arXiv:2301.01032v1 [math.AG] 3 Jan 2023

关于亚循环群表示提升问题

ARISTI DES KONTOGEORGIS 和 ALEXIOS TEREZ AKIS

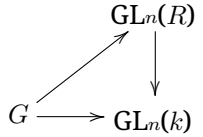
ABSTRACT. 我们给出了一个必要且充分的条件，用以判定群在特征为零的域上的模表示能否提升为特征为零的局部主理想整环上的表示，且该整环包含 p^h 单位根。$G = C_{p^h} \rtimes C_m$

1. INTRODUCTION

表示的提升问题

$$\rho : G \to \mathrm{GL}_n(k),$$

其中 k 是特征为 $p > 0$的域，问题在于寻找一个零特征的局部环 R，其极大理想为 $\mathfrak{m}_R$，使得 $R/\mathfrak{m}_R = k$，从而使下图可交换:



等价地，我们要问是否存在一个自由的 R-模 V，它同时也是一个 $R[G]$-模，并且 $V \otimes_R R/\mathfrak{m}_R$ 是对应于初始表示的 $k[G]$- 模。我们知道，射影 $k[G]$- 模可以在零特征下提升，见 [16, 第 15], 章；但对于一般的 $k[G]$-模，这样的提升并非总是可能的，例如参见 [10,命题 15]。本文旨在研究群 $G = C_q \rtimes C_m$的提升问题，其中 C_q 是阶为 p^h 的循环群，C_m 是阶为 m的循环群（p，m），并给出可提升的充要条件。我们假设局部环 R 包含 q次单位根，且 k 是代数闭的；为确保某些 q次单位根在 $\mathfrak{m}_R$拓扑下彼此相距较远，可能需要考虑 R的一个分歧扩张，参见注记35。这种环 R 的一个例子是 Witt 向量环 $W(k)[\zeta_q]$，并在其中加入 q次单位根。

我们注意到，可分解的 $R[G]$-模 V 在模 $\mathfrak{m}_R$ 约化后会得到可分解的R-模；而不可分解的 $R[G]$-模在模 $\mathfrak{m}_R$ 约化后也可能分解为不可分解的 $k[G]$-直和项。我们还根据 Jordan 分解对 $k[C_q \rtimes C_m]$-模进行分类，并说明这种分类与按其底 [1]给出的、更常见的单列描述之间的关系。

Date: 2023年1月4日。*Key words and phrases.* 表示的提升、模表示论、整表示论、广义 Oort 猜想、元循环群。

我们对这个问题的兴趣源于提升局部作用的问题。局部提升问题考虑如下问题：是否存在一个扩张$\Lambda/W(k)$，以及一个表示

$$\tilde{\rho} : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\Lambda[[T]]),$$

使得如果 t是 T的约化，那么 G在 $\Lambda[[T]]$上的作用约化为 G 在 $k[[t]]$上的作用?

如果上述问题的答案是肯定的，那么我们称 G-作用可提升到零特征。对于每个局部 G-作用在 $k[[t]]$ 上都可提升到零特征的群 G，称为的局部奥尔特群。注意，循环群总是局部奥尔特群。这一结果曾被称为“Oort 猜想”，最近 F. Pop [15] 利用 A. Obus 和 S. Wewers [14]的工作证明了该猜想。

有许多障碍会阻止局部作用提升到零特征。其中最重要的障碍可能是 KGB 障碍[4]。人们认为这就是局部提升问题的唯一障碍，参见[11], [12]。在 [10,定理 3] 中，作者给出了局部提升的一个判据，该判据涉及同一个群的线性表示的提升。情形$G = C_q \rtimes C_m$，尤其是二面体群的情形 $D_q = C_q \rtimes C_2$，是当前局部提升理论中备受关注的问题，参见 [12], [6], [18]。关于局部提升问题的更多详情，请参见 [3], [4], [5], [11]。

还请注意， $C_q \rtimes C_m$ 群对于研究定义在正特征域 p 上的曲线的全纯微分上的群作用十分重要，其中所涉及的群具有循环 p-Sylow 子群，参见 [2]。

现在我们来介绍证明方法。为了理解不可分解 $R[G]$-模模 $\mathfrak{m}_R$ 的分裂，我们在引理16中为阶为 p^h 的端同态 $T : V \to V$ 构造一种 Jordan 标准形，其中 V 是秩为 d 的自由模。我们给出一种选取此基的方法，即选取一个合适的初始元素 $E \in V$，参见引理 15。阶为 q 的元素 T 的标准形（如式 (9) 所示）决定了约化的分解。我们证明，对于 V的每个不可分解直和项 V_i，都可以选取 E 作为 C_m 的生成元 σ 的一个特征值；然后通过强制关系 $\Gamma T = T^{\alpha}\Gamma$ 成立，我们可以看到如何将 σ 的作用递归地扩展为 V_i上的 σ 作用，这在引理 24 中完成。证明这确实给出了一个良定义的作用，需要进行技术性计算，相关证明见引理 26、27、28、32、33。

