^λ 上 $= 0$。然后，对于所有$\tau \in \Gamma_c(M, L^{-1})$，由方程（3.29）可得,

$$(\nabla_\xi \delta^s)(\tau) = 0.$$

因此我们有: $\imath(\delta^s) \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$. □

3.2. λ-权量子子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$。在本小节中，我们将证明（见定理 3.12），对于任意正则的 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$,

$$\kappa : H^0(M_\lambda, L_\lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$$

由 $s \mapsto \kappa(s) = \imath(\delta^s)$ 给出的是一个同构。

首先，我们证明 T^n-不变的 L^λ 的分布截面可以下降为 L_λ 的分布截面。也就是说，对于任意满足 $\nabla_{\xi^\#}\delta = 0$ 的 $\delta \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$，存在一个分布截面 $\eta \in \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})'$，使得 $\delta = \pi^*\eta$（引理 3.8）。其次，我们证明，若对于所有 $\zeta \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$，$\nabla_\zeta(\pi^*\eta) = 0$，则 η 是 $\bar{\partial}$-闭的（定理 3.11）。最后，我们证明 $H^0(M_\lambda, L_\lambda) \cong \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$（定理 3.12）。

3.2.1. 将分布截面从 M^λ 下降到 M_λ。对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}$，令 $\pi\colon M^\lambda \to M_\lambda$ 为主 T^n-丛。回忆一下，(L^λ, ∇) 可以下降到 M_λ，记作 (L_λ, ∇)。根据注 2.4，我们有 $\pi_*\colon \Gamma(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1}) \to \Gamma(M_\lambda, L_\lambda^{-1})$；对偶地，有 $\pi^*\colon \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})' \to \Gamma_c(M_\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$。

事实上，上述断言 $\delta = \pi^*\eta$ 对任意 T^n-主丛 $P \to B$都成立。设$\pi\colon P \to B$是一个主 T^n-丛，其纤维上带有 T^n-不变体积形式 $d\theta$，满足 $\int_P d\theta = 1 \in C^\infty(B)$。设 (E, ∇) 是 B 上的一个线丛。我们可以将 π^*E 的截面相对于 $d\theta$推前为 E 的截面。此外，我们有：

引理 3.8. 取 $\delta \in \Gamma_c(P, (\pi^*E)^{-1})'$，若对任意 $\xi \in \mathfrak{t}$都有 $\nabla_{\xi^\#}\delta = 0$，则存在一个分布截面 $\eta \in \Gamma_c(B, E^{-1})'$，使得

$$\delta = \pi^*\eta.$$

证明。由单位分解，只需证明：对于 B的任意开子集 U，若 $\nabla_{\xi^\#}\delta = 0$ 对任意 $\xi \in \mathfrak{t}$ 都成立，则存在一个分布截面$\eta \in \Gamma_c(U, E^{-1})'$，使得 $\delta = \pi^*\eta$，其中$\delta \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U), (\pi^*E)^{-1})'$。也就是说，对于任意 $\tau \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U), (\pi^*E)^{-1})$,

$$\delta(\tau) = \eta(\pi_*\tau).$$

在开子集 $U \subset B$ 上固定 E 的局部标架 $\sigma_0 \in \Gamma(U, E)$，则 $\sigma := \pi^*\sigma_0$ 和 σ^{-1} 分别是 $\pi^{-1}(U)$ 上 π^*E 和 $(\pi^*E)^{-1}$ 的对应局部标架。相对于局部标架 σ 和 σ^{-1}，分布截面 $\delta \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U), (\pi^*E)^{-1})'$ 对应于分布函数 $f_\delta \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})'$，其中 f_δ 由下式确定：

$$f_\delta(g_\tau) = \delta(g_\tau\sigma^{-1}), \tag{3.30}$$

对于任意文本函数 $g_\tau \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})$。我们仅关注证明 $\nabla_{\xi^\#}\delta = 0$ 当且仅当 $\xi^\# f_\delta = 0$。分别将方程 (3.2) 应用于线丛 π^*L 和 $\pi^{-1}(U)$ 上的平凡丛，可见：

$$\left(\nabla_{\xi^\#}\delta\right)(\tau) = -\delta\left((\operatorname{div}\xi^\#)\tau + \nabla_{\xi^\#}\tau\right), \tag{3.31}$$

and

$$(\xi^{\#} f_\delta)(g_\tau) = f_\delta\left(-\left(\operatorname{div}\xi^{\#} g_\tau + \xi^{\#} g_\tau\right)\right). \tag{3.32}$$

