arXiv:2301.01022v1 [math.AP] 3 Jan 2023

大数据下等熵气体动力学解的衰减

柘植直树

Abstract. 本文研究等熵气体动力学的柯西问题。得益于 Lax, P. D.、Glimm, J.、DiPerna, R. J. 和 Liu, T. P. 等众多研究者的贡献，解的衰减性质已得到确立。他们研究的是全变差较小的初始数据。另一方面，大数据下的衰减问题半个世纪以来一直悬而未决。我们的目标是提供一种分析这一问题的新方法。我们证明了全局吸引子的存在性，由此得到大数据下解的衰减。为构造近似解，我们引入了一种修正 Godunov 格式。

1. Introduction

本文研究等熵气体动力学

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0, \\ m_t + \left(\dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right)_x = 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{1.1}$$

其中， ρ、 m 和 p 分别是气体的密度、动量和压力。若 $\rho > 0$，则 $v = m/\rho$ 表示气体的速度。对于正压气体， $p(\rho) = \rho^\gamma/\gamma$，其中 $\gamma \in (1, 5/3]$ 是普通气体的绝热指数。

我们考虑初始数据为

$$(\rho, m)|_{t=0} = (\rho_0(x), m_0(x)), \tag{1.2}$$

其中

$$(\rho_0(x), m_0(x)) = (\bar{\rho}, 0) \text{ outside a finite interval} \tag{1.3}$$

且 $\bar{\rho}$ 为正常数。上述问题（1.1）–（1.2）可写成以下形式

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

利用 $u = {}^t(\rho, m)$、 $f(u) = {}^t\left(m, \dfrac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right)$。

我们回顾上述问题已有的结果。DiPerna [5] 通过消失黏性法和

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：35L03、35L65、35Q31、76N10、76N15；次要分类号：35A01、35B35、35B50、35L60、76H05、76M20。

Key words and phrases. 可压缩欧拉方程、等熵气体动力学、补偿紧性、Godunov 格式、全局吸引子、衰减估计。N. Tsuge 的研究部分受到日本科学研究费补助金（C类）17K05315的资助。

补偿紧性论证证明了方程组 (1.1)–(1.2) 的解整体存在。DiPerna 最初将该方法应用于 (1.1)，研究 $\gamma = 1 + 2/n$ 和 n 为奇数的特殊情形。我们注意到，这一结果可以处理任意 L^∞ 数据。随后，Ding、Chen 和 Luo [6]以及 Chen [1] 和 [2] 将他的分析推广到 $(1, 5/3]$ 中的任意 γ。

另一方面，Glimm [8] 证明了包括 (1.1) 在内的守恒律的解的存在性。Glimm 研究了初始数据具有小全变差的柯西问题。Glimm-Lax [9] 建立了真正非线性2×2 守恒律系统的衰减理论。Glimm-Lax 证明，若初始数据在某个有限区间之外为常数，且局部全变差有界、振荡较小，则 [8] 的解的全变差会以 $t^{-1/2}$ 的速率趋于零。DiPerna 和 Liu 进一步发展了 Glimm-Lax 理论：针对具有凸熵函数 [4], 的一般守恒律，以及初始全变差较小的一般守恒律 [10]。然而，大初始数据情形下的衰减问题半个世纪以来一直悬而未决。本文旨在提出一种分析这一问题的新方法，并研究 (1.1) 的衰减结构。我们首先引入修正 Godunov 格式来构造近似解。接着证明全局吸引子的存在性，由此得到大初始数据下解的衰减估计。

为陈述主定理，我们定义本文中发挥重要作用的黎曼不变量 w, z如下：

定义 1.1。

$$w(u) := \frac{m}{\rho} + \frac{\rho^\theta}{\theta} = v + \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad z(u) := \frac{m}{\rho} - \frac{\rho^\theta}{\theta} = v - \frac{\rho^\theta}{\theta} \quad \left(\theta = \frac{\gamma - 1}{2}\right).$$

这些黎曼不变量满足以下性质。

注释 1.1。

$$|w| \geq |z|,\ w \geq 0, \text{ when } v \geq 0. \quad |w| \leq |z|,\ z \leq 0, \text{ when } v \leq 0.$$

$$v = \frac{w+z}{2},\ \rho = \left(\frac{\theta(w-z)}{2}\right)^{1/\theta},\ m = \rho v. \tag{1.5}$$

由上可知，z 的下界和 w 的上界给出了ρ和 $|v|$的界。

接下来，我们将机械能引入为 $\eta_*(u) = \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho} + \frac{1}{\gamma}(\gamma-1)\rho^\gamma$ 并设

$$J(u) = \eta_*(u) - \frac{(\bar\rho)^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho + \frac{(\bar\rho)^\gamma}{\gamma}. \tag{1.6}$$

注 1.2. 由 η_* 的凸性，我们有

$$J(u) = \eta_*(u) - \eta_*(\bar\rho, 0) - \frac{\partial\eta_*}{\partial\rho}(\bar\rho, 0)(\rho - \bar\rho) - \frac{\partial\eta_*}{\partial m}(\bar\rho, 0)m \geq 0. \tag{1.7}$$

由质量守恒和能量不等式，我们有

$$0 \leq \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} J(u(x,t))dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} J(u_0(x))dx. \tag{1.8}$$

此外，我们定义熵弱解。

定义 1.2. 若可测函数 $u(x,t)$ 满足以下条件，则称其为柯西问题 (1.4) 的整体熵弱解

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0$$

对任意测试函数 $\phi \in C_0^1(\mathrm{R} \times \mathrm{R}+)$，均成立，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \eta(u)\psi_t + q(u)\psi_x + \int_{-\infty}^{\infty} \eta(u_0(x))\psi(x,0)dx \geq 0$$

对任意非负测试函数 $\psi \in C_0^1(\mathrm{R} \times \mathrm{R}+)$，均成立，其中 (η, q) 是 (1.1) 的一对凸熵–熵通量。

最后，我们定义 $\tilde{z}, \tilde{w}$ 为

$$\tilde{z}(x,t) = z(x,t) - \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy, \quad \tilde{w}(x,t) = w(x,t) - \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy. \tag{1.9}$$

那么，我们的主定理如下。

定理 1.1。我们假设

$$\rho_0(x) \geq 0 \quad a.e.\ x \in \mathbf{R}, \quad \rho_0 \in L^\infty(\mathbf{R}), \quad \frac{m_0}{\rho_0} \in L^\infty(\mathbf{R}). \tag{1.10}$$

于是，柯西问题 (1.4) 存在一个全局熵弱解。此外，对于任意正常数 ε，都存在正常数 t_0，使得该解满足

$$\begin{aligned} &-\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - E_0 - \varepsilon \leq \tilde{z}(x,t), \quad \tilde{w}(x,t) \leq \frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} + \varepsilon, \quad \rho(x,t) \geq 0, \\ &a.e.\ (x,t) \in \mathbf{R} \times [t_0, \infty), \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} J(u_0(x))dx. \tag{1.12}$$

备注 1.3. 我们对上述定理作几点说明。

鉴于 (1.3)，我们发现 $-(\bar{\rho})_\theta^\theta - E_0 \geq \operatorname{ess\,inf}_x(\tilde{z}(x,0))$，$\operatorname{ess\,sup}_x(\tilde{w}(x,0)) \geq (\bar{\rho})_\theta^\theta$。因此，(1.11) 表示 $\operatorname{ess\,inf}_x(\tilde{z}(x,t))$ 和 $\operatorname{ess\,inf}_x(\tilde{w}(x,t))$ 的衰减估计。类似地，我们得到 $-(\bar{\rho})_\theta^\theta \geq \operatorname{ess\,inf}_x(z(x,0))$，$\operatorname{ess\,sup}_x(w(x,0)) \geq (\bar{\rho})_\theta^\theta$。若 $-(\bar{\rho})_\theta^\theta - E_0 - \varepsilon > \operatorname{ess\,inf}_x(z(x,0))$ 和 $\operatorname{ess\,sup}_x(w(x,0)) > (\bar{\rho})_\theta^\theta + E_0 + \varepsilon$，则 (1.11) 给出 $\overline{\operatorname{ess\,inf}_x}(z(x,t))$ 和 $\overline{\operatorname{ess\,sup}}_x(w(x,t))$ 的衰减估计。事实上，我们发现

that

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{ess\,inf}_x (z(x,t_0)) - \operatorname*{ess\,inf}_x (z(x,0)) \\
&\quad = \operatorname*{ess\,inf}_x \left(\tilde{z}(x,t_0) + \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy \right) - \operatorname*{ess\,inf}_x (z(x,0)) \\
&\quad \geq -\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - E_0 - \varepsilon - \operatorname*{ess\,inf}_x (z(x,0)) > 0, \\
&\operatorname*{ess\,sup}_x (w(x,t_0)) - \operatorname*{ess\,sup}_x (w(x,0)) \\
&\quad = \operatorname*{ess\,sup}_x \left(\tilde{w}(x,t_0) + \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy \right) - \operatorname*{ess\,sup}_x (w(x,0)) \\
&\quad \leq \frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} + \varepsilon + E_0 - \operatorname*{ess\,sup}_x (w(x,0)) < 0.
\end{aligned}$$

1.1. 证明概要（形式论证）。主定理的证明稍显复杂。因此，在继续讨论主题之前，我们先通过形式论证把握主要估计的要点。尽管 **(1.1)** 一般具有不连续解，但本节中我们假设解是光滑的，且密度非负。

我们考虑物理区域 $\rho \geq 0$ （即 $w \geq z$）。回顾注释 **1.1**，只需推导出 $z(u)$ 的下界和 $w(u)$ 的上界，即可得到 u 的界。为此，我们对 **(1.1)** 进行对角化。若解是光滑的，则由 **(1.1)** 可推出

$$z_t + \lambda_1 z_x = 0, \quad w_t + \lambda_2 w_x = 0, \tag{1.13}$$

其中， λ_1 和 λ_2 是特征速度，定义如下

$$\lambda_1 = v - \rho^\theta, \quad \lambda_2 = v + \rho^\theta. \tag{1.14}$$

由质量守恒 $(1.1)_1$ 和能量守恒 $(\eta_*)_t + (q_*)_x = 0$，我们得到

$$\tilde{z}_t + \lambda_1 \tilde{z}_x = g_1(u), \quad \tilde{w}_t + \lambda_2 \tilde{w}_x = g_2(u), \tag{1.15}$$

其中

$$q_*(u) = m\left(\frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma - 1} \right)$$

and

$$\begin{aligned}
g_1(u) &= -\frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\lambda_1 + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma v + \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1}, \\
g_2(u) &= -\frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\lambda_2 - \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma v - \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 + \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

为了证明定理 **1.1**，我们先准备以下命题。

命题 1.2。

$$\begin{cases} \bullet \quad g_1(u(x,t)) > 0,\ when\ \tilde{z}(x,t) < -\dfrac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - E_0, \\ \bullet \quad g_1(u(x,t)) = 0,\ when\ \tilde{z}(x,t) = -\dfrac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - E_0,\ \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy = E_0 \\ \quad\ and\ \rho(x,t) = \bar{\rho}, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\begin{cases} \bullet \quad g_2(u(x,t)) < 0,\ when\ \tilde{w}(x,t) > \dfrac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta}, \\ \bullet \quad g_2(u(x,t)) = 0,\ when\ \tilde{w}(x,t) = \dfrac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta},\ \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy = 0 \\ \quad\ and\ \rho(x,t) = \bar{\rho}. \end{cases} \tag{1.18}$$

证明。我们首先考察 (1.17)。当 $\tilde{z}(x,t) \leq -(\bar{\rho})_\theta^\theta - E_0$ 时，由 (1.8) 可知

$$z(x,t) = \tilde{z}(x,t) + \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy \leq -\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta}. \tag{1.19}$$