这里重要的是， σ 在 E 上的作用定义，是决定 C_m 在不可分解直和项 V_i上作用的动力系统的“初始条件”。 $R[C_q \rtimes C_m]$ 不可分解模 V_i 可以分解为 $V_\alpha(\epsilon_\nu,\ \kappa_\nu)$-模的直和 $1 \le \nu \le s$ （关于它们的精确定义，见定义 9；请注意， κ_i 表示维数）。如第 3 节所示，通过一种“动力系统”方法， σ 在每个$V_\alpha(\epsilon_\nu,\ \kappa_\nu)$上的作用，可以由 σ 在一个初始基元素上的作用唯一确定；同样，我们需要 s个初始条件，每个 $V_\alpha(\epsilon_\nu,\ \kappa_\nu)$对应一个。提升条件本质上意味着，特殊纤维的不可分解直和项 $V_\alpha(\epsilon,\ \kappa)$ 应当能够以适当的方式重新排列，从而使它们能够作为不可分解 $R[C_q \rtimes C_q]$-模的约化而得到。我们在下一个命题中给出提升判据的精确表述：

命题 1. 考虑一个 $k[G]$-模 M，它分解为直和

$$M = V_\alpha(\epsilon_1, \kappa_1) \oplus \cdots \oplus V_\alpha(\epsilon_s, \kappa_s).$$

该模可以提升为一个 $R[G]$-模，当且仅当集合 $\{1,\dots,s\}$ 可以写成集合 $I_\nu, 1 \le \nu \le t$ 的不交并，使得

a $\sum_{\mu\in I_\nu} \kappa_\mu \le q$，对所有 $1 \le \nu \le t$。*b* $\sum_{\mu\in I_\nu} \kappa_\mu \equiv a$ 模m 对所有 $1 \le \nu \le t$，其中 $a \in \{0,1\}$。*c* 对每个 ν, $1 \le \nu \le t$，都存在一个枚举 σ: $\{1,\dots,\#I_\nu\} \to I_\nu \subset\{1,..,s\}$，使得 $\epsilon_{\sigma(2)} = \epsilon_{\sigma(1)}\alpha^{\kappa_{\sigma(1)}}, \epsilon_{\sigma(3)} = \epsilon_{\sigma(3)}\alpha^{\kappa_{\sigma(3)}}$, $\dots \epsilon_{\sigma(s)} = \epsilon_{\sigma(s-1)}\alpha^{\kappa_{\sigma(s-1)}}$

在上述命题中，每个集合 I_ν 对应一组模$V_\alpha(\epsilon_\mu, \kappa_\mu)$, $\mu \in I_\nu$ 它们是 V的不可分解 $R[C_q \rtimes C_m]$-模 V_ν 约化所得。

致谢 A. Terezakis 获得了博士论文资助（项目编号 MIS-5113934）。该博士论文由希腊和欧盟通过“人力资源发展、教育与终身学习”业务计划，在“通过开展博士研究提升人力资源研究潜力”行动——子行动 2：希腊大学博士生 IKY奖学金计划的框架下共同资助。







2. Notation

令 τ 为循环群 C_q 的生成元， σ 为循环群 C_m的生成元。群 G 由以下生成元与关系给出:

$G = \langle \sigma, \tau | \tau^q = 1, \sigma^m = 1, \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^\alpha$ 对于某个 $\alpha \in \mathbb{N}, 1 \le \alpha \le p^h - 1, (\alpha, p) = 1\rangle$.

整数 α 满足以下同余:

$$\alpha^m \equiv 1 \bmod q \tag{1}$$

通过计算 $\tau = \sigma^m\tau\sigma^{-m} = \tau^{\alpha^m}$即可看出这一点。此外，整数 α可视为有限域 $\mathbb{F}_p$中的一个元素，并且它是一个 $(p-1)$ 次单位根，但不一定是本原单位根。特别地，以下结论成立:

引理 2. 设 $\zeta_m \in k$ 是一个固定的本原 m 次单位根。存在一个自然数 a_0, $0 \le a_0 < m-1$ 使得 $\alpha = \zeta_m^{a_0}$。

证明。 若将整数 α 视为 k 中的一个元素，则它是有限域$\mathbb{F}_p \subset k$中的一个元素，因此作为 $\mathbb{F}_p$中的一个元素，有 $\alpha^{p-1} = 1$。设 $\mathrm{ord}_p(\alpha)$ 表示 α 在 $\mathbb{F}_p^*$中的阶。由方程 (1) 可得 $\mathrm{ord}_p(\alpha) \mid p-1$且 $\mathrm{ord}_p(\alpha) \mid m$，即 $\mathrm{ord}_p(\alpha) \mid (p-1, m)$。

本原 m 次单位根 ζ_m 生成一个有限域 $\mathbb{F}_p(\zeta_m) = \mathbb{F}_{p^\nu}$，其中 ν 是某个整数; 该域的循环乘法群 $\mathbb{F}_{p^\nu}\backslash\{0\}$ 同时包含循环群 $\langle\zeta_m\rangle$ 和 $\langle\alpha\rangle$。由于对于循环群C 的阶的每个因子 δ，都存在唯一一个阶为 δ 的子群 $C' < C$，因此有 $\alpha \in \langle\zeta_m\rangle$, 结论得证。□

定义 3. 对于每个 $p^i \mid q$，我们定义 $\mathrm{ord}_{p^i}\alpha$ 为满足 $\alpha^o \equiv 1 \bmod p^i$ 的最小自然数 o。

显然，对于 $\nu \in \mathbb{N}$

$$\alpha^\nu \equiv 1 \bmod p^i \Rightarrow \alpha^\nu \equiv 1 \bmod p^j \text{ for all } j \leq i.$$

因此

$$\mathrm{ord}_{p^j}\alpha \mid \mathrm{ord}_{p^i}\alpha \text{ for } j \leq i.$$