由于 $\nabla_{\xi^{\#}}\sigma = \nabla_{\xi^{\#}}(\pi^*\sigma_0) = 0$，有 $\nabla_{\xi^{\#}}\sigma^{-1} = 0$，并且

$$\nabla_{\xi^{\#}}\tau = \nabla_{\xi^{\#}}\left(g_\tau\sigma^{-1}\right) = \left(\xi^{\#} g_\tau\right)\sigma^{-1}. \tag{3.33}$$

将方程 (3.30)、(3.31)、(3.32) 与 (3.33) 结合，我们得到

$$\left(\nabla_{\xi^{\#}}\delta\right)(\tau) = (\xi^{\#} f_\delta)(g_\tau), \tag{3.34}$$

对于任意 $\tau \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U), (\pi^*E)^{-1})$。事实证明，$\nabla_{\xi^{\#}}\delta = 0$ 当且仅当 $\xi^{\#} f_\delta = 0$ 对任意$\xi \in \mathfrak{t}$成立。于是根据引理 3.9，存在一个分布函数 $f_\eta \in \Gamma_c(U, \mathbb{C})'$，使得$f_\delta = \pi^*(f_\eta)$。定义 $\eta \in \Gamma_c(U, (\pi^*E)^{-1})'$ 为与 f_η 相关联的分布截面，相对于处处不为零的截面 σ_0^{-1}，即 $\eta(h_\tau\sigma_0^{-1}) = f_\eta(h_\tau)$。对于任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \pi^*E)$，可以验证:

$$\delta(\tau) = (\pi^*\eta)\tau.$$

因此我们有 $\delta = \pi^*\eta$。 □

引理 3.9. 设 $\pi: P \to B$ 为主 T^n-丛，且 U 为B的任意开子集。设 $\delta \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})'$ 为一个分布函数。若对于任意 $\xi \in \mathfrak{t}$，$\xi^{\#}\delta = 0$，则存在一个分布函数 $\eta \in \Gamma_c(U, \mathbb{C})'$，使得 $\delta = \pi^*\eta$。即，

$$\delta(g) = \eta(\pi_* g), \forall\ g \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U), \mathbb{C}).$$

证明. 对任意 $\delta \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})'$，存在 $\delta_\epsilon \in \Gamma(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})$（见 [6, 11]），使得 $\lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon = \delta$，并且

$$(\xi^{\#}\delta_\epsilon)(g) = (\xi^{\#}\delta)(g_\epsilon), \tag{3.35}$$

对于任意 $g \in \Gamma_c(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})$。由于 $\xi^{\#}\delta = 0$，我们得到 $\xi^{\#}\delta_\epsilon = 0$。由于 δ_ϵ是光滑的，存在一个光滑函数 $\eta_\epsilon \in \Gamma(U, \mathbb{C})$，使得 $\delta_\epsilon = \pi^*\eta_\epsilon \in \Gamma(\pi^{-1}(U)\ \mathbb{C})$。可以验证

$$\lim_{\epsilon\to 0}\eta_\epsilon(h) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(\pi^* h),$$

