arXiv:2301.01012v1 [math.AP] 3 Jan 2023

具有质量作用感染机制和感染者小迁移率的两个扩散型SIS流行病模型的人口分布新型空间剖面

RUI PENG、ZHI-AN WANG、GUANGHUI ZHANG 和 MAOLIN ZHOU

Abstract. 本文研究具有质量作用感染机制的两类SIS流行病反应扩散模型，其形式为 SI，并考察感染者迁移率受到小值限制时人口分布的空间剖面。对于总人口数恒定的模型，我们的结果表明，易感人群总是收敛到一个正常数，该常数恰好是相应风险函数的最小值；感染人群则可能集中于孤立的最高风险点，或者仅聚集在最高风险区间上（前提是最高风险位置至少包含一个区间）。与此形成鲜明对比的是，对于因易感者补充和感染者死亡而导致总人口数变化的模型，我们的结果表明，易感人群收敛到一个正函数；除非相应的风险函数为常数，否则该函数并非常数。感染人群可能仅集中于某些孤立的最高风险点，也可能至少聚集在最高风险位置的某个邻域内，或占据整个栖息地；具体情况取决于相应风险函数的性质，甚至取决于其在最高风险位置处的光滑性。我们通过数值模拟支持并补充了理论结果。

1. Introduction and existing results

2019新型冠状病毒病（COVID-19）的暴发仍在全球迅速蔓延，并对公共卫生和全球经济造成了巨大影响。众所周知，人口流动是许多已报告传染病（包括COVID-19 [5, 9, 25],）传播的重要因素

日期：2023年1月4日。2010年数学主题分类。35J57、35B40、35Q92、92D30。关键词与短语。反应扩散SIS流行病模型；质量作用感染机制；空间分布；小迁移率；异质环境。R. Peng：浙江师范大学数学系，浙江金华，321004，中国。电子邮箱：pengrui seu@163.com。Z.-A. WANG：香港理工大学应用数学系，香港九龙红磡。电子邮箱：mawza@polyu.edu.hk。G. ZHANG：华中科技大学数学与统计学院，中国武汉,_ 430074。电子邮箱：guanghuizhang@hust.edu.cn。M. ZHOU：南开大学陈省身数学研究所和LPMC，中国天津，300071。电子邮箱：zhouml123@nankai.edu.cn。R. Peng部分获得国家自然科学基金（编号：12271486、12171176）资助；Z.-A. Wang部分获得香港学者计划（项目编号：P0031250）及香港理工大学内部资助（项目编号：P0031013）支持；G. Zhang部分获得国家自然科学基金（编号：12171176、11971187）及中央高校基本科研业务费（编号：5003011008）资助；M. Zhou部分获得南开之志基金会及国家自然科学基金（编号：11971498）资助。

而封锁和隔离已被证明是减少甚至消除感染的最有效措施之一 [30, 60]。另一方面，人口异质性对于COVID-19 [7, 8, 17]传播复杂动态行为的重要性也已得到关注。

为了从数学理论的角度深入理解人口流动和异质性对流行病传播的影响，本文研究异质环境中具有质量作用感染机制的两个 SIS 反应扩散系统。我们旨在考察感染者的迁移率受到充分控制而保持较小时，人口分布的空间分布。此类信息有助于决策者预测疾病发生的模式，进而制定更有效的疾病根除策略。质量作用感染机制最早由 Kermack和McKendrick 在其开创性研究中提出 [26], ，其中假设疾病传播由双线性发病函数 SI 支配（另可参见 [27–29] 或 [54]）。本文讨论的系统可能是最简单但又最基础的 SIS 流行病模型。

本研究首先讨论如下的一维空间耦合反应扩散方程：

$$\begin{cases} S_t - d_S S_{xx} = -\beta(x)SI + \gamma(x)I, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ I_t - d_I I_{xx} = \beta(x)SI - \gamma(x)I, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ S_x = I_x = 0, & x = 0,\, L, \quad t > 0, \\ S(x,0) = S_0(x) \geq 0,\ I(x,0) = I_0(x) \geq, \not\equiv 0, & 0 < x < L. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $S(x,t)$ 和 $I(x,t)$ 分别表示位置 $x \in [0, L]$ 和时间 t 处易感者和感染者的人口密度；齐次诺伊曼边界条件表示没有人口通量穿过边界 $x = 0, L$； d_S 和 d_I 分别是衡量易感者和感染者运动性的正数常数；函数 β 和 γ 是定义在 $[0, L]$ 上的赫尔德连续正函数，分别表示疾病传播率和疾病康复率。

将方程 (1.1) 相加后积分，并结合齐次诺伊曼边界条件，可得

$$\int_0^L (S(x,t) + I(x,t))\,\mathrm{d}x = \int_0^L (S_0(x) + I_0(x))\,\mathrm{d}x =: N, \quad \forall t \geq 0.$$

因此，(1.1) 中的总人口数始终守恒。

系统 (1.1) 已在近期的研究 [16, 65, 68] 中得到探讨；具体而言，当易感人群或感染人群的移动受到限制、速度较慢时，作者研究了由 (1.1) 建模的疾病空间分布的轮廓。要理解这种轮廓，就需要确定所谓地方病平衡随小扩散率 d_S 或 d_I 变化时的行为。(1.1) 的地方病平衡

是一个正稳态解，满足以下椭圆型系统:

$$\begin{cases} -d_S S_{xx} = -\beta(x)SI + \gamma(x)I, & 0 < x < L, \\ -d_I I_{xx} = \beta(x)SI - \gamma(x)I, & 0 < x < L, \\ S_x = I_x = 0, & x = 0, L, \\ \int_0^L (S(x) + I(x))\,\mathrm{d}x = N. \end{cases} \tag{1.2}$$

根据 [16, 65, 68], 若 $\min_{x\in[0,L]} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} < \frac{N}{L}$，则对任意小的 $d_I > 0$，(1.2) 至少存在一个正解 (S, I)。从流行病学角度看，该解称为地方病平衡（简称 EE）；此外，(S, I) 在 $[0, L]$ 上满足 S, $I \in C^2([0, L])$ 和 $S, I > 0$。

正如 [68], 所指出的，研究感染人群的小迁移率 d_I 下 (1.2) 的地方病平衡空间分布是一项具有挑战性的问题；在 [65], 中，作者沿这一研究方向给出了首个结果。具体而言，他们证明了以下结论。

定理 1.1. *[65,* 定理 B*]* 假设 $\min_{x\in[0,L]} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} < \frac{N}{L}$。那么，当 $d_I \to 0$时，(1.2) 的 ˆ 地方病平衡 (S, I) 满足（除去一个 d_I 序列） $S \to S$在 $[0, L]$ 上一致收敛，其中 ˆ$S \in C([0, L])$, 且 $\min_{[0,L]} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} \leq$ ˆ$S(x) \leq \max_{[0,L]} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$，并且 $I \to \mu$ 弱收敛到某个拉东测度 μ，其支撑集非空，意义下

$$\int_0^L I(x)\zeta(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_{[0,L]} \zeta(x)\mu(\mathrm{d}x), \quad \forall \zeta \in C([0, L]). \tag{1.3}$$

ˆ 显然，定理 1.1 并未对 S 和 μ 给出精确描述，因此易感人群和感染者群体的空间分布仍然模糊不清。从疾病控制的角度来看，了解 μ 的有价值行为变得至关重要。在这篇 ˆ 论文中，我们设法对 S 和 μ 的分布给出了令人满意的结果。

在 (1.1) 中，忽略了人口死亡率和补充率等一些重要因素，因此总人口数为常数。为了考虑人口的死亡率和补充率，文献 [40] 提出了如下反应扩散流行病系统:

$$\begin{cases} S_t - d_S S_{xx} = \Lambda(x) - S - \beta(x)SI + \gamma(x)I, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ I_t - d_I I_{xx} = \beta(x)SI - [\gamma(x) + \eta(x)]\,I, & 0 < x < L,\ t > 0, \\ S_x = I_x = 0, & x = 0, L,\ t > 0, \\ S(x, 0) = S_0(x) \geq 0,\ I(x, 0) = I_0(x) \geq, \not\equiv 0, & 0 < x < L. \end{cases} \tag{1.4}$$

易感人群的补充项由函数 $\Lambda(x) - S$ 表示，因此易感者服从线性增长/死亡（[4, 24]）； $\eta(x)$ 表示感染者的死亡率。这里， Λ、 η 被假设为 $[0, L]$ 上的正 H¨older 连续函数。所有其他参数的含义与 (1.1) 中相同。

容易看出，下面的椭圆型问题

$$-d_S S_{xx} = \Lambda(x) - S, \quad 0 < x < L; \quad S_x(0) = S_x(L) = 0 \tag{1.5}$$

~ ~存在唯一的正解 S。因此，$(S, 0)$ 是 (1.4) 的唯一无病平衡。(1.4) 的地方病平衡满足以下常微分方程组：

$$\begin{cases} -d_S S_{xx} = \Lambda(x) - S - \beta(x)SI + \gamma(x)I, & 0 < x < L, \\ -d_I I_{xx} = \beta(x)SI - [\gamma(x) + \eta(x)]\, I, & 0 < x < L, \\ S_x = I_x = 0, & x = 0, L. \end{cases} \tag{1.6}$$

作为 [40], 的主要结果之一，建立了以下关于地方病平衡分布随小 d_I 变化的结论。(1.6)

~定理 1.2. *[40,* 定理 3.*2]* 假设集合 $\{x \in [0, L] : \beta(x)S(x) > \gamma(x) + \eta(x)\}$ 非空。当 $d_I \to 0$ 时，(1.6) 的任意地方病平衡 (S, I) 均满足（对 d_I的某个子列而言） $S \to S$在 $[0, L]$上一致成立，其中 $S \in C([0, L])$，且 $S > 0$在 $[0, L]$上，并且$\int_0^L I\mathrm{d}x \to \hat{} I$，其中某个正常数为 $\hat{} I$。

与定理 1.1 类似，定理 1.2 并未刻画易感人群和感染人群的精确分布。本文还将清晰展示当迁移率 d_I 趋于零时，(1.6) 的人口分布。结果表明，由 (1.2) 和 (1.6) 所描述的疾病分布空间分布截然不同。

本文其余部分安排如下。第2节陈述主要理论结果，第3节给出这些结果的证明。第4节进行数值模拟，并从疾病控制的角度讨论这些结果的意义。附录中回顾了本文将用到的一些已知事实。

2. Statement of main results

本节陈述本文关于模型 (1.2) 和 (1.6) 的主要发现。为此，我们先说明本文中频繁使用的一些术语。对于模型 (1.2)，我们将 $\gamma(x)\ \beta(x)$ 称为风险函数，并将集合 $\big\{x \in [0, L] : \gamma(x)\ \beta(x) = \min_{x\in[0,L]} \overline{\gamma(x)\ \beta(x)}\big\}$ 中的每个元素称为最高风险点（或位置）。类似地，对于模型 (1.6)，我们将 $\gamma(x)+\eta(x)\ \beta(x)$ 称为风险函数，并将集合 $\big\{x \in [0, L] : \gamma(x)+\eta(x)\ \beta(x) = \min\overline{x\in[0,L]} \frac{\gamma(x)+\eta(x)}{\beta\ x}\ (\ )\big\}$ 中的每个元素称为最高风险点（或位置）。

2.1. 模型（1.2）的结果。为方便起见，令

$$k(x) = \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}, \qquad k_{min} = \min_{x\in[0,L]} k(x),$$

and

$$\Theta_k = \big\{x \in [0, L] :\ k(x) = k_{min}\big\}.$$

注意到，当风险函数 $k(x) = k$ 为正常数时，由 [65]可知， $S(x) \equiv k$ 为常数，进而根据 I的方程，我们立即看到，只要 $k < \frac{N}{L}$，$I = \frac{N}{L} - k$ 也为正常数。在下文中，我们不考虑这种平凡情形，并假设 $k(x)$ 在 $[0, L]$ 上不是常数。

现在，我们陈述关于 (1.2) 的任意地方病平衡 (S, I) 在$d_I \to 0$ 时的渐近行为的主要结果如下。

定理 2.1. 假设 $k(x)$ 非常数，且 $k_{min} < \frac{N}{L}$。那么，当 $d_I \to 0$ 时，(1.2) 的地方病平衡 (S, I) 满足

$$S(x) \to k_{min} \quad uniformly\ for\ x \in [0, L]. \tag{2.7}$$

以下关于 I 渐近行为的断言成立。

(i) 若 $\Theta_k = \{x_0\}$，则有

$$I(x) \to (N - Lk_{min})\delta(x_0) \quad weakly\ in\ the\ sense\ of\ (1.3),$$

其中，$\delta(x_0)$ 是以 x_0 为中心的狄拉克测度。此外，$I(x) \to 0$ 在 $[0, L] \setminus \{x_0\}$ 中局部一致。

(ii) 若对某个 $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < L$ 有 $\Theta_k = [\varrho_1, \varrho_2]$，则有

$$I(x) \to 0 \quad uniformly\ on\ [0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, L],$$

and

$$I(x) \to \hat{I}(x) \quad uniformly\ for\ x \in [\varrho_1, \varrho_2],$$

其中 $\hat{I} \in C^2([\varrho_1, \varrho_2])$、$\hat{I} > 0$ 属于 (ϱ_1, ϱ_2)，且 $\hat{I}$ 是下列方程的唯一正解

$$\begin{cases} -\hat{I}_{xx} = \frac{\beta(x)}{d_S}(\hat{a} - \hat{I})\hat{I}, & \varrho_1 < x < \varrho_2, \\ \hat{I} = 0, & x = \varrho_1,\ \varrho_2, \\ \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \hat{I}\,\mathrm{d}x = N - Lk_{min}, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中，正常数 $\hat{a}$ 由 (2.8) 中的积分约束唯一确定。

关于定理 2.1，我们想依次作一些评论。

注 2.1. 除了定理 2.1 中讨论的两种情形外，我们还可以处理一些更一般的情形。具体而言，我们想作如下评论。

(i) 若集合 Θ_k 仅包含有限个孤立点，例如对于某个 $j \geq 2$，有 $\{x_i\}_{i=1}^j$，则可以稍微修改定理 2.1(i) 的证明，从而证明 $S \to k_{min}$在 $[0, L]$上一致成立，且 $I \to 0$ 在 $[0, L] \setminus (\{x_i\}_{i=1}^j)$中局部一致成立，并且

$$I(x) \to \sum_{i=1}^{j} c_i \delta(x_i) \quad weakly\ in\ the\ sense\ of\ (1.3),$$

