arXiv:2301.01014v1 [math.DG] 3 Jan 2023

带边界紧流形上指定标量曲率与平均曲率的三分定理

JIE XU

Abstract. 本文给出了在维数至少为 3 的带边界紧流形上，为与某个黎曼度量逐点共形或共形等价的度量指定标量曲率函数与平均曲率函数的结果。结果根据共形拉普拉斯算子的第一特征值的符号进行分类。这由此得出一个同时涉及标量曲率函数与平均曲率函数的“三分定理”，完整推广了 Kazdan 和 Warner 提出的“三分定理”。我们还讨论了在欧拉示性数为负的条件下，为带边界紧黎曼曲面上与原度量逐点共形或共形等价的度量指定高斯曲率与测地曲率的问题。关键步骤是给出单调迭代格式的一般版本，以处理边界条件中的零阶非线性项。

1. Introduction

本文针对具有非空光滑边界的紧流形（M, g） ∂M, n : $=$维数 $M \geqslant 3$，给出了一个关于数量曲率和平均曲率的“三分定理”。这是 Kazdan 和 Warner [9]针对闭流形提出的“三分定理”的完整推广。具体而言，这个“三分定理”探讨给定函数S, H 能否分别实现为某个度量 $\tilde{g}$ 的数量曲率和平均曲率，其中该度量可以属于某个共形类 $[g]$ ，也可以与度量 g共形等价。本文中，我们假设流形 M 是连通的；否则，只需将下文的论证分别应用于每个连通分支即可。众所周知，这个问题可归结为以下非线性二阶椭圆偏微分方程的正解是否存在

$$-a\Delta_g u + R_g u = (S \circ \phi)\, u^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u = \frac{2}{p-2} (H \circ \phi)\, u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{1}$$

这里， R_g 是度量 g的数量曲率， h_g 是平均曲率。 $\phi : M \to M$ 是 M上的某个微分同胚。当 $\phi = Id$时，偏微分方程 (1) 用于在共形类 $[g]$内指定函数 S, H。常数 a, p 定义如下:

$$a = \frac{4(n-1)}{n-2}, p = \frac{2n}{n-2}.$$

Δ_g 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子， ν 是沿着∂M的唯一外单位法向量场。给定函数 S: $\mathcal{C}^\infty(M)$ $\to \mathbb{R}$和 H: $\mathcal{C}^\infty(\partial M)$ $\to \mathbb{R}$。我们记 η_1为共形拉普拉斯算子 $\square_g := -a\Delta_g + R_g$ 的第一特征值，其对应的特征函数为 φ，即φ 是一个正的光滑函数，满足以下偏微分方程:

$$-a\Delta_g \varphi + R_g \varphi = \eta_1 \varphi \text{ in } M, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g \varphi = 0 \text{ on } \partial M.$$

当流形 $n = 2$ 的维数时，我们还讨论函数对 K, σ ，它们分别可作为某个逐点共形度量

或共形等价度量的高斯曲率和测地曲率。二维情形可归结为以下椭圆偏微分方程解的存在性

$$-a\Delta_g u + K_g = (K\circ\phi)\, e^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_g = (\sigma\circ\phi)\, e^{u} \text{ on } \partial M. \tag{2}$$

这里， K_g 和σ_g 分别是 g的高斯曲率和测地曲率。函数 K：

$\mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$和 σ：$\mathcal{C}^\infty(\partial M) \to \mathbb{R}$是给定的。同样，当微分同胚 ϕ：$M \to M$是恒等映射时， K,σ 是为共形类 $[g]$中的某个度量指定的高斯曲率和测地曲率。

本文的主要结果如下：

定理 1.1. 设(M,g)是一个连通的、带非空光滑边界 ∂M的紧流形，$n =$维数为 $M \geqslant 3$。设 $S, H \in \mathcal{C}^\infty(M)$为给定函数。

(i). 若 $\eta_1 < 0$，则 M 中某处 $S < 0$ 的任意函数都可实现为某个与 g共形等价的度量的标量曲率函数，其平均曲率为 cH，其中 $c > 0$ 为充分小的常数，且 H为任意函数；(ii). 若 $\eta_1 < 0$，则在 M 中变号的任意函数 $S < 0$ 都可实现为某个与 g共形等价的度量的标量曲率函数，其平均曲率为 cH，其中 $c > 0$ 为充分小的常数，且 H为任意函数；(iii). 若 $\eta_1 < 0$，则 M 中某处 $S > 0$ 的任意函数都可实现为某个与 g逐点共形的度量的标量曲率函数，其平均曲率为 cH，其中 $c > 0$ 为充分小的常数，且 H为任意函数。

情形 (i) 在第 3 节和第 4 节中给出；当 $S < 0$ 在 M上处处成立时，我们可以在定理 3.1 和定理 3.2 中的逐点共形类 $[g]$ 内改进这一结果；情形（ii）在第 6 节中给出；此外，当 S满足 $\int_M S d\text{Vol}_g < 0$ 时，我们可以在逐点共形类$[g]$内改进这一结果，见 [18, 定理 .1.2]；情形（iii）则在第 7 节中给出。其意义在于，只要标量曲率函数非平凡，我们就可以选取任意上确界范数足够小的函数作为平均曲率函数。

据我们所知，该领域已知的结果主要针对第一特征值非正或欧拉示性数非正的情形。在 [5], Cruz-Bl´azquez、Malchiodi 和 Ruiz 针对维数至少为 2 的紧流形，采用变分方法讨论了负标量函数以及符号任意的平均曲率函数的指定。我们的一些结果与他们的结果有所重叠，但采用了不同的方法，且对待指定函数的假设也不同。不过，我们的结果是按照共形拉普拉斯算子的第一特征值符号分类的。对于第一特征值为零或欧拉示性数为零的情形，我们沿用 [18] 的结果。我们指出，Brezis 和 Merle 在 [3] 中讨论了 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上满足狄利克雷边界条件的偏微分方程 $-\Delta_e u = Ve^u$。关于高维情形下带狄利克雷条件的局部 Yamabe 方程的其他结果，可见 [12]。关于二维情形下（2）的更多讨论，请参见 [15, 第 13 章、第 14] 章。当共形拉普拉斯算子的第一特征值为正时，已有许多非存在性结果，例如 [2] 和 [11], 等。

此外，在满足 $\chi(M) < 0$ 的条件下，我们还给出了关于带边界紧黎曼曲面的结果。

定理 1.2. 设 (M,g) 是一个边界非空且具有光滑边界的紧黎曼曲面 ∂M.设 $K,\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。

(i). 若 $K < 0$ 在 M上处处成立，则存在一个与 g 逐点共形的度量，其高斯曲率为 K，测地曲率为 $c\sigma$，其中常数 $c > 0$ 足够小，且函数 σ任意；(ii). 若 $K < 0$ 在 M上某处成立，则存在一个与 g 共形等价的度量，其高斯曲率为 K，测地曲率为 $c\sigma$，其中常数 $c > 0$ 足够小，且函数 σ任意。

上述两个结果见第 5 节。除了前文介绍的关于带边界紧黎曼曲面的相关研究外，关于闭黎曼曲面也已有大量研究；Kazdan 和 Warner [8], 给出了一项综合研究，其中包括 $\chi(M)$所有符号情况下的结果。关于 Nirenberg 问题，可参见 Chang 和 Yang [4] 、Struwe [13], 等人的工作。

分析这类 Kazdan-Warner 问题最常用的方法是变分法，因为我们可以将偏微分方程视为某个泛函对应的欧拉-拉格朗日方程；近年来，莫尔斯理论也开始得到应用。然而，受 Kazdan 和 Warner 启发的一种新方法 [10], 最近已发展起来。这种新方法采用单调迭代格式——一种局部的变分法——根据共形拉普拉斯算子的第一特征值η_1 的符号对存在性结果进行分类。该方法已用于彻底解决 Escobar 问题[16], 、Han-Li 猜想 [17], 、紧流形上的指定标量曲率问题 [19],、关于边界上满足狄利克雷条件的指定标量曲率的三分定理[20], ，以及对维数至少为 3 [18]的紧流形（可能带边界）上第一特征值为零的情形进行全面研究。本文将单调迭代格式与局部分析相结合的一种变体应用于情形 $\eta_1 > 0$ 和 $\eta_1 < 0$，以证明指定标量曲率与平均曲率的相关结果。我们还提出了一种一般的单调迭代格式，可处理偏微分方程及边界条件中的非线性项；这一新的单调迭代格式见定理 2.3，使我们无需使用变分法即可研究二维情形。这一系统的方法十分有效，但遗憾的是，这种直接方法无法应用于经典流形，即具有球面边界的单位球。我们将说明这种直接方法为何不适用于此情形。值得注意的是，Escobar [7] 已证明，对于此情形的指定平均曲率函数，存在一个非平凡的 Kazdan-Warner 型障碍。

本文结构安排如下：

在 §2 中，我们介绍本文中将用到的基本定义和结果。我们假设读者熟悉标准椭圆理论。我们还介绍了两种单调迭代格式。定理 2.2 针对偏微分方程 (1)；定理 2.3 则更具一般性，适用于所有带罗宾边界条件的二阶半线性椭圆偏微分方程，其中边界条件中可能含有零阶非线性项。定理 2.3 适用于类似于 (2) 的偏微分方程。

在 §3 中，我们给出在共形类 $[g]$ 内，为 (M, g)（ $n =$维数 $M \geqslant 3$）指定标量曲率函数 S 和平均曲率函数_ _H的结果，条件是 $\eta_1 < 0$。当 $S < 0$处处成立且 H任意时，结果见定理 3.1 和定理 3.2。当 $S < 0$在某处成立且 H任意时，在对 S施加某些限制的情况下，结果见定理 3.3 和推论 3.1。单调迭代格式发挥着核心作用。

在 §4 中，我们给出了在满足 $\eta_1 < 0$ 的条件下，为 (M, g) 上的某个与 g 共形等价的度量指定数量曲率函数 S 和平均曲率函数_ _H的结果，其中 $n =$维数 $M \geqslant 3$。这由推论 3.1 得出。我们在定理 4.1 中得出结论：任何在某处为负的 S，都可以实现为某个与 g 共形等价的度量的标量曲率函数；该度量的平均曲率为 cH，其中常数 $c > 0$ 足够小，且 H任意。

在 §5 中，我们讨论如何为带边界紧黎曼曲面指定高斯曲率函数 K和测地曲率函数σ，所用度量与原度量 g 共形等价。我们在定理 5.1 中证明，任何在某处为负且满足某个解析条件的函数 K，都可以实现为某个与 g 共形等价的度量的高斯曲率函数；该度量还具有测地曲率 $c\sigma$，其中常数 $c > 0$ 足够小，且 σ任意。推论 5.1 中的¯结果表明，当 $K < 0$ 在 M 上处处成立时，可以选择共形类 $[g]$ 内的度量。

在 §6 中，我们给出了一些结果，讨论如何在 (M, g) 上为某个与 g 共形等价的¯ ¯度量指定数量曲率函数 S 和平均曲率函数 H，其中 $n =$维数为 $M \geqslant 3$，前提是 $\eta_1 = 0$。我们证明，任何变号函数 S 都可以实现为某个度量的标量曲率函数

该度量与 g共形等价，在推论 6.2 中，当常数 $c > 0$ 足够小时，平均曲率为 cH ，且 H 可以任意取值。显然，存在一个平凡情形 $S \equiv H \equiv 0$。