对于任意 $h \in \Gamma_c(U, \mathbb{C})$。因此，我们有 $\lim_{\epsilon\to 0}\eta_\epsilon$ 存在，并记为 η。由此可得

$$\delta = \pi^*\eta.$$

□

3.2.2. 拉回与取散度可交换。固定 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\,\mathrm{reg}}$，设 $\alpha \in \Omega^1(M^\lambda, \mathfrak{t})$ 是主 T^n-丛 $\pi: M^\lambda \to M_\lambda$ 上的一个联络。对于任意 $\zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM_\lambda)$，$\zeta$ 关于 α 的水平提升记为 $\tilde{\zeta}$。将 ζ 在 M_λ 上关于 vol_λ 的散度记为 $\mathrm{div}\,\zeta$（即 $\mathrm{div}\,\zeta = \frac{\mathcal{L}_\zeta \mathrm{vol}_\lambda}{\mathrm{vol}_\lambda}$），并将 $\tilde{\zeta}$ 在 M^λ 上关于 vol^λ 的散度记为 $\mathrm{div}\,\tilde{\zeta}$（即 $\mathrm{div}\,\tilde{\zeta} = \frac{\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}} \mathrm{vol}^\lambda}{\mathrm{vol}^\lambda}$）。

引理 3.10. 令 $\mathrm{div}\,\zeta$ 和 $\mathrm{div}\,\tilde{\zeta}$ 如上定义。则有

$$\pi^*(\mathrm{div}\,\zeta) = \mathrm{div}\,\tilde{\zeta},$$

作为 M^λ 上的光滑函数。

证明。由于 T^n 是阿贝尔的，关于联络一形式 α 的 ζ 的水平提升 $\tilde{\zeta}$ 是 T^n-不变的。也就是说

$$\mathcal{L}_{\xi^\#}\tilde{\zeta} = 0, \tag{3.36}$$

对所有 $\xi \in \mathfrak{t}$ 均成立，其中 $\xi^\#$ 是与 ξ 相关联的基本向量场。根据主 T^n-联络的性质以及方程 (3.37)，我们有

$$(\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}\alpha)(\xi^\#) = \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}(\alpha(\xi^\#)) - \alpha(\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}\xi^\#) = 0. \tag{3.37}$$

回忆一下 $\mathrm{vol}^\lambda = \pi^*\mathrm{vol}_\lambda \wedge \alpha^n$。由方程 (3.37)，可得

$$\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}\,\mathrm{vol}^\lambda = (\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\,\mathrm{vol}_\lambda)) \wedge \alpha^n. \tag{3.38}$$

另一方面，根据嘉当公式，并且 vol_λ 是 B 上的体积形式，我们有：

$$\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\,\mathrm{vol}_\lambda) = d(i_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\,\mathrm{vol}_\lambda)) = \pi^*(\mathcal{L}_\zeta\,\mathrm{vol}_\lambda), \tag{3.39}$$

回顾一下，

$$\mathcal{L}_\zeta\,\mathrm{vol}_\lambda = (\mathrm{div}\,\zeta)\,\mathrm{vol}_\lambda,\ \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}\,\mathrm{vol}^\lambda = (\mathrm{div}\,\tilde{\zeta})\,\mathrm{vol}^\lambda\,. \tag{3.40}$$

将等式 (3.38)、(3.39) 与 (3.40) 结合，可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\,\tilde{\zeta})\,\mathrm{vol}^\lambda &= \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}}\,\mathrm{vol}^\lambda = \pi^*(\mathcal{L}_\zeta\,\mathrm{vol}_\lambda) \wedge \alpha^n \\ &= \pi^*(\mathrm{div}\,\zeta)\pi^*\,\mathrm{vol}_\lambda \wedge \alpha^n \\ &= \pi^*(\mathrm{div}\,\zeta)\,\mathrm{vol}^\lambda\,.\end{aligned}$$

因此我们得到：$\pi^*(\mathrm{div}\ \zeta) = \mathrm{div}\ \zeta$. □

定理 3.11. 对于任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$ 以及分布函数 $\eta \in \Gamma_c(M_\lambda, \mathbb{C})'$，若 $\nabla_\xi(\pi^*\eta) = 0$，则对于任意 $\xi \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$，有 $\nabla_\zeta \eta = 0$，对所有 $\zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM^0_{,\lambda}{}^1)$ 均成立。

证明。为证明此结论，固定主T^n-丛 $\pi\colon M^\lambda \to M_\lambda$上的联络一形式 $\alpha \in \Omega^1(M^\lambda, \mathfrak{t})$，对于任意 $\zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM^0{}_{,\lambda}{}^1)$，记相对于联络 α的 ζ的水平提升为 $\tilde{\zeta}$。为证明 $\nabla_\zeta \eta = 0$，只需证明：对于任意测试函数 $\phi \in D_c(M_\lambda)$,

$$(\nabla_\zeta \eta)(\phi) = \left(\nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\eta)\right)(\pi^*\phi).$$