另一方面 $\alpha \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha^{p-1} \equiv 1 \mathbf{mod} p$，所以 $\mathbf{ord}_p\alpha \mid p-1$。此外，由于$\sigma^t\tau\sigma^{-t} = \tau^{\alpha^t}$，我们有 $\alpha^m \equiv 1 \mathbf{mod} p^h$，因此 $\mathbf{ord}_p\alpha \mid \mathbf{ord}_{p^i}\alpha \mid \mathbf{ord}_{p^h}\alpha \mid m$，对 $1 \leq i \leq h$成立。

引理4. 中心 $\mathrm{Cent}_G(\tau) = \langle \tau, \sigma^{\mathrm{ord}_{p^h}\alpha} \rangle$。此外

$$\frac{|\mathrm{Cent}_G(\tau)|}{p^h} = \frac{m}{\mathrm{ord}_{p^h}(\alpha)} =: m'$$

证明. 观察到 $(\tau^\nu\sigma^t)\tau(\tau^\nu\sigma^t)^{-1} = \tau^{\alpha^t}$，对所有 $1 \leq \nu \leq q$,$1 \leq t \leq m$均成立，即可得出该结果。□

注5. 若 $\mathbf{ord}_p\alpha = m$，则对所有 $1 \leq i \leq h$，$\mathbf{ord}_{p^i}\alpha = m$。

引理6。 如果群 $G = C_q \rtimes C_m$ 是$\mathrm{Aut}(k[[t]])$的子群，那么对于所有 $1 \leq i \leq h$，阶 $\mathrm{ord}_{p^i}\alpha = m/m'$均成立。

证明。 我们将采用 J.P. Serre 关于局部域的书中的记号 [17]。根据[13, Th.1.1b]，循环群 C_q 的下分歧滤过中的首个间隙 i_0 满足 $(m, i_0) = m'$。

分歧关系 [17,命题9，第 69]页

$$\alpha\theta_{i_0}(\tau) = \theta_{i_0}(\tau^\alpha) = \theta_{i_0}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \theta_0(\sigma)^{i_0}\theta_{i_0}(\tau),$$

推出 $\theta_0(\sigma)^{i_0} = \alpha \in \mathbb{N}$。由 $(m, i_0) = m'$ 以及 $\mathbf{ord}\theta_0(\sigma) = m$这一事实，我们得到

$$\frac{m}{m'} = \mathrm{ord}\theta_0(\sigma)^{i_0} = \mathrm{ord}_p(\alpha).$$

Thus

$$\frac{m}{m'} = \mathrm{ord}_p\alpha|\mathrm{ord}_{p^i}\alpha|\mathrm{ord}_{p^h}\alpha = \frac{m}{m'}.$$

因此，所有阶 $\mathbf{ord}_{p^i}\alpha = m/m'$。 □

注记7。 如果 KGB 障碍消失且 $\alpha \neq 1$，那么根据 [11][命题5.9]$i_0 \equiv -1$ 模m，并且对于所有 $1 \leq i \leq h$，$\mathbf{ord}_{p^i}\alpha = m$。

3. Indecomposable $C_q \rtimes C_m$ modules, modular representation theory

本节将描述不可分解的 $C_q \rtimes C_m$-模。我们将介绍两种研究方法。第一种方法是必要的，因为它与我们将用于描述不可分解 $R[C_q \rtimes C_m]$-模的方法相一致。第二种方法利用底的结构，是模表示论中描述 $k[C_q \rtimes C_m]$-模的标准方法。

3.1. 线性代数方法。 C_q 的不可分解模由循环群 C_q的生成元 τ 的 Jordan 标准形确定。因此，对每个 $1 \leq \kappa \leq p^h$ ，恰有一个不可分解的 C_q 模，记作J_κ。由此，我们得到一个不可分解的 $C_q \rtimes C_m$-模 M 作为 C_q-模时的如下分解。

$$M = J_{\kappa_1} \oplus \cdots \oplus J_{\kappa_r}. \tag{2}$$

引理 8. 在不可分解模 J_κ 中，对每个元素 E ，满足

$$(\tau - \mathrm{Id}_{\kappa_i})^{\kappa_i - 1} E \neq 0$$

元素 $B = \{E, (\tau - \mathrm{Id}_\kappa)E, \ldots, (\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa-1}E\}$ 构成 J_κ 的一组基，使得相对于此基， τ 的矩阵为

$$\tau = \mathrm{Id}_\kappa + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

证明。由于集合 B 含有 k个元素，只需证明它由线性无关元素组成。事实上，考虑一个线性关系

$$\lambda_0 E + \lambda_1(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)E + \cdots + \lambda_{\kappa-1}(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa-1}E = 0.$$

通过应用 $(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa-1}$，我们得到 $\lambda_0(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa-1} = 0$，由此可得 $\lambda_0 = 0$。接着将 $(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa-2}$ 应用于该线性关系，并用同样的论证得到$\lambda_1 = 0$，如此继续下去，证明 $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{\kappa-1} = 0$。 τ 在此基下的矩阵形式显而易见。□

现在我们将证明 σ 作用于方程 (2) 中的每个 J_κ ，从而证明 $r = 1$。由于域 k 是代数闭的，且 $(m, p) = 1$ ，我们知道存在一组由 M 的特征向量组成的基。存在一个 σ的特征向量 E ，它不属于 $(\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa_1 - 1}$的核。于是，集合 $B = \{E, (\tau - \mathrm{Id}_\kappa)E, \ldots\ldots, (\tau - \mathrm{Id}_\kappa)^{\kappa_1 - 1}E\}$ 中的元素线性无关，并构成 M 的一个直和 C_q，该直和同构于 J_{κ_1}。