其中，$\delta(x_i)$ 是以 x_i 为中心的狄拉克测度，非负常数 c_i 满足 $\sum_{i=1}^j c_i = N - Lk_{min}$。然而，我们无法确定 c_i 的精确值；换言之，当 $d_I \to 0$ 时，我们不清楚 I 是否全部集中于 x_i $(1 \leq i \leq j)$，还是仅有其中一部分集中于此。数值结果表明，前一种情况成立；参见第4节中的图1。

(ii) 如果集合 Θ_k 至少包含 $[0, L]$ 的一个真区间，通过调整定理2.1(ii)的论证，我们可以证明 $S \to k_{min}$ 在 $[0, L]$ 上一致成立，且 $I \to I$ 在 $[0, L]$ 上一致成立，其中

$$\hat{I} = 0 \quad on\ [0, L] \setminus \Theta_k, \qquad \int_{\Theta_k} \hat{I}\,\mathrm{d}x = N - Lk_{min}.$$

特别地，如果对于某个 $j_* \geq 1$，$\Theta_k = \left(\bigcup_{i=1}^{j_*}[\underline{\varrho}_i, \overline{\varrho}_i]\right) \bigcup \left(\bigcup\{x_i\}_{i=0}^{j^*}\right)$，$j^* \geq 0$，那么我们可以证明

$$\hat{I} = 0 \quad on\ [0, L] \setminus (\bigcup_{i=1}^{j_*}(\underline{\varrho}_i, \overline{\varrho}_i)),$$

ˆ ˆ 且在 $(\underline{\varrho}_i,\overline{\varrho}_i)$ $(1 \leq i \leq j_*)$ 中，或者 $I = 0$，或者 $I > 0$。不失一般性，ˆ 假设 ˆ$I(x) > 0$，对于 $x \in \bigcup_{i=1}^{j_*}(\underline{\varrho}_i,\overline{\varrho}_i)$，其中某个 $1 \leq \hat{j}_* \leq j_*$，那么在每个 ˆ 这样的 $(\underline{\varrho}_i,\overline{\varrho}_i)$ 中，我们可以得出 I 满足

$$\begin{cases} -\hat{I}_{xx} = \frac{\beta(x)}{d_S}(\hat{a} - \hat{I})\hat{I}, & \underline{\varrho}_i < x < \overline{\varrho}_i, \\ \hat{I} = 0, & x = \underline{\varrho}_i, \overline{\varrho}_i, \end{cases}$$

其中正常数 ˆa 由下式唯一确定

$$\sum_{i=1}^{\hat{j}_*} \int_{\underline{\varrho}_i}^{\overline{\varrho}_i} \hat{I}\, \mathrm{d}x = N - Lk_{min}.$$

ˆ 然而，要证明 I 在所有区间 $(\underline{\varrho}_i,\overline{\varrho}_i)$ $(1 \leq i \leq j_*)$ 上均为正，还是仅在其中某些区间上为正，似乎颇具挑战性。我们的数值结果表明，前一种情况成立；参见第4节中的图2。

(iii) 上述 (ii) 中的结论表明，如果最高风险位置包含至少一个区间，那么一旦感染者缓慢移动，疾病就不可能停留在任何可能存在的孤立最高风险点上。

注 2.2. 在定理 2.1 的情形 (ii) 中，如果 $\varrho_1 = 0$ (或 $\varrho_2 = L$)，那么若将 (2.8) 中 I 在 $\varrho_1 = 0$ (或 ˆ ˆ$\varrho_2 = L$) 处的狄利克雷边界条件替换为诺伊曼边界条件 $I_x(0) = 0$ (或 $I_x(L) = 0$)，定理 ˆ 2.1 的结论仍然成立。类似的说明也适用于上文注 2.1(ii) 中讨论的情形。

注 2.3. 本文完成后，我们注意到文献 *[10]* 的工作，其中作者在更一般的设定下，推导出了 (2.7)，并证明了定理 2.1 的情形 (i) 中 I 分量的收敛性，且结论适用于任意空间维数；参见该文的定理 2.5(i)。然而，他们的结果并未证明定理 2.1 的情形 (ii) 中 I 分量在 Θ_k 内的收敛性，也未证明注 2.1 所述更一般情形下的收敛性；另一方面，我们对 (2.7) 以及 I 分量在 Θ_k 外收敛性的证明，与文献 *[10]* 中的证明颇为不同。

2.2. 模型 (1.6) 的结果。现在我们转向系统 (1.6)。为简单起见，我们假设 (1.6) 中的 Λ 是正常数，并记

$$h(x) = \frac{\gamma(x) + \eta(x)}{\beta(x)}, \qquad h_{min} = \min_{x\in[0,L]} h(x),$$

and

$$\Theta_h = \big\{x \in [0, L] :\ h(x) = h_{min}\big\}.$$

˜显然，$S(x) = \Lambda$。此外，在定理 1.2 中，我们通过施加以下条件，进一步完善了系统 (1.6) 的地方病平衡存在条件：

$$\Lambda > h(x) \quad \text{for all } \ x \in [0, L]. \tag{2.9}$$

现在，我们可以陈述系统 (1.6) 的任意地方病平衡 (S, I) 在 $d_I \to 0$ 时的渐近行为的主要结果。第一个结果如下。

定理 2.2。假设（2.9）成立。当 $d_I \to 0$ 时，方程（1.6）的任意地方病平衡 (S, I) 均满足：$\hat{}$（取 d_I 的一个子列），$S \to S$ 在 $[0, L]$ 上一致成立，并且 $I \to \mu$ 按照（1.3）的意义弱收敛，其中 μ 是某个拉东测度，且 $\hat{}S$ 在 $W^{1,2}(0, L)$ 中弱解自由边界问题：

$$-d_S \hat{S}_{xx} = \Lambda - \hat{S} - \eta(x)\mu(\{x\})\big|_{\{x\in[0,L]:\ \hat{S}(x)=h(x)\}}, \quad x \in (0, L). \tag{2.10}$$

这里，$\mu(\{x\})\big|_{\{x\in[0,L]:\ \hat{}S(x)=h(x)\}}$ 是 μ 在集合 $\{x \in [0, L]$ 上的限制：$\hat{}S(x) = h(x)\}$；否则，$\mu(\{x\}) = 0$。此外，我们还有关于 μ 和 S 的以下性质。

(i) 拉东测度 μ 满足

$$\mu(\{x \in [0, L] :\ \hat{S}(x) \neq h(x)\}) = 0, \quad \mu(\{x \in [0, L] :\ \hat{S}(x) = h(x)\}) > 0. \tag{2.11}$$

$\hat{}$ (ii) 函数 $S \in C([0, L])$ 满足

$$h_{min} \le \hat{S}(x) \le h(x), \quad \forall x \in [0, L], \tag{2.12}$$

$$\Theta_h \subset \left\{x \in [0, L] :\ \hat{S}(x) = h(x)\right\}; \tag{2.13}$$

若 x_1、$x_2 \in \Theta_h$ 满足 $x_1 < x_2$ 且 $(x_1, x_2) \cap \Theta_h = \emptyset$，则

$$h_{min} < \hat{S}(x), \quad \forall x \in (x_1, x_2). \tag{2.14}$$

$\hat{}$ 定理 2.2 断言，S 在所有最高风险点处与 h 相切。下文中，我们的目标是考察某个特定风险函数 h的 S 性质，进而更精确地描述 μ的轮廓。事实上，对于 (1.6)，我们可以得到以下结果。

定理 2.3. 设$\hat{}S$ 和 μ 如定理 2.2 中所给定。假设 $h \in C^2([0, L])$ 且 (2.9) 成立。则以下断言成立。

(i) 若 $-d_S h_{xx} \le \Lambda - h \in (0, L)$，$h_x(0) \ge 0$ 且 $h_x(L) \le 0$，则有

$$\hat{S}(x) = h(x), \quad \forall x \in [0, L], \tag{2.15}$$

$$\mu(\{x\}) = \frac{\Lambda - h(x) + d_S h_{xx}(x)}{\eta(x)}, \quad a.e.\ for\ x \in (0, L). \tag{2.16}$$

(ii) 若 h_x 在 $[0, L]$ 和 $\Theta_h = \{\tau_0\}$ 上单调不减（对某个 $0 \le \tau_0 \le L$），则以下结论成立。

(a) 当 $0 < \tau_0 < L$时，我们有

$$\hat{S}(x) = h(x), \quad \forall x \in [\tau_1, \tau_2], \tag{2.17}$$

$\hat{}$ 且在 $[0, \tau_1)$ 中，$\cup(\tau_2, L]$, $S < h$ 满足

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, \quad x \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, L), \\ \hat{S}_x(0) = 0, \quad \hat{S}_x(L) = 0, \\ \hat{S}(\tau_1) = h(\tau_1), \quad \hat{S}(\tau_2) = h(\tau_2), \end{cases} \tag{2.18}$$

且 μ 满足

$$\mu(\{x\}) = \frac{\Lambda - h(x) + d_S h_{xx}(x)}{\eta(x)}, \quad a.e.\ for\ x \in (\tau_1, \tau_2), \tag{2.19}$$

$$\mu(\{x\}) = 0, \quad \forall x \in [0, \tau_1) \cup (\tau_2, L], \tag{2.20}$$

其中，数值 τ_1、τ_2 和 $0 < \tau_1 < \tau_0 < \tau_2 < L$ 由以下条件唯一确定:

$$\frac{e^{2d_S^{-1/2}\tau_1} - 1}{e^{2d_S^{-1/2}\tau_1} + 1} = -\frac{d_S^{1/2} h_x(\tau_1)}{\Lambda - h(\tau_1)}, \qquad \frac{e^{2d_S^{-1/2}(\tau_2 - L)} - 1}{e^{2d_S^{-1/2}(\tau_2 - L)} + 1} = -\frac{d_S^{1/2} h_x(\tau_2)}{\Lambda - h(\tau_2)}. \tag{2.21}$$

(b) 当 $\tau_0 = L$ 时，我们有以下断言。

(b-1) 若 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1} > -\frac{d_S^{1/2} h_x(L)}{\Lambda - h(L)}$，则 (2.17) 和 (2.19) 成立，其中 $[\tau_1, \tau_2]$ re-$\hat{}$ 替换为 $[\tau_1, L]$, $\mu([0, \tau_1)) = 0$，且在 $[0, \tau_1]$ 上，S 满足

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, & x \in (0, \tau_1), \\ \hat{S}_x(0) = 0, \quad \hat{S}(\tau_1) = h(\tau_1), \end{cases} \tag{2.22}$$

其中 $0 < \tau_1 < L$ 由 (2.21) 中的第一个方程唯一确定。(b-2) 若 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1} \le -\frac{d_S^{1/2} h_x(L)}{\Lambda - h(L)}$，则 $\hat{S}$ 是以下方程的唯一正解

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, & x \in (0, L), \\ \hat{S}_x(0) = 0, \quad \hat{S}(L) = h(L), \end{cases} \tag{2.23}$$

且 μ 满足

$$\mu([0, L)) = 0, \quad \mu(\{L\}) = \frac{\Lambda L - \int_0^L \hat{S}(x) \mathrm{d}x}{\eta(L)}. \tag{2.24}$$

(c) 当 $\tau_0 = 0$ 时，我们有以下结论。

(c-1) 若 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1} > \frac{d_S^{1/2} h_x(0)}{\Lambda - h(0)}$，则将 $[\tau_1, \tau_2]$ 替换为 $[0, \tau_2]$, $\mu((\tau_2, L]) = 0$ 后，(2.17) 和 (2.19) 成立，并且在 $[\tau_2, L]$, S 满足

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, & x \in (\tau_2, L), \\ \hat{S}_x(L) = 0, \quad \hat{S}(\tau_2) = h(\tau_2), \end{cases} \tag{2.25}$$

其中 $0 \le \tau_2 < L$ 由 (2.21) 中的第二个方程唯一确定。

(c-2) 若 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1} \le \frac{d_S^{1/2} h_x(0)}{\Lambda - h(0)}$，则 $\hat{S}$ 是以下方程的唯一正解

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, & x \in (0, L), \\ \hat{S}_x(L) = 0, \quad \hat{S}(0) = h(0), \end{cases} \tag{2.26}$$

且 μ 满足

$$\mu((0, L]) = 0, \quad \mu(\{0\}) = \frac{\Lambda L - \int_0^L \hat{S}(x) \mathrm{d}x}{\eta(0)}. \tag{2.27}$$

(iii) 如果 h_x 在 $[0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, L]$ 和 $\Theta_h = [\varrho_1, \varrho_2]$ 上对某个 $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < L$ 是非递减的，那么上述 (ii)-(a) 中的所有断言均成立，其中满足 $0 < \tau_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < \tau_2 < L$ 的数 τ_1、τ_2 由 (2.21) 唯一确定。

对于模型 (1.2)，我们的结果表明，感染人群只会集中或聚集在风险最高的位置。相比之下，对于模型 (1.6)，我们的结果表明，根据风险函数 h 的不同，疾病将占据内部最高风险位置的一个邻域，甚至占据整个栖息地 $[0, L]$；或者只集中在边界上的最高风险位置。关于我们的理论结果所蕴含意义的更详细讨论，以及数值模拟，将在第4节中给出。

我们想对定理 2.3 作如下几点说明。

注 2.4. 值得一提的是，定理 2.3 中除拉东测度 μ 的表达式 (2.19) 外，所有结论在风险函数$h \in C^1([0, L])$的条件下仍然成立。即将讨论的章节中的引理 3.1–3.4 也适用这一说明。

注 2.5. (i) 显然，如果 $h < \Lambda$ 是常数，或者更一般地，h 是下列问题的唯一解，则定理 2.3(i) 成立：

$$\begin{cases} -d_S h_{xx} = \Lambda - h, & x \in (0, L), \\ h(0) = \sigma_1, \quad h(L) = \sigma_2, \end{cases}$$