设 vol_λ 和 vol^λ 分别为前文定义的 M_λ 和 M^λ 的体积形式。特别地，$\mathrm{vol}^\lambda = \pi^*\mathrm{vol}_\lambda \wedge \alpha^n$是相对于主 T^n-联络 $\alpha \in \Omega^1(M^\lambda, \mathfrak{t})$的体积形式。分别将方程 (3.2)应用于 M_λ 和 M^λ 的平凡丛，可得：

$$(\nabla_\zeta \eta)(\phi) = \eta\left(-(\operatorname{div}\zeta)\phi - \nabla_\zeta \phi\right), \tag{3.41}$$

and

$$\left(\nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\eta)\right)(\pi^*\phi) = (\pi^*\eta)\left(-\left(\operatorname{div}\tilde{\zeta}\right)\pi^*\phi - \nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\phi)\right), \tag{3.42}$$

其中，$\mathrm{div}\ \zeta$（分别地，$\mathrm{div}\ \tilde{\zeta}$）是 ζ（分别地，$\tilde{\zeta}$）相对于 vol_λ（分别地，vol^λ）的散度。根据注 2.4，有：

$$(\pi^*\eta)\left(\pi^*\left(-(\operatorname{div}\zeta)\phi - \nabla_\zeta\phi\right)\right) = \eta\left(-(\operatorname{div}\zeta)\phi - \nabla_\zeta\phi\right). \tag{3.43}$$

由引理 3.10,

$$\pi^*(\operatorname{div}\zeta) = \operatorname{div}\tilde{\zeta}. \tag{3.44}$$

注意，$\pi^*(\zeta(\phi)) = \pi^*\zeta(\pi^*\phi)$。由方程 (3.44)，有

$$\pi^*\left(-(\operatorname{div}\zeta)\phi - \nabla_\zeta\phi\right) = -\left(\operatorname{div}\tilde{\zeta}\right)\pi^*\phi - \nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\phi). \tag{3.45}$$

此外：

$$(\pi^*\eta)\left(\pi^*\left(-(\operatorname{div}\zeta)\phi - \nabla_\zeta\phi\right)\right) = (\pi^*\eta)\left(-\left(\operatorname{div}\tilde{\zeta}\right)\pi^*\phi - \nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\phi)\right). \tag{3.46}$$

结合 (3.41)、(3.42)、(3.43) 和 (3.46)，我们可以得出：

$$(\nabla_\zeta \eta)(\phi) = \left(\nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\eta)\right)(\pi^*\phi). \tag{3.47}$$

接下来，我们将注意力集中于证明 $\tilde{\zeta} \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$。由于 T^n在 M^λ上自由作用，$M^\lambda \times \mathfrak{t} \cong \mathcal{I}_{\mathbb{R}}|_{M^\lambda}$。注意，$\pi_*(\tilde{\zeta}) = \zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM^0{}_{,\lambda}{}^1)$，且 $\alpha(\tilde{\zeta}) = 0$。由于 $T_pM^\lambda \otimes \mathbb{C} \subset (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})_p$且 $(\mathcal{P}_{\mathrm{mix}})_p = (\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap TM^0{}_{,1})_p \oplus (\mathcal{I}_{\mathbb{C}})_p$，对于任意 $p \in M^0$，有 $\tilde{\zeta} \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$。根据我们的假设，有 $\nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\eta) = 0$。因此，由等式 (3.47) 可得

$$(\nabla_\zeta \eta)(\phi) = \left(\nabla_{\tilde{\zeta}}(\pi^*\eta)\right)(\pi^*\phi) = 0,\ \forall \phi \in D_c(M_\lambda), \zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM^{0,1}_\lambda).$$