在第 7 节中，我们考虑 $\eta_1 > 0$ 的标量曲率与平均曲率指定问题。定理 7.1 和定理 7.2 的结果适用于 $S > 0$ 某处成立且 H 任意的情形。我们还说明了为什么我们的方法无法用于边界上具有某种非平凡平均曲率的闭欧几里得球 $\mathbb{S}^n$。

2. The Preliminaries and The Monotone Iteration Scheme

本节首先介绍后续各节所需的定义和基本结果，然后介绍 [18], 中给出的单调迭代格式的一般版本，而不是我们在 [16, 17, 19, 20, 21], 中使用的许多变体；该格式针对以下带罗宾边界条件的 Yamabe 方程:

$$-a\Delta_g u + R_g u = S u^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u = \frac{2}{p-2} H u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{3}$$

对于给定函数 $S, H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和 $n =$维数 $M \geqslant 3$。最后，我们介绍一种适用于带罗宾边界条件的椭圆偏微分方程的 $W^{s,\,q}$ 型正则性。

首先，我们给出 Sobolev 空间的定义，包括局部版本和整体版本。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个连通、有界的开子集，其边界 ∂光滑，并配备某个黎曼度量 g ，且该度量可光滑地延拓至 Ω。我们称 (Ω g) 为一个黎曼域。全文中，我们用 $\mathcal{C}_c^\infty$ 表示紧支撑光滑函数空间，用 $\mathcal{C}^\infty$ 表示光滑函数空间，用 $\mathcal{C}^0$表示连续函数空间。

定义 2.1。设 (Ω g) 是一个黎曼域。设 (M, g) 是一个闭黎曼 n-流形，且 (M, g) 是一个紧致黎曼 n-流形，其边界非空且光滑，体积密度为 $d\text{Vol}_g$。设 u 是一个实值函数。令 $\langle v, w\rangle_g$ 和 $|v|_g = \langle v, v\rangle_g^{1/2}$分别表示关于 g的内积和范数。

(i) 对于 $1 \leqslant p < \infty$，我们定义 Ω 上的 Lebesgue 空间以及 M 为

$$\mathcal{L}^p(\Omega) \text{ is the completion of } \left\{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) : \|u\|_p^p := \int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\},$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, g) \text{ is the completion of } \left\{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) : \|u\|_{p,g}^p := \int_\Omega |u|^p \, dVol_g < \infty\right\},$$

$$\mathcal{L}^p(M, g) \text{ is the completion of } \left\{u \in \mathcal{C}^\infty(M) : \|u\|_{p,g}^p := \int_M |u|^p \, dVol_g < \infty\right\}.$$

(ii) 对于 ∇u ， g 的 Levi-Civita 联络，以及对于 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ 或 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$|\nabla^k u|_g^2 := (\nabla^{\alpha_1} \dots \nabla^{\alpha_k} u)(\nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_k} u). \tag{4}$$

特别地， $|\nabla^0 u|_g^2 = |u|^2$ 和 $|\nabla^1 u|_g^2 = |\nabla u|_g^2$.

(iii) 对于 $s \in \mathbb{N}, 1 \leqslant p < \infty$，我们定义 Ω 上的 (s,p) 型 Sobolev 空间，并 M 为

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} := \int_\Omega \sum_{j=0}^{s} \left|D^j u\right|^p dx < \infty \right\}, \tag{5}$$

$$W^{s,p}(\Omega, g) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(\Omega, g) : \|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega,g)} = \sum_{j=0}^{s} \int_\Omega \left|\nabla^j u\right|^p_g \, dVol_g < \infty \right\},$$

$$W^{s,p}(M, g) = \left\{ u \in \mathcal{L}^p(M, g) : \|u\|^p_{W^{s,p}(M,g)} = \sum_{j=0}^{s} \int_M \left|\nabla^j u\right|^p_g \, dVol_g < \infty \right\}.$$

这里 $|D^j u|^p := \sum_{|\alpha|=j} |\partial^\alpha u|^p$ 在弱意义下成立。类似地，$W^{s,\ 0\ p}(\Omega)$ 是关于 $W^{s,\ p}$-范数对 $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ 取完备化所得的空间。特别地，$H^s(\Omega) := W^{s,\ 2}(\Omega)$ 和 $H^s(\Omega\ g) := W^{s,\ 2}(\Omega\ g)$，$H^s(M,g) := W^{s,\ 2}(M,g)$ 是通常的 Sobolev 空间。我们类似地定义 $H^s_0(\Omega)$ $H^s_0(\Omega\ g)$ 和 $H^s_0(M,g)$。

(iv) 在闭流形 (M,g) 上，若 $u \in \mathcal{L}^2(M,g)$，则称函数 $u \in H^s(M,g)$；并且对于任意坐标图 $U \subset M$ 及任意 $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(U)$，函数 $\psi u \in H^s(U,g)$。

我们假设读者熟悉标准椭圆理论，包括标准线性椭圆偏微分方程的可解性、H^s 型椭圆正则性、迹定理、Sobolev 嵌入、绍德估计等。为供后文使用，我们介绍一种 $W^{s,q}$ 型椭圆正则性。

¯定理 2.1。 [17, 定理 2.2] 设 (M,g) 是一个带有光滑边界 ∂M 的紧流形。设 ν 为沿 ∂M 的单位外法向量，且 $q > n =$ 维数为 M。设 $L\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ 是定义在 M 上的一致二阶椭圆算子，其系数延伸至 ∂M 上仍然光滑，并且可延拓为 $L\colon W^{2,q}(M,g) \to \mathcal{L}^q(M,g)$。设 $f \in \mathcal{L}^q(M,g)$ $\tilde{f} \in W^{1,q}(M,g)$。设 $u \in H^1(M,g)$ 是下列边值问题的一个弱解

$$Lu = f \text{ in } M, Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + c(x)u = \tilde{f} \text{ on } \partial M. \tag{6}$$

这里 $c \in \mathcal{C}^\infty(M)$。此外，假设 $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$ 与齐次罗宾边界条件相关联。若进一步有 $u \in \mathcal{L}^q(M,g)$，则 $u \in W^{2,\ q}(M,g)$，并满足以下估计

$$\|u\|_{W^{2,q}(M,g)} \leqslant \gamma' \left(\|Lu\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \|Bu\|_{W^{1,q}(M,g)} \right) \tag{7}$$

¯这里 γ' 取决于 L, q, c 以及流形 (M,g)，且与 u 无关。

接下来我们引入共形拉普拉斯算子的第一特征值。注意，$a = {}^4_{(n-1)\ n-2}$ 且 $p = \frac{2n}{n-2}$，因此只有当 $n \geqslant 3$ 时才有意义。

¯定义 2.2. 设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M 的紧流形。我们记 η_1 为共形拉普拉斯算子的第一特征值，其对应的特征函数为 $\varphi > 0$，当且仅当以下偏微分方程成立。

$$-a\Delta_g \varphi + R_g \varphi = \eta_1 \varphi \text{ in } M, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g \varphi = 0 \text{ on } \partial M. \tag{8}$$

现在我们介绍一种对我们在 [16], [17] 和 [19]中使用的单调迭代格式的变体。特别地，我们确实要求 $h_g = h > 0$ 在 ∂M 上为某个正常数；根据 [17]中 Han-Li 猜想的证明，这是可以做到的。我们还将使用早期工作 [16, 17, 19, 20, 21]中引入的其他版本的单调迭代格式。

¯定理 2.2。 [18, 定理 2.4] 设 (M,g) 是一个带有光滑边界 ∂M 的紧流形。设 ν 为沿着 ∂M 的单位外法向量，且 $q >$ 维数为 M。设 $S \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和 $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$

为给定函数。设平均曲率 $h_g = h > 0$ 为某个正常数。此外，我们假设 $\sup_{\bar{M}}|H|$ 足够小。假设存在 $u_- \in \mathcal{C}_0(\bar{M}) \cap H^1(M,g)$ 和 $u_+ \in W^{2,q}(M,g) \cap \mathcal{C}_0(\bar{M})$，$0 \leqslant u_- \leqslant u_+$，$u_- \not\equiv 0$ 在 $\bar{M}$ 上，以及一些常数 $\theta_1 \leqslant 0, \theta_2 \geqslant 0$，使得

$$\begin{aligned} -a\Delta_g u_- + R_g u_- - S u_-^{p-1} \leqslant 0 \text{ in } M, \frac{\partial u_-}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u_- \leqslant \theta_1 u_- \leqslant \frac{2}{p-2} H u_-^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M \\ -a\Delta_g u_+ + R_g u_+ - S u_+^{p-1} \geqslant 0 \text{ in } M, \frac{\partial u_+}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u_+ \geqslant \theta_2 u_+ \geqslant \frac{2}{p-2} H u_+^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M \end{aligned} \tag{9}$$

弱意义下成立。特别地，如果 $H \geqslant 0$ 在 ∂M 上，则 θ_1 可以为零；如果 $H < 0$ 在 ∂M 上某处成立，则 θ_1 必须为负；类似地，如果 $H \leqslant 0$ 在 ∂M 上，则 θ_2 可以为零；如果 $H > 0$ 在 ∂M 上某处成立，则 θ_2 必须为正。于是，存在一个实的正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M) \cap \mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar{M})$，满足

$$\Box_g u = -a\Delta_g u + R_g u = S u^{p-1} \text{ in } M, B_g u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u = \frac{2}{p-2} H u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{10}$$

以下两个结果是必要的，它们说明了某些局部 Yamabe 型问题的解的存在性。当流形不是局部共形平坦时，我们需要

命题 2.1. [18, 命题 3.2] 设 (Ω, g) 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非局部共形平坦的黎曼域，具有 C^∞ 边界，且 $\mathrm{Vol}_g(\Omega)$ 和 Ω 的欧几里得直径充分小。设 $f \in \Omega' \supset \Omega$ 是某个开区域 Ω' 中的正光滑函数。此外，假设拉普拉斯-贝尔特拉米算子 $-\Delta_g$ 在 Ω 上满足狄利克雷条件$^-$的第一特征值满足 $\lambda_1 \to \infty$，当 Ω 收缩时。假设 $R_g < 0$ 位于足够小的闭区域 Ω 内。那么狄利克雷问题

$$-a\Delta_g u + R_g u = f u^{p-1} \text{ in } \Omega, u \equiv 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{11}$$

有一个实值、正的光滑解 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega, g) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$。$\Omega$ 的大小取决于函数 f。

当流形局部共形平坦时，只要 Ω 在拓扑上非平凡，我们就给出方程 (11) 的局部解。

命题 2.2。 [19, 命题 2.5] 设 (Ω, g) 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个黎曼域，$n \geqslant 3$，具有 C^∞边界。度量 g 在 $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ 的某个开子集上局部共形平坦。对任意点$\rho \in \Omega$ 和任意正常数 ϵ，将区域 Ω_ϵ 定义为

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega | |x - \rho| > \epsilon\}.$$

假设 $Q \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$、$\min_{x\in\bar{\Omega}} Q(x) > 0$ 且 $\nabla Q(\rho) \neq 0$。那么存在某个 ϵ_0，使得对每个 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$，狄利克雷问题

$$-a\Delta_g u + R_g u = Q u^{p-1} \text{ in } \Omega_\epsilon, u = 0 \text{ on } \partial\Omega_\epsilon \tag{12}$$