其中 $0 < \sigma_1$、$\sigma_2 < \Lambda$。

ˆ 当 $h_x(0) > 0$ 时，导数从 $S_x(0) = 0$ 变为 $S_x(0) = h_x(0) > 0$，这表明 I 在 $x = 0$ 处可能会出现集中现象（即 $I(0) \to \infty$），当 $d_I \to 0$ 时亦然。对于 $h_x(L) < 0$ 的情形，同样的说明也适用。ˆ (ii) 与定理 2.3(i) 不同，容易看出，只要对某个 $x^* \in (0, L)$ 有 $-d_S h_{xx}(x^*) > \Lambda - h(x^*)$，那么 $S \not\equiv h$ 在 $[0, L]$ 上成立。(iii) 显然，若 $h_x(L) = 0$，则定理2.3(ii)-(b1) 的断言成立；若 $h_x(0) = 0$，则定理2.3(ii)-(c1) 的断言成立。(iv) 在一般情形下，若 Θ_h 包含一个内点孤立点，且 h_x 在该点的某个邻域内非递减，则可得出 (2.15) 和 (2.16) 在该点的某个邻域内成立；若 Θ_h 包含一个区间，也有类似结论。见下文引理 3.1 和引理 3.3。

3. Proof of main results: Theorems 2.1, 2.2 and 2.3

本节致力于证明定理 2.1、2.2 和 2.3。

3.1. 定理 2.1 的证明。本小节给出定理 2.1 的证明。

定理 2.1 的证明。首先回顾，对于 (1.2) 的任意地方病平衡 (S, I)，由 [65]（参见其中的 (3.3)）可知，下式成立：

$$k_{min} \le S(x) \le \max_{[0,L]} k(x), \quad \forall x \in [0, L]. \tag{3.1}$$

由 I 的正性及主特征值的唯一性，从 I 的方程显然可得

$$\lambda_1(d_I, \gamma - \beta S) = 0, \quad \forall d_I > 0,$$

其中，$\lambda_1(d_I, \gamma - \beta S)$ 的定义见附录。利用定理 1.1，当 $d_I \to 0$（经过某个子列）时，我们看到 $S \to S$ 在 $[0, L]$ 上一致收敛于某个正函数 S。因此，根据附录中的引理 5.1 以及主特征值关于权函数 $\gamma - \beta S$ 的连续依赖性，可得

$$0 = \lim_{d_I \to 0} \lambda_1(d_I, \gamma - \beta S) = \min_{x \in [0,L]} [\gamma(x) - \beta(x)\hat{S}(x)].$$

这显然意味着

$$\hat{S}(x) \le k(x), \quad \forall x \in [0, L] \quad \text{and} \quad \hat{S}(y_0) = k(y_0) \tag{3.2}$$

对于某个 $y_0 \in [0, L]$。

根据定理 1.1，我们回顾一下，$I \to \mu$ 弱收敛于某个拉东测度 μ，满足$\mu([0, L]) > 0$，其意义如下

$$\int_0^L I(x)\zeta(x)\mathrm{d}x \to \int_0^L \zeta(x)\mu(\mathrm{d}x), \quad \forall \zeta \in C([0, L]), \quad \text{as } d_I \to 0. \tag{3.3}$$

现在，我们在 $[0, L]$ 上对 (1.2) 中的第一个方程分部积分，并利用边界条件，推得

$$\int_0^L [\beta(x)S(x) - \gamma(x)]I(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall d_I > 0. \tag{3.4}$$

$\hat{}$ 在 (3.4) 中令 $d_I \to 0$，结合 (3.3) 以及 $S \to S$ 在 $[0, L]$ 上当 $d_I \to 0$ 时一致成立这一事实，可推得

$$\int_{[0,L]} [\beta(x)\hat{S}(x) - \gamma(x)]\mu(\mathrm{d}x) = 0, \tag{3.5}$$

结合 (3.2)，得到

$$\int_{\{x\in[0,L]:\ \hat{S}(x)<k(x)\}} \beta(x)[\hat{S}(x) - k(x)]\mu(\mathrm{d}x) = \int_{[0,L]} \beta(x)[\hat{S}(x) - k(x)]\mu(\mathrm{d}x) = 0.$$

因此，我们得到

$$\mu(\{x \in [0, L] :\ \hat{S}(x) < k(x)\}) = 0 \tag{3.6}$$

and

$$\mu(\{x \in [0, L] :\ \hat{S}(x) = k(x)\}) = \mu([0, L]) > 0. \tag{3.7}$$

根据 (3.4) 和 $\int_0^L (S(x) + I(x))\,\mathrm{d}x = N$，对于任意 $d_I > 0$，有

$$\int_0^L S(x)I(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{\min_{[0,L]} \beta(x)} \int_0^L \gamma(x)I(x)\mathrm{d}x \le \frac{\max_{[0,L]} \gamma(x)}{\min_{[0,L]} \beta(x)} N, \quad \forall d_I > 0. \tag{3.8}$$

然后，将椭圆方程的 L^1-理论（见附录中的引理 5.2）应用于S-方程，可知对于任意 $1 \le r < \infty$,

$$\|S\|_{W^{1,r}(0,L)} \le C, \quad \forall d_I > 0. \tag{3.9}$$

此后，C 或 $C(\epsilon)$ 是与 $d_I > 0$ 无关的正常数，但在不同位置可能取值不同。在 (3.9) 中取 $r = 2$，注意到 $W^{1,2}(0, L)$ 是一个希尔伯特空间，且$W^{1,2}(0, L)$ 紧嵌入于 $C([0, L])$。因此，我们可以假设，当 $d_I \to 0$ 时，$S \to \hat{S}$ 在 $W^{1,2}(0, L)$ 中弱收敛，且 $S \to \hat{S}$ 在 $[0, L]$ 上一致收敛。现在，对于任意 $\zeta \in W^{1,2}(0, L)$（因而 $\zeta \in C([0, L])$），由 S-方程可得

$$d_S \int_0^L S_x(x)\zeta_x(x)\mathrm{d}x = \int_0^L [-\beta(x)S(x) + \gamma(x)]I(x)\zeta(x)\mathrm{d}x, \quad \forall d_I > 0. \tag{3.10}$$

根据 (3.3)、(3.6) 和 (3.7)，我们可将 $d_I \to 0$ 代入 (3.10)，得到

$$d_S \int_0^L \hat{S}_x(x)\zeta_x(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \zeta \in W^{1,2}(0, L).$$

ˆ这意味着 S 是一个弱解（进而也是经典解）

$$-u_{xx}(x)=0,\quad x\in(0,L);\qquad u_x(0)=u_x(L).$$

ˆˆ因此， S 必为正常数。由 (3.2) 可得 $S=k_{min}$，从而 $S(x)\to k_{min}$ 在 $[0,L]$ 上一致成立。

接下来，我们将确定 I 的极限。首先考虑情形 (i)：$\Theta_k=\{x_0\}$ 是单点集。根据上述证明，很容易看出

$$I(x)\to(N-Lk_{min})\delta(x_0)\quad\text{weakly in the sense of (1.3)},$$

其中， $\delta(x_0)$ 是以 x_0 为中心的狄拉克测度。

剩下需要证明 $I(x)\to 0$ 在 $[0,L]\setminus\{x_0\}$ 中局部一致成立。我们仅考虑 $x_0\in(0,L)$ 的情形，$x_0=0$ 或 L 的情形可类似处理。由于 $S(x)\to k_{min}$ 在 $[0,L]$ 上一致成立，根据 k_{min} 的定义，由 I 方程可知，给定足够小的 $\epsilon>0$，只要 d_I 足够小， $I_{xx}>0$ 就在 $[0,x_0-\epsilon]\cup[x_0+\epsilon,L]$ 上成立。由于 $I_x(0)=I_x(L)=0$，I 随 $[0,x_0-\epsilon]$ 增大而增大，同时随 $[x_0+\epsilon,L]$ 增大而减小。因此，由于 ϵ 的任意性，由 (3.6) 可直接推出 $I(x)\to 0$ 在 $[0,x_0)\cup(x_0,L]$ 中局部一致成立，证毕。

接下来考虑情形 (ii)： $\Theta_k=[\varrho_1,\varrho_2]\subset(0,L)$。首先，通过与情形 (i) 类似的论证，我们可以断言，$I(x)$ 在 $[0,L]\setminus[\varrho_1,\varrho_2]$ 中局部一致地 $\to 0$。下文将分析 I 在区间 $[\varrho_1,\varrho_2]$ 内的极限行为。为此，我们引入如下函数

$$w(x)=\frac{S(x)-k_{min}}{d_I},\quad x\in[0,L].$$

由 (3.1)， $w\ge 0$ 在 $[0,L]$ 上成立。此外，根据我们的假设，可以看出 w 满足

$$-d_S w_{xx}(x)=-\beta(x)Iw,\quad x\in[\varrho_1,\varrho_2],\tag{3.11}$$

并且 I 满足

$$-I_{xx}(x)=\beta(x)wI,\quad x\in[\varrho_1,\varrho_2].\tag{3.12}$$

由于 $\int_0^L I(x)\mathrm{d}x\le N$，对任意小的 $\epsilon>0$，可将附录中的引理 5.3(b) 应用于 (3.11)，从而断言

$$\max_{x\in[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon]}w(x)\le C(\epsilon)\min_{x\in[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon]}w(x).\tag{3.13}$$

现在我们断言，对所有充分小的 $d_I>0$， w 在 $[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon]$ 上一致有界。否则，存在一个由 d_I 组成的序列，为简便起见仍以其自身标记，使得相应的解序列 $\{(w,I)\}$ 满足

$$\max_{x\in[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon]}w(x)\to\infty,\quad\text{as } d_I\to 0.\tag{3.14}$$

由 (3.13)，当 $d_I\to 0$ 时， $w\to\infty$ 在 $[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon]$ 上一致成立。为了导出矛盾，记 $\lambda_1^{\mathcal{D}}$ 为下列带狄利克雷边界条件的特征值问题的主特征值：

$$\begin{cases}-\varphi_{xx}=\lambda\varphi,\quad x\in(\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon)\\ \varphi(\varrho_1+\epsilon)=\varphi(\varrho_2-\epsilon)=0.\end{cases}\tag{3.15}$$

显然， $\lambda_1^{\mathcal{D}}>0$。对于所有充分小的 $d_I>0$，由 (3.14) 可假设

$$\beta(x)w(x)>2\lambda_1^{\mathcal{D}}\quad\text{on }[\varrho_1+\epsilon,\varrho_2-\epsilon].$$

因此，由 (3.12) 可知， $I \in C^2([0, L])$ 是下列算子的正严格上解，意义见 [57, 定义 2.1]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := -u_{xx} - 2\lambda_1^{\mathcal{D}} u, \quad x \in (\varrho_1 + \epsilon, \varrho_2 - \epsilon), \quad \forall u \in C^2([0, L]), \\ u(\varrho_1 + \epsilon) = u(\varrho_2 - \epsilon) = 0. \end{cases}$$

根据 [57, 命题 2.1], , 特征值问题的主特征值记为 $\tilde{\lambda}_1^{\mathcal{D}}$，它满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}\varphi_{xx} = \lambda\varphi, \quad x \in (\varrho_1 + \epsilon, \varrho_2 - \epsilon), \\ \varphi(\varrho_1 + \epsilon) = \varphi(\varrho_2 - \epsilon) = 0 \end{cases}$$

满足 $\tilde{\lambda}_1^{\mathcal{D}} > 0.$

另一方面，问题 (3.15) 的主特征值的唯一性意味着 $\tilde{\lambda}_1^{\mathcal{D}} + 2\lambda_1^{\mathcal{D}} = \lambda_1^{\mathcal{D}}$，因此 $\tilde{\lambda}_1^{\mathcal{D}} = -\lambda_1^{\mathcal{D}} < 0$，从而导致矛盾。由此证实了上述断言。由于 ϵ 的任意性，我们已证明，对于所有足够小的 $d_I > 0$， w 在 (ϱ_1, ϱ_2) 上局部一致有界。

此外，根据附录中的引理 5.2，从 (3.12) 容易看出，对于所有足够小的 $d_I > 0$， I 在 (ϱ_1, ϱ_2) 上局部一致有界。分别对 (3.11) 和 (3.12) 应用椭圆方程的标准正则性理论，可推出w和 I在 (ϱ_1, ϱ_2) 上局部有界（与小的 d_I 无关），且其通常的 $C^{2+\alpha}$-范数有界，其中 $\alpha \in (0, 1)$。然后，通过对角线论证，我们可以假设

$$(w, I) \to (\hat{w}, \hat{I}) \quad \text{in } C^2_{loc}(\varrho_1, \varrho_2), \quad \text{as } d_I \to 0.$$

ˆ 显然，由 (3.12) 可知，(ˆw, I) 满足

$$-\hat{I}_{xx}(x) = \beta(x)\hat{w}\hat{I}, \quad x \in (\varrho_1, \varrho_2). \tag{3.16}$$

ˆ 此外，将 (3.11) 与 (3.12) 相加，容易看出 (ˆw, I) 是下列方程的解

$$-(d_S\hat{w} + \hat{I})_{xx} = 0 \quad \text{in } (\varrho_1, \varrho_2).$$

这表明

$$d_S\hat{w}(x) + \hat{I}(x) = \hat{a} + \hat{b}x, \quad x \in (\varrho_1, \varrho_2) \tag{3.17}$$

ˆ 对某些常数 ˆa, b 成立。

ˆ 接下来，我们旨在确定 ˆa 和 b。通过简单观察可知，(w, I) 满足

$$\begin{cases} -(d_S w + I)_{xx} = 0, \quad x \in (0, L), \\ (d_S w + I)_x = 0, \qquad x = 0, L. \end{cases}$$

因此，对于任意 $d_I > 0$， $d_S w + I = c_{d_I}$ 在 $[0, L]$ 上为正常数。回想一下， w, I 在 (ϱ_1, ϱ_2) 中局部一致有界。因此，当 $d_I \to 0$ 时，我们可以假设

$$d_S w + I = c_{d_I} \to \hat{c} \in [0, \infty) \quad \text{uniformly on } [0, L].$$

ˆ由 (3.17) 可得 ˆ$c = \hat{a}$ 和 $b = 0$。此外，我们的分析表明， w 和 I 在 $[0, L]$ 上一致有界。具体而言，有

$$w(x), \quad I(x) \le C, \quad \forall x \in [0, L]. \tag{3.18}$$

现在，我们利用 I 的方程，结合 w、 $I \geq 0$ 的事实以及 k 的定义，可得

$$\begin{aligned} -I_{xx} &= \frac{\beta(x)\left[S-k(x)\right]I}{d_I} \\ &= \beta(x)\left[\frac{S-k_{min}}{d_I}+\frac{k_{min}-k(x)}{d_I}\right]I \\ &\leq \beta(x)wI, \qquad x\in(0,L). \end{aligned} \tag{3.19}$$