□

3.2.3. 构造同构 $H^0(M_\lambda, L_\lambda) \cong \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$。回顾一下，对于任意给定的 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，根据命题 3.7，相应的分布截面 $\imath(\delta^s)$ 属于 $\mathcal{H}_{mix,\lambda}$。因此，我们可以定义一个同态

$$\kappa : H^0(M_\lambda, L_\lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$$

由 $s \mapsto \kappa(s) = \imath(\delta^s)$ 给出，其中 $\imath\colon\ \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})' \hookrightarrow \Gamma_c(M, L^{-1})'$ 是自然包含。可以验证，κ 是单射。

定理 3.12. 对任意 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\mathrm{reg}}$, $\kappa\colon\ H^0(M_\lambda, L_\lambda) \to \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$ 是一个同构。

证明。给定任意 $\tilde{\delta} \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\lambda}$，我们需要构造 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，使得 $\tilde{\delta} = \kappa(s)$。首先，我们证明存在 $\delta \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$，使得 $\tilde{\delta} = \imath(\delta)$，如下所示：定义分布截面 $\delta \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})'$ 如下：

$$\delta(\tau) = \tilde{\delta}(\tilde{\tau}),$$

对于任意 $\tau \in \Gamma_c(M^\lambda, (L^\lambda)^{-1})$，其中 $\tilde{\tau} \in \Gamma_c(M, L^{-1})$ 是满足 $\tilde{\tau}|_{M^\lambda} = \tau$ 的任意测试截面。根据推论 3.3，δ 定义良好。此外，有

$$\tilde{\delta} = \imath(\delta). \tag{3.48}$$

也就是说，对于任意测试截面 $\tilde{\tau}' \in \Gamma_c(M, L^{-1})$，$(\imath(\delta))(\tilde{\tau}') = \delta(\tilde{\tau}'|_{M^\lambda}) = \tilde{\delta}(\tilde{\tau}')$。其次，我们证明存在 $\eta \in \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})'$ 使得 $\delta = \pi^*\eta$，其中 $\pi\colon\ M^\lambda \to M_\lambda$ 是投影。对于任意 $\tilde{\delta} \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$，由于 $\xi^\# \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$，我们有 $\nabla_{\xi^\#}\tilde{\delta} = 0$，对任意 $\xi \in \mathfrak{t}$。根据定理 3.6，有

$$0 = \nabla_{\xi^\#}\tilde{\delta} = \nabla_{\xi^\#}(\imath(\delta)) = \imath(\nabla_{\xi^\#}\delta),\ \forall \xi \in \mathfrak{t}. \tag{3.49}$$

由 $\imath$ 的单射性可得，对任意 $\xi \in \mathfrak{t}$,

$$\nabla_{\xi^\#}\delta = 0. \tag{3.50}$$

根据引理 3.8，存在一个分布截面 $\eta \in \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})'$，使得

$$\delta = \pi^*\eta. \tag{3.51}$$

接下来证明存在一个全纯截面 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，使得在包含映射 $\iota\colon\ \Gamma(M_\lambda, L_\lambda) \to \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})'$ 下，关于 vol_λ 有 $\eta = \iota(s)$。根据 $\mathcal{P}_{\mathrm{mix}}$ 的定义，对任意 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$，有 $\xi|_{M^\lambda} \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}}) \subset \Gamma(M^\lambda, TM^\lambda \otimes \mathbb{C})$。记号滥用地，我们将 $\xi|_{M^\lambda}$ 记为 ξ。根据定理 3.11 和等式 (3.51)，有

$$\nabla_\xi\tilde{\delta} = \nabla_\xi(\imath(\delta)) = \imath(\nabla_\xi\delta) = \imath(\nabla_\xi(\pi^*\eta)). \tag{3.52}$$

由于 $\tilde{\delta} \in \mathcal{H}_{\mathrm{mix},\ \lambda}$, $\nabla_\xi\delta = 0$，对于 $\xi \in \Gamma(M, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}})$。由 $\imath$ 的单射性以及等式 (3.52)，我们得到：

$$\nabla_\xi(\pi^*\eta) = 0,\ \forall \xi \in \Gamma(M^\lambda, \mathcal{P}_{\mathrm{mix}}). \tag{3.53}$$