于是，我们推得

$$\begin{aligned} g_1(u) =& \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma v + \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 - \frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\lambda_1 - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ =& \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma v + \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 - \frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\left(z + \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\rho^\theta\right) - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ =& \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma v + \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 - \frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\left(z + \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\rho^\theta\right) - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ =& \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma\left(z + \frac{\rho^\theta}{\theta}\right) + \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}\left(z + \frac{\rho^\theta}{\theta}\right)^2 \\ & - \frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\gamma}\left(z + \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\rho^\theta\right) - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ =& \frac{\rho^{\theta+1}}{2}\left(z - \frac{1}{\gamma}\frac{(\bar{\rho})^\gamma}{\rho^{\theta+1}} + \frac{3\gamma-1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^\theta\right)^2 + \frac{\gamma+1}{2\gamma^2(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} \\ & - \frac{1}{\gamma-1}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1} + \frac{\gamma+1}{\gamma^2}(\bar{\rho})^\gamma\rho^\theta - \frac{1}{2\gamma^2}(\bar{\rho})^{2\gamma}\frac{1}{\rho^{\theta+1}}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

当 $\rho \leq \bar{\rho}$ 时，由于 (1.20) 在 $z = -(\bar{\rho})_\theta^\theta$ 处取到最小值，我们根据附录 A 推得

$$\begin{aligned} g_1(u) \geq& \frac{5\gamma-3}{\gamma(\gamma-1)^2}\rho^{\gamma+\theta} - \frac{2(3\gamma-1)}{\gamma(\gamma-1)^2}(\bar{\rho})^\theta\rho^\gamma + \frac{3-\gamma}{(\gamma-1)^2}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1} - \frac{3-\gamma}{\gamma(\gamma-1)}(\bar{\rho})^\gamma\rho^\theta \\ & + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)}(\bar{\rho})^{\gamma+\theta} \\ \geq& 0, \end{aligned} \tag{1.21}$$

其中，第二个不等式中的等号仅当 $\rho = \bar{\rho}$ 时成立。

当 $\rho > \bar{\rho}$ 时，由于 (1.20) 在 $z = \frac{1}{\gamma}(\bar{\rho}^{\gamma}\frac{}{\rho^{\theta+1}} - \frac{3\gamma-1}{\gamma\ \gamma-1})\ (\ )\rho^{\theta}$ 处取得最小值，我们由附录 A 得出

$$\begin{aligned} g_1(u) \geq & \frac{\gamma+1}{2\gamma^2(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} - \frac{1}{\gamma-1}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1} + \frac{\gamma+1}{\gamma^2}(\bar{\rho})^{\gamma}\rho^{\theta} - \frac{1}{2\gamma^2}(\bar{\rho})^{2\gamma}\frac{1}{\rho^{\theta+1}} \\ \geq & 0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

其中，第二个不等式取等号仅当 $\rho = \bar{\rho}$ 时成立。

接下来我们考察 (1.18)。当 $\tilde{w}(x,t) \geq (\bar{\rho})_{\theta}^{}$ 时，由 (1.8) 可知

$$w(x,t) = \tilde{w}(x,t) + \int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy \geq \frac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}. \tag{1.23}$$

于是，我们推得

$$\begin{aligned} g_2(u) = & -\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma}\lambda_2 - \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^{\gamma}v - \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 + \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ = & -\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma}\left(w - \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\rho^{\theta}\right) - \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^{\gamma}v - \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}v^2 + \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ = & -\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma}\left(w - \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\rho^{\theta}\right) - \frac{1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} + \frac{1}{\gamma}\rho^{\gamma}\left(w - \frac{\rho^{\theta}}{\theta}\right) \\ & - \frac{1}{2}\rho^{\theta+1}\left(w - \frac{\rho^{\theta}}{\theta}\right)^2 + \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho^{\theta+1} \\ = & -\frac{\rho^{\theta+1}}{2}\left(w + \frac{1}{\gamma}\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\rho^{\theta+1}} - \frac{3\gamma-1}{\gamma(\gamma-1)}\rho^{\theta}\right)^2 - \frac{\gamma+1}{2\gamma^2(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} \\ & + \frac{1}{\gamma-1}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1} - \frac{\gamma+1}{\gamma^2}(\bar{\rho})^{\gamma}\rho^{\theta} + \frac{1}{2\gamma^2}(\bar{\rho})^{2\gamma}\frac{1}{\rho^{\theta+1}}. \end{aligned}$$

由 (1.21)–(1.22)，我们得出

$$g_2(u) \leq 0, \tag{1.24}$$

其中，取等号仅当 $\rho = \bar{\rho}$ 时成立。 □

定理（1.11）的证明

由（1.17）–（1.18），对于任意正常数 ε，存在正常数δ，使得

$$\begin{aligned} & g_1(u) > 2\delta, \text{ when } \tilde{z} \leq -\frac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta} - E_0 - \frac{\varepsilon}{2} \text{ and } 0 \leq \rho, \\ & g_2(u) < -2\delta, \text{ when } \frac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{w} \text{ and } 0 \leq \rho. \end{aligned} \tag{1.25}$$

我们按如下方式引入$\hat{}z$、$\hat{}w$。

$$\hat{z}(x,t) = \tilde{z}(x,t) - \delta t, \quad \hat{w}(x,t) = \tilde{w}(x,t) + \delta t. \tag{1.26}$$

由 (1.15) 可推得

$$\hat{z}_t + \lambda_1\hat{z}_x = g_1(u) - \delta, \quad \hat{w}_t + \lambda_2\hat{w}_x = g_2(u) + \delta. \tag{1.27}$$

我们令

$$M_0 = \max\left\{\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta},\ -\operatorname{ess\,inf}_x(\tilde{z}(x,0)) + E_0,\ \operatorname{ess\,inf}_x(\tilde{w}(x,0))\right\}. \tag{1.28}$$

接着，我们注意到

$$-M_0 - E_0 \le \hat{z}(x,0), \quad \hat{w}(x,0) \le M_0.$$

我们来证明

$$\hat{S}_{inv} = \{(\hat{z},\hat{w}) \in \mathbf{R}^2; \rho \ge 0,\ \hat{z} \ge -M_0 - E_0,\ \hat{w} \le M_0\}$$

是方程 (1.27) 的柯西问题在.....上的不变区域

$$0 \le t \le \max\left(0, \frac{M_0 - \frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - \varepsilon}{\delta}\right) =: t_0.$$

我们注意到，这就得到了 $0 \le t \le t_0$ 上的 (1.11)。

为此，假设

$$-M_0 - E_0 < \hat{z}(x,0), \quad \hat{w}(x,0) < M_0$$

并且存在 $x_* \in \mathrm{R}$ $0 < t_* \le t_0$ ，使得下列 (1.29) 或 (1.30) 成立，

$$\begin{aligned} &-M_0 - E_0 < \hat{z}(x,t),\ \hat{w}(x,t) < M_0, \quad x \in \mathbf{R},\ 0 \le t < t_* \\ &\text{and} \quad \hat{z}(x_*,t_*) = -M_0 - E_0,\ \hat{w}(x_*,t_*) \le M_0, \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} &-M_0 - E_0 < \hat{z}(x,t),\ \hat{w}(x,t) < M_0, \quad x \in \mathbf{R},\ 0 \le t < t_* \\ &\text{and} \quad \hat{z}(x_*,t_*) \ge -M_0 - E_0,\ \hat{w}(x_*,t_*) = M_0, \end{aligned} \tag{1.30}$$

我们将推出矛盾。

为此，我们证明

$$g_1(u(x_*,t_*)) - \delta > 0, \text{ when } (1.29) \text{ holds}, \tag{1.31}$$

$$g_2(u(x_*,t_*)) + \delta < 0, \text{ when } (1.30) \text{ holds}. \tag{1.32}$$

考虑 (1.31)。当 (1.29) 和 $0 \le t_* \le t_0$ 成立时，我们注意到

$$\tilde{z}(x_*,t_*) \le -\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - E_0 - \varepsilon.$$

因此，由 (1.25) 可得 (1.31)。由于 $\hat{z}$ 在 (x_*,t_*) 处取得最小值，我们可以由 (1.27)$_1$ 推出矛盾。类似地，我们可以证明 (1.32)。

我们注意到 $(\tilde{z}(x,t_0)\ \tilde{w}(x,t_0))$ 包含于

$$\tilde{S}_{inv} = \left\{(\tilde{z},\tilde{w}) \in \mathbf{R}^2; \rho \ge 0,\ \tilde{z} \ge -\frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} - \varepsilon - E_0,\ \tilde{w} \le \frac{(\bar{\rho})^\theta}{\theta} + \varepsilon\right\}.$$

然后，我们可以类似地证明，S_{inv} 是方程（1.15）的柯西问题的不变区域。因此，我们得出结论（1.11）。

虽然上述论证是形式上的，但至关重要。事实上，我们将在定理 3.1 的证明中隐式地使用这一论证。接下来必须为上述论证提供依据。为此，我们在第 2 节引入修正 Godunov 格式。最近，[11]–[18], 中提出了各种由已知函数构成的差分格式。另一方面，本文的近似解包含形如 (1.9) 的未知函数，其常数为 $\tilde{z}$、$\tilde{w}$ （见 (2.15)）。

2. Construction of Approximate Solutions

本节构造近似解。设 T 为任意给定的正常数。在条带 $0 \le t \le T$中，我们将近似解记为 $u^{\Delta}(x,t) = (\rho^{\Delta}(x,t)\ m^{\Delta}(x,t))$。我们将空间网格长度记为 Δx。利用 (1.12) 中的 E_0 和 (1.28) 中的 M_0 ，取时间网格长度 Δt 使得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2(M_0 + E_0). \tag{2.1}$$

此外，我们设

$$(j,n) \in 2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_{\ge 0},$$

其中 $\mathbf{Z}_{\ge 0} = \{0,1,2,3,\ldots\}$。为简单起见，我们采用以下术语

$$x_j = j\Delta x,\ t_n = n\Delta t,\ t_{n.5} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t,\ t_{n-} = n\Delta t - 0,\ t_{n+} = n\Delta t + 0. \tag{2.2}$$

首先，我们设 $u^{\Delta}(x, t_{0-}) = u_0(x)$。
然后，对于 $j \in 2\mathbf{Z}$，我们通过以下方式定义 $E_j^0(u)$:

$$E_j^0(u) = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} u^{\Delta}(x, t_{0-})dx.$$

接下来，我们假设 $u^{\Delta}(x,t)$ 对于 $t < t_n$ 有定义。
于是，对于 $j \in 2\mathbf{Z}$，我们定义 $E_j^n(u)$ 为

$$E_j^n(u) = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} u^{\Delta}(x, t_{n-})dx.$$

为确定 $u_j^n = (\rho_j^n, m_j^n)$ 对于 $j \in 2\mathbf{Z}$ 的取值，我们定义符号 I_j^n 和 L_n。令 $\int_{-\infty}^{x} J(u(y,t))dy$ 的近似为

$$I_j^n := \int_{-\infty}^{x_j} J(E^n(x;u))dx,$$

其中

$$E^n(x;u) = E_j^n(u) \quad x \in [x_{j-1}, x_{j+1}) \tag{2.3}$$

且 J 在 (1.6) 中定义。

令 $\mathcal{D} = (x(t)\ t)$ 表示 $u^{\Delta}(x,t)$ $[\eta_*]$ 中的一个间断，并令 $[q_*]$ 表示 $\eta_*(u^{\Delta}(x,t))$ 与 $q_*(u^{\Delta}(x,t))$ 从左至右跨过 $\mathcal{D}$ 时的跳跃，分别为，

$$[\eta_*] = \eta_*(u^{\Delta}(x(t)+0,t)) - \eta_*(u^{\Delta}(x(t)-0,t)),$$
$$[q_*] = q_*(u^{\Delta}(x(t)+0,t)) - q_*(u^{\Delta}(x(t)-0,t)),$$

其中，$q_*(u)$ 是由下式定义的 $\eta_*(u)$ 的通量

$$q_*(u) = m\left(\frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}\right).$$

接下来，为了衡量熵条件中的误差以及$t_{n\pm}$处的能量差距，我们引入一个泛函。为此，我们由泰勒展开推导出

that

$$\begin{aligned}\eta_*\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})\right)-\eta_*\left(E_j^n(u)\right)=&\nabla\eta_*(E_j^n(u))\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)\\&+\int_0^1(1-\tau)\cdot{}^t\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)\\&\times\nabla^2\eta_*\left(E_j^n(u)+\tau\left\{u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right\}\right)d\tau\\&\times\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)\\=&\nabla\eta_*(E_j^n(u))\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)+R_j^n(x),\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}R_j^n(x)=&\int_0^1(1-\tau)\cdot{}^t\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)\nabla^2\eta_*\left(E_j^n(u)+\tau\left\{u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right\}\right)\\&\times\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})-E_j^n(u)\right)d\tau.\end{aligned}$$