将(3.19)两边乘以 I ，并在(0, L)上积分，得到

$$\int_0^L (I_x)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^L \beta w I^2 \mathrm{d}x \leq C$$

由(3.18)可知。这与(3.18)意味着$\|I\|_{W^{1,\ 2}(0,\ L)} \leq C$。由于 $W^{1,\ 2}$(0, L)紧嵌入ˆ C([0, L]), 因此我们可以假设 $I \to I$ 在 $[0, L]$上一致成立。根据之前已证明的结果， $I = 0$ 在 $[0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, L]$上成立，并且由(3.16)和(3.17)，在 $[\varrho_1, \varrho_2]$上， I 满足

$$\begin{cases} -\hat{I}_{xx} = \frac{\beta(x)}{d_S}(\hat{a}-\hat{I})\hat{I}, & \varrho_1 < x < \varrho_2, \\ \hat{I} = 0, & x = \varrho_1,\ \varrho_2. \end{cases} \tag{3.20}$$

由于$\int_0^L (S(x) + I(x))\, \mathrm{d}x = N$且当 $d_I \to 0$时 $S \to k_{min}$在 $[0, L]$ 上一致成立，容易看出

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \hat{I}\, \mathrm{d}x = N - Lk_{min} > 0. \tag{3.21}$$

由哈纳克不等式（见引理 5.3(b)）和 (3.21)，根据 (3.20) 可得 ˆ ˆ$I > 0$ in (ϱ_1, ϱ_2)。由 (3.17) 以及 $b = 0$ 这一事实，显然有 ˆ$a > 0$。

众所周知，给定 ˆ$a > 0$，问题 (3.20) 的正解（若存在）必定唯一，记为 $I_{\hat{a}}$；此外，若 $0 <$ ˆ$a_1 <$ ˆa_2，则对所有$x \in (\varrho_1, \varrho_2)$，$I_{\hat{a}_1}(x) < I_{\hat{a}_2}(x)$。利用这些事实，可以验证正常数 ˆ$a$ 可由 (3.21) 以隐式方式唯一确定。因此，情形 (ii) 中的所有断言均已得到验证。证明至此完成。□

3.2. 证明　　定理 2.2 的证明。现在我们可以给出定理 2 的证明。　　2.

定理 2.2 的证明。首先，可以参照定理 2.1 的分析，并结合定理 1.2 及其证明（见 [40, 定理 3.2]），证明当 ˆ$d_I \to 0$ 时，(1.6) 的任意地方病平衡 (S, I) 都满足（除去 d_I 的一个子列）： $S \to S$ 在$_{W^{1,2}}$(0, L) 中弱收敛，且在 $[0, L]$ 上一致收敛；并且 $I \to \mu$ 按 (1.3) 的意义弱收敛至某个拉东测度 μ 及正函数 ˆ$S \in W^{1,2}$(0, L)，并且

$$0 < \hat{S}(x) \leq h(x), \quad \forall x \in [0, L], \tag{3.22}$$

且 (2.11) 成立。

对于任意 $\zeta \in W^{1,2}$(0, L)（因此 $\zeta \in C$([0, L])），我们利用 S-方程得到

$$\begin{aligned} d_S \int_0^L S_x \zeta_x \mathrm{d}x &= \int_0^L [\Lambda - S - \beta(x)SI + \gamma(x)I]\zeta \mathrm{d}x \\ &= \int_0^L [\Lambda - S - \eta(x)I]\zeta \mathrm{d}x - \int_0^L [\beta(x)S - (\gamma(x)+\eta(x))]I\zeta \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.23}$$

对于所有 $d_I > 0$。根据 (3.22) 和 (2.11)，令 $d_I \to 0$，可推得

$$\int_0^L [\beta(x)S - (\gamma(x)+\eta(x))I\zeta \mathrm{d}x \to \int_{[0,L]} \beta(x)[\hat{S} - h(x)]\zeta\mu(\mathrm{d}x) = 0.$$

因此，令 $d_I \to 0$，由 (3.23) 可得

$$d_S \int_0^L \hat{S}_x\zeta_x \mathrm{d}x = \int_0^L (\Lambda - \hat{S})\zeta \mathrm{d}x - \int_0^L \eta(x)\zeta\mu(\mathrm{d}x), \quad \forall \zeta \in W^{1,2}(0,L). \tag{3.24}$$

结合 (2.11)，这意味着 $\hat{S} \in W^{1,2}(0,L)$ 是 (2.10) 的弱解。

接下来，对于一般的正 H¨older 连续函数 h，我们将证明以下三个断言：

断言 1. 如果 h 的最小值在 $x = 0$ 处（分别在 $x = L$ 处）取得，那么 S 必须在该点与 h 相切；也就是说，$S(0) = h(0) = h_{min}$（分别为 $S(L) = h(L) = h_{min}$）。

我们只讨论 h_{min} 在 $x = 0$ 处取得的情形，另一种情形可类似处理。由于 $S \le h$ 在 $[0, L]$ 上，我们设 $S(0) < h(0)$，因此对于某个较小的 $\epsilon_0 > 0$，在 $[0, \epsilon_0]$ 上有 $S(x) < h(x)$。于是，由 (2.10) 得 $-d_S S_{xx} = \Lambda - S$, $\forall x \in (0, \epsilon_0]$。简单分析可知

$$\hat{S}(x) = c_1 e^{d_S^{-1/2}x} + c_2 e^{-d_S^{-1/2}x} + \Lambda, \quad x \in (0, \epsilon_0] \tag{3.25}$$

其中 c_1、c_2为某些常数。另一方面，利用 S 方程，在 $[0, x]$ 上积分可得

$$-S_x(x) = \frac{1}{d_S}\int_0^x [\Lambda - S(y) - \beta(y)S(y)I(y) + \gamma(y)I(y)]\mathrm{d}y, \quad x \in [0, \epsilon_0]. \tag{3.26}$$

由 [40, 定理 3.2], 的证明可知

$$\int_0^L S(x)I(x)\mathrm{d}x \le C, \quad \int_0^L I(x)\mathrm{d}x \le C, \text{ and } S(x) \le C, \quad \forall x \in [0, L], \tag{3.27}$$

其中 C 为某个正常数，且与 $d_I > 0$ 无关。

下文中，常数 C 可随行变化，但与 $d_I > 0$ 无关。由 (3.26) 可立即得出，S_x 在 $[0, \epsilon_0]$ 上一致有界，且与 $d_I > 0$ 无关。注意，由于 (2.11)，$\mu([0, \epsilon_0]) = 0$，并且 $I \to \mu$ 在 (1.3) 的意义下弱收敛。给定任意小的 $\epsilon > 0$，我们可以找到一个足够小的 $\rho > 0$，使得对所有 $0 < d_I \le \rho$,

$$\int_0^{\epsilon_0} I(x)\mathrm{d}x \le \epsilon + \int_{[0,\epsilon_0]} \mu(\mathrm{d}x) = \epsilon.$$

现在，对于任意满足 $|x_1 - x_2| < \epsilon$ 的 x_1、$x_2 \in [0, \epsilon_0]$，我们有

$$\begin{aligned} \big|S_x(x_1) - S_x(x_2)\big| &= \frac{1}{d_S}\Big|\int_{x_1}^{x_2} [\Lambda - S(y) - \beta(y)S(y)I(y) + \gamma(y)I(y)]\mathrm{d}y\Big| \\ &\le C|x_1 - x_2| + C\int_{x_1}^{x_2} I(y)\mathrm{d}y \\ &\le C|x_1 - x_2| + C\int_0^{\epsilon_0} I(y)\mathrm{d}y \le C\epsilon \end{aligned}$$

假设 $0 < d_I \le \rho$。这表明，一旦 $0 < d_I \le \rho$，S_x 在 $[0, \epsilon_0]$ 上等度连续。

因此，我们可以应用著名的阿尔泽拉–阿斯科利定理，对 d_I进一步取一个子列，从而得出，当 $d_I \to 0$时， S_x在 $[0, \epsilon_0]$上一致收敛。作为

$$S(x) - S(0) = \int_0^x S_x(y)\mathrm{d}y, \quad S \to \hat{S} \ \text{ uniformly on } [0, \epsilon_0],$$

容易看出， $S \to \hat{S}$在 $C^1([0, \epsilon_0])$中。因此， $\hat{S}_x(0) = 0$，进而由（3.25）可得， $\hat{c}_1 = c_2$。由于 $S \le h$ 在 $[0, L]$ 上且满足条件（2.9），我们有 $c_1 = c_2 < 0$，因此

$$\hat{S}_x(x) = c_1[e^{d_S^{-1/2}x} - e^{-d_S^{-1/2}x}] < 0, \quad \forall x \in (0, \epsilon_0].$$

$\hat{}$这意味着 S 在 $[0, \epsilon_0]$上递减。

鉴于对所有 $x \in [0, L]$， $h(0) \le h(x)$，且由（2.11）可将上述分析推广，从而断言$\hat{}$ $\hat{}$ S 在 $[0, L]$ 上递减，因此 $S < h$ 在 $[0, L]$上。这显然得到 $\mu([0, L]) = 0$，$\hat{}$这与再次由（2.11）得出的 $\mu([0, L]) > 0$ 相矛盾。因此，我们必有 $S(0) = h(0) = h_{min}$。

$\hat{}$ $\hat{}$ 断言 2. 若 S 在某个 $x_0 \in (0, L)$ 处取得局部最小值，则 S 必须在该点与 h 相切；即 $S(x_0) = h(x_0)$。

$\hat{}$ $\hat{}$ 由 $S \le h$可知，假设 $S(x_0) < h(x_0)$。因此，存在一个充分小的 $\epsilon_0 > 0$ ，使得对于所有 $x \in [x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0] \subset (0, L)$，均有 $\hat{}S(x) < h(x)$。由 (2.11)， $\mu([x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0]) = 0$，因此

$$-d_S \hat{S}_{xx} = \Lambda - \hat{S} \quad \text{on } [x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0].$$

$\hat{}$和之前一样，对于某些常数 c_1, c_2， S 在 $[x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0]$ 上具有 (3.25) 的形式。显然，$\hat{}S_x(x_0) = 0$，这意味着 $c_2 = c_1 e^{2d_S^{-1/2}x_0}$，因此 $c_1 < 0$。于是有

$$\hat{S}(x) = c_1[e^{d_S^{-1/2}x} + e^{d_S^{-1/2}(2x_0 - x)}] + \Lambda, \quad x \in [x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0] \tag{3.28}$$

$\hat{}$ 对某个常数 $c_1 < 0$。由 (3.28) 可知，经过基本计算可得， S 在 $[x_0 - \epsilon_0, x_0]$ 上递增，而在 $[x_0, x_0 + \epsilon_0]$上递减。这意味着 x_0是 S的一个局部最大值，与我们的假设矛盾。因此， S 必定在 $x = x_0$处与 h 相切。

$\hat{}$ 断言 3。如果 h 在某点 $y_0 \in (0, L)$处取到最小值，那么 S 必定在该点与 $\hat{}h$ 相切；也就是说， $S(y_0) = h(y_0) = h_{min}$。

假设$S(y_0) < h(y_0) = h_{min}$。在区间 $[0, y_0)$ 内可能出现两种情况：情况 1： S在 $[0, y_0)$ 内始终不与 h 相切，也就是说， $S < h$ 在 $[0, y_0)$ 内；情况 2： S在 $[0, y_0)$ 内某处与 h 相切。

$\hat{}$ 当情形 1 发生时，由 (2.11) 可知， S 必须在 $(y_0, L]$ 内与 h 相切。令 y_1 为 S（从左侧起）首次与 h 相切的点。也就是说， $y_1 \in (y_0, L]$，并且

$$\hat{S}(x) < h(x), \ \ \forall x \in (y_0, y_1), \quad \hat{S}(y_1) = h(y_1) \ge h_{min}.$$

$\hat{}$ 另一方面，由于 $S < h$ 属于 $[0, y_0)$，我们可以按照断言 1 中的分析，证明 S 在 $[0, y_1]$ 上递减。这显然与 $S(y_0) < h_{min} \le \hat{}S(y_1)$ 矛盾。

当情形 2 发生时，我们用 $y_2 \in [0, y_0)$ 表示从右侧起 S 首次在 $[0, y_0)$ 内与 h 相切的点。也就是说，

$$\hat{S}(x) < h(x), \ \ \forall x \in (y_2, y_0), \quad \hat{S}(y_2) = h(y_2) \ge h_{min}.$$

If $\hat{}$ S 在（y_0， L]）内不与 h 相交。通过类似于断言 1 证明的论证，并利用 S_x（L）$= 0$这一事实，可知 S 在（y_2， L]）内递增，从而得到

ˆˆˆˆS（y_2） $<$ S（y_0），这与 S（y_2） $\geq$ h_{min} $>$ S（y_0）矛盾。因此， S必须在（y_0, L]）内与 h相交。设 y_3是 S在（y_0, L]）内与 h相交的第一个点。因此，对于所有 $x \in$ （y_0, y_3），均有ˆˆˆS（x） $<$ h（x），且 S（y_3） $=$ h（y_3） $\geq$ h_{min}。因此，在区间（y_2, y_3）内， S（x） $<$ h（x）， S（y_0） $<$ h（y_0） $=$ h_{min}，且 S（y_2） S（y_3） $\geq$ h_{min}。这意味着在ˆ$[y_2, y_3]$上， S必须在某个 $y_4 \in$ （y_2, y_3）处取得最小值。根据断言 2，我们可以得出ˆ S（y_4） $=$ h（y_4），再次产生矛盾。至此，我们已验证断言 3。

按照证明断言 3 的类似推理，可得 $S \geq h_{min}$ 在 $[0, L]$上。因此，(2.12) 成立。由断言 1 和断言 3 可知，(2.13) 成立。显然，断言 2 蕴含 (2.14)。至此，证明完成。□