存在一个实值、正的光滑解 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon) \cap H_0^1(\Omega_\epsilon, g) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_\epsilon)$。

注 2.1. 显然，在共形变换 $\tilde{g} = \phi^{p-2} g$ 下，我们有

$$\tilde{g} = \phi^{p-2} g \Rightarrow -a\Delta_{\tilde{g}} + R_{\tilde{g}} = \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-a\Delta_g + R_g\right) \phi \Leftrightarrow \Box_{\tilde{g}} = \phi^{1-p} \Box_g \phi. \tag{13}$$

我们称 (13) 为共形拉普拉斯算子的共形不变性。由命题 2.2$^-$和 (13) 可知，若流形 (M, g) 在内部局部共形平坦，则方程 (12) 等价于

$$-a\Delta_{g_e} u = Q u^{p-1} \text{ in } \Omega_\epsilon, u = 0 \text{ on } \partial\Omega_\epsilon \tag{14}$$

该方程存在一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon) \cap H_0^1(\Omega_\epsilon, g) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_\epsilon)$。

作为预备结果，我们还需要一个关于共形拉普拉斯算子负第一特征值扰动的结论。

¯命题 2.3. 设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界∂M, $n=$ 维数 $\bar{M}\geqslant 3$ 的紧黎曼流形。设 $\beta>0$ 是一个足够小的常数。若 $\eta_1'<0$，则该量

$$\eta_{1,\beta}'=\inf_{u\neq 0}\frac{a\int_M|\nabla_g u|^2dVol_g+\int_M R_g u^2 dVol_g+\frac{2a}{p-2}\int_{\partial M}(h_g+\beta)u^2dS}{\int_M u^2 dVol_g}<0.$$

特别地，$\eta_{1,\ \beta}'$ 满足

$$-a\Delta_g\varphi+R_g\varphi=\eta_{1,\beta}'\varphi \text{ in } M,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{2}{p-2}(h_g+\beta)\varphi=0 \text{ on } \partial M \tag{15}$$

¯其中某个正函数为 $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(M)$。

证明。由于 $\eta_1'<0$，归一化第一特征函数 φ_1，即 $\int_M\varphi_1^2d\mathrm{Vol}_g=1$，满足

$$\eta_1'=a\int_M|\nabla_g\varphi_1|^2d\mathrm{Vol}_g+\int_M R_g\varphi_1^2d\mathrm{Vol}_g+\frac{2a}{p-2}\int_{\partial M}h_g\varphi_1^2dS$$

根据 $\eta_{1,\ \beta}'$ 的刻画，我们有

$$\eta_{1,\beta}'\leqslant a\int_M|\nabla_g\varphi_1|^2d\mathrm{Vol}_g+\int_M R_g\varphi_1^2d\mathrm{Vol}_g+\frac{2a}{p-2}\int_{\partial M}(h_g+\beta)\varphi_1^2dS=\eta_1'+\beta\int_{\partial M}\varphi_1^2dS.$$

由于 φ_1 是固定的，因此若 $\beta>0$ 足够小，则有 $\eta_{1,\ \beta}'<0$。 □

¯当 $n=2$，即 M 或 M 是一个紧黎曼曲面（可能带有边界）时，上述所有工具都不再适用。因此，我们需要一种适用于具有非空光滑边界的紧黎曼曲面的新版本单调迭代格式。我们指出，下面的单调迭代格式适用于所有维数至少为 2 且具有非空边界的紧流形。

¯定理 2.3. 设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M, $n=$¯维数 $M\geqslant 2$的紧流形。设 $q>n$ 是一个正整数。设 $F(\cdot,\cdot)$ $G(\cdot,\cdot):M\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是光滑函数。设 ν 是沿着 ∂M的单位外法向量。设 σ 是某个非负且足够小的常数。若

(i) 存在两个函数 $u_+\in\mathcal{C}^\infty(\bar{M})$ 和 $u_-\in\mathcal{C}^0(\bar{M})\cap H^1(M,g)$，使得

$$\begin{aligned}-\Delta_g u_+&\geqslant F(\cdot,u) \text{ in } M,\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u\geqslant G(\cdot,u_+) \text{ on } \partial M;\\ -\Delta_g u_-&\leqslant F(\cdot,u) \text{ in } M,\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u\leqslant G(\cdot,u_-) \text{ on } \partial M,\end{aligned} \tag{16}$$

其中，下解可以在弱意义下成立；并且

(ii) 此外，$\sup_{\bar{M}}|G(\cdot,u_+)|$、$\sup_{\bar{M}}|\nabla G(\cdot,u_+)|$ 足够小；

¯(iii) 此外，$u_+\geqslant u_-$ 在 M 上逐点成立；

¯那么存在一个光滑函数 $u\in\mathcal{C}^\infty(M)$，满足 $u_-\leqslant u\leqslant u_+$，使得

$$-\Delta_g u=F(\cdot,u) \text{ in } M,\frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u=G(\cdot,u) \text{ on } \partial M. \tag{17}$$

注 2.2. 定理 2.3 的证明与 [18, 定理 2.4],的证明基本相同，仅有一些细微变化，例如这里我们使用一般的光滑函数 F 和 G，而不是特定的 Yamabe 方程。因此，我们将对定理 2.3 给出一个相对简洁的证明。

¯证明。 M 是紧的，因此连续函数 u_+， u_- 可以取得极值。选取正常数 A 和非负常数 B ，使得

$$\begin{aligned} A &\geqslant -\frac{\partial F}{\partial u}(x,u(x)), \forall x \in \bar{M}, u(x) \in [\min_{\bar{M}} u_-, \max_{\bar{M}} u_+]; \\ B &\geqslant \sigma - \frac{\partial G}{\partial u}(x,u(x)), \forall x \in \bar{M}, u(x) \in [\min_{\bar{M}} u_-, \max_{\bar{M}} u_+]. \end{aligned} \tag{18}$$

¯记 $u_0 = u_+ \in \mathcal{C}^\infty(M)$，并考虑迭代方案

$$\begin{aligned} -\Delta_g u_k + A u_k &= A u_{k-1} + F(\cdot, u_{k-1}) \text{ in } M, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + B u_k &= B u_{k-1} - \sigma u_{k-1} + G(\cdot, u_{k-1}) \text{ on } \partial M, k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{19}$$

由于 $A > 0, B \geqslant 0$，算子

$$\left(-\Delta_g + A, \frac{\partial}{\partial \nu} + B\right)$$

由标准论证可知，该算子可逆。显然，当 $k = 1$时，(19)中的第一次迭代¯给出唯一的光滑解 $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$。正则性论证也是标准的。

我们证明 $u_- \leqslant u \leqslant u_+$。对于 $u_- \leqslant u$，我们必须在弱意义下使用下解，¯由于 $u_0 = u_+ \geqslant u_-$，我们将 $k = 1$ 对应的(19)与任意非负函数 $v \in \mathcal{C}^\infty(M)$配对，并在弱意义下减去下解（分别在偏微分方程和边界条件两边加上 Au_- 和 Bu_- ），得到

$$\begin{aligned} &\int_M \left(A\left(u_0 - u_-\right) + F\left(x, u_0\right) - F\left(x, u_-\right)\right) v d\mathrm{Vol}_g \leqslant \int_M \left(-\Delta_g\left(u_1 - u_-\right) + A\left(u_1 - u_-\right)\right) v d\mathrm{Vol}_g \\ \leqslant &\int_{\partial M} B\left(u_1 - u_-\right) v dS - \int_{\partial M} \left(B\left(u_0 - u_-\right) - \sigma\left(u_0 - u_-\right) + G\left(x, u_0\right) - G\left(x, u_-\right)\right) v dS \\ &+ \int_M A\left(u_1 - u_-\right) v d\mathrm{Vol}_g + \int_M \nabla_g\left(u_1 - u_-\right) \cdot \nabla_g v d\mathrm{Vol}_g. \end{aligned}$$

取 $v = w := \max(u_- - u_1, 0)$，并对 F, G应用中值定理，根据(18)中 A, B 的定义，我们注意到

$$\int_M |\nabla_g w|^2 + \int_{\partial M} B w^2 + \int_M A w^2 \leqslant 0.$$

由此可得 $w = 0$，因此 $u_- \leqslant u_1$。通过对（19）与上解作差，我们用非常类似的论证得出 $u_+ \geqslant u_1$。

归纳地，我们可以假设解 u_1，.....， u_k 存在，且满足

$$u_- \leqslant u_k \leqslant u_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant u_1 \leqslant u_0.$$

¯通过第一步迭代中的同样论证，我们得出 $u_{k+1} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 存在；此外， u_{k+1} 满足

$$u_- \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant u_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant u_1 \leqslant u_0.$$

因此 我们证明了（19）的解序列存在，且具有单调性 y

$$u_- \leqslant \ldots \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant u_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant u_0, k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

现在我们证明$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar{M})}$的一致有界性。由于 $q > n$，证明$\|u_k\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\bar{M})}$ 的一致有界性，等价于证明$\|u_k\|_{W^{2,q}(M,g)}$的一致有界性。我们已经提到，该算子可逆，因此适用 $W^{s,q}$ 型估计 (7)。我们将 L 和边界条件 c 定义为此处的算子，其对应的常数为 γ'。仿照

定理 [18, 2.4], 中有界性的证明，我们应要求 σ 和 $\sup_{\bar{M}}|G(\cdot,u)|$，以及 $\sup_{\bar{M}}|\nabla G(\cdot,u)|$ 足够小。记

$$\begin{aligned} C &= \sup_{x\in\bar{M},u(x)\in[\min_{\bar{M}} u_-,\max_{\bar{M}} u_+]} |F(x,u(x))|; \\ D_1 &= \sup_{x\in\bar{M},u(x)\in[\min_{\bar{M}} u_-,\max_{\bar{M}} u_+]} |G(x,u(x))|\,; \\ D_2 &= \sup_{x\in\bar{M},u(x)\in[\min_{\bar{M}} u_-,\max_{\bar{M}} u_+]} |\nabla G(x,u(x))|\,; \end{aligned} \tag{21}$$

我们要求 $G(\cdot,u_+)$ D_1, D_2 满足

$$\begin{aligned} &\left\|(B-\sigma)\,u_+ + G\,(\cdot,u_+)\right\|_{W^{1,q}(M,g)} \leqslant 1; \\ &(B-\sigma)\cdot\gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right)+D_1\cdot\mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + D_2\cdot\gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right)\leqslant 1. \end{aligned} \tag{22}$$

由 (7) 和 (22) 中的第一个不等式，结合带有 $k=1$ 的偏微分方程 (19)，可得

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{W^{2,q}(M,g)} &\leqslant \gamma'\left(\|Au_+ + F(\cdot,u_+)\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \left\|(B-\sigma)\,u_+ + G\,(\cdot,u_+)\right\|_{W^{1,q}(M,g)}\right) \\ &\leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}|u_+|+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right) \\ &\leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right). \end{aligned}$$

归纳地，假设

$$\|u_k\|_{W^{2,q}(M,g)} \leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right). \tag{23}$$