现在我们将证明这个模是一个 $k[C_q \rtimes C_m]$-模。为此，我们必须证明 C_m 的生成元 σ 作用于基 B。注意，对于每个$0 \leq i \leq \kappa_1 - 1 < p^h$

$$\sigma(\tau - 1)^{i-1} = (\tau^\alpha - 1)^{i-1}\sigma.$$

令 $e = E_1$ 和 $\kappa = \kappa_1$。这意味着， σ 对 e 的作用决定了 σ 对所有其他基元素 e_ν 的作用：$= (\tau - 1)^{\nu-1}e$， $1 \leq \nu \leq \kappa_1$。

让我们来计算：

$$\sigma e_{i+1} = \sigma(\tau - 1)^i e = (\tau^\alpha - 1)^i \zeta_m^\lambda e$$

在基 $\{e_1,\dots,e_{\kappa_1}\}$ 上，矩阵 τ 由方程 (3) 给出，因此利用二项式公式，我们计算得

$$\tau^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{\alpha}{1} & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \binom{\alpha}{2} & \binom{\alpha}{1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \binom{\alpha}{3} & \binom{\alpha}{2} & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \binom{\alpha}{1} & 1 & 0 \\ \binom{\alpha}{k} & \binom{\alpha}{k-1} & \cdots & \binom{\alpha}{2} & \binom{\alpha}{1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

因此， $\tau^\alpha - 1$ 是一个形如以下形式的幂零矩阵 $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} \binom{\alpha}{\mu} & \text{if } j = i-\mu \text{ for some } \mu, 1 \le \mu \le \kappa \\ 0 & \text{if } j \ge i \end{cases}$$

ℓ次幂 $A^\ell = (a_{ij}^{(\ell)})$ 的 A 随后由下式计算（请注意，对于 $i \le j$， $a_{ij} = 0$）

$$a_{ij}^{(\ell)} = \sum_{i<\nu_1<\cdots<\nu_{\ell-1}<j} a_{i,\nu_1} a_{\nu_1,\nu_2} a_{\nu_2,\nu_3} \cdots a_{\nu_{\ell-1},j}$$

这意味着，为了得到 $a_{ij} \neq 0$， $i-j > \ell$。此外，对于 $i = j+\ell$ （这是主对角线下方第一个非零对角线），我们有

$$a_{i,i+\ell} = a_{i,i+1} a_{i+1,i+2} \cdots a_{i+\ell-1,i+\ell} = \binom{\alpha}{1}^\ell = \alpha^\ell.$$

因此， A^ℓ 的矩阵具有以下形式:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0 & \cdots & \cdots & 0}^{k-\ell} & \overbrace{0 & \cdots & 0}^{\ell} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^\ell & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ * & \alpha^\ell & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \alpha^\ell & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

定义 9。 我们将由基元素 $\{(\tau-1)^\nu e$、 $\nu = 0$、.....、 $\kappa-1\}$给出的不可分解 κ维 G-模记为 $V_\alpha(\lambda,\ \kappa)$，其中 $\sigma e = \zeta_m^\lambda e$。

这个定义与 [9]中使用的记号相近。

引理 10. σ 对 $V_\alpha(\lambda,\kappa)$ 中基元素 e_i 的作用如下:

$$\sigma e_i = \alpha^{i-1}\zeta_m^\lambda e_i + \sum_{\nu=i+1}^{\kappa} a_\nu e_\nu, \tag{6}$$

对于某些系数 $a_i \in k$。特别地， σ 关于基$e_1,\dots,e_\kappa$ 的矩阵是下三角矩阵。

证明。 回忆一下， $e_i = (\tau - 1)^{i-1} e_1$。因此

$$\sigma e_i = \sigma(\tau-1)^{i-1}e_1 = (\tau^\alpha - 1)^{i-1}\sigma e_1 = \zeta_m^\lambda (\tau^\alpha - 1)^{i-1} e_1.$$

该结果由方程 (5) 得出 □

我们构造了一组不可分解模 $V_\alpha(\lambda, \kappa)$。显然，$V_\alpha(\lambda, \kappa)$ 不可能与 $V_\alpha(\lambda', \kappa')$ 同构（若 $\kappa \neq \kappa'$），因为它们的维数不同。

现在假设 $\kappa = \kappa'$。当 $\lambda \neq \lambda'$ 时，模 $V_\alpha(\lambda, \kappa)$ 和 $V_\alpha(\lambda', \kappa)$ 是否同构?

素数 p 互素的生成元 σ 在 $V_\alpha(\lambda, \kappa)$ 上的特征值为

$$\zeta_m^\lambda, \alpha\zeta_m^\lambda, \ldots, \alpha^{\kappa-1}\zeta_m^\lambda.$$

类似地， σ 作用于 $V_\alpha(\lambda', \kappa)$ 时的特征值为

$$\zeta_m^{\lambda'}, \alpha\zeta_m^{\lambda'}, \ldots, \alpha^{\kappa-1}\zeta_m^{\lambda'}.$$

如果两组特征值不同，那么这些模不可能同构。但即使 $\lambda \neq \lambda'$ 模 n，两组特征值仍可能相同。即便如此，这些模也不可能同构。

引理 11. 模 $V_\alpha(\lambda_1, \kappa)$ 与 $V_\alpha(\lambda_2, \kappa)$ 同构，当且仅当$\lambda_1 \equiv \lambda_2 \bmod m$。