3.3. 定理 2.3 的证明。本小节旨在证明定理 2.3。我们先给出以下几个引理。

引理 3.1. 假设 $h \in C^2([0, L])$，且 h_x 在 $\varrho_0 \in \Theta_h$的某个邻域ˆ内非递减。设 S 和 μ 如定理 2.2 中所述。则存在一个充分小的 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$\hat{S}(x) = h(x), \quad \forall x \in (\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0) \cap (0, L)$$

and

$$\mu(\{x\}) = \frac{\Lambda - h + d_S h_{xx}}{\eta(x)}, \qquad a.e.\ for\ x \in (\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0) \cap (0, L).$$

ˆ证明。由定理 2.2 可知， $\varrho_0 \in \{x \in [0, L]:\ S(x) = h(x)\}$。下文中，我们只考虑 $\varrho_0 \in (0, L)$ 的情形；对于 $\varrho_0 = 0$ 或 L 的情形，可类似处理。我们需要区分以下三种可能性：

ˆ(1) ϱ_0 是集合 $\{x \in [0, L]$ 中的孤立点： $S(x) = h(x)\}$；ˆ(2) ϱ_0 是 $\{x \in [0, L]$ 中的聚点： $S(x) = h(x)\}$；ˆ(3) 存在一个足够小的 $\epsilon_0 > 0$，使得$(\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0) \subset \{x \in [0, L]:$ $S(x) = h(x)\}$。下文中，我们将排除情形(1)和(2)。若情形(1)发生，则

$$\hat{S}(\varrho_0) = h(\varrho_0) = h_{min} \ \text{ and } \ \hat{S} < h \quad \text{in } (\varrho_0 - \epsilon_1, \varrho_0 + \epsilon_1) \setminus \{\varrho_0\}$$

对某个足够小的 $\epsilon_1 > 0$成立。

注意， $\mu([0, L]) < \infty$。鉴于这一事实，可以将椭圆方程的内部正则性理论应用于(2.10)，并断言ˆ $S \in C^1(0, L)$。显然， $h_x(\varrho_0) = 0$。由于根据(2.12)，ˆˆˆ$S(\varrho_0) = h(\varrho_0) = h_{min}$ 且 $S \geq h_{min}$，我们推知 $S_x(\varrho_0) = 0$。

另一方面，由 (2.10)， $\hat{S}$ 满足

$$-d_S \hat{S}_{xx} = \Lambda - \hat{S} \quad \text{in } (\varrho_0 - \epsilon_1, \varrho_0 + \epsilon_1) \setminus \{\varrho_0\}. \tag{3.29}$$

ˆˆ利用 $S_x(\varrho_0) = 0$ 和 (3.29)，容易看出 S在 $(\varrho_0 - \epsilon_1, \varrho_0)$ 上递增，而ˆˆS在 $(\varrho_0, \varrho_0 + \epsilon_1)$ 上递减。这意味着 $S < h_{min}$在 $(\varrho_0 - \epsilon_1, \varrho_0 + \epsilon_1) \setminus \{\varrho_0\}$，与 (2.12) 矛盾。因此，(1) 不可能成立。

若 (2) 成立，不失一般性，我们可以找到两点，例如 z_1, z_2，使得对于某个足够小的 $\epsilon_2 > 0$，有 $\varrho_0 < z_1 < z_2 < \varrho_0 + \epsilon_2$，从而

$$\hat{S}(z_1) = h(z_1), \ \hat{S}(z_2) = h(z_2) \ \text{ and } \ \hat{S} < h \ \text{ in } (z_1, z_2). \tag{3.30}$$

如有必要，取较小的 ϵ_2，我们可假设由于 h_x 的单调性， $h_x(z_1) \leq h_x(z_2)$。于是， S 在 (z_1, z_2) 中满足 (3.29)。由 (3.30)，我们得到

$$\hat{S}_x(z_1) \leq h_x(z_1), \quad \hat{S}_x(z_2) \geq h_x(z_2),$$

ˆ ˆ ˆ 从而得到 $S_x(z_1) \le S_x(z_2)$。然而，由 (3.29) 可知， $S_{xx} < 0$ 在 (z_1, z_2) 中，这 ˆ ˆ 推出 $S_x(z_1) > S_x(z_2)$，矛盾。因此，可能性 (2) 已被排除。

ˆ 上述论证表明 (3) 必须成立。现在，由于 $S = h$ 在 $[\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0]$上，我们可以将 (2.11) 两边乘以任意一个在 $[\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0]$ 上具有紧支撑的函数 $\zeta \in C^2([0, L])$，并进行积分，从而得到

$$d_S h_{xx} + \Lambda - h - \eta(x)\mu(\{x\}) = 0, \quad \text{a.e. for } x \in (\varrho_0 - \epsilon_0, \varrho_0 + \epsilon_0),$$

由此得到 $\mu(\{x\})$ 的表达式。 □

引理 3.2. 假设 $h \in C^2([0, L])$， h_x 在 $[0, L]$上单调不减，且对于某个 $\tau_0 \in (0, L)$，有 $\Theta_h = \{\tau_0\}$。那么存在两个数 τ_1、 τ_2，满足 $0 < \tau_1 < \tau_0 < \tau_2 < L$，使得

$$\hat{S}(x) = h(x), \qquad \forall x \in [\tau_1, \tau_2], \tag{3.31}$$

ˆ 且在 $[0, \tau_1)$ 上， $\cup(\tau_2, L]$, S 满足

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx}(x) = \Lambda - \hat{S}, & x \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, L), \\ \hat{S}_x(0) = \hat{S}_x(L) = 0, \\ \hat{S}(\tau_1) = h(\tau_1), \quad \hat{S}(\tau_2) = h(\tau_2), \end{cases} \tag{3.32}$$

且 μ 满足

$$\mu(\{x\}) = \frac{\Lambda - h + d_S h_{xx}}{\eta(x)}, \quad a.e.\ for\ x \in (\tau_1, \tau_2), \tag{3.33}$$

$$\mu(\{x\}) = 0, \qquad \forall x \in [0, \tau_1) \cup (\tau_2, L]. \tag{3.34}$$

证明。记

$$\tau_1 = \inf\{\tau \in [0, \tau_0) : \ \hat{S}(x) = h(x),\ \forall x \in [\tau, \tau_0]\},$$

$$\tau_2 = \sup\{\tau \in (\tau_0, L] : \ \hat{S}(x) = h(x),\ \forall x \in [\tau_0, \tau]\}.$$

引理 3.1 表明， τ_1 和 τ_2 定义良好，且 $0 \le \tau_1 < \tau_0$ 和 $\tau_0 < \tau_2 \le L$。此外，(3.31) 和 (3.33) 成立。

鉴于 h_x 在 $[0, L]$上的单调性，从引理 3.1 的证明容易看出，若 $\tau_1 > 0$，则 S 在 $(0, \tau_1)$ 内无法与 h 相切，进而 $\mu([0, \tau_1)) = 0$；类似地，若$\tau_2 < L$，则 S 在 (τ_2, L) 内无法与 h 相切，因此 $\mu((\tau_2, L]) = 0$。

若 $\tau_1 > 0$ 和 $\tau_2 < L$，我们可以采用定理 2.2 的断言 1 证明中的分析，得出 $S_x(0) = S_x(L) = 0$。由于 $\mu([0, \tau_1) \cup (\tau_2, L]) = 0$，根据 (2.10) 及 S的连续性，利用椭圆方程的标准紧性论证可知， S 在经典意义下满足 (3.32)。显然，(3.32) 的解是唯一的。

还需证明 $\tau_1 > 0$ 和 $\tau_2 < L$。注意到 h_x、 $\Theta_h = \{\tau_0\}$和 $h_x(\tau_0) = 0$ 的单调性确保 $h_x(0) < 0$ 且 $h_x(L) > 0$。假设 $\tau_1 = 0$，因此（3.31）在 $[0, \tau_2]$上成立。现在，给定 $\tau \in (0, \tau_0]$，对 $[0, \tau]$ 上的 S-方程积分并利用（3.31），

我们推得

$$\begin{aligned}-d_S S_x(\tau^-) &= \int_0^\tau [\Lambda - S(y) - \beta(y)S(y)I(y) + \gamma(y)I(y)]\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\tau [\Lambda - S(y) - \eta(y)I(y)]\mathrm{d}y + \int_0^\tau [\gamma(y) + \eta(y) - \beta(y)S(y)]I(y)\mathrm{d}y \\ &\to \int_{[0,\tau]} [\Lambda - h(y) - \eta(y)\mu](\mathrm{d}y) = \int_0^\tau [-d_S h_{xx}(y)]\mathrm{d}y \\ &= -d_S h_x(\tau) + d_S h_x(0), \quad \text{as } d_I \to 0.\end{aligned}$$

也就是说，对于任意 $\tau \in (0, \tau_0]$，均有

$$S_x(\tau^-) \to h_x(\tau) - h_x(0), \quad \text{as } d_I \to 0.$$

由于 h_x 在 $[0, \tau_0]$ 上非递减，且 $h_x(0) < 0$，因此存在一个充分小的 $\epsilon_0 > 0$，使得对所有 $x \in [\tau_0 - \epsilon_0, \tau_0]$,

$$S_x(x^-) \geq \frac{1}{2}[h_x(\tau_0) - h_x(0)] = -\frac{1}{2}h_x(0) > 0$$

对所有充分小的 $d_I > 0$均成立。这意味着，对于所有此类充分小的 $d_I > 0$, S 在 $[\tau_0 - \epsilon_0, \tau_0]$ 上递增。鉴于当 $d_I \to 0$时， $S \to h$ 在 $[\tau_0 - \epsilon_0, \tau_0]$ 上一致地成立， h 必定在 $[\tau_0 - \epsilon_0, \tau_0]$上非递减，这与我们的假设相矛盾。因此， $\tau_1 > 0$。类似地，利用 $h_x(L) > 0$，可得 $\tau_2 < L$。由此，我们推出 (3.34)。证毕。□

与引理 3.1 的论证类似，我们可以得出以下结论。

引理 3.3. 假设 $h \in C^2([0, L])$、 $[\varrho_1, \varrho_2] \subset \Theta_h$ 和 h_x 在 ϱ_1, ϱ_2 的某个 ˆ 邻域内单调不减。令 S 和 μ 如定理 2.2 中所述。则存在一个足够小的 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$\hat{S}(x) = h(x), \quad \forall x \in (\varrho_1 - \epsilon_0, \varrho_2 + \epsilon_0) \cap (0, L)$$

and

$$\mu(\{x\}) = \frac{\Lambda - h + d_S h_{xx}}{\eta(x)}, \qquad a.e.\ for\ x \in (\varrho_1 - \epsilon_0, \varrho_2 + \epsilon_0) \cap (0, L).$$

基于引理 3.3，我们可以推导出以下结论。

引理 3.4. 假设 $h \in C^2([0, L])$、 $\Theta_h = [\varrho_1, \varrho_2]$ 和 h_x 在 ˆ$[0, \varrho_1] \cup [\varrho_2, L]$ 上单调不减。令 S 和 μ 如定理 2.2 中所述。则存在两个数 τ_1、 τ_2，满足 $0 < \tau_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < \tau_2 < L$，使得引理 3.2 中的所有断言均成立。

借助引理 3.1–3.4，我们现在可以证明定理 2.3。

ˆ 定理 2.3 的证明。我们先证明 (i)。采用反证法，假设 $S \not\equiv h$ ˆ on $[0, L]$。由于根据定理 2.2， S 至少在最高风险点与 h 相切，因此我们可以 ˆ 找到一个区间，记为 $[\ell_1, \ell_2] \subset [0, L]$, 使得 $S < h$ in (ℓ_1, ℓ_2)，并且在边界 ˆ ˆ ˆ 点 $x = \ell_i$ for $i = 1, 2$ 处， S 与 h 相切（因此 $S(\ell_i) = h(\ell_i)$ ）或 $S(\ell_i) < h(\ell_i)$。在后一种情况下，必有 $\ell_i = 0$ 或 L, 而定理 2.2 证明中推出断言 1 的分析表明 $S_x(\ell_i) = 0$。无论哪种情况，显然 S 满足

$$\begin{cases} -d_S \hat{S}_{xx} = \Lambda - \hat{S}, & x \in (\ell_1, \ell_2), \\ \hat{S}(\ell_i) = h(\ell_i) \ \text{ or } \ \hat{S}_x(\ell_i) = 0, & i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.35}$$

因此，根据我们的假设，h 是问题 (3.35) 的下解，而 $\max\{\Lambda, \max_{x\in[0,L]} h(x)\}$ 是问题 (3.35) 的上解。结合上下解迭代这一众所周知的方法以及问题 (3.35) 解的唯一性，我们可以得出 $S \geq h$on $[\ell_1, \ell_2]$，这就导致矛盾。因此，(2.15) 成立，而 (2.16) 可通过与前面类似的测试函数论证由 (2.10) 推出。由此证明了 (i)。

接下来证明 (ii)。首先，考虑 $\tau_0 \in (0, L)$ 的情形。在这种情况下，断言 (2.17)-(2.20) 可由引理 3.2 得出，剩下需要证明的是 τ_1, τ_2 由 (2.21) 唯一确定。由于 $S < h$ 属于 $[0, \tau_1)$，我们有

$$\hat{S}(x) = c_1[e^{d_S^{-1/2}x} + e^{-d_S^{-1/2}x}] + \Lambda, \quad \forall x \in [0, \tau_1]$$

对于某个 $c_1 < 0$。由 $S(\tau_1) = h(\tau_1)$ 可得

$$\hat{S}(x) = -\frac{\Lambda - h(\tau_1)}{e^{d_S^{-1/2}\tau_1} + e^{-d_S^{-1/2}\tau_1}}(e^{d_S^{-1/2}x} + e^{-d_S^{-1/2}x}) + \Lambda, \quad \forall x \in [0, \tau_1].$$

注意，在区间 $[0, \tau_1)$ 内，$\hat{S}$ 是凸函数，而 h 是凹函数；此外，如前所示，$\hat{S} \in C^1([0, L])$。因此，S 必须在 $x = \tau_1$ 处与 h 相切，这进而意味着 τ_1 是满足 $S_x(\tau_1) = h_x(\tau_1)$ 的唯一解。由此，τ_1 由下列方程唯一确定：

$$\frac{e^{d_S^{-1/2}\tau_1} - e^{-d_S^{-1/2}\tau_1}}{e^{d_S^{-1/2}\tau_1} + e^{-d_S^{-1/2}\tau_1}} = -\frac{d_S^{1/2}h_x(\tau_1)}{\Lambda - h(\tau_1)}.$$