为验证 $\|u_{k+1}\|_{W^{2,q}(M,g)}$，我们再次对 (19) 的解应用 $W^{s,q}$ 型椭圆估计，

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\|_{W^{2,q}(M,g)} &\leqslant \gamma'\left(\|Au_k + F(\cdot,u_k)\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \left\|(B-\sigma)\,u_k + G\,(\cdot,u_k)\right\|_{W^{1,q}(M,g)}\right) \\ &\leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\quad + \gamma'\left((B-\sigma)\|u_k\|_{W^{1,q}(M,g)} + \|G(\cdot,u_k)\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \|\nabla G(\cdot,u_k)\|_{\mathcal{L}^q(M,g)}\right) \\ &\leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\quad + \left(\gamma'\right)^2(B-\sigma)\left(A\max_{\bar{M}}\left((|u_+|,|u_-|)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right) \\ &\quad + \gamma' D_1\cdot\mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}} + \left(\gamma'\right)^2 D_2\left(A\max_{\bar{M}}\left((|u_+|,|u_-|)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right) \\ &\leqslant \gamma'\left(\left(A\max_{\bar{M}}\left(|u_+|,|u_-|\right)+C\right)\cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}+1\right). \end{aligned}$$

由此可知，$\|u_k\|_{W^{2,q}(M,g)}$ 是一致有界的。其余论证，包括应用阿尔泽拉–阿斯科利定理、利用序列的单调性以及椭圆正则性，与[18, 定理 2.4]中的基本相同。此处省略细节。

总之，序列 u_k 经典收敛到一个光滑函数 u，该函数满足（17）。此外，$u_- \leqslant u \leqslant u_+$ 在 M上逐点成立。□

注 2.3。取 $F(\cdot,u) = -R_g u + Su^{p-1}$和$G(\cdot,u) = -\frac{2}{p-2}h_g u + \frac{2}{p-2}Hu^{\frac{p}{2}}$，定理 2.2 是定理 2.3 的一个特例。

3. Prescribed Scalar and Mean Curvature Functions under Pointwise Conformal Deformation When $\eta_1 < 0$

回顾带 Robin 边界条件的 Yamabe 方程

$$-a\Delta_g u + R_g u = Su^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2}h_g u = \frac{2}{p-2}Hu^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{24}$$

本节中，我们考虑在给定函数 $S, H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足 $\eta_1 < 0$ 的条件下，方程 (24) 的解的存在性。特别地，我们将讨论以下情形：

(i). $S < 0$属于 M，且 $H \leqslant 0$在 ∂M, $H \not\equiv 0$ 上处处成立，其中 $\eta_1 < 0$; (ii). $S < 0$ 属于 M，且 $H > 0$在 ∂M 上某处成立，其中 $\eta_1 < 0$; (iii). S在 M 中变号，且 H在 ∂M 上任意，其中 $\eta_1 < 0$。

请注意，上述情形（ii）涵盖了 $H > 0$ 在 ∂M 上处处成立或 $\int_{\partial M} H dS >$为 0 的可能性。还请注意，情形 $S < 0$ 在 M 中处处成立且 $H = 0$ 在 ∂M 上成立的情况已在 [19] 中讨论。对于情形（iii），显然我们必须对 S 和 H 施加一些限制，稍后将会看到；尤其是，由于 Kazdan 和 Warner [10], S 不能自由选取。第一个结果涉及情形 (i)。

定理 3.1. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M, $n =$ 维数为 $M \geqslant 3$ 的紧流形。设 $S_1 < 0$是 M 上的任意光滑函数。设 $H_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足 $H_1 < 0$在 ∂M 上处处成立。若 $\eta_1 < 0$, 则存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得 (24) 存在一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$, 且满足 $S = S_1$ 和 $H = cH_1$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = u^{p-2}g$，使得 $R_{\tilde{g}} = S_1$ 且 $h_{\tilde{g}} = cH_1 \Big|_{\partial M}$.

证明. 根据 Han-Li 猜想 [17, 定理], 的证明，我们可以假设 $h_g = h > 0$ 且$R_g < 0$。由于 $\eta_1 < 0$, 可得 $\eta_{1,\ \beta} < 0$，其中正常数 $\beta > 0$ 足够小；这是由命题 2.3 得出的。φ 的任意常数倍都是 (15) 的解。记 $\phi = \delta\varphi$，我们选取足够小的常数$\delta > 0$，使得

$$\eta_{1,\beta} \inf_{\bar{M}} \varphi \geqslant \delta^{p-2} \cdot \inf_{\bar{M}} S_1 \cdot \sup_{\bar{M}} \varphi^{p-1}.$$

这是可行的，因为 $\eta_{1,\ \beta}$ 和 S_1 都是负函数。因此

$$-a\Delta_g \phi + R_g \phi = \eta_{1,\beta}\phi \leqslant S_1 \phi^{p-1} \text{ in } M.$$

固定这个 δ。我们检查边界条件

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2}h_g \phi = -\beta \cdot \frac{2}{p-2}\phi \leqslant \frac{2}{p-2} \cdot (cH_1)\, \phi^{\frac{p}{2}}$$

当正常数 $c > 0$ 足够小时。再次说明，这是可行的，因为 $-\beta$ 和 H_1 都是负的。我们设

$$u_- := \phi. \tag{25}$$

上述论证表明，当 c 足够小时，u_- 是方程 (24) 的下解，其中 $S = S_1$ 和 $H = cH_1$。对于上解，我们设

$$u_+ := C \gg 1. \tag{26}$$

当 C 足够大时，我们有

$$-a\Delta_g u_+ + R_g u_+ = R_g C \geqslant S_1 C^{p-1} \text{ in } M.$$

由于 $H_1 < 0$，很容易验证，对于任意 $c > 0$，我们有

$$-\frac{\partial u_+}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u_+ \geqslant 0 > \frac{2}{p-2} (cH_1) u_+^{\frac{p}{2}}.$$

我们可以增大 C，使得 $C \geqslant \sup_{\bar{M}} u_-$。最后，如有必要，我们缩小 c，因为在定理 2.2 的证明中，我们要求指定平均曲率函数的上确界范数足够小。由于 $0 < u_- \leqslant u_+$，且 u_+ 和 u_- 都是光滑函数，由定理 2.2 可知，对于足够小的 $c > 0$，(24) 有一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，满足 $S = S_1$ 和 $H = cH_1$。□

现在我们考虑本节开头的情形（ii）。实际上，证明与上面的定理 3.1 非常相似。

定理 3.2. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M 的紧流形，$n = \dim M \geqslant 3$。设 $S_2 < 0$ 是 M 上任意一个光滑函数。设 $H_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足 $H_2 > 0$ 在 ∂M 上某处成立。若 $\eta_1 < 0$，则存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得 (24) 有一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，满足 $S = S_2$ 和 $H = cH_2$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = u^{p-2} g$ 使得 $R_{\tilde{g}} = S_2$ 和 $h_{\tilde{g}} = cH_2 \Big|_{\partial M}$.

证明。下解的选取与定理 3.1 中完全相同。固定下解 u_-后，我们选取 $u_+ = C \gg 1$，使得 $C \geqslant u_-$，并且也足够大，从而定理 3.1 中的相同论证成立。从现在起固定这个 C。唯一的区别是，由于 $H_2 > 0$ 在某处，我们可能需要在必要时缩小 c，使得

$$\frac{\partial C}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g C \geqslant \frac{2}{p-2} \cdot \sup_{\partial M} (cH_2) C^{\frac{p}{2}}$$

其余论证与定理 3.1 中完全相同。□

注 3.1。单调迭代格式的方法有其局限性，由于技术问题，我们无法使指定的平均曲率为 H，参见 [18, 定理 2.4]。

现在我们讨论情形（iii）。以下论证受到 Kazdan 和 Warner [10] 的启发。当 $\eta_1 < 0$ 时，Kazdan 和 Warner 指出，关键在于求得式 (24) 的上解，前提是我们不采用变分方法，而采用单调迭代格式。下面的结果表明，式 (24) 的一个上解可以转化为另一种关系。我们指出，以下结果并非仅适用于 $\eta_1 < 0$ 情形。

引理 3.1. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M，$n = \dim M$ 维数 $M \geqslant 3$ 的紧流形。设 $S, H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。则存在某个正函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，满足

$$-a\Delta_g u + R_g u \geqslant S u^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u \geqslant \frac{2}{p-2} H u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M \tag{27}$$

当且仅当存在某个正函数 $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$，满足

$$-a\Delta_g w + (2-p) R_g w + \frac{(p-1)a}{p-2} \cdot \frac{|\nabla_g w|^2}{w} \leqslant (2-p) S \text{ in } M, \frac{\partial w}{\partial \nu} - 2 h_g w \leqslant -2 H w^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

此外，(27) 中的等式成立，当且仅当 (28) 中的等式成立。

证明. 假设存在一个满足 (27) 的正函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$。定义

$$w = u^{2-p}.$$

注意，由假设可知 $2 - p = -\frac{4}{n-2} < 0$ since $n \geqslant 3$。我们计算得

$$\nabla w = (2-p) u^{1-p} \nabla u \Leftrightarrow \nabla u = u^{p-1} (2-p)^{-1} \nabla w,$$

and

$$\Delta_g w = (2-p)u^{1-p}\Delta_g u + (2-p)(1-p)u^{-p}|\nabla_g u|^2.$$

由不等式 (27)，可得

$$\begin{aligned} a\Delta_g w &= (2-p)u^{1-p}\left(a\Delta_g u\right) + a(2-p)(1-p)u^{-p}|\nabla_g u|^2 \\ &\geqslant (p-2)u^{1-p}\left(-R_g u + Su^{p-1}\right) + a(2-p)(1-p)(2-p)^{-2}u^{2p-2}u^{-p}|\nabla_g v|^2 \\ &= (p-2)S + (2-p)R_g u^{1-p} + \frac{a(p-1)}{p-2}u^{p-2}|\nabla_g v|^2 \\ &= (p-2)S + (2-p)R_g w + \frac{a(p-1)}{p-2}\frac{|\nabla_g w|^2}{w}. \end{aligned}$$

将 $(p-2)S$ 移到等式左边，并将 $a\Delta_g w$ 移到右边，我们得到不等式（28）的第一部分。对于边界条件，回忆 $u = w^{\frac{1}{2-p}}$ 和 $p = \frac{2n}{n-2}$，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2}Hu^{\frac{p}{2}} \geqslant \frac{2}{p-2}h_g u \Leftrightarrow \frac{1}{2-p}w^{\frac{1}{2-p}-1}\frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2}h_g w^{\frac{1}{2-p}} \geqslant \frac{2}{p-2}Hw^{\frac{p}{2(2-p)}} \\ \Leftrightarrow &-\frac{n-2}{4}w^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{n-2}{2}h_g w^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \geqslant \frac{n-2}{2}Hw^{-\frac{n}{4}} \\ \Leftrightarrow &\frac{\partial w}{\partial \nu} - 2h_g w \leqslant -2Hw^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此，（28）的第二部分成立。显然，当且仅当上述所有不等式均为等式时，等式成立。