证明。 事实上，模 $V_\alpha(\lambda_1, \kappa)$ 有一个关于 σ 作用的特征向量，它通过 $(\tau - 1)$ 的幂生成 $V_\alpha(\lambda_1, \kappa)$，即这些向量

$$e, (\tau-1)e, (\tau-1)^2 e, \ldots, (\tau-1)^{\kappa-1}e \tag{7}$$

构成 $V_\alpha(\lambda_1, \kappa)$ 的一组基。

能够通过对 $(\tau - 1)$ 取幂生成 $V_\alpha(\lambda_1, \kappa)$ 的元素 E 是线性组合

$$E = \sum_{\nu=0}^{\kappa-1} \lambda_i (\tau-1)^\nu e,$$

对于 $\lambda_i \in k$ 和 $\lambda_0 \neq 0$。

另一方面，利用方程 (6) 可知， σ 相对于方程 (7) 中给出的基具有如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \zeta_m^\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha\zeta_m^\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha^{\kappa-1}\zeta_m^\lambda \end{pmatrix}.$$

现在很容易从上面的矩阵看出，特征值为 $\alpha^\nu\lambda_1$、 $\nu > 1$ 的每个特征向量都表示为方程 (7) 中给出的基的线性组合，其中 e 的系数为零。

因此，特征值 $\alpha^\nu\zeta_m$ 的特征向量不能通过 $(\sigma - 1)^\nu$ 的幂生成模 $V_\alpha(\lambda, \kappa)$。□

3.2. **单列描述**。 现在我们将给出不可分解 $C_q \rtimes C_m$-模的另一种描述，该描述见于 [2]。

已知，对于某个阿贝尔 p-群 Q，$\mathrm{Aut}(C_q) \cong \mathbb{F}_p^* \times Q$。由 C_m 对 C_q 的作用所给出的表示 $\psi : C_m \to \mathrm{Aut}(C_q)$ 可知可通过特征 $\chi\colon C_m \to \mathbb{F}_p^*$ 分解。χ 的阶整除 $p-1$，而 $\chi^{p-1} = \chi^{-(p-1)}$ 是平凡一维特征。

对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，χ^i 定义了一个维数为一的简单 $k[C_m]$-模，我们将其记为 S_{χ^i}。对于 $0 \le \ell \le m-1$，记 S_ℓ 为简单模，其中 σ 的作用为 ζ_m^ℓ。利用膨胀，S_{χ^i}、S_ℓ 都可视为 $k[C_q \rtimes C_m]$-模。最后，对于 $0 \le \ell \le m-1$，我们定义 $\chi^i(\ell) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$，使得$S_{\chi^i(\ell)} \cong S_\ell \otimes_k S_{\chi^i}$。

有 $q \cdot m$ 个 $k[C_q \rtimes C_m]$-模的不可分解模同构类，且它们都是单列的。一个不可分解的 $k[C_q \rtimes C_m]$-模 U 由其底唯一确定；其底是 $\tau - 1$ 在 U上的作用的核，其 k维数也唯一确定。对于 $0 \le \ell \le m-1$ 和 $1 \le \mu \le q$，设$U_{\ell,\mu}$ 为底为 S_a 且 k维数为 μ的不可分解 $k[C_q \rtimes C_m]$模。那么$U_{\ell,\mu}$ 是单列的，其 μ 升链合成因子是序列中的前 μ 个合成因子

$$S_\ell, S_{\chi^{-1}(\ell)}, S_{\chi^{-2}(\ell)}, \dots, S_{\chi^{-(p-2)}(\ell)}, S_\ell, S_{\chi^{-1}(\ell)}, S_{\chi^{-2}(\ell)}, \dots, S_{\chi^{-(p-2)}(\ell)}.$$

注意，在我们的记号中，$V_\alpha(\lambda, \kappa) = U_{\lambda+\kappa,\kappa}$。

注 12. 对所有 $1 \le i \le h$，条件 $\mathrm{ord}_{p^i} = m$ 等价于要求对所有 i，$\psi_i : C_m \to \mathrm{Aut}(C_{p^i})$ 是忠实的。

4. Lifting of representations

命题 13. 设 $G = C_q \rtimes C_m$。假设对所有 $1 \le i \le h$, $ord_{p^i} a = m$.~若 G-模 V 可提升为一个 $R[G]$-模 V，其中 $K = \mathrm{Quot(R)}$ 是特征为零的域，则

$$m \mid \left(\dim(\tilde{V} \otimes_R K) - \dim(\tilde{V} \otimes_R K)^{C_q}\right).$$

此外，若 $\tilde{V}(\zeta_q^{\alpha^i\kappa})$ 是 T作用于 $\tilde{V}$时特征值 $\zeta_q^{\alpha^i\kappa}$对应的特征子空间，则

$$\dim \tilde{V}(\zeta_q^\kappa) = \dim \tilde{V}(\zeta_q^{\alpha\kappa}) = \dim \tilde{V}(\zeta_q^{\alpha^2\kappa}) = \cdots = \dim \tilde{V}(\zeta_q^{\alpha^{m-1}\kappa}).$$

~证明. 考虑 V的一个提升 V。循环部分 C_q 的生成元 τ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$，它们是 p^n次单位根。设 ζ_q是一个本原的 q次单位根。任取一个特征值 $\lambda \ne 1$。它具有形式 $\lambda = \zeta_q^\kappa$，其中某个 $\kappa \in \mathbb{N}, q \nmid \kappa$。若 E是对应于 λ的 T的特征向量，即 $\tau E = \zeta_q^\kappa E$，则

$$\tau\sigma^{-1}E = \sigma^{-1}\tau^\alpha E = \zeta_q^{\kappa\alpha^{m-1}}\sigma^{-1}E$$