同理，τ_2 由（2.21）的第二个方程唯一确定。断言 (ii)-(a) 已得到验证。

现在考虑 $\tau_0 = L$ 的情形。根据我们的假设，显然 $h_x(0) < 0$、$\hat{h}_x(L) \leq 0$，且 $S(L) = h(L)$。

假设 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} > -\frac{d_S^{1/2}h_x}{\Lambda - h}\underline{\quad(L)\quad(L)}$。为了推出 (ii)-(b1) 中所需的结论，可以参照引理 3.1 和 3.2 的分析。检查其中的分析可知，只需证明断言 (ii)-(a) 中定义的 τ_1 满足 $\tau_1 > 0$。事实证明，这相当于排除 $S < h$ 在 $[0, L)$ 中的情形。假设 $S < h$ 在 $[0, L)$ 中。那么，按照之前的推理，我们看到 S 在 $(0, L)$ 中满足 $-d_S S_{xx} = \Lambda - S$，且 $\hat{S}_x(0) = 0$。求解该问题，得到对某个 $c_1 < 0$，$\hat{S}(x) = c_1[e^{d_S^{-1/2}x} + e^{-d_S^{-1/2}x}] + \Lambda$。因此，由 $S(L) = h(L)$ 可得

$$c_1 = -\frac{\Lambda - h(L)}{e^{d_S^{-1/2}L} + e^{-d_S^{-1/2}L}}.$$

因此，我们得到

$$\hat{S}_x(L) = -d_S^{-1/2}(\Lambda - h(L))\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1}.$$

$\hat{S}$ 通过 $S < h$ in $[0, L)$ 和 $S(L) = h(L)$，必须有 $S_x(L) \geq h_x(L)$，由此可得

$$\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}} - 1}{e^{2Ld_S^{-1/2}} + 1} \leq -\frac{d_S^{1/2}h_x(L)}{\Lambda - h(L)},$$

这与我们的假设矛盾。因此，$\tau_1 > 0$ 必须成立，且 (ii)-(b1) 得证。

假设 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} \le -\frac{d_S^{1/2}h_x}{\Lambda-h}$ (L) (L) 。我们首先证明 $\tau_1 > 0$ 不可能成立。反之，假设 $\tau_1 > 0$ 成立，根据上述分析， τ_1 必须满足 (2.21) 的第一个方程。考虑以下辅助问题:

$$f(\tau) = \frac{e^{2\tau d_S^{-1/2}} - 1}{e^{2\tau d_S^{-1/2}} + 1} + \frac{d_S^{1/2} h_x(\tau)}{\Lambda - h(\tau)}, \quad \tau \in [0, L].$$

由于 $h_x(\tau)$ 单调不减， $h_x(\tau) \le 0$ 在 $[0, L]$ 上， $h(\tau)$ 单调不增，且 $h(\tau) > \Lambda$ 在 $[0, L]$ 上，因此容易验证，$d_S^{1/2}h_x(\tau)$ $\Lambda-h(\tau)$ 在 $[0, L]$ 上单调不减。显然， $\frac{e^{2\tau d_S^{-1/2}}-1}{e^{2\tau d_S^{-1/2}}+1}$ 在 $[0, L]$ 上递增。因此， $f(\tau)$ 在 $[0, L]$ 上递增。注意到，根据我们的假设， $f(L) = \frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} + d_S^{1/2}h_x(L)$ $\Lambda - h(L) \le 0$ 。这意味着关于 τ_1 在 $[0, L)$ 中，方程 (2.21) 无解 ˆ，与之矛盾。因此， $S < h$ 在 $[0, L)$ 中，且 ˆ$\mu([0, L)) = 0$，所以 S 是 (2.23) 的解。剩下只需证明 (2.24)。事实上，对 (1.6) 求和后积分可得

$$\Lambda L - \int_0^L S(x)\mathrm{d}x = \int_0^L \eta(x) I(x)\mathrm{d}x, \quad \forall d_I > 0.$$

令 $d_I \to 0$ ，得到

$$\Lambda L - \int_0^L \hat{S}(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,L]} \eta(x)\mu(\mathrm{d}x) = \eta(L)\mu(\{L\}).$$

这里用到了 $\mu([0, L)) = 0$ 这一事实。由此得到 (2.24)，因此 (ii)-(b2) 中的断言成立。

$\tau_0 = 0$ 的情形可用与上述类似的方法处理。根据引理 3.4 及上述分析，(iii) 中的断言立即成立。证明完成。□

4. Discussions and numerical simulations

近年来，人们提出了许多反应扩散模型，用以研究异质环境中传染病的传播动力学。例如， [2, 16, 18, 19, 35, 36, 39, 40, 49–52, 55,56, 59, 61, 68] 研究了与 (1.1) 相关的模型。没有随机扩散时， [1, 3, 20, 21, 38, 42, 62, 66, 67] 及其中的参考文献探讨了这类模型。关于随机扩散对传染病动力学影响的相关研究，也可参阅 [14, 22, 23, 32, 33, 37, 41, 58, 63, 64, 70, 71] 。

本文研究了 SIS 流行病反应扩散模型 (1.2) 和 (1.6) 的稳态解（即地方病平衡），其中疾病传播由 Kermack 和 McKendrick 提出的著名质量作用感染机制所支配 [26]。在模型 (1.2) 中，易感人群与感染人群的总人口数为常数；而在模型 (1.6) 中，由于纳入了易感人群的补充和感染者的死亡，总人口数会发生变化。我们的目的是确定感染者迁移率 d_I 趋于零时地方病平衡的空间分布。这类信息可能有助于决策者预测疾病发生的模式，进而制定有效的疾病防控策略。

先前的研究 [39, 65] 针对 (1.2) 和 (1.6) 在 $d_I \to 0$ 时地方病平衡的空间分布得出了一些部分结论；然而，对于易感人群和感染人群的分布，尚缺乏精确刻画。本文全面阐释了这一问题。下面我们将概述本文的主要理论发现，并以数值模拟结果加以支持或补充。

4.1. 模型 (1.2) 的地方病平衡剖面 $d_I \to 0$。如前所述，当风险函数 $k(x) = \gamma(x)\ \beta(x)$ 在整个栖息地 $[0, L]$上为常数时，只要满足 $k < \frac{N}{L}$，$(k, \frac{N}{L} - k)$ 就是 (1.2) 的唯一地方病平衡；而只要满足 $k \geq \frac{N}{L}$，$(\frac{N}{L}, 0)$ 就是 (1.2) 的唯一无病平衡。事实上，在这种平凡情形下，可以沿用 [16, 定理 4.1] 中的相同分析，得出：若 $k < \frac{N}{L}$，则 $(k, \frac{N}{L} - k)$ 是 (1.1) 的全局吸引子；若 $k \geq \frac{N}{L}$，则 $(\frac{N}{L}, 0)$ 是 (1.4) 的全局吸引子。因此，除非另有说明，以下我们总是假设风险函数 $k(x) = \gamma(x)\ \beta(x)$ 在 $[0, L]$上不是常数。

根据定理 2.1，对于模型 (1.2)，可以发现，易感人群 S收敛到正常数 k_{min}，当 $d_I \to 0$时，这意味着，一旦将感染者的移动限制得足够小，易感人群就始终会在整个栖息地内均匀分布。然而，当 $d_I \to 0$ 时，感染人群 I 的分布形态则关键取决于风险函数 $k(x)$ 的最高风险集合 Θ_k 的分布行为。更具体地说，对于模型 (1.2) 中 I 的分布形态，我们有以下发现。

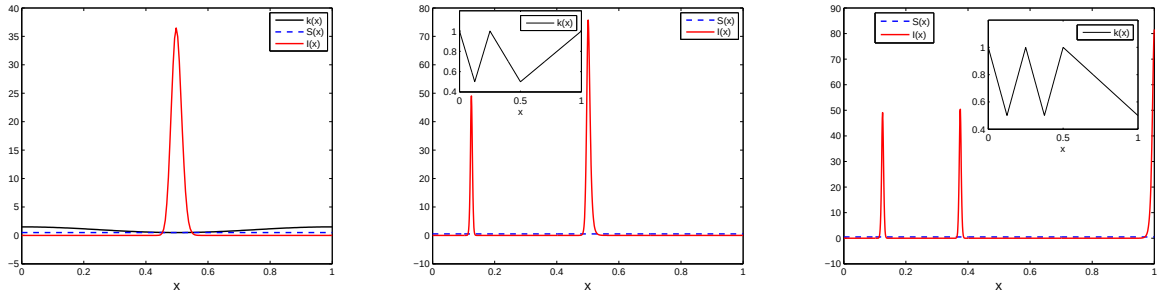
(i) 如果 Θ_k 仅由一个点组成，那么 I 必定只集中在该最高风险点。

(ii) 如果 Θ_k 只包含多个孤立点，根据注 2.1 可知，I 也会至少集中在这些最高风险点中的一个，而疾病会在其他地方消失。如图1(a)-(b)-(c) 所示，在三个典型情形下，我们的模拟结果表明，I 应集中在所有这些最高风险点上，尽管各个最高风险点上的 I 数量可能不同，这取决于函数 β、γ。

(iii) 如果 Θ_k 至少包含一个真区间，那么疾病分布不会出现集中现象，且无论是否存在孤立的最高风险点，感染人群都只会聚集在由最高风险点组成的这类区间上（见图 2(a)-(b)）。事实上，我们的数值结果表明，感染人群会聚集在所有由最高风险点组成的这类区间上（见图 2(c)）；然而，每个此类区间上的 I 人口数量可能不同，这取决于函数 β、γ。

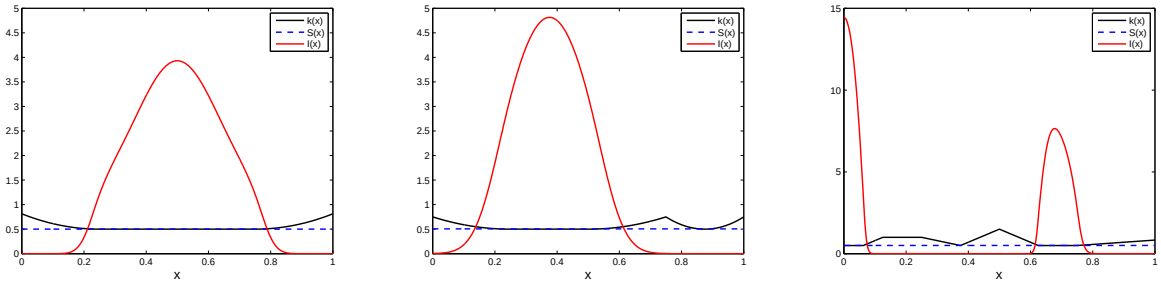
4.2. 模型 (1.6) 的地方病平衡轮廓，其中 $d_I \to 0$。对于模型 (1.6)，在条件 (2.9) 下，针对一般的 H¨older 连续风险函数 h，当 $d_I \to 0$ 时，由定理 ˆ 2.2 可知，易感人群 S 收敛到一个正函数 S；除非 h 为常数，否则该函数非常数。感染人群 I 收敛到一个正的 Radon ˆ 测度 μ，其支撑集包含于 S 与 h相接触的区域；换言之，疾病仅存在于易感人群沿风险函数分布的地方。如果风险函数 h 具有 C^2的性质，由引理 3.1 和引理 3.3 可知，感染人群至少会聚集在风险最高位置的一个邻域内。

此外，当 $h \in C^2([0, L])$ 时，根据定理 2.3，可以得出关于 I 渐近轮廓的以下结论。



(a) $\Theta_k = \{\frac{1}{2}\}$ (b) $\Theta_k = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\}$ (c) $\Theta_k = \{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, 1\}$

FIGURE 1. 模型 (1.2) 解剖面的数值模拟，其中 $L = 1, N = 2, d_S = 1, d_I = 10^{-7}$, $\beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $\gamma(x) = k(x)\beta(x)$, $k_{\min} = \frac{1}{2}$ 且 $k(x)$ 选取如下。在 (a) 中, $k(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi x)$。在 (b) 中, $k(x) = 1 - 4x$, $0 \le x < \frac{1}{8}$; $k(x) = 4x$, $\frac{1}{8} \le x < \frac{1}{4}$; $k(x) = \frac{3}{2} - 2x$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$; $k(x) = x$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$。在 (c) 中, $k(x) = 1 - 4x$, $0 \le x < \frac{1}{8}$; $k(x) = 4x$, $\frac{1}{8} \le x < \frac{1}{4}$; $k(x) = 2 - 4x$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{8}$; $k(x) = 4x - 1$, $\frac{3}{8} \le x < \frac{1}{2}$; $k(x) = \frac{3}{2} - x$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$。

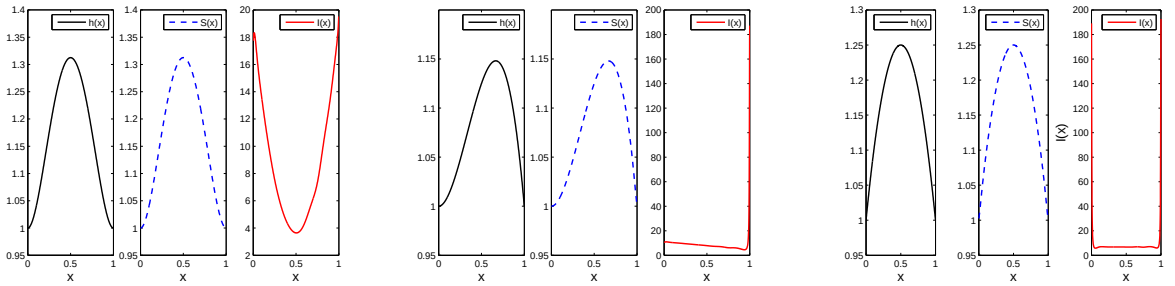


(a) $\Theta_k = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (b) $\Theta_k = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{7}{8}\}$ (c) $\Theta_k = [0, \frac{1}{16}] \cup \{\frac{3}{8}\} \cup [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$