[1]如果我们对某个 w假设（28）成立，只需定义 $u = w^{\frac{1}{2-p}}$即可。论证非常相似，细节从略。□

现在我们介绍情形（iii）下预设标量曲率函数和平均曲率函数的结果，并附加一个与 Kazdan 和 Warner 所给条件非常相似的技术性限制。原则上，这一技术条件用于证明满足（28）的函数的正性。由于 Han-Li 猜想 [17, 定理], ，我们可以假设初始度量 g 具有 $R_g = \lambda < 0$和 $h_g = \zeta > 0$，因为 $\eta_1 < 0$。在开始讨论特殊情形之前，回忆一下：如果存在一个常数 $q > n$，以及某个函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足

$$\|u\|_{W^{2,q}(M,g)} \leqslant \gamma'\left(\|F_1\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \|F_2\|_{W^{1,q}(M,g)}\right)$$

对于某些函数 $F_1 \in \mathcal{L}^q(M,g)$ 和 $F_2 \in W^{1,q}(M,g)$，H¨older 估计表明

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} \leqslant \gamma\left(\|F_1\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \|F_2\|_{W^{1,q}(M,g)}\right). \tag{29}$$

这个不等式源于 [1, §2] 中的 Sobolev 嵌入。

定理 3.3。设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M，$n =$维数 $M \geqslant 3$ 的紧流形。假设 $\eta_1 < 0$，$R_g = \lambda < 0$，并且 $h_g = \zeta > 0$，其中 λ 和 ζ 为某些常数。令 $S_3, H_3 \in \mathcal{C}^\infty(M)$，且 $q > n$ 为正整数。令 γ 为估计式（29）中的常数。设$D = {}_{(p-1)}{}_{p-2}{}^{a}$。若存在函数 $F \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M})$ 和正常数 $A > 0$，使得

$$(2-p)S_3 \geqslant F \text{ on } \partial M, \|F - A\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} \leqslant \frac{A}{2\gamma\left(1 + (D+1)(2-p)\lambda\right)}, \tag{30}$$

那么，存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得 (24) 存在一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，且满足 $S = S_3$ 和 $H = cH_3$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = u^{p-2}g$，使得 $R_{\tilde{g}} = S_3$和 $h_{\tilde{g}} = cH_3\Big|_{\partial M}$。

证明. 在本证明中，我们始终记 $R_g = \lambda$ 和 $h_g = \zeta$。我们首先构造 (24) 的上解。根据引理 3.1，只需证明存在某个正函数 $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$，使得对于某个常数 c，(28) 对 $S = S_3$ 和 $H = cH_3$ 成立。取

$$\delta := \frac{A}{(1 + (D+1)(2-p)\lambda)} > 0.$$

我们还选取一个负常数

$$\delta' = -\frac{\delta}{2\gamma \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}}} < 0.$$

By 根据标准椭圆理论，存在以下偏微分方程的唯一解 w

$$-a\Delta_g w + (2-p)\lambda w = F - \delta \text{ in } M, \frac{\partial w}{\partial \nu} = \delta' \text{ on } \partial M.$$

唯一性源于 $(2-p)\lambda > 0$ 这一事实，这意味着算子 $\left(-a\Delta_g + (2-p)\lambda, \frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ 可逆。显然，常数 $(D+1)\delta$ 是该偏微分方程的解

$$-a\Delta_g((D+1)\delta) + (2-p)\lambda \cdot ((D+1)\delta) = (2-p)\lambda \cdot ((D+1)\delta) \text{ in } \partial M, \frac{\partial((D+1)\delta)}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial M.$$

记

$$w_0 := w - (D+1)\delta.$$

函数 w_0 满足

$$\begin{aligned} -a\Delta_g w_0 + (2-p)\lambda w_0 &= F - \delta - (D+1)(2-p)\lambda\delta = F - A \text{ in } M, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \delta' \text{ on } \partial M. \end{aligned} \tag{31}$$

(31) 的第一行由 δ 的定义得到。由于带边界算子的微分算子是可逆的，我们应用 $W^{s,\,q}$ 型椭圆估计 (7)，以及 (29) 中的估计，

$$\begin{aligned} \|w_0\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} + \|\nabla w_0\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} &\leqslant \gamma \left(\|F - A\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} + \|\delta'\|_{W^{1,q}(M,g)} \right) \\ &\leqslant \gamma \left(\frac{A}{2\gamma \left(1 + (D+1)(2-p)\lambda\right)} + |\delta'| \cdot \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &\leqslant \delta. \end{aligned} \tag{32}$$

最后一个不等式由 δ 和 δ' 的定义得到。根据 w_0 的定义，该不等式意味着 (32)

$$\|w - (D+1)\delta\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} \leqslant \delta, \|\nabla w\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{\Omega})} \leqslant \delta.$$

由此可得

$$0 < D\delta \leqslant w \leqslant (D+2)w \text{ on } \bar{M}, \sup_{\bar{M}} |\nabla w| \leqslant \delta \Rightarrow \frac{(p-1)a}{p-2} \cdot \frac{|\nabla w|^2}{w} \leqslant \delta \text{ on } \bar{M}. \tag{33}$$

结合 (36) 和 (33)，我们有

$$\begin{aligned} &-a\Delta_g w + (2-p)\lambda w + \frac{(p-1)a}{p-2} \cdot \frac{|\nabla w|^2}{w} = F - \delta + \frac{(p-1)a}{p-2} \cdot \frac{|\nabla w|^2}{w} \\ \leqslant &(2-p)S_3; \\ &\frac{\partial w}{\partial \nu} - 2h_g w = \delta' - 2h_g w \leqslant -2 \cdot (cH_3)\, w^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

无论 H_3 的符号如何，只要常数 $c > 0$ 足够小，最后一个不等式就成立，因为根据设定有 $\delta' - 2h_g w < 0$。再次由（33），我们得出 $w > 0$ 在 $\bar{M}$ 上。由引理 3.1，正的光滑函数

$$u = w^{\frac{1}{2-p}}$$

是方程（24）的上解，其中 $S = S_3$ 和 $H = cH_3$。注意，如果我们减小 c， u 仍然是上解。

对于下解，我们再次应用命题 2.3 中的扰动特征值问题。存在一个足够小的常数 $\beta > 0$，使得

$$-a\Delta_g\varphi + \lambda\varphi = \eta_{1,\beta}\varphi \text{ in } M, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \frac{2}{p-2}(\zeta+\beta)\varphi = 0 \text{ on } \partial M. \tag{34}$$

φ 的任意缩放都满足（35）。取正常数 $\xi \ll 1$，使得

$$\phi := \xi\varphi \leqslant u \text{ on } \bar{M}$$

对于固定的 s 上方刚定义的上解 u。如有必要，我们进一步缩小 ξ，使得

$$\eta_{1,\beta}(\xi\varphi) \leqslant S_3(\xi\varphi)^{p-1} \text{ in } M, -\frac{2}{p-2}\cdot\beta(\xi\varphi) \leqslant \frac{2}{p-2}\cdot(cH_3)\cdot(\xi\varphi)^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{35}$$

注意，只要取足够小的 ξ，对于任意 c，边界条件都成立。我们指出，常数 c 的选取取决于上解的构造以及单调迭代格式的技术条件；后者只依赖于上解，而不依赖于下解，参见 [18] 中的方程（19）。因此，我们可以先选取 c，再确定 ξ。由此可知， ϕ 是方程（24）的一个下解，其中 $S = S_3$ 和 $H = cH_3$。此外，在 M 上， $0 < \phi \leqslant u$ 。应用定理 2.2，可得存在所需的正函数 $u \in \mathcal{C}^\infty$（M）。□

当 $\eta_1 < 0$ 时，一般情形可直接由上述结果推出。

推论 3.1. 设 (M, g) 是具有非空光滑边界 ∂M， $n =$ 维数 $M \geqslant 3$ 的紧流形。设 $S_4, H_4 \in \mathcal{C}^\infty(M)$，且 $q > n$ 为正整数。设 γ 为估计式（29）中的常数， λ 为某个负常数。令 $D = {}_{(p-1)_{p-2}}{}^{a}$。假设 $\eta_1 < 0$。若存在函数 $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和正常数 $A > 0$，使得

$$(2-p)S_4 \geqslant F \text{ on } \partial M, \|F - A\|_{\mathcal{L}^q(M,g)} \leqslant \frac{A}{2\gamma(1+(D+1)(2-p)\lambda)}, \tag{36}$$

则存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得 (24) 存在一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，满足 $S = S_4$ 和 $H = cH_4$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = u^{p-2}g$，使得 $R_{\tilde{g}} = S_4$ 和 $h_{\tilde{g}} = cH_4\Big|_{\partial M}$。

证明。根据 Han-Li 猜想 [17, 定理]，，存在一个共形度量 $g_1 = v^{p-2}g$，使得 $R_{g_1} = \lambda$ 且 $h_{g_1} = \zeta$。接着，我们对度量 g_1应用定理 3.3，即存在 $\tilde{g} = u^{p-2}g_1$，满足 $R_{\tilde{g}} = S_4$，并且 $h_{\tilde{g}} = cH_4$，其中 $c > 0$足够小。共形变换

$$\tilde{g} = (uv)^{p-2}g$$

就是所需的度量。 □

4. Prescribed Scalar and Mean Curvature Functions for Conformal Equivalent Metrics When $\eta_1 < 0$

受闭流形上的“三分定理”启发，我们希望讨论紧流形 (M, g) 上预先指定的标量曲率与平均曲率问题，其中 $n =$ 维数为 $M \geqslant 3$，但不局限于某个共形类 $[g]$。相反，我们关注的是共形等价度量。

定义 4.1. 设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M 的紧流形。若存在一个正的光滑函数 $u\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 和一个微分同胚 $\phi\colon M\to M$，使得

$$\phi^*\tilde{g}=u^{p-2}g.$$

在一个共形类中，对于给定函数 $S,H\in\mathcal{C}^\infty(M)$，标量曲率与平均曲率指定问题可化为偏微分方程 (1)。对于共形等价度量，标量曲率与平均曲率指定问题可化为以下偏微分方程存在正的光滑解的问题

$$-a\Delta_g u+R_g u=(S\circ\phi)\,u^{p-1}\text{ in }M,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+\frac{2}{p-2}h_g u=\frac{2}{p-2}\cdot(H\circ\phi)\cdot u^{\frac{p}{2}}\text{ on }\partial M. \tag{37}$$

我们的下一个结果将闭流形上维数至少为 3 [10, Thm. 3.3] 的指定标量曲率问题的结果，推广到具有非空光滑边界的紧流形，条件是带罗宾边界条件的共形拉普拉斯算子的第一特征值 η_1 为负。该方法本质上源自 Kazdan 和 Warner [8, 10]。

定理 4.1. 设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M，$n=$ 、维数为 $M\geqslant 3$ 的紧流形。设 S_5 是 M 上一个在 M 某处为负的任意光滑函数。令 $H_5\in\mathcal{C}^\infty(M)$，且 $q>n$ 为正整数。若 $\eta_1<0$，则存在充分小的常数 $c>0$ 和一个微分同胚 $\phi\colon M\to M$，使得 (37) 存在一个正解 $u\in\mathcal{C}^\infty(M)$，满足 $S=S_5$ 和 $H=cH_5$。等价地，存在一个共形等价度量 $\tilde{g}=\left(\phi^{-1}\right)^*\left(u^{p-2}g\right)$，使得 $R_{\tilde{g}}=S_5$ 和 $h_{\tilde{g}}=cH_5\Big|_{\partial M}$。