由定理 3.11 可知，对于任意 $\zeta \in \Gamma(M_\lambda, TM^{0,1}_\lambda)$，有 $\nabla_\zeta \eta = 0$。这意味着$\nabla^{0,1}\eta = 0$。由椭圆算子 $\Delta = \bar{\partial}^*\bar{\partial}$的正则性，$\eta$ 是光滑的。因此，存在一个全纯截面 $s \in H^0(M_\lambda, L_\lambda)$，使得在包含映射$\iota$：$\Gamma(M_\lambda, L_\lambda) \to \Gamma_c(M_\lambda, L_\lambda^{-1})'$下，$\eta = \iota(s)$（相对于 vol_λ）。还需证明 $\tilde{\delta} = \kappa(s)$。

˜根据上述讨论，我们有 $\delta = \imath(\pi^*(\iota(s)))$。回顾一下，$\kappa(s) = \imath(\delta^s)$，其中相对于体积形式 vol^λ 定义的 δ^s 为

$$\delta^s(\tau) = \int_{M^\lambda} \langle \pi^* s, \tau \rangle \, \mathrm{vol}^\lambda, \tag{3.54}$$

对于任意测试截面 $\tau \in \Gamma_c(M^\lambda, L^\lambda)'$。由 $\imath$ 的单射性，要证明 $\tilde{\delta} = \kappa(s)$，只需证明：

$$\pi^*(\iota(s)) = \delta^s. \tag{3.55}$$

根据注 2.4，我们有

$$\int_{M^\lambda} \langle \pi^* s, \tau \rangle \, \mathrm{vol}^\lambda = (\pi^* s)(\tau) = s(\pi_* \tau) = \int_{M_\lambda} \langle s, \pi_* \tau \rangle \, \mathrm{vol}_\lambda \tag{3.56}$$

And

$$\pi^*(\iota(s))(\tau) = (\iota(s))(\pi_* \tau) = \int_{M_\lambda} \langle s, \pi_* \tau \rangle \, \mathrm{vol}_\lambda \,. \tag{3.57}$$

根据方程 (3.54)、(3.56) 和 (3.57)，我们有 $\pi^*(\iota(s)) = \delta^s$。 □

4. Appendix

4.1. 辛流形上的极化。几何量子化过程中的一个步骤是选择一种极化。我们首先回顾辛流形（M, ω）上的极化定义（见 [12, 14]）。本小节讨论的所有极化都是光滑的。

定义 4.1. M 上的复极化是复化切丛 $TM \otimes \mathbb{C}$ 的一个复子丛，满足以下条件：

(1) $\mathcal{P}$是对合的，即若 $u, v \in \Gamma(M, \mathcal{P})$，则 $[u, v] \in \Gamma(M, \mathcal{P})$；
(2) 对每个 $x \in M$，$\mathcal{P}_x \subseteq T_x M \otimes \mathbb{C}$ 都是拉格朗日的；且 (3) $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) := \mathrm{rank}(\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap TM)$ 为常数。

此外，$\mathcal{P}$ 被称为

- *real polarization*, if $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}$, i.e. $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) = m$;
- *Kähler polarization*, if $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = 0$, i.e. $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) = 0$;
- *mixed polarization*, if $0 < \mathrm{rank}(\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap TM) < m$, i.e. $0 < \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) < m$.

4.2. 辛流形上的奇异极化。本小节回顾奇异极化以及奇异极化的光滑截面的定义，这些定义在主要结果的证明中有所应用（见 [9]）。

定义 4.2. $\mathcal{P} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ 是 M 上的奇异复分布，当且仅当满足：对于任意点 $p \in M$，$\mathcal{P}_p$ 是 $T_pM \otimes \mathbb{C}$的向量子空间。若在开子集 $\check{} M \subset M$ 上，$\mathcal{P}|_{\check{} M}$ 是切丛 $T\check{} M \otimes \mathbb{C}$的光滑子丛，则称这样的 $\mathcal{P}$ 在该开子集上是光滑的。