FIGURE 2. 模型 (1.2) 的解剖面的数值模拟，其中 $L = 1, N = 2, d_S = 1, d_I = 10^{-5}$, $\beta(x) = 1, \gamma(x) = k(x)\beta(x)$, $k_{\min} = \frac{1}{2}$ 和 $k(x)$ 如下所选。在 (a) 中, $\Theta_k = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $k(x) = \frac{1}{2} + 5(x - \frac{1}{4})^2, 0 \le x < \frac{1}{4}$; $k(x) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{4}$; $k(x) = \frac{1}{2} + 5(x - \frac{3}{4})^2$, $\frac{3}{4} \le x \le 1$。在 (b) 中, $\Theta_k = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{7}{8}\}$, $k(x) = \frac{1}{2} + 4(x - \frac{1}{4})^2$, $0 \le x < \frac{1}{4}$; $k(x) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2}$; $k(x) = \frac{1}{2} + 4(x - \frac{1}{2})^2$, $\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}$; $k(x) = \frac{1}{2} + 16(x - \frac{7}{8})^2$, $\frac{3}{4} \le x \le 1$。在 (c) 中, $\Theta_k = [0, \frac{1}{16}] \cup \{\frac{3}{8}\} \cup [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$, $k(x) = \frac{1}{2}$, $0 \le x < \frac{1}{16}$; $k(x) = 8x$, $\frac{1}{16} \le x < \frac{1}{8}$; $k(x) = 1$, $\frac{1}{8} \le x < \frac{1}{4}$; $k(x) = 2 - 4x$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{8}$; $k(x) = 8x - \frac{5}{2}$, $\frac{3}{8} \le x < \frac{1}{2}$; $k(x) = \frac{11}{2} - 8x$, $\frac{1}{2} \le x < \frac{5}{8}$; $k(x) = \frac{1}{2}$, $\frac{5}{8} \le x < \frac{3}{4}$; $k(x) = \frac{2}{3}x$, $\frac{3}{4} \le x \le 1$。

(i) 对于任意满足 $-d_S h_{xx} \le \Lambda - h \in (0, L)$、$h_x(0) \ge 0$、$h_x(L) \le 0$ 以及条件 (2.9) 的风险函数 h （例如, $h < \Lambda$ 是正常数），感染人群必定占据整个栖息地；如果 $h_x(0) > 0$ （或 $h_x(1) < 0$），感染人群还会在边界点 $x = 0$ （或 $x = 1$）形成集中现象，该处同时也是风险最高的位置；参见定理 2.3(i) 及图3(a)-(b)-(c)中的数值示例。

(ii) 对于满足 (2.9) 的任意凸风险函数 h（即 $h_{xx} \ge$、$\not\equiv 0$ 在 $[0, L]$上），感染人群通常只分布在栖息地的一部分。具体而言，根据定理2.3(ii)(iii)，可以观察到以下行为。



(a) $h(x) = 1 + 5x^2(1-x)^2$　　(b) $h(x) = 1 + x^2(1-x)$　　(c) $h(x) = 1 + x(1-x)$

FIGURE 3. 模型 (1.6) 解剖面的数值模拟，其中 $\beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $\eta(x) = 1, \gamma(x) = h(x)\beta(x) - \eta(x)$, $d_S = 1, d_I = 10^{-8}, \Lambda = 10$。(a) 中，$h(x) = 1 + 5x^2(1-x)^2$, 在 (b) 中，$h(x) = 1 + x^2(1-x)$，而在 (c) 中，$h(x) = 1 + x(1-x)$。

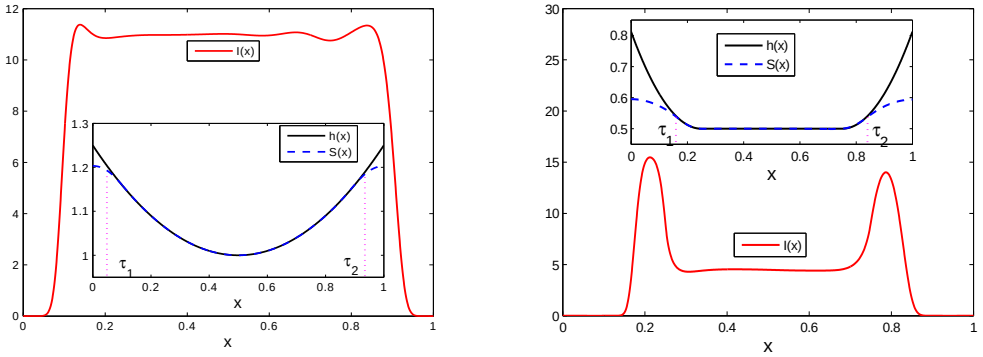
(ii-a) 如果最高风险集合 Θ_h 只包含一个点，记为 τ_0，那么感染人群的分布行为会受到 τ_0 是边界点还是内部点的影响。更确切地说，当 τ_0 是内部点时，感染人群会分布在 τ_0的某个左邻域内，并远离边界点 $x = 0$和 $x = 1$。事实上，可以通过公式 (2.21) 计算这样的邻域。另请参见图4(a)。

然而，如果 τ_0 是边界点，例如 $\tau_0 = L$，那么当 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} > -\frac{d_S^{1/2}h_x(L)}{\Lambda - h(L)}$ 时，感染人群会停留在 L 的某个邻域内；而当 $\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} \le -\frac{d_S^{1/2}h_x(L)}{\Lambda - h(L)}$ 时，感染人群仅集中于 L。由于在这种情况下 $h_x(L) \le 0$，当所有 $d_S > 0$ 均满足 $h_x(L) = 0$ 时，感染人群会停留在 L 的某个邻域内。如果 $h_x(L) < 0$，应注意函数 $q(d_S) = d_S^{-1/2}\frac{e^{2Ld_S^{-1/2}}-1}{e^{2Ld_S^{-1/2}}+1} + h_x(L)\,\Lambda - h(L)$ 在 $d_S \in (0, \infty)$ 上递减，$\lim_{d_S \to 0} q(d_S) = \infty$，且 $\lim_{d_S \to \infty} q(d_S) = h_x(L)\,\Lambda - h(L) < 0$。因此，存在唯一的 $d_S^* > 0$ 使得 $q(d_S^*) = 0$；进而，当 $0 < d_S < d_S^*$ 时，感染人群会停留在 L 的左邻域内，而当所有 $d_S \ge d_S^*$ 均成立时，感染人群仅集中于 L。

(ii-b) 如果最高风险集合 Θ_h 仅包含一个区间，那么感染者群体会分布在该区间的某个邻域内。同样，该邻域可通过公式 (2.21) 计算。参见图 4(b) 中的数值模拟。

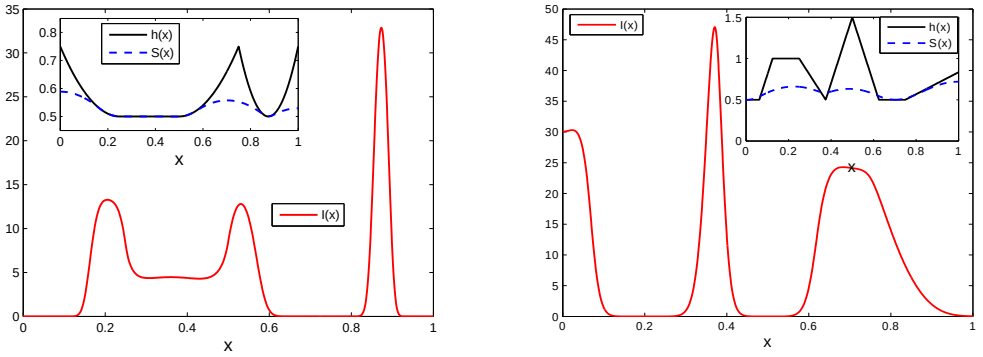
(ii-c) 对于一般的 H¨older 连续风险函数 h，我们可以得出结论：疾病必定存在于所有孤立最高风险点以及（若存在）每个最高风险区间的某个邻域内；然而，由于分析自由边界问题 (2.10) 存在数学上的困难，要准确刻画易感人群和感染者群体的分布行为仍颇具挑战。我们在图 5(a)-(b) 中进行了数值模拟以作说明。

接下来，我们想进一步讨论上述 (ii-a) 中 τ_0 为边界点的情形。例如，取 $\tau_0 = L$，并且假设 $h_x(L) < 0$。一方面，固定 $h_x(L)$ 后，我们从 (ii-b) 已知，较大的扩散率 d_S会使疾病仅在位置 L 聚集，而较小的扩散率 d_S



(a) $\Theta_h = \{\frac{1}{2}\}$ (b) $\Theta_h = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

FIGURE 4. 模型 (1.6) 解剖面的数值模拟，其中 $\beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $\eta(x) = 1, \gamma(x) = h(x)\beta(x) - \eta(x)$, $d_S = 1, d_I = 10^{-10}, \Lambda = 10$, 且 $h(x) = 1 + (x - \frac{1}{2})^2$ 在 (a) 中，而在 (b) 中，$h(x) = \frac{1}{2} + 5(x - \frac{1}{4})^2$, $0 \le x < \frac{1}{4}$; $h(x) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{4}$; $h(x) = \frac{1}{2} + 5(x - \frac{3}{4})^2$, $\frac{3}{4} \le x < 1$。



(a) $\Theta_h = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{7}{8}\}$ (b) $\Theta_h = [0, \frac{1}{16}] \cup \{\frac{3}{8}\} \cup [\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$

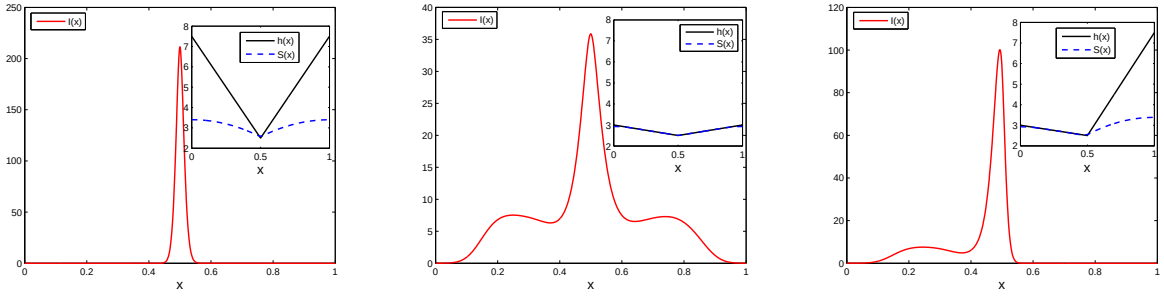
FIGURE 5. 模型 (1.6) 解剖面的数值模拟，其中 $d_S = 1, d_I = 10^{-5}, \beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $\eta(x) = 1, \gamma(x) = h(x)\beta(x) - \eta(x)$, $\Lambda = 10$。在 (a) 和 (b) 中，$h(x)$ 分别选为与图 2(b) 和图 2(c) 中的 $k(x)$ 相同。

则会使疾病分布在 L的左邻域内。另一方面，一旦固定 d_S，只有当 $-h_x(L)$ 足够大时，才会出现集中现象。这促使我们探究：若风险函数 h 仅为 H¨older 连续函数，内部孤立最高风险点处是否也会出现类似的集中现象。为说明这一现象，考虑如下风险函数，其曲线由两条线段连接而成：

$$h(x) = \begin{cases} a_1\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{\Lambda}{4}, & x \in \left[0, \frac{L}{2}\right], \\ a_2\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{\Lambda}{4}, & x \in \left(\frac{L}{2}, L\right], \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $a_1 < 0, a_2 > 0$。显然，h 在 $x = \frac{L}{2}$ 处仅为利普希茨连续。我们的数值模拟结果表明，若斜率 $|a_1|, a_2$ 足够大，则感染人群将集中在 $x = \frac{L}{2}$ （图6(a)）；若 $|a_1|, a_2$ 较小，则

感染人群将在 $x = \frac{L}{2}$ 的邻域内聚集（图6(b)）；若 $|a_1|$ 较小而 a_2 较大，则感染人群将在 $x = \frac{L}{2}$ 的左邻域内聚集（图6(b)）。这些分布与 $h \in C^2([0, L])$ 的定理2.3(ii)中的分布有很大不同，如图4(a)所示。因此，数值结果表明， h 的光滑性可能对疾病的空间分布产生显著影响。



(a) $a_1 = -10, a_2 = 10$ (b) $a_1 = -1, a_2 = 1$ (c) $a_1 = -1, a_2 = 10$

FIGURE 6. 模型 (1.6) 解剖面的数值模拟，其中 $\beta(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$ $\eta(x) = 1, \gamma(x) = h(x)\beta(x) - \eta(x)$, $L = 1, d_S =$1, $d_I = 10^{-5}, \Lambda = 10$ 且 $h(x)$ 由 (4.1) 给出。

4.3. 结论。以上两个小节的讨论以及数值模拟表明，对于感染者迁移率较小的情形，模型 (1.2) 和 (1.6) 中易感人群与感染人群的空间分布截然不同。这是由易感人群的补充项和感染人群的死亡率所导致的。另一方面，我们想提及，近期的研究 [11–14, 31, 34, 69] 探讨了各种反应-扩散-对流型SIS流行病模型，其中对流项表示某个方向上的被动移动，例如由水流 [46–48, 57], 、风 [15] 等外部环境力造成的移动。特别地，如果在 (1.2) 中存在对流项，且该项表示例如水流的作用，那么 [13, 定理 1.4]证明，当 $d_I \to 0$ 时，易感人群会趋于一个正函数，而感染人群则仅集中在水流的下游；对于相应的系统 (1.6)，也可以证明类似结果。这种分布行为与迁移率较小的 (1.2) 和 (1.6) 中的分布行为有本质区别。

总之，我们这里的结果结合 [13, 31, 40], 的结果表明，易感人群的补充项、感染人群的死亡率（甚至相关风险函数的光滑性）以及平流，都会对疾病传播产生显著影响。因此，决策者在采取封锁和隔离等措施控制感染者的流动或迁入，以消除疾病感染时，应高度重视这些因素。

5. Appendix

在本附录中，我们始终设 Ω 是 $\mathbb{R}^n(n \geq 1)$中的一个光滑有界区域。给定$f \in C(\Omega)$，考虑如下具有诺伊曼边界条件的特征值问题：

$$\begin{cases} -D\Delta\phi + f(x)\phi = \lambda\phi & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

其中，$\nu(x)$ 是 x 处 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，且系数 D 是一个正常数。