证明。根据 Han-Li 猜想 [17, 定理], ，我们可以假设 $R_g=\lambda<0$ 且 $h_g=\zeta>0$，其中常数为 λ、ζ。固定一个常数 $q>n$。由定理 3.3，只需找到一个 微分同胚 $\phi\colon M\to M$、一个光滑函数 $F\in\mathcal{C}^\infty(M)$、一个正常数 $A>0$ 以及一个足够小的正常数 c，使得

$$(2-p)S_5\circ\phi\geqslant F\text{ on }\bar{M},\|F-A\|_{\mathcal{L}^q(M,g)}\leqslant\frac{A}{2\gamma\left(1+(D+1)(2-p)\lambda\right)}; \tag{38}$$

此外，$\sup_{\bar{M}}c(H\circ\phi)$ 足够小。这里，γ 是估计式（29）中的常数，常数 D 定义为

$$D=\frac{(p-1)a}{p-2}.$$

我们先确定 ϕ、F 和 A。如果 $S_5<0$ 在 M 上处处成立，我们只需取恒等映射作为 ϕ，并设

$$F=A=(2-p)\max_{\bar{M}}S_5.$$

容易验证，式（38）成立。

如果 $S_5\geqslant 0$ 在某处成立且变号，我们首先选择 A 为任意满足以下条件的正常数

$$0<A<(2-p)\min_{\bar{M}}S_5. \tag{39}$$

Jus注意，$(2-p)<0$。我们选取内部开子流形 $U,V\subset M$，使得 hat

$$V\subset\bar{V}\subset U\subset M\subset\bar{M}.$$

特别地，我们要求

$$\mathrm{Vol}_g(U-V)\leqslant\left(\frac{A}{2\gamma\left(1+(D+1)(2-p)\lambda\right)\cdot\left((2-p)\|S_3\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})}-A\right)}\right)^q. \tag{40}$$

我们选取微分同胚 ϕ 使得

$$(2-p)S_3\circ\phi > A \text{ in } U. \tag{41}$$

然后我们取函数 F 为

$$\begin{aligned} &F = A \text{ in } V;\\ &(2-p)\max_{\bar{M}} S_3\circ\phi \leqslant F \leqslant A \text{ in } U-V;\\ &F = (2-p)\max_{\bar{M}} S_3\circ\phi \text{ in } \bar{M}-U. \end{aligned} \tag{42}$$

显然，由 (42) 可知，在 M 上 $F\leqslant(2-p)S_3\circ\phi$。由 (40) 可知，函数 F 仅在 $U-V$ 上与 A 不同，因此很容易验证 (38) 中的第二个不等式成立。

最后，我们选择 c，使函数 $S_3\circ\phi$ 满足定理 2.2 中的条件，即 $c\sup_{\bar{M}}|H_5|$ 足够小。对于 $c\sup_{\bar{M}}|H_5\circ\phi|$ 足够小，同样的 c 也适用，因为微分同胚不会改变函数的极值。因此，函数 $S_3\circ\phi$ 和 $cH_5\circ\phi$ 可分别作为某个度量 $\phi^*\tilde{g}=u^{p-2}g$ 的预设标量曲率函数与平均曲率函数，其中 u 在 $\bar{M}$ 上为正且光滑。等价地，S_5 和 cH_5 可分别作为某个度量 $\tilde{g}=\left(\phi^{-1}\right)^* u^{p-2}g$ 的预设标量曲率函数与平均曲率函数。□

注 4.1. 定理 4.1 的结果表明，在维数为 $M\geqslant 3$ 的 (M,g) 上，任何在某处为负的函数都可以实现为某个度量g的标量曲率函数；同时，只要该流形存在一个其共形拉普拉斯算子第一特征值为负的度量，或者等价地，Yamabe 不变量为负 [6,§1]，g 的平均曲率函数就可以是任意光滑函数的某个足够小的倍数。

5. Prescribed Gauss and Geodesic Curvature Functions When $\chi(M) < 0$

本节讨论紧流形 (M,g) 的共形类 $[g]$ 中指定高斯曲率和测地曲率的问题。这些流形具有非空光滑边界 ∂M，并且 $\chi(M) < 0$，维数为 $M = 2$ $n =$。这是指定标量曲率和平均曲率问题在二维情形下的类比；该问题要求维数至少为 3，且 $\eta_1 < 0$。

设 $K,\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。这类 Kazdan-Warner问题可归结为以下偏微分方程存在光滑解 u

$$-a\Delta_g u + K_g = Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma_g = \sigma e^u \text{ on } \partial M. \tag{43}$$

这里，K_g 和σ_g 分别是 g的高斯曲率和测地曲率。该偏微分方程可解意味着度量 $\tilde{g}=e^{2u}g$ 的高斯曲率为 $K_{\tilde{g}}=K$，测地曲率为$\sigma_{\tilde{g}}=\sigma$。我们主要讨论两种情况：

(i). $K\leqslant 0$在 M上处处成立，且 σ任意，其中 $\chi(M) < 0$;

(ii). $K>0$ 在 M 上的某处成立且变号，σ 为任意函数，其中 $\chi(M) < 0$。

我们希望应用单调迭代格式求解（43），这等价于构造（43）的下解与上解。关键在于构造上解。与§3中一样，我们将（43）的上解转化为另一个涉及导数的不等式。

引理 5.1。设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M，$n=$的紧流形，维数为 $M=2$。设 K，$\sigma\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。则存在某个函数 $u\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 满足

$$-\Delta_g u + K_g \geqslant Ke^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma_g \geqslant \sigma e^u \text{ on } \partial M \tag{44}$$

¯当且仅当存在某个正函数 $w \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 满足

$$-\Delta_g w - 2wK_g + \frac{|\nabla_g w|^2}{w} \leqslant -2K \text{ in } M, \frac{\partial w}{\partial \nu} - 2w\sigma_g \leqslant -2\sigma w^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{45}$$

此外，当且仅当 (45) 中的等式成立时，(44) 中的等式才成立；当且仅当 (45) 中的不等式方向相反时，(44) 中的不等式方向才相反。

证明。首先，假设某个函数 u 满足 (44)。定义

$$w := e^{-2u}$$

我们注意到

$$\begin{aligned}
&\nabla_g w = -2e^{-2u}\nabla_g u \Rightarrow \nabla_g u = -\frac{1}{2}e^{2u}\nabla_g w,\\
&\Delta_g w = -2e^{-2u}\Delta_g u + 4e^{-2u}|\nabla_g u|^2 = -2e^{-2u}\Delta_g u + e^{2u}|\nabla_g w|^2.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
-\Delta_g w = 2e^{-2u}\Delta_g u - e^{2u}|\nabla_g w|^2 &\leqslant 2e^{-2u}\left(K_g - Ke^{2u}\right) - \frac{|\nabla_g w|^2}{w}\\
&= 2wK_g - 2K - \frac{|\nabla_g w|^2}{w}\\
\Rightarrow -\Delta_g w - 2wK_g + \frac{|\nabla_g w|^2}{w} &\leqslant -2K \text{ in } M.
\end{aligned}$$

对于边界条件，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial e^{-2u}}{\partial \nu} &= -2e^{-2u}\frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant -2e^{-2u}\left(-\sigma_g + \sigma e^{u}\right)\\
&= 2w\sigma_g - 2\sigma w^{\frac{1}{2}}\\
\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \nu} - 2w\sigma_g &\leqslant -2\sigma w^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M.
\end{aligned}$$

因此， $w = e^{-2u} > 0$ on $\bar{M}$成立。显然，当上述所有不等式均为等式时，等式成立。同样容易看出，当且仅当上述每一步中的不等式方向均相反时，这些不等式的方向才会相反。

对于相反方向，我们假设（45）对某个正的光滑函数 w成立。定义

$$u = -\frac{1}{2}\log w.$$

我们可以证明， u 满足（44）。论证与上文非常相似，细节从略。□

由于一致化定理，从现在起，我们可以假设（43）中的 $K_g = -1$ and $\sigma_g = 0$ 是我们的模型情形，经过某个逐点共形变换后，直到某一点为止，前提是 $\chi(M) < 0$。在二维情形中，我们还可以得到定理 2.1 中的 $W^{s,q}$-型估计。取 $q = 3$，结合（7）中的估计以及嵌入 H¨older 空间的 Sobolev 嵌入，不等式（29）变为

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} \leqslant \gamma\left(\|F_1\|_{\mathcal{L}^3(M,g)} + \|F_2\|_{W^{1,3}(M,g)}\right). \tag{46}$$

此处的 F_1、 F_2 和 u 来自带有算子 $L = -\Delta_g + 2$ 和 $B = \frac{\partial}{\partial \nu}$ 的偏微分方程 (6)，因此 γ 是常数。本节的主要结果如下，它涵盖了本节开头的情形 (i) 和情形（ii）。

¯定理 5.1. 设 (M,g) 是具有非空光滑边界 ∂M 的紧黎曼曲面。¯设 K_1、$\sigma_1 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为给定函数。设 γ 为估计 (46) 中的常数。假设 _ _$\chi(M) < 0$。如果存在函数 $F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和正常数 $A > 0$，使得

$$-2K_1 \geqslant F \text{ on } \partial M, \|F - A\|_{\mathcal{L}^3(M,g)} \leqslant \frac{A}{6\gamma}, \tag{47}$$

¯那么，存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得 (43) 存在一个正解 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，且满足 $K = K_1$ 和 $\sigma = c\sigma_1$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = e^{2u}g$，使得 $K_{\tilde{g}} = K_1$ 和 $\sigma_{\tilde{g}} = c\sigma_1\Big|_{\partial M}$。

证明。证明过程与定理 4.1 基本相同。根据引理 43，上解的构造等价于构造一个函数 w，使其对 K_1、σ_1 以及某个足够小的正常数 c 满足 (45)。令

$$\delta = \frac{A}{3}, \delta' = -\frac{\delta}{2\gamma \mathrm{Vol}_g(M)^{\frac{1}{3}}}. \tag{48}$$

该偏微分方程有唯一解

$$-\Delta_g w + 2w = F - \delta \text{ in } M, \frac{\partial w}{\partial \nu} = \delta' \text{ on } \partial M.$$

定义

$$w_0 = w - 2\delta,$$

由此可得，w_0 满足该偏微分方程

$$-\Delta_g w_0 + 2w_0 = F - 3\delta = F - A \text{ in } M, \frac{\partial w_0}{\partial \nu} = \delta' \text{ on } \partial M. \tag{49}$$

将估计 (46) 应用于 (49) 中的 w_0，可得

$$\|w_0\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} + \|\nabla w_0\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} \leqslant \gamma \left(\|F - A\|_{\mathcal{L}^3(M,g)} + \|\delta'\|_{W^{1,3}(M,g)} \right) \leqslant \delta.$$

根据 w_0 的定义可得

$$0 < \delta \leqslant w \leqslant 3\delta \text{ on } \bar{M}, \|\nabla w\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} \leqslant \delta.$$

因此我们得出

$$-\Delta_g w + 2w + \frac{|\nabla w|^2}{w} = F - \delta + \frac{|\nabla w|^2}{w} \leqslant F \leqslant -2K_1 \text{ in } M.$$

此外，我们取足够小的 c，使得

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \delta' \leqslant -2c\sigma_1 w^{\frac{1}{2}} \text{ on } \partial M.$$