接着，我们定义泛函 L_n 如下

$$\begin{aligned}L_n=&\int_0^{t_n}\sum_{x\in\mathbf{R}}\sigma[\eta_*]-[q_*]dt+\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\eta_*(u^{\Delta}(x,t_{k-0}))-\eta_*(E^k(x;u))\right\}dx\\&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j\in2\mathbf{Z}}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x}R_j^k(y)dydx,\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中，对固定时刻 t 下 $x\in\mathbf{R}$ 上的 $u^{\Delta}(x,t)$ 中所有间断求和，记为 $\sum_{x\in\mathbf{R}}$；σ 为这些间断的传播速度。

此外，我们设

$$M_1=M_0-\delta\Delta t,\quad M_{n+1}=\begin{cases}M_n-\delta\Delta t, & \text{when } M_n+L_n\geq\dfrac{(\bar\rho)^{\theta}}{\theta}+\varepsilon,\\ M_n, & \text{when } M_n+L_n<\dfrac{(\bar\rho)^{\theta}}{\theta}+\varepsilon,\end{cases}\tag{2.6}$$

其中，δ 在 (1.25) 中定义。注意到 $M_n\geq(\bar\rho)_{\theta}^{\theta}+\varepsilon-\delta\Delta t$。

利用 I_j^n、L_n 和 M_n，我们定义 u_j^n 如下。

我们选取 μ，使得 $1<\mu<1/(2\theta)$。如果

$$E_j^n(\rho):=\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx<(\Delta x)^{\mu},\tag{2.7}$$

我们通过 $u_j^n=(0,0)$ 定义 u_j^n；否则，令

$$\begin{aligned}z_j^n&:=\max\left\{z(E_j^n(u)),\ -M_n-E_0-L_n+I_j^n\right\},\\w_j^n&:=\min\left\{w(E_j^n(u)),\ M_n+L_n+I_j^n\right\},\end{aligned}\tag{2.8}$$

我们通过以下方式定义

u_j^n

$$u_j^n:=(\rho_j^n,m_j^n):=(\rho_j^n,\rho_j^nv_j^n):=\left(\left\{\frac{\theta(w_j^n-z_j^n)}{2}\right\}^{1/\theta},\left\{\frac{\theta(w_j^n-z_j^n)}{2}\right\}^{1/\theta}\frac{w_j^n+z_j^n}{2}\right).$$

注 2.1. 我们发现

$$-M_n-E_0-L_n+I_j^n\leq z(u_j^n),\quad w(u_j^n)\leq M_n+L_n+I_j^n.\tag{2.9}$$

这意味着，在定义 $z(u_j^n)$ 和 $w(u_j^n)$ 时，我们截去了满足 $z(E_j^n(u))$ $< -M_n - E_0 - L_n + I_j^n$以及 $w(E_j^n(u)) > M_n + L_n + I_j^n$ 的部分。根据 (3.2)，这些被截去部分的阶为 $o(\Delta x)$。这个阶非常小，因此我们可以推得近似解的紧性与收敛性。

2.1. 单元中的近似解构造。接下来我们假设近似解 $u^\Delta(x,t)$ 定义在区域 D_1：$t < t_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 和 D_2： $x < x_{j-1}$ $(j \in 2\mathbb{Z})$ $t_n \le t < t_{n+1}$ 中。利用定义在 D_1 中的 u_j^n 和定义在 D_2 中的 $u^\Delta(x,t)$，我们构造单元 $t_n \le t < t_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $x_{j-1} \le x < x_{j+1}$ $(j \in 2\mathbb{Z})$ 中的近似解。

我们首先求解初始数据为 (u_{j-1}^n, u_{j+1}^n) 的黎曼问题。称常数 $u_{\mathrm{L}}(= u_{j-1}^n)$ u_{M}、$u_{\mathrm{R}}(= u_{j+1}^n)$ 分别为左状态、中间状态和右状态。于是出现以下四种情形。

- 情形 1 出现一个 1-稀疏波和一个 2-激波。
- 情形 2：出现一个 1-激波和一个 2-稀疏波。
- 情形 3：出现一个 1-稀疏波和一个 2-稀疏波。
- 情形 4：出现一个 1-激波和一个 2-激波。

接下来，我们通过扰动上述黎曼解来构造近似解 $u^\Delta(x,t)$。

设 α 是满足 $1/2 < \alpha < 1$的常数。我们选取一个足够小的正值 β。

在这一步中，我们特别考虑情形 1。情形 2–4 的构造与情形 1 类似。我们只考虑 u_{M} 远离真空的情形。另一种情形（即 u_{M} 接近真空的情形）在技术上稍复杂。因此，我们将这种情形留到附录 C 中讨论。

考虑这样一种情况：以初始数据 (u_j^n, u_{j+1}^n) 为黎曼解时，会出现 1-稀疏波和 2-激波。假设 $u_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{M}}$ 与 $u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}}$ 分别由 1-稀疏波和 2-激波曲线连接。

步骤 1。
为了用分段常数稀疏扇近似 1-稀疏波，我们引入整数

$$p := \max\{[\![(z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{L}})/(\Delta x)^\alpha]\!] + 1, 2\},$$

其中 $z_{\mathrm{L}} = z(u_{\mathrm{L}})$ $z_{\mathrm{M}} = z(u_{\mathrm{M}})$，且 $[\![x]\!]$ 是不大于 x 的最大整数。注意，

$$p = O((\Delta x)^{-\alpha}). \tag{2.10}$$

定义

$$z_1^* := z_{\mathrm{L}},\ z_p^* := z_{\mathrm{M}},\ w_i^* := w_{\mathrm{L}}\ (i = 1, \dots, p),$$

and

$$z_i^* := z_{\mathrm{L}} + (i-1)(\Delta x)^\alpha\ (i = 1, \dots, p-1).$$

接下来，我们引入射线 $x = (j+1/2)\Delta x + \lambda_1(z_i^*, z_{i+1}^*, w_{\mathrm{L}})(t - n\Delta t)$，它们分隔有限个常状态 (z_i^*, w_i^*) $(i = 1, \dots, p)$，其中

$$\lambda_1(z_i^*, z_{i+1}^*, w_{\mathrm{L}}) := v(z_i^*, w_{\mathrm{L}}) - S(\rho(z_{i+1}^*, w_{\mathrm{L}}), \rho(z_i^*, w_{\mathrm{L}})),$$

$$\rho_i^* := \rho(z_i^*, w_{\mathrm{L}}) := \left(\frac{\theta(w_{\mathrm{L}} - z_i^*)}{2}\right)^{1/\theta}, \quad v_i^* := v(z_i^*, w_{\mathrm{L}}) := \frac{w_{\mathrm{L}} + z_i^*}{2}$$

and

$$S(\rho, \rho_0) := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\rho(p(\rho) - p(\rho_0))}{\rho_0(\rho - \rho_0)}}, & \text{if } \rho \neq \rho_0, \\ \sqrt{p'(\rho_0)}, & \text{if } \rho = \rho_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

我们将这一近似的 1-稀疏波称为 1-稀疏波扇。

步骤 2。

在这一步中，我们将上述常值状态替换为 x 和 t 的函数，如下所示:

鉴于 (1.9)，我们构造 $u_1^{\Delta}(x,t)$。

我们首先确定 (1.9) 中 $\tilde{z}, \tilde{w}$ 的近似，如下所示。

$$\tilde{z}_1^{\Delta} = z_{\mathrm{L}} - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx, \ \tilde{w}_1^{\Delta} = w_{\mathrm{L}} - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx,$$

其中 $u_{n,\,0}^{\Delta}(x)$ 是一个分段常值函数，定义为

$$u_{n,0}^{\Delta}(x) = u_j^n, \quad x \in [x_{j-1}, x_{j+1}) \quad (j \in 2\mathbf{Z}). \tag{2.12}$$

设

$$\begin{aligned} \check{z}_1^{\Delta}(x,t) = \tilde{z}_1^{\Delta} &+ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + \int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(u_{\mathrm{L}})dy \\ &+ \{g_1(x,t;u_{\mathrm{L}}) + V(u_{\mathrm{L}})\}(t - t_n), \\ \check{w}_1^{\Delta}(x,t) = \tilde{w}_1^{\Delta} &+ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + \int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(u_{\mathrm{L}})dy \\ &+ \{g_2(x,t;u_{\mathrm{L}}) + V(u_{\mathrm{L}})\}(t - t_n), \end{aligned} \tag{2.13}$$

其中 g_1 和 g_2 由（1.16）定义， $x_1^{\Delta} = x_{j-1}$ 和

$$V(u) = q_*(u) - \frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma - 1}m. \tag{2.14}$$

由（2.13），根据关系式（1.5）确定 $\check{u}_1^{\Delta}(x,t)$，即

$$\check{u}_1^{\Delta}(x,t) = (\check{\rho}_1^{\Delta}(x,t), \check{m}_1^{\Delta}(x,t)) = (\check{\rho}_1^{\Delta}(x,t), \check{\rho}_1^{\Delta}(x,t)\check{v}_1^{\Delta}(x,t)),$$

其中

$$\check{\rho}_1^{\Delta}(x,t) = \left\{\frac{\theta\left(\check{w}_1^{\Delta}(x,t) - \check{z}_1^{\Delta}(x,t)\right)}{2}\right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad \check{v}_1^{\Delta}(x,t) = \frac{\check{w}_1^{\Delta}(x,t) + \check{z}_1^{\Delta}(x,t)}{2}.$$

利用 $\check{u}_1^{\Delta}(x,t)$，我们接下来定义 $u_1^{\Delta}(x,t)$ 如下。

$$\begin{aligned} z_1^{\Delta}(x,t) = \tilde{z}_1^{\Delta} &+ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + \int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(\check{u}_1^{\Delta}(y,t))dy \\ &+ \left\{ g_1(x,t;\check{u}_1^{\Delta}) + V(u_{\mathrm{L}}) \right\}(t-t_n), \\ w_1^{\Delta}(x,t) = \tilde{w}_1^{\Delta} &+ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + \int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(\check{u}_1^{\Delta}(y,t))dy \\ &+ \left\{ g_2(x,t;\check{u}_1^{\Delta}) + V(u_{\mathrm{L}}) \right\}(t-t_n). \end{aligned} \tag{2.15}$$

由 (2.15)，根据关系式 (1.5) 可确定 $u_1^{\Delta}(x,t)$。

注记 2.2。

(i) 注意，近似解 $z_1^{\Delta}, w_1^{\Delta}$ 和 $\tilde{z}_1^{\Delta}, \tilde{w}_1^{\Delta}$ 分别对应于 (1.9) 中的 z, w 和 $\tilde{z}$, $\tilde{w}$ 。(ii) 对于 $t_n < t < t_{n+1}$，我们的近似解将满足

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u^{\Delta}(x, t_{n+1-}))dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{x \le x_{j-1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])dt \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})\Delta t + o(\Delta x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

因此，在 (2.15) 中，我们采用 (2.16) 的右端，而非左端。

(iii) 我们构造近似解时两次使用迭代方法（见 (2.13) 和 (2.15)），以推导出 (3.12)。

首先，根据隐函数定理，我们确定传播速度 σ_2和 $u_2 = (\rho_2, m_2)$，使得

(1.a) $z_2 := z(u_2) = z_2^*$(1.b) 速度 σ_2、左状态 $u_1^{\Delta}(x_2, t_{n.5})$ 和右状态 u_2 满足 Rankine–Hugoniot 条件，即

$$f(u_2) - f(u_1^{\Delta}(x_2^{\Delta}(t_{n.5}), t_{n.5})) = \sigma_2(u_2 - u_1^{\Delta}(x_2^{\Delta}(t_{n.5}), t_{n.5})),$$

其中 $x_2^{\Delta}(t) = x_j + \sigma_2(t - t_n)$。然后，我们用 $u_1^{\Delta}(x)$ 填充区域 $t_n \le t < t_{n+1}$, $x_{j-1} \le x < x_2^{\Delta}(t)$（见图1）。