并且我们有一个特征向量列 E，$\sigma^{-1}E$，$\sigma^{-2}E$，$\cdots$，其对应的特征值为 ζ_q^κ，$\zeta_q^{\kappa\alpha}$，$\zeta_q^{\kappa a^2}\cdots$，$\zeta_q^{\kappa\alpha^o}$，其中 $o =$阶$_{q/(q,k)}$。事实上，整数 o满足

$$\kappa\alpha^o \equiv \kappa \text{ 模} q \Rightarrow \alpha^m \equiv 1 \text{ 模} \quad \frac{q}{(q,\ k)}.$$

因此，特征值 $\lambda \ne 1$ 构成大小为 m 的轨道，而特征值 1 的特征子空间恰好是不变空间 V^G，结论得证。□

5. Indecomposable $C_q \rtimes C_m$ modules, integral representation theory

从现在起，设 V 为自由的 R-模，其中 R 是极大理想为 $\mathfrak{m}_R$的整局部主理想整环， R 具有零特征，并且 R 包含所有q次单位根且具有零特征。令 K =Quot(R)。

循环群在通常情形和模情形下的不可分解模，都可以通过写出该循环群生成元的 Jordan 标准形来描述。由于在整表示论中，对于 $q = p^h$、 $h \geq 3$，存在无穷多个彼此不同构的不可分解 C_q-模，因此，即使在完备局部主理想整环 [7], [8]上进行研究，也不应期待存在 Jordan 标准形理论。

引理 14. 设 T 是$\mathrm{End}(V)$中的一个 $q = p^h$ 阶元素，那么 T 的最小多项式具有单特征值，并且当 T 被视为$\mathrm{End}(V \otimes K)$中的元素时，它是可对角化的。

证明。 由于 $T^q = \mathrm{Id}_V$， T 的最小多项式整除 $x^q - 1$，而 $x^q - 1$ 在特征为零的域上有互异的根。这保证了 $T \in \mathrm{End}(V \otimes K)$ 可对角化。□

引理 15。 设 $f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_d)$ 是 T 在 V 上的最小多项式。存在一个元素 $E \in V$，使得
$E, (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E, (T - \lambda_2 \mathrm{Id}_V)(T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E, \ldots, (T - \lambda_{d-1}\mathrm{Id}_V) \cdots (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E$
是 $V \otimes K$ 中的线性无关元素。

证明。 考虑 $i = 1, \ldots, d$ 的端同态

$$\Pi_i = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{d} (T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V).$$

在上述乘积中注意到， $T - \lambda_i \mathrm{Id}_V$、 $T - \lambda_j \mathrm{Id}_V$ 是可交换的端同态。由于 T 的最小多项式次数为 d，所有 R-模 $\mathrm{Ker}\Pi_i$ 的维数都严格小于 V。此外，存在一个元素 E，使得对所有$1 \leq i \leq d$， $E \notin \mathrm{Ker}(\Pi_i)$。考虑一个关系

$$\sum_{\mu=0}^{d} \gamma_\mu \prod_{\nu=0}^{\mu} (T - \lambda_\mu \mathrm{Id}_V)E, \tag{8}$$

其中 $\prod_{\nu=0}^{0}(T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)E = E$。我们首先对方程 (8) 应用算子 $\prod_{\nu=2}^{d}(T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)$，得到

$$0 = \gamma_0 \Pi_1 E,$$

根据 E 的选取，我们有 $a_0 = 0$。现在对方程 (8) 应用 $\prod_{\nu=3}^{d}(T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)$，得到

$$0 = \gamma_1 \prod_{\nu=3}^{d} (T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)(T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V) = \gamma_1 \Pi_2 E,$$

根据 E 的选择，我们有 $\gamma_1 = 0$。现在将 $\prod_{\nu=4}^{d}(T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)$ 应用于方程 (8)，得到

$$0 = \gamma_2 \prod_{\nu=4}^{d} (T - \lambda_\nu \mathrm{Id}_V)(T - \lambda_2 \mathrm{Id}_V)(T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E = \gamma_2 \Pi_3 E$$

根据 E 的选择，我们得到 $\gamma_3 = 0$。继续这样做，最终得到 $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{d-1} = 0$。
□

引理16. 设 V 是一个秩为 R 的自由 R模，其上作用着一个阶为 p^h 的自同构T：$V \to V$。假设 T 的最小多项式次数为 d，且其根为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$。那么， T可相对于基写成如下矩阵：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{d-1} & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{9}$$

证明。 由引理 15，元素

$$E, (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E, (T - \lambda_2 \mathrm{Id}_V)(T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E, \ldots, (T - \lambda_{d-1}\mathrm{Id}_V)\cdots(T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E$$

构成 V的一个秩为 d 的自由子模。根据主理想整环的子模理论，存在自由模 V的一个基 $E_1, E_2, \ldots, E_d$，使得

$$\begin{aligned} E_1 &= E, \\ a_1 E_2 &= (T - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)E_1, \\ a_2 E_3 &= (T - \lambda_2 \mathrm{Id}_V)E_2, \\ &\cdots \\ a_{s-1} E_d &= (T - \lambda_{d-1}\mathrm{Id}_V)E_{d-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

考虑模 $V_1 = \langle E_1, \ldots, E_d \rangle \subset V$。根据构造，映射 T限制为一个自同构；相对于基 $E_1, \ldots, E_d$，其具有所需的形式。接着考虑自由模 V/V_1，并对 T的最小多项式重复此过程，该多项式同样作用于 V/V_1。所需结论由此得出。□