我们先介绍一个众所周知的事实：关于主特征值随小扩散变化的渐近行为（针对方程 (5.2)）；例如，可参见 [45,引理 3.1]。

引理 5.1. 设 $\lambda_1(D, f)$ 是方程 (5.2) 的主特征值，则有

$$\lim_{D\to 0} \lambda_1(D, f) = \min_{x\in\overline{\Omega}} f(x).$$

接下来，我们回顾以下线性椭圆问题的弱解的 L^1-估计（由 [6] 得出）：

$$-\Delta w + c(x)w = g \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{5.3}$$

引理 5.2. (a) (整体估计) 假设 $c \in L^\infty(\Omega)$ $g \in L^1(\Omega)$，且 $w \in W^{1,1}(\Omega)$ 是方程 (5.3) 的弱解。那么，对于任意 $r \in [1, n/(n-1))$，有 $w \in W^{1,r}(\Omega)$，并且满足以下估计

$$\|w\|_{W^{1,r}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^1(\Omega)},$$

其中正常数 C 与 w 无关。

(b) (内部估计) 假设 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 是光滑区域，$c \in L^\infty(\Omega)$ $g \in L^1(\Omega)$，且 $w \in W^{1,1}(\Omega)$ 是方程 $-\Delta w + c(x)w = g$ 的弱解。那么，对于任意 $r \in [1, n/(n-1))$，有 $w \in W^{1,r}(\Omega')$，并且满足以下估计

$$\|w\|_{W^{1,r}(\Omega')} \leq C\|g\|_{L^1(\Omega)},$$

其中正常数 C 与 w 无关。

最后，我们陈述弱解的一个Harnack型不等式（例如，参见 [43]或 [53]），其强形式已在 [44]中得到证明。

引理 5.3. (a) (整体Harnack不等式) 设 $c \in L^r(\Omega)$，其中某个 $r > n/2$成立。若$w \in W^{1,2}(\Omega)$是边值问题的非负弱解，

$$-\Delta w + c(x)w = 0 \quad in\ \Omega, \qquad \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0 \quad on\ \partial\Omega,$$

则存在一个常数 C，它仅由 $\|c\|_r$、r 和Ω决定，使得

$$\sup_{\Omega} w \leq C \inf_{\Omega} w.$$

(b)（局部哈纳克不等式）设 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 为光滑区域，$c \in L^r(\Omega)$ 对某个$r > n/2$成立。若 $w \in W^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $-\Delta w + c(x)w = 0$ 的非负弱解，则存在常数 C，其仅由 $\|c\|_r$、r、Ω 和 Ω′ 决定，使得

$$\sup_{\Omega'} w \leq C \inf_{\Omega'} w.$$

References

[1] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai，SIS流行病斑块模型稳态的渐近剖面，《SIAM应用数学杂志》，67(2007)，1283-1309。[2] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y.Lou, A.L. Nevai，SIS流行病反应扩散模型稳态的渐近剖面，《离散与连续动力系统》，21(2008)，1-20。[3] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai，离散时间SIS斑块模型中的空间模式，《数学生物学杂志》，58(2009)，339-375。[4] R.M. Anderson, R.M. May，传染病的种群生物学，《自然》，280(1979)，361-367。[5] D. Balcan 等，多尺度流动网络与传染病的空间传播，《美国国家科学院院刊》，106(2009)，21484-21489。[6] H. Brezis, W. A. Strauss，L^1中的半线性二阶椭圆方程，《日本数学会杂志》，25(1973)，565-590。[7] T. Britton, F. Ball, P. Trapman，数学模型揭示种群异质性对SARS-CoV-2群体免疫的影响，《科学》，369(2020)，846-849。[8] T. Britton, F. Ball, P. Trapman，疾病诱导的COVID-19群体免疫水平显著低于经典群体免疫水平，预印本，arXiv:2005.03085。[9] D. Brock mann, D. Helbing，复杂网络驱动的传染现象背后的隐秘几何，《科学》，342(2013)，1337-1342。[10] K. Castellano, R.B. Salako，降低人口流动对控制传染病传播的影响，《微分方程杂志》，316(2022)，1-27。[11] R. Cui，具有饱和发病率的反应-扩散-平流SIS流行病模型地方病平衡的渐近轮廓，《离散与连续动力系统B辑》，26(2021)，2997-3022。[12] R. Cui, K.-Y. Lam, Y. Lou，对流环境中流行病模型稳态的动力学与渐近剖面，《微分方程杂志》，263(2017)，2343-2373。[13] R. Cui, H. Li, R. Peng, M. Zhou，具有质量作用感染机制的反应-扩散-平流SIS流行病模型地方病平衡的集中行为，《变分法与偏微分方程》，60(2021)，论文编号184，38页。[14] R. Cui, Y. Lou，对流异质环境中的空间SIS模型，《微分方程杂志》，261(2016)，3305-3343。[15] K.A. Dahmen, D.R. Nelson, N.M. Shnerb，多风绿洲附近的生与死，《数学生物学杂志》，41(2000)，1-23。[16] K. Deng, Y. Wu，SIS流行病反应扩散模型的动力学，《爱丁堡皇家学会会刊A辑》，146(2016)，929-946。[17]F. Di Lauro 等，网络特性与混合对流行病模型中控制措施及疾病诱导群体免疫的影响：平均场模型视角，预印本，arXiv:2007.06975。[18] Z. Du, R. Peng，一类反应扩散系统解的先验 L^∞估计，《数学生物学杂志》，72(2016)，429-1439。[19] D. Gao，出行频率与传染病，《SIAM应用数学杂志》，79(2019)，1581-1606。[20] D. Gao, C-P. Dong，快速扩散抑制疾病暴发，《美国数学会会刊》，148(2020)，1709-1722。[21]D. Gao, S. Ruan，具有可变传播系数的SIS斑块模型，《数学与生物科学》，232(2011)，110-115。[22] J. Ge, K. Kim, Z. Lin, H. Zhu，低风险区域和高风险区域中的SIS反应扩散平流模型，《微分方程杂志》，259(2015)，5486-5509。[23] S. Han, C. Lei，具有非线性发病率的扩散型SEIR流行病模型平衡态的全局稳定性，《应用数学快报》，98(2019)，114-120。[24] H.W. Hethcote，传染病的数学，《SIAM评论》，42(2000)，599-653。[25] J.S. Jia 等，人口流动驱动COVID-19在中国的时空分布，《自然》，582(2020)，389-394。[26] W.O. Kermack, A.G. McKendrick，流行病数学理论的贡献——I，《伦敦皇家学会会刊A辑》，115(1927)，700-721。[27] W.O. Kermack, A.G. McKendrick，流行病数学理论的贡献——I，《数学生物学通报》，53(1991)，33-55。

[28] W.O. Kermack, A.G. McKendrick，流行病数学理论的贡献——II：地方性流行问题，《数学生物学通报》，53(1991)，57-87。[29] W.O. Kermack, A.G. McKendrick，流行病数学理论的贡献——III：地方性流行问题的进一步研究，《数学生物学通报》，53(1991)，89-118。[30] M.U.G. Kraemer 等，人口流动和控制措施对中国 COVID-19 疫情的影响，《科学》，368(2020)，493-497。[31] K. Kuto, H. Matsuzawa, R. Peng，反应-扩散-平流 SIS 流行病模型地方病平衡态的集中剖面，《变分法与偏微分方程》，56(2017)，论文编号112，共28页。[32] C. Lei, F. Li, J. Liu，异质环境中具有非线性发病率的扩散型SIR流行病模型的理论分析，《离散与连续动力系统B辑》，23(2018)，4499-4517。[33] C. Lei, J. Xiong, X. Zhou，异质环境中具有质量作用感染机制和自发感染的SIS流行病反应扩散模型的定性分析，《离散与连续动力系统B辑》，25(2020)，81-98。[34] C. Lei, X. Zhou，具有自发感染的反应-扩散-平流SIS流行病模型地方病平衡的集中现象，《离散与连续动力系统B辑》，即将出版。[35] B. Li, Q. Bie, SIRS反应-扩散流行病模型的长期动力学，《数学分析及其应用杂志》，475(2019)，1910-1926。[36] B. Li, H. Li, Y. Tong，具有逻辑斯蒂源项的扩散SIS流行病模型分析，Z. Angew. Math. Phys.，68(2017)，第4期，文章96，共25页。[37] B. Li, J. Zhou, X. Zhou，异质环境中具有非线性感染函数的扩散流行病系统地方病平衡的渐近剖面，《美国数学会会刊》，148(2020)，4445-4453。[38] H. Li, R. Peng，SIS流行病斑块模型地方病平衡的动力学与渐近剖面，《数学生物学杂志》，79(2019)，1279-1317。[39] H. Li, R. Peng, F.-B. Wang，总人口变化增强疾病持续：扩散SIS流行病模型的定性分析，《微分方程杂志》，262(2017)，885-913。[40] H. Li, R. Peng, Z.-A. Wang，具有质量作用机制和出生-死亡效应的扩散易感者-感染者-易感者流行病模型：分析、模拟及与其他机制的比较，《SIAM应用数学杂志》，78(2018)，2129-2153。[41] H. Li, R. Peng, T. Xiang，具有交叉扩散的两种频率依赖型SIS流行病模型的动力学与渐近剖面，European J. Appl. Math.，31(2018)，26-56。[42] M.Y. Li, Z. Shuai，斑块环境中流行病模型的全局稳定性，Can. Appl. Math. Q.，17(2009)，175-187。[43] G.M. Lieberman，任意 p 维数下稳态Sel'kov模型的界，SIAM J. Math. Anal.，36(2005)，1400-1406。[44] C.S. Lin, W.M. Ni, I. Takagi，趋化系统的大振幅平稳解，《微分方程杂志》，72(1988)，1-27。[45] Y. Lou, T. Nagylaki，无显性作用时迁移与选择的半线性抛物型系统的演化，《微分方程杂志》，225(2006)，624-665。[46] F. Lutscher, M.A. Lewis, E. McCauley，异质性对河流中传播与持续的影响，《数学生物学通报》，68(2006)，2129-2160。[47] F. Lutscher, E. McCauley, M.A. Lewis，单向流系统中的空间模式与共存机制，Theor. Popul. Biol.，71(2007)，267-277。[48] F. Lutscher, E. Pachepsky, M.A. Lewis，扩散模式对溪流种群的影响，SIAM Rev.，47(2005)，749-772。[49] P. Magal, G. Webb, Y. Wu，具有空间结构的媒介-宿主流行病模型，Nonlinearity，31(2018)，5589-5614。[50] P. Magal, G. Webb, Y. Wu，反应扩散流行病模型的基本再生数，《SIAM应用数学杂志》，79(2019)，284-304。[51] R. Peng，SIS流行病反应扩散模型正稳态的渐近剖面：第一部分，《微分方程杂志》，247(2009)，1096-1119。[52] R. Peng, S. Liu，SIS流行病反应扩散模型稳态的全局稳定性，Nonlinear Anal.，71(2009)，239-247。

[53] R. Peng, J. Shi, M. Wang，具有自催化和饱和定律的反应扩散模型的平稳模式，Nonlinearity，21(2008)，1471-1488。[54] R. Peng, Y. Wu，异质环境中扩散流行病系统的全局 L^∞界与长期行为，SIAM J. Math. Anal.，53(2021)，2776-2810。[55] R. Peng, F. Yi，SIS流行病反应扩散模型正稳态的渐近轮廓：流行病风险和人口流动的影响，Phys. D.，259(2013)，8-25。[56] R. Peng, X.-Q. Zhao，时间周期环境中的反应扩散SIS流行病模型，Nonlinearity，25(2012)，1451-1471。[57] R. Peng, X.-Q. Zhao，扩散和平流对周期抛物问题主特征值的影响及其应用，《变分法与偏微分方程》，54(2015)，1611-1642。[58] P. Song, Y. Lou, Y. Xiao，异质环境中的空间SEIRS反应扩散模型，《微分方程杂志》，267(2019)，5084-5114。[59] J. Suo, B. Li，异质环境中具有线性源项和频率依赖型发病函数的扩散SIS流行病系统分析，Math. Biosci. Eng.，17(2019)，418-441。[60] H. Tian 等，中国 COVID-19 疫情前50天传播控制措施的调查，《科学》，368(2020)，638-642。[61] Y. Tong, C. Lei，空间异质环境中具有自发感染的SIS流行病反应扩散模型，Nonlinear Anal. Real World Appl.，41(2018)，443-460。[62] C. Vargas-De-Leon, A. Korobeinikov，具有抑制和负反馈的人口动力学模型的全局稳定性，J. Math. Medicine and Biol.，30(2013)，65-72。[63] J. Wang, X. Wu，具有细菌超感染性和不同扩散率的扩散型霍乱模型的动力学与轮廓，J. Dyn. Diff. Equat.，2021，https://doi.org/10.1007/s10884-021-09975-3[64] J. Wang, J. Wang，人群中具有不同扩散率的反应扩散霍乱模型分析，J. Dyn. Diff. Equat.，33(2021)，549-575。[65] X. Wen, J. Ji, B. Li，具有质量作用感染机制的扩散SIS流行病模型地方病平衡的渐近剖面，《数学分析及其应用杂志》，458(2018)，715-729。[66] D. Wodarz, J.P. Christensen, A.R. Thomsen，裂解性和非裂解性免疫反应在病毒感染中的重要性，Trends Immunol.，23(2002)，194-200。[67]D. Wodarz, M.A. Nowak，免疫反应与病毒表型：复制率和细胞病变性是否会影响病毒载量？J. Theor. Med.，2(2000)，113-127。[68] Y. Wu, X. Zou，具有质量作用感染机制的扩散SIS流行病模型稳态的渐近剖面，《微分方程杂志》，261(2016)，4424-4447。[69] J. Zhang, R. Cui，具有饱和和自发感染机制的SIS反应扩散平流模型的渐近行为，Z. Angew. Math. Phys.，71(2020)，论文编号150，共21页。[70] S. Zhu, J. Wang，空间异质环境中具有自发感染和线性源项的扩散SIS流行病模型分析，《离散与连续动力系统B辑》，25(2020)，1999-2019。[71] S. Zhu, J. Wang，具有自发感染和逻辑斯蒂源项的扩散SIS流行病模型稳态的渐近剖面，Commun. Pure Appl. Anal.，19(2020)，3323-3340。