这是可行的，因为 $\delta' < 0$。由此可得函数

$$u_+ := -\frac{1}{2}\log w$$

¯是方程 (43) 的上解，其中 $K = K_1$ 和 $\sigma = c\sigma_1$。显然，$u_+ \in \mathcal{C}^\infty$（$M$）。

现在我们构造一个下解。考虑偏微分方程

$$-\Delta_g u_0 = \frac{1}{2} \text{ in } M, \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = C \text{ on } \partial M.$$

根据标准椭圆型偏微分方程理论（例如见 [14, 第 7.7 命题，第 4], 章），上述偏微分方程存在某个光滑函数 $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\bar{M})$ 作为解，条件是 $-\int_M \frac{1}{2} d\mathrm{Vol}_g = \int_{\partial M} C dS_g$。我们选取常数 $C < 0$，使得上述相容条件成立。显然

$$u_- := u_0 + C_1$$

求解偏微分方程 ab 对任意常数 C_1 也成立。我们只需将 C_1 取为充分大的负值，使得

$$u_- \leqslant u_+ \text{ on } \partial M;$$

此外，

$$-\Delta_g u_- - 1 = -\frac{1}{2} \leqslant K_1 e^{2u_-} = K_1 e^{2u_0} \cdot e^{2C_1} \text{ in } M,$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = C \leqslant c\sigma_1 e^{u_-} = c\sigma_1 e^{u_0} \cdot e^{C_1} \text{ on } \partial M.$$

由于不等式左侧的常数均为负数，因此可以做到这一点。注意，只需调整常数C_1 ，上解和下解在较小的常数 c 下仍然成立。

注意，当 $F(\cdot, u) = K_1 e^{2u} + 1$、 $G(\cdot, u) = c\sigma_1 e^u$时，条件 (22) 与下解 u_- 无关，正如我们在 Yamabe 方程的定理 2.2 中看到的非常相似的情形。因此，我们取足够小的 c ，使定理 2.3 中的假设成立。由此可知，存在某个光滑函数 u ，它满足 (43)，且 $K = K_1$ 和 $\sigma = c\sigma_1$。□

对于我们关注的两种情形，我们可以给出部分回答。对于情形（ii），并非每个变号函数都能作为指定标量曲率函数，除非它不会过于频繁地取较大的正值。我们证明，处处为负的每个函数都可以实现为标量曲率函数；同时，在逐点共形变形下，任意函数乘以足够小的系数后，都可以实现为指定平均曲率函数。这就是情形 (i)。

推论 5.1. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M 的紧黎曼曲面。

设 $K_2, \sigma_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 是给定函数。假设 $K_2 < 0$ 在 M 上处处成立。如果 $\chi(M) < 0$，则存在一个足够小的常数 c，以及一个光滑函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，使得 u 满足方程 (43)，且 $K = K_2$ 和 $\sigma = c\sigma_2$。等价地说，度量 $\tilde{g} = e^{2u} g$ 的高斯曲率为 $K_{\tilde{g}} = K_2$ ，测地曲率为 $\sigma_{\tilde{g}} = c\sigma_2$。

证明。我们证明条件 (47) 成立。由于 $K_2 < 0$ 处处成立，我们只需选择 e

$$F = A = -2 \max_M K_2 \Rightarrow -2K_2 \geqslant F, \|F - A\|_{\mathcal{L}^3(M,g)} = 0.$$

我们只需选择足够小的 c ，使得定理 5.1 和定理 2.3 的假设成立。□

对于情形（ii），考虑共形等价度量这一类，我们可以得到更全面的答案。与 §4 类似，我们要寻找一个度量 $\tilde{g} = \left(\phi^{-1}\right)^* e^{2u} g$ ，其中有某个微分同胚 $\phi: M \to M$ 以及光滑函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$，使得 $\tilde{g}$ 的标量曲率和平均曲率分别为给定函数 K、$\sigma \in \mathcal{C}^\infty(M)$。该问题可化归为偏微分方程

$$-\Delta_g u + K_g = (K \circ \phi)\, e^{2u} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_g u = (\sigma \circ \phi)\, e^u \text{ on } \partial M. \tag{50}$$

类似于维数至少为 3 时的定理 4.1，我们针对紧黎曼曲面给出以下结果。

推论 5.2. 设 (M, g) 是一紧黎曼曲面，其光滑边界 ∂M 非空。令 $\sigma_3 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为任意函数， $K_3 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 为在 M 某处取负值的函数。

若 $\chi(M) < 0$，则存在一个足够小的常数 c、一个光滑函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 以及一个微分同胚 ϕ: $M \to M$，使得 u 满足带有 $K = K_3$ 和 $\sigma = c\sigma_3$ 的方程 (50)。这等价于说，度量 $\tilde{g} = \left(\phi^{-1}\right)^* e^{2u} g$ 的高斯曲率为 $K_{\tilde{g}} = K_3$ ，测地曲率为 $\sigma_{\tilde{g}} = c\sigma_3$。

证明。证明与定理 4.1 中的证明基本相同。我们首先确定 ϕ, F, A，使得 (47) 成立；然后确定常数 c。我们可以假设 K_3 在某处取负值，但并非处处为负；否则，该问题便归结为推论 5.1 的结果。

我们首先选取任意一个满足以下条件的正常数 A

$$0 < A < -2 \min_{\bar{M}} K_3. \tag{51}$$

我们选取内部开子流形 U、$V \subset M$，使其满足以下条件

$$V \subset \bar{V} \subset U \subset M \subset \bar{M}.$$

特别地，我们要求

$$\mathrm{Vol}_g(U - V) \leqslant \left(\frac{A}{6\gamma \cdot \left(2\|K_3\|_{\mathcal{L}^\infty(\bar{M})} - A \right)} \right)^3. \tag{52}$$

我们选取微分同胚 ϕ，使其满足以下条件

$$-2K_3 \circ \phi > A \text{ in } U. \tag{53}$$

然后，我们令函数 F 为

$$\begin{aligned} &F = A \text{ in } V; \\ &-2 \max_{\bar{M}} K_3 \circ \phi \leqslant F \leqslant A \text{ in } U - V; \\ &F = -2 \max_{\bar{M}} K_3 \circ \phi \text{ in } \bar{M} - U. \end{aligned} \tag{54}$$

显然，根据 (54)，$F \leqslant -2K_3 \circ \phi$ 在 M 上成立。由 (52) 可知，函数 F 仅在 $U - V$ 上与 A 不同，因此很容易验证 (47) 中的第二个不等式成立。

最后，我们选取 c，使得函数 $K_3 \circ \phi$ 满足定理 2.3 中的条件，即 $c \sup_{\bar{M}} |\sigma_3|$ 足够小。由于微分同胚不会改变函数的极值，同样的 c 也适用于使 $c \sup_{\bar{M}} |\sigma_3 \circ \phi|$ 足够小。因此，函数 $K_3 \circ \phi$ 和 $c\sigma_3 \circ \phi$ 可分别作为某个度量 $\phi^* \tilde{g} = u^{p-2} g$ 的预设标量曲率函数与平均曲率函数，其中 u 在 $\bar{M}$ 上为正且光滑。等价地，K_3 和 $c\sigma_3$ 可分别作为某个度量 $\tilde{g} = \left(\phi^{-1}\right)^* u^{p-2} g$ 的预设标量曲率函数与平均曲率函数。□

注 5.1. 推论 5.2 的结果结合定理 4.1 表明，在维数为 $n = \dim M \geqslant 2$ 的 (M, g) 上，任何在某处为负的函数都可以实现为某个度量 g 的标量曲率/高斯曲率函数；同时，g 的平均曲率/测地曲率函数可以是任意光滑函数的某个足够小的倍数，前提是该流形分别具有一个共形拉普拉斯算子第一特征值为负的度量，或负欧拉示性数，具体取决于流形的维数。这改进了注 4.1 中提到的结果。

6. Prescribed Scalar and Mean Curvature Functions for Conformally Equivalent Metrics When $\eta_1 = 0$

本节讨论紧流形 (M, g) 上与度量 g 共形等价的度量的数量曲率和平均曲率指定问题，其中边界非空且光滑 ∂M，假设 $\eta_1 = 0$ 且 $n =$ 维数 $M \geqslant 3$。我们在 [18] 中对维数至少为 3 的流形在逐点共形变换下的情形进行了全面研究。这里我们考察是否存在某个光滑函数 $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 和某个微分同胚 $\phi: M \to M$，使得度量 $\tilde{g} = \left(\phi^{-1}\right)^* u^{p-2} g$ 的数量曲率为 S，平均曲率为 H，其中给定函数为

_S， $H \in \mathcal{C}^{\infty}$（$M$）。由于第一特征值为零的情形的模型情形是 $R_g = h_g = 0$，上述问题可归结为以下偏微分方程解的存在性问题

$$-a\Delta_g u = (S \circ \phi) \cdot u^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{2}{p-2} \cdot (H \circ \phi) \cdot u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{55}$$

¯回顾关于(M, g)上共形度量的标量曲率与平均曲率指定问题的结果。

¯定理6.1。 [18, 定理1。4] 设(M, g)是一个具有非空光滑边界_ _∂M的紧流形， $n =$维数为 $M \geqslant 3$。给定 $S, H \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$为非零函数。假设 $\eta_1 = 0$。若函数 S 满足

$$S \text{ changes sign and } \int_M S dVol_g < 0,$$

则存在一个逐点共形度量 $\tilde{g} \in [g]$，其数量曲率为 $R_{\tilde{g}} = S$，并且 $h_{\tilde{g}} = cH$，其中正常数 c充分小。

共形等价的情形可由定理6.1的结果推出，我们将在下文证明。注意， $S = H = 0$ 的情形是平凡情形。

¯定理 6.2. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M，$n =$¯ ¯维数 $M \geqslant 3$ 的紧流形。设给定非零函数 $S_6, H_6 \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$。假设 $\eta_1 = 0$。若函数S 满足

$$S_6 \text{ changes sign},$$

¯ ¯则存在一个微分同胚 $\phi: M \to M$ 以及一个充分小的常数 $c > 0$，使得 (55)¯存在一个关于 ϕ, $S = S_6$ 和 $H = cH_6$ 的光滑解 $u \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$。这等价于说，共形等价度量 $\tilde{g} = \left(\phi^{-1}\right)^* u^{p-2} g$ 具有数量曲率 $R_{\tilde{g}} = S_6$ 和平均曲率$h_{\tilde{g}} = cH_6$。

¯ ¯证明. 根据定理 6.1，只需证明存在一个微分同胚 ϕ: $M \to M$，使得

$$\int_M (S_6 \circ \phi)\, d\mathrm{Vol}_g < 0.$$

由于 [9, 8], 中的相同原因，显然存在这样的微分同胚，因为S_6 变号。随后， c 的足够小可由 $S_6 \circ \phi$、$\sup_{\bar{M}} |H_6|$ 以及 [18, 定理 5.1、推论 5.1、推论 5.2]的证明中下解与上解的选取决定。注意，任何¯微分同胚 ϕ 都不会改变 M上的 $|H_6|$ 上确界。□

¯ ¯注记 6.1。定理 6.2 的结果表明，在(M, g)上，当 $n =$维数为 $M \geqslant 3$ 时，任何变号函数或恒等于零的函数，都可以实现为某个度量 g的标量曲率函数；与此同时， g 的平均曲率函数可以分别是任意光滑函数的一个足够小的倍数或零函数，前提是该流形存在一个使共形拉普拉斯算子的第一特征值为零的度量，等价地说，其 Yamabe 不变量为零 [6, §1]。