假设 u_k, $u_k^{\Delta}(x,t)$、传播速度 σ_k 和 $x_k^{\Delta}(t)$ 已定义。类似地，我们确定 σ_{k+1} 和 $u_{k+1} = (\rho_{k+1}, m_{k+1})$，使得

(k.a) $z_{k+1} := z(u_{k+1}) = z_{k+1}^*$, ($k$.b) $\sigma_k < \sigma_{k+1}$, (k.c) 速度 σ_{k+1}、左状态 $u_k^{\Delta}($ $x_{k+1}^{\Delta}(t_{n.5})$ $t_{n.5})$ 和右状态 u_{k+1}满足 Rankine–Hugoniot 条件，

其中 $x_{k+1}^{\Delta}(t) = x_j + \sigma_{k+1}(t - t_n)$。然后，我们用 $u_k^{\Delta}(x,t)$ 填充满足 $t_n \le t < t_{n+1}$, $x_k^{\Delta}(t) \le x < x_{k+1}^{\Delta}(t)$ 的扇区（见图1）。

我们按如下方式构造 $u_{k+1}^{\Delta}(x,t)$。

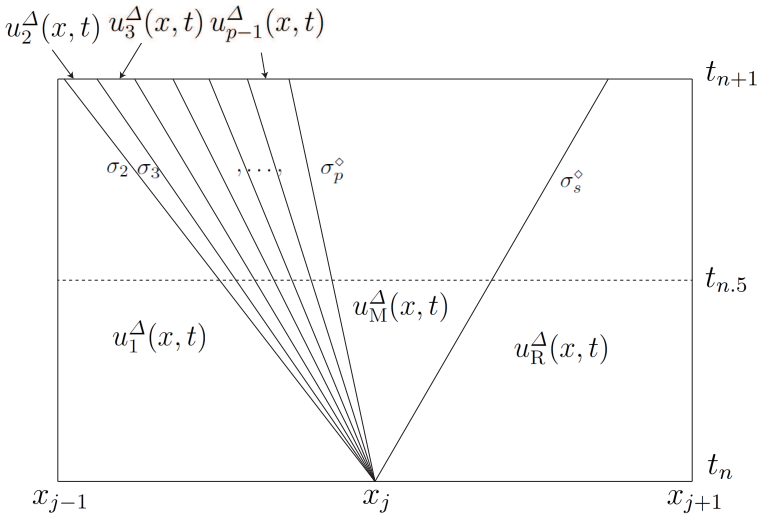


FIGURE 1.单元中出现1-稀疏波和2-激波时的近似解。

我们首先确定

$$\tilde{z}_{k+1}^\Delta = z_{k+1} - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^\Delta(x))dx - V(u_{\mathrm{L}})\frac{\Delta t}{2} - \sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^\Delta(t_{n.5})}^{x_{l+1}^\Delta(t_{n.5})} J(u_l^\Delta(x,t_{n.5}))dx,$$

$$\tilde{w}_{k+1}^\Delta = w_{k+1} - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^\Delta(x))dx - V(u_{\mathrm{L}})\frac{\Delta t}{2} - \sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^\Delta(t_{n.5})}^{x_{l+1}^\Delta(t_{n.5})} J(u_l^\Delta(x,t_{n.5}))dx,$$

其中 $x_1^\Delta(t) = x_{j-1}$， $x_l^\Delta(t) = x_j + \sigma_l(t-t_n)$（$l = 2$、3、.....、$k+1$），且 $t_{n.5}$ 定义于（2.2）中。

接下来定义 $\check{u}_{k+1}^\Delta$ 如下。

$$\begin{aligned}\check{z}_{k+1}^\Delta(x,t) =& \tilde{z}_{k+1}^\Delta + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^\Delta(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) + \sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^\Delta(t)}^{x_{l+1}^\Delta(t)} J(u_l^\Delta(x,t))dx \\ &+ \int_{x_{k+1}^\Delta(t)}^{x} J(u_{k+1})dy + g_1(x,t;u_{k+1})(t-t_{n.5}) + \int_{t_{n.5}}^{t}\sum_{x_{j-1}\le y\le x}(\sigma[\eta_*]-[q_*])ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{w}_{k+1}^\Delta(x,t) =& \tilde{w}_{k+1}^\Delta + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^\Delta(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) + \sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^\Delta(t)}^{x_{l+1}^\Delta(t)} J(u_l^\Delta(x,t))dx \\ &+ \int_{x_{k+1}^\Delta(t)}^{x} J(u_{k+1})dy + g_2(x,t;u_{k+1})(t-t_{n.5}) + \int_{t_{n.5}}^{t}\sum_{x_{j-1}\le y\le x}(\sigma[\eta_*]-[q_*])ds.\end{aligned}$$

由上可知，根据关系式（1.5）确定 $\check{u}_{k+1}^\Delta(x,t)$。

最后，利用 $\check{u}_{k+1}^\Delta(x,t)$，我们如下定义 $u_{k+1}^\Delta(x,t)$。

$$
\begin{aligned}
z_{k+1}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{z}_{k+1}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) + \sum_{l=1}^{k} \int_{x_l^{\Delta}(t)}^{x_{l+1}^{\Delta}(t)} J(u_l^{\Delta}(x,t))dx \\
&+ \int_{x_{k+1}^{\Delta}(t)}^{x} J(\check{u}_{k+1}^{\Delta}(y,t))dy + g_1(x,t;\check{u}_{k+1}^{\Delta})(t-t_{n.5}) \\
&+ \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x_{j-1}\le y\le x} (\sigma[\eta_*]-[q_*])ds, \\
w_{k+1}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{w}_{k+1}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) + \sum_{l=1}^{k} \int_{x_l^{\Delta}(t)}^{x_{l+1}^{\Delta}(t)} J(u_l^{\Delta}(x,t))dx \\
&+ \int_{x_{k+1}^{\Delta}(t)}^{x} J(\check{u}_{k+1}^{\Delta}(y,t))dy + g_2(x,t;\check{u}_{k+1}^{\Delta})(t-t_{n.5}) \\
&+ \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x_{j-1}\le y\le x} (\sigma[\eta_*]-[q_*])ds.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

由 (2.17)，根据关系式 (1.5) 可确定 $u_{k+1}^{\Delta}(x,t)$。

通过归纳，我们定义 u_i、 $u_i^{\Delta}(x$、 $t)$ 和 $\sigma_i(i = 1$、.. 、$p-1)$。最后，我们确定传播速度 σ_p 以及 $u_p = (\rho_p$、 $m_p)$，使得

$(p.\mathrm{a})$ $z_p : = z(u_p) = z_p^*$，$(p.\mathrm{b})$ 速度 σ_p、左状态 $u_{p-1}^{\Delta}(x_p^{\Delta}(t_{n.5})\ t_{n.5})$ 和右状态 u_p满足 Rankine–Hugoniot 条件，

其中 $x_p^{\Delta}(t) = x_j + \sigma_p(t-t_n)$。然后，我们通过 $u_{p-1}^{\Delta}(x$、 $t)$ u_p 填充扇区，其中 $t_n \le t < t_{n+1}$、$x_{p-1}^{\Delta}(t) \le x < x_p^{\Delta}(t)$ 以及直线 $t_n \le t < t_{n+1}$、 $x = x_p^{\Delta}(t)$ 分别为相应对象。

给定 u_{L} 和 z_{M} 且满足 $z_{\mathrm{L}} \le z_{\mathrm{M}}$，我们将 x 和 t的这个分段函数 1-稀疏波记为 $R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}$、$z_{\mathrm{M}}$、 x、 $t)$。

另一方面，我们按如下方式构造 $u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$。

我们首先设

$$
\tilde{z}_{\mathrm{R}}^{\Delta} = z_{\mathrm{R}} - \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx,\ \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\Delta} = w_{\mathrm{R}} - \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx.
$$

接下来，我们构造 $\check{}u_{\mathrm{R}}^{\Delta}$

$$
\begin{aligned}
\check{z}_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{z}_{\mathrm{R}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) \\
&+ \int_{x_{j+1}}^{x} J(u_{\mathrm{R}})dy + g_1(x,t;u_{\mathrm{R}})(t-t_n), \\
\check{w}_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) \\
&+ \int_{x_{j+1}}^{x} J(u_{\mathrm{R}})dy + g_2(x,t;u_{\mathrm{R}})(t-t_n).
\end{aligned}
$$

由上可知，我们通过关系式 (1.5) 确定 $\check{}u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$。

利用 $\check{u}_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$，我们定义 $u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$ 如下。

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{z}_{\mathrm{R}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) \\ &+ \int_{x_{j+1}}^{x} J(\check{u}_{\mathrm{R}}(y,t))dy + g_1(x,t;\check{u}_{\mathrm{R}})(t-t_n), \\ w_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{w}_{\mathrm{R}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) \\ &+ \int_{x_{j+1}}^{x} J(\check{u}_{\mathrm{R}}(y,t))dy + g_2(x,t;\check{u}_{\mathrm{R}})(t-t_n). \end{aligned} \tag{2.18}$$

由（2.18），根据关系式（1.5），我们确定 $u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$。

现在我们固定 $u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t)$ 和 $u_{p-1}^{\Delta}(x,t)$。设 σ_s 为连接 u_{M} 和 u_{R} 的 2-激波的传播速度。取 $\sigma_p^{\diamond}$ 接近 σ_p、$\sigma_s^{\diamond}$ 接近 σ_s 且 $u_{\mathrm{M}}^{\diamond}$ 接近 u_{M}，我们用 $u_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x,t)$ 填补 $x = x_j + \sigma_p^{\diamond}(t-t_n)$ 与 $x = x_j + \sigma_s^{\diamond}(t-t_n)$ 之间的间隙，使得

（M.a） $\sigma_{p-1} < \sigma_p^{\diamond} < \sigma_s^{\diamond}$，（M.b）速度 $\sigma_p^{\diamond}$、左状态和右状态 $u_{p-1}^{\Delta}(x_p^{\diamond}, t_{n.5})$ $u_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x_p^{\diamond}, t_{n.5})$ 满足 Rankine–Hugoniot 条件，（M.c）速度 $\sigma_s^{\diamond}$、左状态和右状态 $u_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x_s^{\diamond}, t_{n.5})$ $u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x_s^{\diamond}, t_{n.5})$ 满足 Rankine–Hugoniot 条件，

其中 $x_p^{\diamond} := x_j + \sigma_p^{\diamond}\Delta/2$、$x_s^{\diamond} := x_j + \sigma_s^{\diamond}\Delta/2$ 和 $u_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x,t)$ 定义如下。首先令

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{\mathrm{M}}^{\Delta} =& z_{\mathrm{M}}^{\diamond} - \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx - V(u_{\mathrm{R}})\frac{\Delta t}{2} - \int_{x_{j+1}}^{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t_{n.5})} J(u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t_{n.5}))dx, \\ \tilde{w}_{\mathrm{M}}^{\Delta} =& w_{\mathrm{M}}^{\diamond} - \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx - V(u_{\mathrm{R}})\frac{\Delta t}{2} - \int_{x_{j+1}}^{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t_{n.5})} J(u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t_{n.5}))dx, \end{aligned}$$

其中 $x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t) = x_j + \sigma_s^{\diamond}(t-t_n)$。

我们构造 $\check{u}_{\mathrm{M}}^{\Delta}$

$$\begin{aligned} \check{z}_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{z}_{\mathrm{M}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) + \int_{x_{j+1}}^{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t)} J(u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t))dy \\ &+ \int_{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t)}^{x} J(u_{\mathrm{M}})dy + g_1(x,t;u_{\mathrm{M}})(t-t_{n.5}) \\ &- \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x \le y \le x_{j+1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])ds, \\ \check{w}_{\mathrm{M}}^{\Delta}(x,t) =& \tilde{w}_{\mathrm{M}}^{\Delta} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) + \int_{x_{j+1}}^{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t)} J(u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t))dy \\ &+ \int_{x_{\mathrm{R}}^{\Delta}(t)}^{x} J(u_{\mathrm{M}})dy + g_2(x,t;u_{\mathrm{M}})(t-t_{n.5}) \\ &- \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x \le y \le x_{j+1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])ds. \end{aligned}$$