注 4.3. 本文仅考虑具有温和奇异性的此类分布，即它们仅在开稠密子集 $M \subset M$之外是奇异的。在我们的设定下，我们如下定义奇异分布的光滑截面和对合分布。

定义 4.4. 设 $\mathcal{P}$是 $TM \otimes \mathbb{C}$的奇异复分布。对于 M的任意开子集U， $\mathcal{P}$在 U上的光滑截面空间定义为取值于 $\mathcal{P}$的 $TM \otimes \mathbb{C}$的光滑截面，也就是说，

$$\Gamma(U, \mathcal{P}) = \{v \in \Gamma(U, TM \otimes \mathbb{C}) \mid v_p \in (\mathcal{P})_p, \forall p \in U\}.$$

定义 4.5. 设 $\mathcal{P}$ 是 M上的奇异复分布。若 $\mathcal{P}$ 满足以下条件，则称其为对合的：

$$[u, v] \in \Gamma(M, \mathcal{P}), \text{ for any } u, v \in \Gamma(M, \mathcal{P}).$$

$\check{}$ 定义 4.6. 设 $\mathcal{P}$ 是 M 上的奇异复分布，且在 M上光滑。若此类 $\mathcal{P}$ 满足以下条件，则称其为 M上的奇异极化：

(a) $\mathcal{P}$是对合的，即若 $u, v \in \Gamma(M, \mathcal{P})$，则 $[u, v] \in \Gamma(M, \mathcal{P})$；$\check{}$

(b) 对每个 $x \in M$， $\mathcal{P}_p \subseteq T_pM \otimes \mathbb{C}$ 都是拉格朗日的；以及

(c) 实秩 $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}) := \mathrm{rank}(\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap TM)|_{\check{} M}$为常数。

此外，这样的奇异 $\mathcal{P}$ 称为

- *real polarization*, if $\mathcal{P}|_{\check{M}} = \overline{\mathcal{P}}|_{\check{M}}$, i.e. $\mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}|_{\check{M}}) = m$;
- *Kähler polarization*, if $\mathcal{P}_{\check{M}} \cap \overline{\mathcal{P}}|_{\check{M}} = 0$ on $\check{M}$, i.e. $r\,(\mathcal{P}|_{\check{M}}) = 0$;
- *mixed polarization*, if $0 < \mathrm{rank}(\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap TM)|_{\check{M}} < m$, i.e. $0 < \mathrm{rk}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P}|_{\check{M}}) < m$.

4.3. 余各向同性嵌入定理。我们回顾 Guillemin 在 [2], 中研究的余各向同性嵌入定理，该定理用于证明散度的计算。设 (M, ω) 是一个维数为 $2m$ 的辛流形，配备哈密顿 T^n-作用，其动量映射为 μ。不失一般性，假设 $n = 1$。选取一个主 T^1-联络 $\alpha \in \Omega^1(M^0, \mathfrak{t})$ 于 M^0 上，其中 $M^0 = \mu^{-1}(0)$。通过嵌入，将 M^0 视为 $M^0 \times \mathbb{R}$ 的子流形

$$i : M^0 \to M^0 \times \mathbb{R},\ i(p) = (p, 0).$$

在乘积空间 $\tilde{M} = M^0 \times (-\epsilon, \epsilon)$ 上，二形式

$$\tilde{\omega} = \pi^*\omega_0 + d(t\alpha), -\epsilon < t < \epsilon$$

在 $\tilde{M}$上是辛的，并满足 $i^*\tilde{\omega} = \pi^*\omega_0$。以平凡方式将 T^1在 M^0上的作用延拓到 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$。于是 $\tilde{\omega}$是 T^1-不变的，并且 T^1在 $M^0 \times \mathfrak{t}^*$上的作用是哈密顿的，其动量映射为

$$\mu_0 : M^0 \times \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}^*, (p, t) \mapsto t.$$