注记17. 方程 (9) 中定义的元素 T 的阶等于所涉及的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ 中最高的阶。事实上，由于我们假设特征值互不相同，该矩阵在 Quot(R) 中可对角化，且其阶等于所涉及特征值的最大阶。特别地，如果至少有一个 λ_i 是本原 q 单位根，则其阶为 q。如果某些特征值相同，那么关于 T 的阶的说法不一定成立。例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在特征为零的域上具有无限阶。

注记18. V 中不可分解 $R[T]$ 直和项的个数由 $\#\{i : a_i = 0\} + 1$ 给出。

不可分解 kC_q-模之和的提升 $J_{\kappa_1} \oplus \cdots \oplus J_{\kappa_n}$ 可以构成一个不可分解 RC_q-模。例如，那个不可分解模中，

生成元 T of C_q 具有如下形式

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{s-1} & \lambda_d \end{pmatrix}$$

其中 $a_1 = \cdots = a_{\kappa_1 - 1} = 1$, $a_{\kappa_1} \in \mathfrak{m}_R$, $a_{\kappa_1+1}, \ldots, a_{\kappa_2+\kappa_1-1} = 1$, $a_{\kappa_2+\kappa_1} \in \mathfrak{m}_R$ 等可化为由若尔当标准形组成的可分解直和，其大小为$J_{\kappa_1}, J_{\kappa_2-\kappa_1}, \cdots$。

注 19. 将这些矩阵按与 $\mathrm{GL}_d(R)$ 中矩阵的共轭关系分类，是一个有趣的问题。元素 a_i 的赋值似乎也应发挥作用。

定义 20. 令 $h_i(x_1, \ldots, x_j)$ 为变量 $x_1, \ldots, x_j$ 的 i 次完全对称多项式。例如

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3.$$

Set

$$L(\kappa, j, \nu) = h_\kappa(\lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_{j+\nu})$$

$$A(i,j) = \begin{cases} a_i a_{i+1} \cdots a_{i+j} & \text{if } j \geq 0 \\ 0 & \text{if } j < 0 \end{cases}$$

引理 21. 矩阵 $T^\alpha = (t_{ij}^{(\alpha)})$ 由以下公式给出：

$$t_{ij}^{(\alpha)} = \begin{cases} \lambda_i^\alpha & \text{if } i = j \\ A(j, i-j-1) \cdot L(\alpha - (i-j), j, i-j) & \text{if } j < i \\ 0 & \text{if } j > i \end{cases}$$

证明. 对于 $j \geq i$，证明是显然的。当 $j < i$ 且 $\alpha = 1$ 时，结论显然，因为对于每个 $x \leq 0$, $L(x, \cdot, \cdot) \equiv 0$。假设这对 $\alpha = n$ 成立。如果 $\alpha = n+1$,

$$\begin{aligned} t_{ij}^{(n+1)} = t_{ij}^{(n)} t_{ij} = \sum_{k=1}^{r} t_{ik}^{(\alpha)} t_{kj} = \lambda_j t_{ij}^{(\alpha)} + a_j t_{ij+1}^{(\alpha)} = \lambda_j A(j, i-j-1) L(\alpha - (i-j), j, i-j) + \\ + a_j A(j+1, i-j-2) L(\alpha - (i-j-1), j+1, i-j-1) = \\ = A(j, i-j-1) \left(\lambda_j h_{\alpha-(i-j)}(\lambda_j, \ldots, \lambda_j) + h_{\alpha-(i-j)+1}(\lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_i) \right) = \\ = A(j, i-j-1) h_{\alpha-(i-j)+1}(\lambda_j, \ldots, \lambda_i) = \\ = A(j, i-j-1) L(\alpha - (i-j) + 1, i, i-j). \end{aligned}$$

□

注 22. n 个变量中的 k 次齐次多项式空间的维数为 $\binom{n-1+c}{n-1}$。由于所有 q 次单位根模 $\mathfrak{m}_R$ 都化为 1，因此 $L(\alpha-(i-j)\ j,\ i-j)$ 化为 $n = (i-j) + 1$, $c = \alpha - (i-j)$

$$\binom{n-1+c}{n-1} = \binom{\alpha}{i-j}.$$

该方程与方程 (4) 中给出的 τ^α 的计算相符。

引理 23。 循环群 C_{m^s} 的生成元 σ 有一个特征向量 E，它不是 $\bigcup_{i=1} \mathrm{Ker}(\Pi_i \otimes K)$ 中的元素。

证明。 特征向量 E_1、.....、E_d 构成空间 $V \otimes K$ 的一组基。必要时，乘以 R 中的某些元素，我们可以假设所有 E_i 都属于 V，且它们的约化 $E_i \otimes R/\mathfrak{m}_R$、$1 \le i \le d$ 给出循环群 C_m 的生成元作用于 $V \otimes R/\mathfrak{m}_R$ 时的一组特征向量基。如果每个特征向量 E_i 都是某个 $\mathrm{Ker}(\Pi_\nu)$（$1 \le i \le d$）的元素，那么它们的约化将属于 $\mathrm{Ker}(T-1)^{d-1}$，这与后一个核的维数为 $< d$ 矛盾。□

引理 24。 设 V 是一个自由 $C_q \rtimes C_m$-模，并且作为 C_q-模是不可分解的。考虑引理*16*中给出的基。则 σ（E_1）的值决定了 σ（E_i）对于 $2 \le i \le d$ 的值。