由上述内容，我们通过关系式 (1.5) 确定 $\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t)$。

利用 $\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t)$，接下来我们定义 $u^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t)$ 如下。

$$\begin{aligned}
z^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t) =& \tilde{z}^{\Delta}_{\mathrm{M}} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u^{\Delta}_{n,0}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) + \int_{x_{j+1}}^{x^{\Delta}_{\mathrm{R}}(t)} J(u^{\Delta}_{\mathrm{R}}(x,t))dy \\
&+ \int_{x^{\Delta}_{\mathrm{R}}(t)}^{x} J(\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}}(y,t))dy + g_1(x,t;\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}})(t-t_{n.5}) \\
&- \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x\le y\le x_{j+1}} (\sigma[\eta_*]-[q_*])ds, \\
w^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t) =& \tilde{w}^{\Delta}_{\mathrm{M}} + \int_{-\infty}^{x_{j+1}} J(u^{\Delta}_{n,0}(x))dx + V(u_{\mathrm{R}})(t-t_n) + \int_{x_{j+1}}^{x^{\Delta}_{\mathrm{R}}(t)} J(u^{\Delta}_{\mathrm{R}}(x,t))dy \\
&+ \int_{x^{\Delta}_{\mathrm{R}}(t)}^{x} J(\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}}(y,t))dy + g_2(x,t;\check{u}^{\Delta}_{\mathrm{M}})(t-t_{n.5}) \\
&- \int_{t_{n.5}}^{t} \sum_{x\le y\le x_{j+1}} (\sigma[\eta_*]-[q_*])ds.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

根据 (2.19)，我们通过关系式 (1.5) 确定 $u^{\Delta}_{\mathrm{M}}(x,t)$。

我们将这个由 (2.17)、(2.18)、(2.18) 组成的近似黎曼解记为 $u^{\Delta}(x,t)$。上述构造的有效性在 [11,附录 A] 中得到证明。

注 2.3. $u^{\Delta}(x,t)$ 在单元 $t=t_{n.5}$ 的中间时刻满足 Rankine–Hugoniot 条件。

注 2.4. 近似解 $u^{\Delta}(x,t)$ 在单元划分出的每个部分上都是分段光滑的。因此，在该划分部分中，$u^{\Delta}(x,t)$ 满足

$$(u^{\Delta})_t + f(u^{\Delta})_x - g(x,u^{\Delta}) = o(1).$$

为了推出 L_n 有界，我们证明以下引理。

引理 2.1。

$$0 \le \sum_{k=0}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\eta_*(u^{\Delta}(x,t_{k-0})) - \eta_*(E^k(x;u))\right\} dx + \int_0^{t_n} \sum_{x\in\mathbf{R}} (\sigma[\eta_*]-[q_*])dt \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j\in 2\mathbf{Z}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} R^n_j(x)dx + \int_0^{t_n} \sum_{x\in\mathbf{R}} (\sigma[\eta_*]-[q_*])dt + o(\Delta x) \tag{2.21}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{J\left(u^{\Delta}(x,t_{0-})\right) - J\left(u^{\Delta}(x,t_{n+})\right)\right\} dx + o(\Delta x) \tag{2.22}$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} J(u_0(x))dx + o(\Delta x)。 \tag{2.23}$$

其中 $o(\Delta x)$ 仅依赖于 M_0、E_0 和 T。

$$L_n \le C, \tag{2.24}$$

其中 C 仅依赖于初始数据。

证明。我们回顾一下，对于任意给定的正常数 T，我们的近似解是在 $[0,T]$ 中构造的。由（1.3）和有限传播可知，在某个有限区间之外，我们的近似解为（$\bar{\rho}$, 0）。

首先，由詹森不等式和熵条件，我们得到 (2.20)。
其次，由 (2.4) 可得 (2.21)。
最后，我们考察 (2.22)。仿照 [11, (6.10)], taking $J(u)$ as η in [11], we have

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\eta_*(u^{\Delta}(x,t_{k-0}))-\eta_*(u_{n,0}^{\Delta}(x))\right\}dx+\int_0^{t_n}\sum_{x\in\mathbf{R}}(\sigma[\eta_*]-[q_*])dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{J\left(u^{\Delta}(x,t_{0-})\right)-J\left(u^{\Delta}(x,t_{n+})\right)\right\}dx+o(\Delta x).\end{aligned}$$

另一方面，由 (2.9) 和定理 3.2，我们发现 $u_j^n = E_j^n(u) + o(\Delta x)$。回顾 (2.3) 和 (2.12)，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\eta_*(u^{\Delta}(x,t_{k-0}))-\eta_*(u_{n,0}^{\Delta}(x))\right\}dx\\&=\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\eta_*(u^{\Delta}(x,t_{k-0}))-\eta_*(E^k(x;u))\right\}dx+o(\Delta x).\end{aligned}$$

最后，注意到 $R_j^n(x) \geq 0$，由 (2.5) 和 (2.23) 可得 (2.24)。 □

3. The L^∞ estimate of the approximate solutions

本节旨在由（2.9）推导出以下定理:

定理 3.1. 对于 $j \in 2\mathbf{Z}_{\geq 0}$、$n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 和 $x_{j-1} \leq x < x_{j+1}$,

$$\begin{aligned}&z^{\Delta}(x,t_{n+1-})\geq -M_{n+1}-E_0-L_n+\int_{-\infty}^{x}J(u^{\Delta}(y,t_{n+1-}))dy-o(\Delta x),\\&w^{\Delta}(x,t_{n+1-})\leq M_{n+1}+L_n+\int_{-\infty}^{x}J(u^{\Delta}(y,t_{n+1-}))dy\\&\qquad+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\sum_{x<x_{j+1}}(\sigma[\eta_*]-[q_*])dt+o(\Delta x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中，$t_{n-} = n\Delta t - 0$、M_{n+1} 在（2.6）中定义，o(Δx) 仅依赖于 M_0 和 E_0，ε 和 δ 见（1.25）。

定理 3.2. 假设 $u^{\Delta}(x,t)$ 满足（1.10）和（3.1）。那么，如果 $E_j^n(\rho) \geq (\Delta x)^{\mu}$，则有

$$\begin{aligned}&-M_n-E_0-L_n+I_j^n-o(\Delta x)\leq z(E_j^n(u)),\\&w(E_j^n(u))\leq M_n+L_n+I_j^n+o(\Delta x),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 $j \in 2\mathbf{Z}$，且 o(Δx) 仅依赖于 M_0。

需要 (3.2) 来确保 (2.9)。

在本文中，除非另有说明，朗道符号如 $O(\Delta x)$、$O((\Delta x)^2)$ 和$o(\Delta x)$表示其模满足仅依赖于 M_0 和 E_0 的统一有界性的量。

现在，在上一节中，我们已在情形 1 中构造了 $u^{\Delta}(x,t)$。在此情形下考虑 L^{∞} 估计时，主要困难在于沿着 R_1^{Δ}获得 $(3.1)_2$。因此，我们关注沿着 R_1^{Δ}的 $(3.1)_2$。

3.1. 定理 3.2 的证明。我们首先考察定理 3.2。对于 $x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$，我们设

$$\begin{aligned} z_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-}) =& z^{\Delta}(x,t_{n-}) - \int_{-\infty}^{x} J\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \eta_*\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy \\ & - \int_{x_{j-1}}^{x} a_j^n \rho^{\Delta}(y,t_{n-}) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma} dy, \\ w_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-}) =& w^{\Delta}(x,t_{n-}) - \int_{-\infty}^{x} J\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \eta_*\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy \\ & - \int_{x_{j-1}}^{x} a_j^n \rho^{\Delta}(y,t_{n-}) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma} dy, \end{aligned}$$

其中

$$a_j^n = \frac{\partial \eta_*}{\partial \rho}(E_j^n(u)) + \frac{\partial \eta_*}{\partial m}(E_j^n(u)) \left\{ E_j^n(v) - \left(E_j^n(\rho)\right)^{\theta} \right\}, \quad E_j^n(v) := \frac{E_j^n(m)}{E_j^n(\rho)}. \tag{3.3}$$

然后，根据关系式 (1.5)，我们定义 $\rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})$ 和 $v_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})$。我们注意到

$$\begin{aligned} \rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-}) =& \rho^{\Delta}(x,t_{n-}), \\ v_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-}) =& v^{\Delta}(x,t_{n-}) - \int_{-\infty}^{x} J\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \eta_*\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy \\ & - \int_{x_{j-1}}^{x} a_j^n \rho^{\Delta}(y,t_{n-}) dy + \int_{x_{j-1}}^{x} \frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma} dy. \end{aligned}$$

由于 L_n 为正，$(3.2)_2$ 比 $(3.2)_1$更难处理。因此，在本证明中我们只处理 $(3.2)_2$。

$$\begin{aligned} w(E_j^n(u)) =& \frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} m^{\Delta}(x,t_{n-})dx + \left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx\right)^{\theta}/\theta}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx} \\ =& \frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} m_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx + \left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx\right)^{\theta}/\theta}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx} \\ & + \frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho^{\Delta}(x,t_{n-}) \left\{ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} \eta_*\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right) dy \right\} dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})\left\{\left(\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}-a_j^n\right)\int_{x_{j-1}}^{x}\rho^{\Delta}(y,t_{n-})dy\right\}dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx}\\
&-\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\int_{-\infty}^{x_{j-1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx+\frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})\left\{\int_{-\infty}^{x_{j-1}}\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma}dy\right\}dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx}\\
=&A_1+A_2-A_3+A_4.
\end{aligned}
$$

我们用 A_{31}表示 A_3 的分子。通过分部积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
A_{31}=&\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx\times\left(\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho-a_j^n\right)\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(y,t_{n-})dx\\
&-\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{\int_{x_{j-1}}^{x}\rho^{\Delta}(y,t_{n-})dy\right\}\left(\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho-a_j^n\right)\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx\\
=&\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx\times\left(\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho-a_j^n\right)\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx-A_{31}.
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
A_{31}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx\times\left(\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}\rho-a_j^n\right)\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(y,t_{n-})dx.
$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
w(E_j^n(u))=&\frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}m_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})+\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx\right)^{\theta}/\theta}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx}\\
&+\int_{-\infty}^{x_{j-1}}J\left(u^{\Delta}(x,t_{n-})\right)dx-\frac{\frac{(\bar{\rho})^{\gamma-1}}{\gamma-1}-a_j^n}{2}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho^{\Delta}(x,t_{n-})dx.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

这里引入以下引理。证明推迟至附录 A。

引理 3.3。若

$$
\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\rho_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})dx\geq(\Delta x)^{\mu}
\tag{3.5}
$$

and

$$
\begin{aligned}
w_{\dagger}^{\Delta}(x,t_{n-})\leq&M_n+L_{n-1}+\int_{x_{j-1}}^{x}\eta_*\left(u^{\Delta}(y,t_{n-})\right)dy-\int_{x_{j-1}}^{x}a_j^n\rho^{\Delta}(y,t_{n-})dy\\
&+\int_{x_{j-1}}^{x}\frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma}dy+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\sum_{x<x_{j-1}}(\sigma[\eta_*]-[q_*])dt+o(\Delta x)\\
=&:A(x,t_{n-})+o(\Delta x)\quad(x\in[x_{j-1},x_{j+1}]),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

以下条件成立

$$w(E_j^n(u_\dagger^\Delta)) \le \bar{A}_j(t_{n-}) + o(\Delta x),$$

其中 $E_j^n(u_\dagger^\Delta) = \dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} u_\dagger^\Delta(x,t_{n-})dx$, $\bar{A}_j(t_{n-}) = \dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} A(x,t_{n-})dx$,

μ 的定义见 (2.7)。

由 (3.1) 和此引理可得

$$\begin{aligned} w(E_j^n(u)) \le & M_n + L_{n-1} + I_j^n + \int_{t_n}^{t_n} \sum_{y<x_{j-1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])dt \\ & + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} \left\{\eta_*\left(u^\Delta(x,t_{n-})\right) - \eta_*\left(u_{n,0}^\Delta(x)\right)\right\} dx \\ & + \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} \left\{\eta_*\left(u^\Delta(y,t_{n-})\right) - \eta_*\left(E_j^n(u)\right)\right\} dydx \\ & - \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} a_j^n\left(\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right) dydx + o(\Delta x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