7. Prescribed Scalar and Mean Curvature Functions When $\eta_1 > 0$

本节中，我们寻求以下偏微分方程的正光滑解

$$-a\Delta_g u + R_g u = S u^{p-1} \text{ in } M, \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{2}{p-2} h_g u = \frac{2}{p-2} H u^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{56}$$

¯ ¯对于带非空光滑边界的紧流形 (M, g), ∂M, $n =$维数为 $M \geqslant 3$，给定函数¯ $S, H \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$，且满足 $\eta_1 > 0$。正如我们在 [16], [17] 和 [19], 中所展示的，这里需要运用局部分析，拼接一个上解，然后应用单调迭代格式。根据 [20], 中的“三分定理”，我们预计对预设标量曲率函数与平均曲率函数的限制很少。我们将讨论以下情形：

(i). $S>0$在 M中的某处，以及 $H>0$在 ∂M上的某处，且 $\eta_1>0$;
(ii). 在 M 中的某处有 $S>0$，并且除 $H\not\equiv 0$ 外，在 ∂M 上处处有 $H\leqslant 0$，其中 $\eta_1>0$。
注意，我们已经讨论了在某处有 $S>0$ 且在 [19] 中有 $H\equiv 0$ 的情形。目前我们还不知道如何将我们的方法应用于 [7], 中提到的情形

$$-\Delta_e u=0 \text{ in } \mathbb{B}^n, \frac{\partial u}{\partial \nu}+\frac{2}{p-2}h_g u=\frac{2}{p-2}Hu^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial\mathbb{B}^n, u>0 \tag{57}$$

对于某个给定函数 H。Escobar 指出， H 的选取存在障碍

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} X\cdot\nabla_g H dS=0.$$

这里， X 是 $\partial\mathbb{B}^n$ 上的某个共形 Killing 向量场。在 $\mathbb{B}^n$ 上的标准欧几里得度量以及 $\partial\mathbb{B}^n$ 上的诱导度量下，带 Robin 边界条件的共形拉普拉斯算子的第一特征值为正。然而，由于右侧为零，我们无法得到狄利克雷问题的非平凡局部解

$$-\Delta_e u=0 \text{ in } \Omega, u=0 \text{ on } \partial\Omega.$$

因此，我们可能需要采用其他方法来解决这个问题。

然而，在满足 $S\not\equiv 0$ 的条件下，我们可以得到一些有趣的结果。根据 [19, §5], 中的详细分析，我们知道，对于某些克莱因群 Γ，在 $\mathbb{S}^n/\Gamma$ 上选取给定标量曲率函数会受到阻碍。映射 $\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n/\Gamma$ 必须是覆盖映射，否则 $\mathbb{S}^n/\Gamma$ 就不可能是流形。因此， $\mathbb{S}^n/\Gamma$ 的边界为空，这意味着在 (M,g) 上选取给定标量曲率函数不会受到阻碍。

第一个结果涉及上述情形 (i):

定理 7.1。设 (M,g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M 的紧流形， $n=$ 维数为 $M\geqslant 3$。设 $S_7>0$ 是 M 上处处任意的光滑函数。设 $H_7\in\mathcal{C}^\infty(M)$ 满足 $H_7>0$ 在 ∂M 上处处成立。若 $\eta_1>0$, 则存在一个足够小的常数 $c>0$，使得 (56) 存在一个正解 $u\in\mathcal{C}^\infty(M)$，且满足 $S=S_7$ 和 $H=cH_7$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g}=u^{p-2}g$ 使得 $R_{\tilde{g}}=S_7$ 且 $h_{\tilde{g}}=cH_7\Big|_{\partial M}$.

证明。不失一般性，我们可以假设 $S_g>0$ 且 $h_g=h>0$，其正常数为 h，由定理 2.1 可知。根据命题 2.3，我们固定一个足够小的 $\beta<0$，使得$\eta_{1,\ \beta}>0$ 并满足

$$-a\Delta_g\varphi+R_g\varphi=\eta_{1,\beta}\varphi \text{ in } M, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{2}{p-2}h_g\varphi=0 \text{ on } \partial M. \tag{58}$$

这里， $\varphi>0$ 在 M上。 φ 的任意缩放都满足 (58)。记 $\phi=\delta\varphi$，其中某个 $\delta>0$。我们选择足够小的 $\delta>0$，使得

$$\eta_{1,\beta}\inf_{\bar{M}}\varphi\geqslant\delta^{p-2}\sup_{\bar{M}}S_7\sup_{\bar{M}}\varphi^{p-1}.$$

由此可得

$$-a\Delta_g\phi+R_g\phi\geqslant S_7\phi^{p-1} \text{ in } M.$$

固定这个 δ。接着我们选择足够小的 $c>0$，使得

$$\beta\phi\geqslant(cH_7)\,\phi^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M.$$

由此可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial\nu}+\frac{2}{p-2}h_g\phi\geqslant\frac{2}{p-2}(cH_7)\,\phi^{\frac{p}{2}} \text{ on } \partial M. \tag{59}$$

注意，对于任意更小的 c, (59) 仍然成立。对于下解，根据内部 M 中 Weyl 张量是否消失，我们应用命题 2.1 或命题 2.2 来构造局部

解 u_0，该解满足某个区域 Ω 上的 Yamabe 方程及狄利克雷边界条件。应用引理 3.2，我们可以在 Ω 中构造 Yamabe 方程的局部上解 f，使得 $f = \phi$ 在 Ω 的 ∂ 附近成立。然后我们定义

$$u_- = \begin{cases} u_0 \text{ in } \Omega \\ 0 \text{ in } M\backslash\Omega \end{cases}$$

$$u_+ := \begin{cases} f \text{ in } \Omega \\ \phi \text{ in } M\backslash\Omega \end{cases}.$$

由于 $u_- \equiv 0$ 在 ∂M上，根据 [19] 中引理 3.1 的相同论证可知，对于任意常数 c， u_- 是满足 $S = S_7$ 和 $H = cH_7$ 的方程 (56) 的下解。根据 [19], 中引理 3.2 的构造，我们得出 $0 \leqslant u_- \leqslant u_+$, $u_- \not\equiv 0$。此外， $u_- \in H^1(M, g) \cap C^0(\bar{M})$,且 $u_+ \in C^\infty(M)$。根据 (59)，我们已经看到，当 c足够小时， u_+ 是满足 $S = S_7$ 和 $H = cH_7$ 的方程 (56) 的上解。如有必要，缩小 c，使得 $c \sup_{\bar{M}} |H_7|$ 满足小量条件。直接应用定理 2.2 表明存在一个正解 $u \in C^\infty(M)$，满足 $S = S_7$ 和 $H = cH_7$。□

情形（ii）的证明与定理 7.1 中的证明非常相似。

定理 7.2. 设 (M, g) 是一个具有非空光滑边界 ∂M, $n =$ 维数 $M \geqslant 3$的紧流形。设 $S_8 > 0$ somewhere 是 M 上的任意光滑函数。设 $H_8 \in C^\infty(M)$ 满足$H_8 \leqslant 0$ 在 ∂M 上处处成立。如果 $\eta_1 > 0$, 那么存在一个足够小的常数 $c > 0$，使得(56) 有正解 $u \in C^\infty(M)$，且 $S = S_8$ 和 $H = cH_8$。等价地，存在一个 Yamabe 度量 $\tilde{g} = u^{p-2} g$，使得 $R_{\tilde{g}} = S_8$ 和 $h_{\tilde{g}} = cH_8\Big|_{\partial M}$。

证明。除（59）处对常数 c 的选择没有限制外，其余内容与定理 7.1 完全相同。不过， c 应足够小，以满足定理 2.2 的假设。□

注 7.1。定理 7.1 和定理 7.2 的结果表明，在满足 $n =$维数 $M \geqslant 3$ 的（M, g）上，任何在某处为正的函数都可以实现为某个度量 g 的标量曲率函数；同时， g 的平均曲率函数可以是任意光滑函数的某个足够小的倍数，前提是该流形存在一种度量，使共形拉普拉斯算子的第一特征值为正，或者等价地，Yamabe 不变量为正 [6, §1]。

References

[1] T. Aubin. *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampére Equations.* 数学科学基础丛书。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1982年。[2] S. Brendle 和 F. Marques。Yamabe问题的最新进展。 *arXiv:1040.4960*。[3] H. Brezis 和 F. Merle。二维情形下 $-\delta u = v(x)e^u$ 解的一致估计与爆破行为。*Commun. Partial. Differ.*，16(8-9):1223–1253，1991年。[4] A. Chang 和 P. Yang。在 $\mathbb{S}^2$上指定高斯曲率。 *Acta Math.*，159:215–259，1987年。[5] S. Cruz-Bl´azquez、A. Malchiodi 和 D. Ruiz。具有指定数量曲率与平均曲率的共形度量。*arXiv:2105.04185*。[6] J. Escobar。带边界流形上的Yamabe问题。 *J. Differential Geom.*，35:21–84，1992年。[7] J. Escobar。边界上具有指定平均曲率的共形度。 *Calc. Var. Partial Differential Equations* 4 559 592, 1996 ，：–。[8] J. Kazdan 和 F. Warner。紧 2–流形上的曲率函数。 *Ann. of Math.*，99:14–47，1974年。[9] J. Kazdan 和 F. Warner。具有指定高斯曲率与数量曲率的度量的存在性及共形变形。 *Ann. of Math. (2)*，101(2):317–331，1975年。[10] J. Kazdan 和 F. Warner。数量曲率与黎曼结构的共形变形。 *J. Differential Geom.* 10 113 134, 1975 ，：–。

[11] A. Malchiodi 和 M. Mayer。指定莫尔斯标量曲率：捏缩与莫尔斯理论。

Commun. Pure ，。

Appl. Math 2021

[12] S. Rosenberg 和 J. Xu。通过迭代方法求解小黎曼域上的Yamabe问题。*arXiv:2110.14543*。[13] M. Struwe。解决尼伦伯格问题的流方法。 *Duke Math. J.*，128(19-64)，2005年。[14] M. Taylor。 *Partial Differential Equations I*。施普林格出版社，纽约，纽约，2011年。[15] M. Taylor。 *Partial Differential Equations III*。施普林格出版社，纽约，纽约，2011年。[16] J. Xu。边界亚马贝问题 I：极小边界情形。 *arXiv:2111:03219*。[17] J. Xu。边界亚马贝问题 II：一般常平均曲率情形。 *arXiv:2112.05674*。[18] J. Xu。共形拉普拉斯算子与Kazdan-Warner问题：第一特征值为零的情形。 *arXiv:2211.15024*。[19] J. Xu。共形变形下紧流形上的指定标量曲率。 *arXiv:2205.15453*。[20] J. Xu。在狄利克雷边界条件下黎曼度量共形变形中的指定标量曲率问题。 *arXiv:2208.11318*。[21] J. Xu。通过迭代格式求解闭流形上的亚马贝型方程。 *arXiv: 2110.15436*。

Department of Mathematics and Statistics, Boston University, Boston, MA, U.S.A.
Email address: xujie@bu.edu

Institute for Theoretical Sciences, Westlake University, Hangzhou, Zhejiang Province, China
Email address: xujie67@westlake.edu.cn