定理4.7。 $[3,$定理2.2$]$在 M^0的一个邻域内，哈密顿 T^n-空间˜(M, ω)与 $(M, \tilde{\omega})$同构。

4.4. 几何量子化与辛约化可交换。本小节回顾 Guillemin 和 Sternberg 在 $[3]$中关于几何量子化与辛约化可交换的研究。设 (L, ∇)和 $(L_\lambda, \nabla_\lambda)$分别为定义在 M 和 M_λ 上的预量子线丛，如前所述，对于$\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z},\ \mathrm{reg}}$。与 $\mathcal{P}_J$ 相关联的量子空间$\mathcal{H}_{P_J}$是 L的 J-全纯截面空间：

$$\mathcal{H}_{P_J} = \{s \in \Gamma(M, L) \mid \bar{\partial}_J s = 0\} = H^0(M, L).$$

可以对预量子线丛（L， ∇）进行两种操作：一种是几何量子化，另一种是辛约化。Guillemin 和 Sternberg 在 $[3]$ 中证明，这两种操作彼此可交换，即

$$(\mathcal{H}_{P_J})_\lambda \cong \mathcal{H}_{P_{J,\lambda}}, \tag{4.1}$$

其中（$\mathcal{H}_{P_J}$）$_\lambda$ （J_λ-全纯截面 L_λ）是 $\mathcal{H}_{P_J}$ 的 λ-权子空间，而 $\mathcal{H}_{P_{J,\ \lambda}}$是与约化后的 K¨ähler 极化$\mathcal{P}_{J,\ \lambda}$相关联的量子空间，即

$$\mathcal{H}_{P_{J,\lambda}} = \{s \in \Gamma(M_\lambda, L_\lambda) \mid \bar{\partial}_{J_\lambda} s = 0\} = H^0(M_\lambda, L_\lambda). \tag{4.2}$$

References

1. T. Baier, C. Florentino, J. M. Mourão 和 J. P. Nunes，《从无穷远视角看托里克 K¨ähler 度量、量子化与紧致热带阿米巴》，《微分几何杂志》89 (3), 411-454, 2011。 2. V. Guillemin，《哈密顿 T^n-空间的动量映射与组合不变量》，《数学进展》122，Birkh¨auser，1994。 3. V. Guillemin 和 S. Sternberg，《几何量子化与群表示的重数》，《数学创作》67.3 (1982): 515-538。 4. V. Guillemin 和 S. Sternberg，《物理学中的辛技巧》，剑桥大学出版社，剑桥大学出版社，剑桥，1984。 5. M. D. Hamilton，《局部环面流形与奇异玻尔–索末菲叶》，《美国数学会回忆录》207 (2010), 第971号，vi+60页。 6. J. Horváth，《拓扑向量空间与分布》，Courier Corporation，2012。 7. A. A. Kirillov，《几何量子化》，载于：《数学科学百科全书》第4卷《动力系统》，施普林格出版社，1990，137-172。

8. B. Kostant, 《量子化与酉表示》，载于：《现代分析及其应用》。数学讲义，第170卷，第87-207页。柏林-海德堡-纽约：Springer，1970年。 9. N.C. Leung 和 D. Wang, 《具有 T-对称性的 K¨ahler 度量空间中的测地线射线》，arXiv 预印本 arXiv: 2211.05324 (2022)。 10. J. Marsden 和 A. Weinstein, 《具有对称性的辛流形约化》。《数学物理报告》5,121-130 (1974)。 11. W. Rudin, 《泛函分析》，第二版。《纯粹与应用数学国际丛书》。麦格劳-希尔公司，纽约，1991年。 12. D. Simms 和 N. Woodhouse, 《几何量子化讲义》，《物理学讲义》第53卷。柏林-海德堡-纽约：Springer，1976年。 13. A. Weinstein, 《辛流形及其拉格朗日子流形》，《数学进展》6 (1971), 329-346。 14. N. M. J. Woodhouse, 《几何量子化》，第二版，克拉伦登出版社，牛津，1991年。

The Institute of Mathematical Sciences and Department of Mathematics, The ChineseUniversity of Hong Kong, Shatin, Hong Kong电子邮箱: leung@math.cuhk.edu.hk

The Institute of Mathematical Sciences and Department of Mathematics, The ChineseUniversity of Hong Kong, Shatin, Hong Kong电子邮箱: dwang@math.cuhk.edu.hk