为了完成定理 (3.2) 的证明，我们必须考察

$$\Gamma_j^n(y) = \eta_*(u^\Delta(y,t_{n-})) - \eta_*(E_j^n(u)) - a_j^n\left(\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right)$$

在 (3.7) 中，其中 a_j^n 定义于 (3.3)。

于是由 (2.4) 可推得

$$\begin{aligned} \Gamma_j^n(y) = & \frac{\partial \eta_*}{\partial m}(E_j^n(u))\rho^\Delta(y,t_{n-})\left(w(y,t_{n-}) - w(E_j^n(u))\right) \\ & - \frac{\partial \eta_*}{\partial m}(E_j^n(u))\int_0^1 (1-\tau)(\theta+1)\left(E_j^n(\rho) + \tau\left\{\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right\}\right)^{\theta-1} d\tau \\ & \times \left(\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right)^2 + R_j^n(y) \\ = & E_j^n(v)\rho^\Delta(y,t_{n-})\left(w(y,t_{n-}) - w(E_j^n(u))\right) \\ & - \frac{E_j^n(v)}{2}\int_0^1 (1-\tau)(\theta+1)\left(E_j^n(\rho) + \tau\left\{\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right\}\right)^{\theta-1} d\tau \\ & \times \left(\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right)^2 + R_j^n(y). \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} \Gamma_j^n(y)dydx \\ = & \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} E_j^n(v)\rho^\Delta(y,t_{n-})\left(w(y,t_{n-}) - w(E_j^n(u))\right) dydx \\ & - \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} \frac{E_j^n(v)}{2}\int_0^1 (1-\tau)(\theta+1)\left(E_j^n(\rho) + \tau\left\{\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right\}\right)^{\theta-1} d\tau \\ & \times \left(\rho^\Delta(y,t_{n-}) - E_j^n(\rho)\right)^2 dydx + \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x} R_j^n(y)dydx \\ = & : B_1 + B_2 + B_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

若 $E_j^n(\rho) < (\Delta x)^\mu$，则可得 $B_1 = o(\Delta x)$ 和 $B_2 = o(\Delta x)$。因此，我们致力于研究 $E_j^n(\rho) \geq (\Delta x)^\mu$ 的情形。

如果 $w(E_j^n(u)) \leq M_n + L_n + I_j^n$，(3.2) 显然成立。

否则，我们考虑以下引理。

引理 3.4. 如果

$$w(E_j^n(u)) > M_n + L_n + I_j^n, \tag{3.9}$$

下述结论成立。

$$\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\int_{x_{j-1}}^{x}\Gamma_j^n(y)dydx \leq \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} R_j^n(x)dx + o(\Delta x).$$

证明。由定理 3.1，得到 $z(E_j^n(u)) \geq -M_n - L_n + I_j^n - O(\Delta x)$。由 (3.9)，可得 $E_j^n(v) \geq I_j^n - O(\Delta x)$（回忆一下 (3.3) 中 $E_j^n(v)$ 的定义）。若$E_j^n(v) < 0$，由于 $I_j^n - O(\Delta x) \leq E_j^n(v) \leq 0$，我们有

$$-E_j^n(v) \leq O(\Delta x). \tag{3.10}$$

我们先处理 (3.8) 中的 B_1。若 $E_j^n(v) \geq 0$，由定理 3.1 和 (3.9) 可推得

$$B_1 \leq \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} E_j^n(v)\rho^\Delta(x,t_{n-})\left(w(x,t_{n-}) - w_j^n\right)dx = o(\Delta x).$$

若 $E_j^n(v) < 0$，由 (3.10) 可得 $B_1 = o(\Delta x)$。

接下来考虑 B_2。若 $E_j^n(v) \geq 0$，可得 $B_2 \leq 0$。若 $E_j^n(v) < 0$，由 (3.10)，我们得到 $B_2 = o(\Delta x)$。□

m

根据引理 3.4，我们可以完成 (3.2) 的证明。

3.2. 定理 3.1 的证明。接下来我们证明定理 3.1。

情形 1 中沿 R_1^Δ 对 $w^\Delta(x,t)$ 的估计 在这一步中，我们估计第 2 节情形 1 中沿 R_1^Δ的 $w^\Delta(x,t)$。我们回顾一下，沿 R_1^Δ 的 u^Δ 由 $u_k^\Delta(k = 1, 2, 3, \ldots, p-1)$ 组成。在这种情况下，$w^\Delta(x,t)$ 具有以下性质，其证明见 [11, 附录 A]:

$$w_{k+1}^\Delta(x_{k+1}^\Delta(t_{n.5}), t_{n.5}) = w_{k+1} = w_k^\Delta(x_{k+1}^\Delta(t_{n.5}), t_{n.5}) + O((\Delta x)^{3\alpha-(\gamma-1)\beta}) \quad (k = 1, \ldots, p-2), \tag{3.11}$$

其中 $t_{n.5}$ 在 (2.2) 中定义。

我们首先考虑 $\tilde{w}_1^\Delta$。我们回顾一下

$$\tilde{w}_1^\Delta = w_{\mathrm{L}} - \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^\Delta(x))dx.$$

由（2.9），我们有 $\tilde{w}_1^\Delta \leq M_n + L_n$。

由于

$$\check{u}_1^\Delta(x,t) = u_1^\Delta(x,t) + O((\Delta x)^2), \tag{3.12}$$

我们有

$$\begin{aligned} w_1^{\Delta}(x,t)=&\tilde{w}_1^{\Delta}+\int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx+V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n)+\int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(\check{u}_1^{\Delta}(y,t))dy\\ &+g_2(x,t;\check{u}^{\Delta})(t-t_n)\\ \le& M_n+L_n+\int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx+V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n)+\int_{x_1^{\Delta}}^{x} J(u_1^{\Delta}(y,t))dy\\ &+g_2(x,t;u^{\Delta})(t-t_n)+o(\Delta x). \end{aligned}$$

另一方面，根据我们构造近似解的方法，我们观察到 $w_1^{\Delta}(x,t)=w_1^{\Delta}(x,t_{n-})+O(\Delta x)$ $(x_{j-1}\le x<x_{j+1},\ t_n\le t<t_{n+1})$。分三种情况，我们证明 (3.1)$_2$。

(i) 若 $w_1^{\Delta}(x,t_{n-})<M_n+L_n+I_j^n-\sqrt{\Delta x}$，则得到 (3.1)$_2$。

(ii) 若 $w_1^{\Delta}(x,t_{n-})\ge M_n+L_n+I_j^n-\sqrt{\Delta x}$ 且 $M_n+L_n\ge\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon$，我们注意到 $w_1^{\Delta}(x,t)\ge w_1^{\Delta}(x,t_{n-})-O(\sqrt{\Delta x})\ge M_n+L_n-O(\sqrt{\Delta x})\ge\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon-O(\sqrt{\Delta x})\ge\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon/2$，通过将 Δx 取得足够小。从由 (1.25)，得到 $g_2(x,t;u_1^{\Delta})<-2\delta$。由 (2.16)，得到 (3.1)$_2$。

(iii) 若 $w_1^{\Delta}(x,t_{n-})\ge M_n+L_n+I_j^n-\sqrt{\Delta x}$ 且 $M_n+L_n<\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon$，由 (2.6) 可得 $\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon-\delta\Delta t\le M_n+L_n$。因此，取足够小的 Δx，我们有 $w_1^{\Delta}(x,t)\ge w_1^{\Delta}(x,t_{n-})-O(\sqrt{\Delta x})\ge M_n+L_n-O(\sqrt{\Delta x})\ge\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon-O(\sqrt{\Delta x})\ge\dfrac{(\bar{\rho})^{\theta}}{\theta}+\varepsilon/2$。由 (1.25) 可得 $g_2(x,t;u_1^{\Delta})<-2\delta<0$。回顾 (2.6)，由 (2.16) 可得 (3.1)$_2$。

接下来，我们假设

$$\begin{aligned} w_k^{\Delta}(x,t)\le& M_n+L_n+\int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx+V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n)\\ &+\int_{x_{j-1}}^{x} J(u^{\Delta}(y,t))dy+\int_{t_{n.5}}^{t}\sum_{x_{j-1}\le y<x}(\sigma[\eta_*]-[q_*])dt\\ &+(k-1)\cdot O((\Delta x)^{3\alpha-(\gamma-1)\beta})+o(\Delta x) \end{aligned}\tag{3.13}$$

对于 $(x,t)\in[x_{j-1},x_{k+1}^{\Delta}(t))\times[t_n,t_{n+1})$。

回顾一下，

$$\tilde{w}_{k+1}^{\Delta}=w_{k+1}-\int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx-V(u_{\mathrm{L}})\frac{\Delta t}{2}-\sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^{\Delta}(t_{n.5})}^{x_{l+1}^{\Delta}(t_{n.5})} J(u_l^{\Delta}(x,t_{n.5}))dx$$

并且 $u^{\Delta}(x,t)$ 由 $u_l^{\Delta}(x,t)$ 在 $x_l^{\Delta}(t)\le x<x_{l+1}^{\Delta}(t)\ \ t_n\le t<t_{n+1}$ $(l=1,2,3,\dots,k+1)$ 中构成。

由 (3.11) 和 (3.13)，可得

$$\tilde{w}_{k+1}^{\Delta}\le M_n+L_n+k\cdot O((\Delta x)^{3\alpha-(\gamma-1)\beta})+o(\Delta x).$$

由与 w_1^{Δ} 类似的论证，可得

$$\begin{aligned}w_{k+1}^{\Delta}(x,t)=&\tilde{w}_{k+1}^{\Delta}+\int_{-\infty}^{x_{j-1}}J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx+V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n)+\sum_{l=1}^{k}\int_{x_l^{\Delta}(t)}^{x_{l+1}^{\Delta}(t)}J(u_l^{\Delta}(x,t))dx\\&+\int_{x_{k+1}^{\Delta}(t)}^{x}J(\check{u}_{k+1}^{\Delta}(y,t))dy+g_2(x,t;\check{u}_{k+1}^{\Delta})(t-t_{n.5})\\&+\int_{t_{n.5}}^{t}\sum_{x_{j-1}\le y\le x}(\sigma[\eta_*]-[q_*])ds\\\le&M_n+L_n+\int_{-\infty}^{x_{j-1}}J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx+V(u_{\mathrm{L}})(t-t_n)+\int_{x_{j-1}}^{x}J(u^{\Delta}(y,t))dy\\&+g_2(x,t;\check{u}_{k+1}^{\Delta})(t-t_{n.5})+\int_{t_{n.5}}^{t}\sum_{x_{j-1}\le y\le x}(\sigma[\eta_*]-[q_*])ds\\&+k\cdot O((\Delta x)^{3\alpha-(\gamma-1)\beta})+o(\Delta x)\qquad(k=1,2,3,\dots,p-1).\end{aligned}$$

由 (2.10) 和 (2.16)，由于 $\{3\alpha-(\gamma-1)\beta\}\,p>1$，我们得出 (3.1)$_2$。

4. Proof of Theorem 1.1

我们的近似解满足以下命题（这些证明与 [11]–[13] 类似）。

命题4.1。测度列

$$\eta_*(u^{\Delta})_t+q(u^{\Delta})_x$$

属于 $H^{-1}{}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的一个紧子集，对所有弱熵对 (η_*,q) 均成立，其中 $\Omega\subset[0,1]\times[0,1]$ 是任意有界开集。

命题4.2. 假设近似解 u^{Δ} 有界，且满足命题4.1。则在近似解 $u^{\Delta}(x,t)$ 中存在一个收敛子列 $u^{\Delta_n}(x,t)$，使得

$$u^{\Delta_n}(x,t)\to u(x,t)\quad\text{a.e.,}\quad\text{as }\ n\to\infty.$$

函数 $u(x,t)$ 是柯西问题 (1.4) 的全局熵解。

此外，根据定理 3.1，上述解满足 (1.11)。因此，我们可以证明定理 1.1。

Appendix A. Proof of (1.21) and (1.22)

A.1. (1.21) 的证明。首先，当 $0\le\rho\le\bar{\rho}$ 时，我们将证明

$$\frac{5\gamma-3}{\gamma(\gamma-1)^2}\rho^{\gamma+\theta}-\frac{2(3\gamma-1)}{\gamma(\gamma-1)^2}(\bar{\rho})^{\theta}\rho^{\gamma}+\frac{3-\gamma}{(\gamma-1)^2}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1}-\frac{3-\gamma}{\gamma(\gamma-1)}(\bar{\rho})^{\gamma}\rho^{\theta}+\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}(\bar{\rho})^{\gamma+\theta}\ge0.$$

为此，令 $t=\rho/\bar{\rho}$，我们考虑

$$\begin{aligned}f(t)=&(5\gamma-3)t^{3\theta+1}-2(3\gamma-1)t^{2\theta+1}+\gamma(3-\gamma)t^{\theta+1}-(3-\gamma)(\gamma-1)t^{\theta}\\&+2(\gamma-1),\quad0\le t\le1.\end{aligned}$$

分三步进行，我们将推导出 $f(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1$。

步骤 1

首先，我们考虑 $t = 0$ 的邻域。令 $X = t^\theta$。解两个不等式

$$\begin{aligned}&(5\gamma-3)t^{3\theta+1} - 2(3\gamma-1)t^{2\theta+1} + \gamma(3-\gamma)t^{\theta+1}\\ &= t^{\theta+1}\left\{(5\gamma-3)X^2 - 2(3\gamma-1)X + \gamma(3-\gamma)\right\} \geq 0\end{aligned}$$

and

$$-(3-\gamma)(\gamma-1)t^\theta + 2\gamma(\gamma-1) = -(3-\gamma)(\gamma-1)X + 2(\gamma-1) \geq 0,$$

可得 $0 \leq X \leq \xi$，其中 ξ 是 $(5\gamma-3)X^2 - 2(3\gamma-1)X + \gamma(3-\gamma) = 0$ 的较小解。我们注意到 $f(t) \geq 0$ 位于区间 $0 \leq X \leq \xi$ 内。

步骤 2

接下来，我们考虑 $t = 1$ 的邻域。我们发现 $f(1) = f'(1) = 0$。另一方面，由 $0 \leq t \leq 1, \gamma > 1$ 可得

$$\begin{aligned}4f''(t) =& 3(5\gamma-3)(3\gamma-1)(\gamma-1)t^{3\theta-1} - 8\gamma(\gamma-1)(3\gamma-1)t^{2\theta-1}\\ &+ \gamma(\gamma-1)(\gamma+1)(3-\gamma)t^{\theta-1} + (\gamma-1)^2(3-\gamma)^2t^{\theta-2}\\ \geq& 3(5\gamma-3)(3\gamma-1)(\gamma-1)t^{3\theta-1} - 8\gamma(\gamma-1)(3\gamma-1)t^{2\theta-1}\\ &+ (5\gamma-3)(\gamma-1)(3-\gamma)t^{\theta-1}\\ \geq& 3(5\gamma-3)(3\gamma-1)(\gamma-1)t^{3\theta-1} - 8\gamma(\gamma-1)(3\gamma-1)t^{2\theta-1}\\ &+ (3\gamma-1)(\gamma-1)(3-\gamma)t^{\theta-1}\\ =& (3\gamma-1)(\gamma-1)t^{\theta-1}\left\{3(5\gamma-3)X^2 - 8\gamma X + 3 - \gamma\right\}.\end{aligned}$$

因此，我们发现 $f(t) \geq 0$ 位于区间 $\eta \leq X \leq 1$ 内，其中 η 是 $3(5\gamma-3)X^2 - 8\gamma X + 3 - \gamma = 0$ 的较大解。

步骤 3

由于 $\xi < \eta$，由步骤 1、2 可知，只需证明 $f(t) \geq 0$ 位于区间 $\xi \leq X \leq \eta$ 内。注意到 $(5\gamma-3)X^2 - 2(3\gamma-1)X + \gamma(3-\gamma) \leq 0$ 在此区间内，我们得到

$$\begin{aligned}f(t) =& t^{\theta+1}\left\{(5\gamma-3)X^2 - 2(3\gamma-1)X + \gamma(3-\gamma)\right\} - (3-\gamma)(\gamma-1)X + 2(\gamma-1)\\ \geq& X\left\{(5\gamma-3)X^2 - 2(3\gamma-1)X + \gamma(3-\gamma)\right\} - (3-\gamma)(\gamma-1)X + 2(\gamma-1)\\ =& (5\gamma-3)X^3 - 2(3\gamma-1)X^2 + (3-\gamma)X + 2(\gamma-1) =: g(X).\end{aligned}$$

设 α, β $(\alpha < \beta)$ 是 $g'(X) = 0$ 的两个解。于是，我们发现 $0 < \alpha < \xi < \eta < \beta < 1$。此外，我们推得 $g(\eta) > 0$。因此，我们可以完成证明。

A.2. (1.22) 的证明。本附录的目标是证明

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma^2(\gamma-1)}\rho^{\gamma+\theta} - \frac{1}{\gamma-1}(\bar{\rho})^{\gamma-1}\rho^{\theta+1} + \frac{\gamma+1}{\gamma^2}(\bar{\rho})^\gamma\rho^\theta - \frac{1}{2\gamma^2}(\bar{\rho})^{2\gamma}\frac{1}{\rho^{\theta+1}} \geq 0,$$

其中 $\rho \geq \bar{\rho}$。为此，令 $t = \rho/\bar{\rho}$，我们证明

$$g(t) = \frac{\gamma+1}{2\gamma^2(\gamma-1)}t^{2\gamma} - \frac{1}{\gamma-1}t^{\gamma+1} + \frac{\gamma+1}{\gamma^2}t^\gamma - \frac{1}{2\gamma^2} \geq 0, \quad t \geq 1.$$

首先，我们观察到 $g(1) = g'(1) = g''(1) = 0$。此外，我们发现 $g'''(t) \geq 0, \quad t \geq 1$。因此我们得出结论，$g(t) \geq 0$。

Appendix B. Proof of Lemma 3.3

证明。由于篇幅有限，本节中我们用 T 表示 t_{n-}。令

$$\begin{aligned}
\rho_\dagger^{\Delta}(x,T) &:= \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}},\\
m_\dagger^{\Delta}(x,T) &:= \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},\\
E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}) &:= \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx,\\
E_j^{n+1}(m_\dagger^{\Delta}) &:= \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx.
\end{aligned}$$

于是，我们得到

$$w(\hat{u}(x,T)) \le 1 + o(\Delta x). \tag{B.1}$$

我们来证明

$$w(E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}), E_j^{n+1}(m_\dagger^{\Delta})) \le \bar{A}_j(T) + o(\Delta x),$$

其中

$$\bar{A}_j(T) = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} A(x,T)dx$$

and

$$\begin{aligned}
&w(E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}), E_j^{n+1}(m_\dagger^{\Delta}))\\
&\quad= E_j^{n+1}(m_\dagger^{\Delta})/E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}) + \{E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta})\}^{\theta}/\theta\\
&\quad= \frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx + \left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1}/\theta}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

步骤 1。

我们发现

$$\begin{aligned}
E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}) &= \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left\{A(x,T)\right\}^{-1} dx\\
&= \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx\\
&\quad+ \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \times \left(\left\{A(x,T)\right\}^{-1} - \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\right) dx\\
&= \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx\\
&\quad- \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx + o(\Delta x),
\end{aligned}$$

其中 $r(x,T) = A(x,T) - \bar{A}_j(T)$。回顾式 (3.6)，我们注意到 $r(x,T) = O(\Delta x)$。

将上述方程代入式 (B.2)，得到

$$
\begin{aligned}
&w(E_j^{n+1}(\rho_\dagger^\Delta), E_j^{n+1}(m_\dagger^\Delta)) \\
=&\frac{\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx + \left(\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1}/\theta}{\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx} \\
&+\frac{\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx + \left(\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1}/\theta}{\left(\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{2}} \\
&\times\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx + o(\Delta x). \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Set

$$
\begin{aligned}
\omega :=& \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta}} \\
&\times\frac{\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{m}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx + \left(\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1}/\theta}{\dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx}. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

接下来假设以下结论成立。

$$
\begin{aligned}
(E_j^{n+1}(\rho_\dagger^\Delta))^{\theta+1} \le& \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (\hat{\rho}(x,T))^{\theta+1}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} dx \\
&-\frac{\gamma+1}{2}\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta} \\
&\times\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx\right. \\
&\left.-\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} r(x,T)dx\right) \\
&+o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx. \qquad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

这一估计将在步骤 2–4 中得到证明。然后，将 (B.5) 代入 (B.3)，由 (B.1) 可得

$$\begin{aligned} w(E_j^{n+1}(\bar{\rho}), E_j^{n+1}(m_\dagger^\Delta)) \leq & \frac{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\hat{v}(x,T)+\frac{\{\hat{\rho}(x,T)\}^\theta}{\theta}\right]dx}{\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}dx} \\ & + o(\Delta x) \\ \leq & \bar{A}_j(T) + o(\Delta x). \end{aligned}$$

因此，我们必须证明 (B.5)。分三个步骤，我们推导出这个估计。

步骤 2。

由 (3.5)，我们注意到

$$|\omega| \leq C(\Delta x)^{-\theta\delta-\varepsilon},$$

其中 C 仅依赖于 M。

在这一步中，我们考虑 (B.3) 的第一个方程:

$$\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}dx\right)^{\theta+1}.$$

由于 $\theta\delta < 1/2$，我们首先求得

$$\begin{aligned} E_j^{n+1}(\rho_\dagger^\Delta) = & \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}\left\{A(x,T)\right\}^{-\omega}dx \\ = & \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}dx \\ & -\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}r(x,T)dx \\ & + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}dx \\ := & I_0 - I_1 + I_2. \end{aligned}$$

接下来，我们按如下方式估计 I_1：

$$\begin{aligned} I_1 = & \omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}r(x,T)dx \\ & + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}dx. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}) =& \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}\left\{A(x,T)\right\}^{-\omega} dx \\
=& \left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}} dx \\
& -\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx \\
& + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx.
\end{aligned}
$$

由此，我们推得

$$
\begin{aligned}
(E_j^{n+1}(\rho_\dagger^{\Delta}))^{\theta+1} =& \left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}} dx\right. \\
& \left.-\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx\right)^{\theta+1} \\
& + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=& \left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1} \\
& + (\theta+1)\left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta} \\
& \times -\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx \\
& + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx \\
=& \left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta+1} \\
& - \frac{\gamma+1}{2}\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-1}\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx\right)^{\theta} \\
& \times \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} r(x,T)dx \\
& + o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}} dx. \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}
$$

步骤 3 将詹森不等式应用于式 (B.6) 右侧的第一项，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}dx\right)^{\theta+1}\\
&=\left(\frac{\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx}\right)^{\theta+1}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx\right)^{\theta+1}\\
&=\left(\frac{\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega+\frac{2}{\gamma-1}}dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx}\right)^{\theta+1}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx\right)\\
&\quad\times\left(\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2}\omega}+\frac{\gamma+1}{2}\omega\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2}\omega-1}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}r(x,T)dx+o(\Delta x)\right)\\
&=\left(\frac{\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{-\omega}\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\omega-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega+\frac{2}{\gamma-1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx}{\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx}\right)^{\theta+1}\\
&\quad\times\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega}dx\right)\left\{\bar{A}_j(T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{2}\omega}\\
&\quad+o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}dx\\
&\le\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\left(\hat{\rho}(x,T)\right)^{\theta+1}\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}dx\\
&\quad+o(\Delta x)\frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}\hat{\rho}(x,T)\left\{A(x,T)\right\}^{\frac{2}{\gamma-1}}dx. \qquad \text{(B.7)}
\end{aligned}
$$

由 (B.6) 和 (B.7)，我们得到 (B.5)，从而完成引理 3.3 的证明。 □

Appendix C. Construction and L^∞ estimates of approximate solutions near the vacuum in Case 1

在这一步中，我们考虑 $\rho_{\mathrm{M}} \le (\Delta x)^\beta$ 的情形，这意味着 u_{M} 接近真空。由于我们无法使用隐函数定理，因此必须以不同的方式构造 $u^\Delta(x,t)$。

情形 1：出现一个 1-稀疏波和一个 2-激波。

在这种情况下，我们注意到 $\rho_{\mathrm{R}} \le (\Delta x)^{\beta}$，$z_{\mathrm{R}} \ge -M_n - L_n + I_j^n$以及 $w_{\mathrm{R}} \le M_n + L_n + I_j^n$。

情形 1.1 $\rho_{\mathrm{L}} > (\Delta x)^{\beta}$

我们用 $u^{(1)}{}_{\mathrm{L}}$ 表示满足 $w(u^{(1)}{}_{\mathrm{L}}) = w(u_{\mathrm{L}})$ 且 $\rho^{(1)}{}_{\mathrm{L}} = (\Delta x)^{\beta}$ 的状态。设 $u^{(2)}{}_{\mathrm{L}}$ 是一个通过 $R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}, z^{(1)}{}_{\mathrm{L}} x, t_{n+1-})$ 与 $u_1^{\Delta}(x_{j-1}, t_{n+1-})$ 在右侧相连的状态。我们令

$$(z_{\mathrm{L}}^{(3)}, w_{\mathrm{L}}^{(3)}) = \begin{cases} (z_{\mathrm{L}}^{(2)}, w_{\mathrm{L}}^{(2)}), & \text{if } z_{\mathrm{L}}^{(2)} \ge D_j^n, \\ (D_j^n, w_{\mathrm{L}}^{(2)}), & \text{if } z_{\mathrm{L}}^{(2)} < D_j^n, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} D_j^n = &- M_{n+1} - L_n + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})\Delta t + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{(\bar{\rho})^{\gamma}}{\gamma} dx \\ &+ \int_{x_{j-1}}^{x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}}^{(2)})\Delta t} \eta(R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}, z_{\mathrm{L}}^{(1)}, x, t_{n+1-}))dx. \end{aligned}$$

然后，我们将 $u^{\Delta}(x,t)$ 定义如下。

$$u^{\Delta}(x,t) = \begin{cases} R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}, z_{\mathrm{L}}^{(1)}, x, t), & \text{if } x_{j-1} \le x \le x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}}^{(2)})(t - t_n) \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \\ u_{\mathrm{Rw}}(x,t), & \text{if } x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}}^{(2)})(t - t_n) < x \le x_j + \lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})(t - t_n) \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \\ u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) \text{ defined in (2.18)}, & \text{if } x_j + \lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})(t - t_n) < x \le x_{j+1} \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \end{cases}$$

其中，(a) $\lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})$ 是 2-激波的传播速度；(b) $u_{\mathrm{Rw}}(x,t)$ 是连接 $u^{(3)}{}_{\mathrm{L}}$ 和 $u^{(4)}{}_{\mathrm{L}}$ 的稀疏波；(c) $u^{(4)}{}_{\mathrm{L}}$ 由 $z^{(4)}{}_{\mathrm{L}} = \max\{z^{(3)}{}_{\mathrm{L}} z_{\mathrm{M}}\}, w^{(4)}{}_{\mathrm{L}} = w^{(3)}{}_{\mathrm{L}}$ 定义。

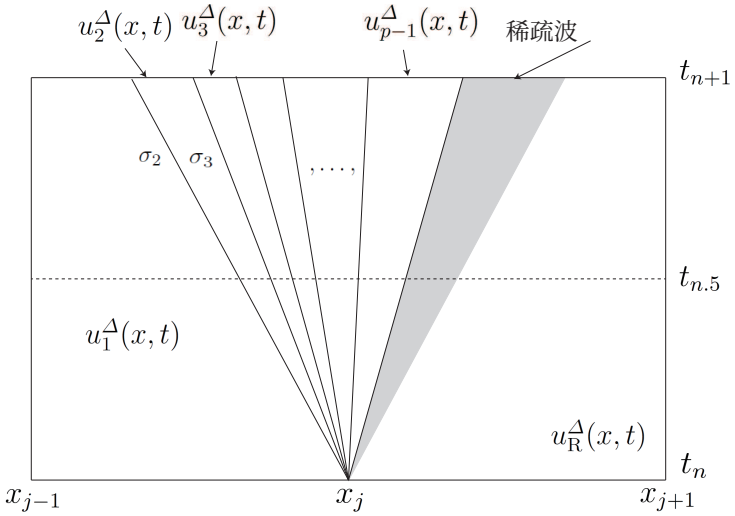


FIGURE 2. 情形 1.1：单元中的近似解 u^{Δ}。

情形 1.2 $\rho_{\mathrm{L}} \le (\Delta x)^{\beta}$
我们设 $(z^{(5)}{}_{\mathrm{L}}\ w^{(5)}{}_{\mathrm{L}}) = (\max\{z_{\mathrm{L}}, D_j^n\}, \min\{w_{\mathrm{L}}, U_j^n\})$，其中

$$U_j^n = M_{n+1} + L_n + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} J(u_{n,0}^{\Delta}(x))dx + V(u_{\mathrm{L}})\Delta t.$$

然后，我们如下定义 $u^{\Delta}(x,t)$。

$$u^{\Delta}(x,t) = \begin{cases} u_1^{\Delta}(x,t) \text{ defined in (2.15)}, & \text{if } x_{j-1} \le x \le x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \\ u_{\mathrm{Rw}}(x,t), & \text{if } x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}})(t-t_n) < x \le x_j + \lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})(t-t_n) \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \\ u_{\mathrm{R}}^{\Delta}(x,t) \text{ defined in (2.18)}, & \text{if } x_j + \lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})(t-t_n) < x \le x_{j+1} \\ & \text{and } t_n \le t < t_{n+1}, \end{cases}$$

其中，(a) $u_{\mathrm{Rw}}(x,t)$ 是连接 $u^{(5)}{}_{\mathrm{L}}$ 和 $u^{(6)}{}_{\mathrm{L}}$ 的稀疏波；(b) $u^{(6)}{}_{\mathrm{L}}$ 由 $z^{(6)}{}_{\mathrm{L}} = \max\{z^{(5)}{}_{\mathrm{L}}\ z_{\mathrm{M}}\}$, $w^{(6)}{}_{\mathrm{L}} = w^{(5)}{}_{\mathrm{L}}$ 定义。

注 C.1. 我们注意到，在 (1.ii)、(1.iii) 和 (2.i)– (2.iii) 中，$\rho^{\Delta}(x,t) = O((\Delta x)^{\beta})$。因此，这些区域中以下结论成立。

尽管 (1.ii) 和 (2.ii) 是齐次等熵气体动力学的解（即 $g(x,t,u)) = 0$），它们也近似地是 (1.4) 的解

$$(u^{\Delta})_t + f(u^{\Delta})_x - g(x, u^{\Delta}) = -g(x, u^{\Delta}) = O((\Delta x)^{\beta}).$$

此外，分隔 (1.i)–(1.iii) 和 (2.i)–(2.iii) 的间断满足 [11,引理 5.3]。

C.1. L^{∞} 近似解的估计。我们特别考虑情形 1.1。只需处理满足 $u_{\mathrm{Rw}}(x,t)$ 的情形，即在区域 $x_j + \lambda_1(u^{(2)}{}_{\mathrm{L}})(t-t_n) < x \le x_j + \lambda_2(u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{R}})(t-t_n)$ 且 $t_n \le t < t_{n+1}$ 内。其他情形与定理 3.1 类似。

在此情形下，由于 $\rho^{\Delta}(x,t) = O((\Delta x)^{\beta})$，我们有

$$\eta_*(u^{\Delta}(x,t)) = O((\Delta x)^{\beta}). \tag{C.1}$$

此外，我们注意到

$$w^{\Delta}(x, t_{n+1-}) = w_{\mathrm{L}}^{(2)} = w(R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}, z_{\mathrm{L}}^{(1)}, x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}}^{(2)})\Delta t, t_{n+1-})).$$

将定理 3.1 应用于 $R_1^{\Delta}(u_{\mathrm{L}}, z^{(1)}{}_{\mathrm{L}} x, t_{n+1-})$，我们得到

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(x, t_{n+1-}) \le & M_{n+1} + L_n + \int_{-\infty}^{x_j + \lambda_1(u_{\mathrm{L}}^{(2)})\Delta t} J(u^{\Delta}(y, t_{n+1-}))dy \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{y < x_{j-1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])dt + o(\Delta x) \\ \le & M_{n+1} + L_n + \int_{-\infty}^{x} J(u^{\Delta}(y, t_{n+1-}))dy + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{y < x_{j-1}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])dt \\ & + o(\Delta x), \end{aligned}$$

这意味着 (3.1)$_2$。

接下来，我们注意到 $z^{\Delta}(x,t) \geq D_j^n$。根据 (2.16) 和 (C.1)，我们得到 (3.1)$_1$。

Acknowledgements.

N. Tsuge 的研究部分由日本科学研究费补助金（C类）17K05315资助。

References

[1] Chen, G.-Q.：等熵气体动力学中 Lax–Friedrichs 格式的收敛性（III）。Acta Mathematica Scientia 6, 75–120 (1986) [2] Chen, G.-Q.：补偿紧性方法与等熵气体动力学系统。MSRI 预印本 00527-91，伯克利，1990 [3] Chueh, K. N., Conley, C. C. 和 Smoller, J. A.：非线性扩散方程组的正向不变区域。Indiana Univ. Math. J. 26, 373–392 (1977) [4] DiPerna, R. J.：具有凸扩张的双曲型守恒律系统解的衰减， *Arch. Ration. Mech. Anal.* **64**，1–46 (1977) [5] DiPerna, R.J.：等熵气体动力学中黏性方法的收敛性。Commun. Math. Phys. 91, 1–30 (1983) [6] Ding, X., Chen, G.-Q., Luo, P.：等熵气体动力学中 Lax–Friedrichs 格式的收敛性（I）–（II）。Acta Mathematica Scientia 5, 415–432, 433–472 (1985) [7] Ding, X., Chen, G.-Q., Luo, P.：等熵气体动力学系统中分步 Lax–Friedrichs 格式和 Godunov 格式的收敛性。Commun. Math. Phys. 121, 63—84 (1989) [8] Glimm, J.：非线性双曲型方程组的大范围解，

Comm. Pure , —

Appl. Math. **18** 697 715 1965

( ) [9] Glimm, J., Lax, P. D.：非线性双曲型守恒律系统解的衰减， *Amer. Math. Soc.* **101 (1970)** [10] Liu, T. P., Lax, P. D.：一般双曲型守恒律系统初值问题和初边值问题的大时间行为，

Comm. Math. Phys. **55**，163–177 (1977) [11] Tsuge, N.：球对称可压缩欧拉方程的全局 L^∞ 解。J. Math. Kyoto Univ. 46, 457–524 (2006) [12] N. Tsuge：拉瓦尔喷管中非定常等熵气流整体解的存在性。*Arch. Ration. Mech. Anal.* **205**，151–193 (2012) [13] N. Tsuge：喷管中可压缩欧拉方程的等熵气流，

Arch. Ration. , –

Mech. Anal. **209** 365 400 2013

( ) [14] N. Tsuge：具有外力的可压缩欧拉方程解的存在性与稳定性。

Nonlinear Anal. Real World Appl. **27**，203–220 (2016) [15] N. Tsuge：大数据下等熵喷管流中可压缩欧拉方程的全局熵解：广义不变区域与修正 Godunov 格式的应用。

Nonlinear Anal. Real World Appl. **37**，217–238 (2017) [16] Tsuge, N.：等熵喷管流中可压缩欧拉方程的全局熵解，载于《双曲问题：理论、数值与应用》，Alberto Bressan、Marta Lewicka、Dehua Wang、Yuxi Zheng 编， *AIMS on Applied Mathematics* **10**，666–673 (2020) [17] Tsuge, N.：具有时间周期外力的可压缩欧拉方程时间周期解的存在性。

Nonlinear Anal. Real World Appl. **53**，103080 (2020) [18] N. Tsuge：关于等熵喷管流中可压缩欧拉方程全局 L^∞ 解的能量不等式的评论。 *Commun. Math. Sci.* 即将出版。

Department of Mathematics Education、 Faculty of Education、 Gifu University、 1-1Yanagido、 Gifu Gifu 501-1193 Japan.*Email address*： tuge@gifu-u.ac.jp