证明。 设 σ 为循环群 C_m 的生成元。我们将使用引理 15 中的记号。我们利用引理 23 选取 σ 的 E_1 的一个合适特征向量，然后构造基 $E_1, E_2, \ldots, E_d$，如方程 (10) 所示。我们可以通过以下方式计算 σ 对所有基元素 E_i 的作用：

$$\sigma(a_{i-1}E_i) = \sigma(T - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}_V)E_{i-1} = (T^a - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}_V)\sigma(E_{i-1}). \tag{11}$$

这意味着可以递归地定义 σ 对 E_i 中所有元素的作用。事实上，假设

$$\sigma(E_{i-1}) = \sum_{\nu=1}^{d} \gamma_{\nu,i-1}E_\nu.$$

现在我们有

$$\begin{aligned}(T^a - \lambda_{i-1}\mathrm{Id}_V)E_\nu &= \sum_{\mu=1}^{d} t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}E_\mu - \lambda_{i-1}E_\nu \\ &= (\lambda_\nu^\alpha - \lambda_{i-1})E_\nu + \sum_{\mu=\nu+1}^{d} t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}E_\mu\end{aligned}$$

将以上各项合并，得到

$$\begin{aligned}a_{i-1}\sigma(E_i) &= \sum_{\nu=1}^{d} \gamma_{\nu,i-1}(\lambda_\nu^\alpha - \lambda_{i-1})E_\nu + \sum_{\nu=1}^{d}\gamma_{\nu,i-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{d} t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}E_\mu \\ &= \sum_{\nu=1}^{d} \tilde{\gamma}_{\nu,i}E_\nu, \qquad (12)\end{aligned}$$

对于一组选取的元素 $\gamma_{\nu,\ i} \in R$，可通过收集基元素 $E_1, \ldots, E_d$ 的系数显式计算。

注意，方程 (12) 右侧的量必须能被 a_{i-1} 整除。事实上，设 v 为局部主理想整环 R 的赋值。令

$$e_0 = \min_{1\le\nu\le d}\{v(\tilde{\gamma}_{\nu,i})\}.$$

若 $e_0 < v(a_{i-1})$，则我们将方程 (12) 除以 π^{e_0}，其中 π 是 R 的局部一致化元，即 $\mathfrak{m}_R = \pi R$。然后我们对该商方程模 $\mathfrak{m}_R$ 考察，得到

元素 $E_i \otimes k$ 之间的一个线性相关关系，这与假设矛盾。因此 $e_0 \geq v(a_{i-1})$，我们得到一个方程

$$\sigma(E_i) = \sum_{\nu=1}^{d} \frac{\tilde{\gamma}_{\nu,i}}{a_{i-1}} E_\nu = \sum_{\nu=1}^{d} \gamma_{\nu,i} E_\nu.$$

□

例如 $\sigma(E_1) = \zeta_m^\epsilon E_1$。我们计算得

$$a_1 \sigma(E_2) = (T^\alpha - \lambda_1 \mathrm{Id})\sigma(E_1)$$

and

$$\begin{aligned}
\sigma(E_2) &= \frac{(\lambda_1^\alpha - \lambda_1)}{a_1} \zeta_\mu^\epsilon E_1 + \zeta_m^\epsilon \sum_{\mu=2}^{d} \frac{t_{\mu,1}^{(\alpha)}}{a_1} E_\mu \\
&= \frac{(\lambda_1^\alpha - \lambda_1)}{a_1} \zeta_\mu^\epsilon E_1 + \zeta_m^\epsilon \sum_{\mu=2}^{d} \frac{A(1,\mu-2)L(\alpha-(\mu-1),1,\mu-1)}{a_1} E_\mu \\
&= \frac{(\lambda_1^\alpha - \lambda_1)}{a_1} \zeta_\mu^\epsilon E_1 + \zeta_m^\epsilon \sum_{\mu=2}^{d} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{\mu-1} h_{\alpha-(\mu-1)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu)}{a_1} E_\mu.
\end{aligned}$$

命题25。 假设式 *(9)*中给出的元素 $a_1, \ldots, a_{d-1}$ 均不为零。给定 $\alpha \in \mathbb{N}$、 $\alpha \geq 1$ 和一个元素 E_1，该元素不是 $\bigcup_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}(\Pi_i \otimes K)$ 中的元素。若存在一个矩阵 $\Gamma = (\gamma_{ij})$，使得 $\Gamma T \Gamma^{-1} = T^\alpha$ 和 $\Gamma E_1 = \zeta_m^\epsilon E_1$ 成立，那么这个矩阵 Γ 是唯一的。

证明。 我们将采用导出方程 (11)的思路，以 Γ替换 σ 。我们将递归且唯一地计算各项 $\gamma_{\mu,i}$，从而得到方程 (18)的显式公式。

显然，$\gamma_{\nu,1} = 0$ 对所有 $\nu < 1$ 都成立，因为我们只允许 $1 \leq \nu \leq d$。我们计算

(13)

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{\mu,i} &= \gamma_{\mu,i-1}(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \gamma_{\nu,i-1} t_{\mu,\nu}^{(\alpha)} \\
&= \gamma_{\mu,i-1}(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \gamma_{\nu,i-1} A(\nu,\mu-\nu-1) L\big(\alpha-(\mu-\nu),\nu,\mu-\nu\big) \\
&= \gamma_{\mu,i-1}(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_{i-1}) + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \gamma_{\nu,i-1} a_\nu a_{\nu+1} \cdots a_{\mu-1} h_{\alpha-\mu+\nu}(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_\mu)
\end{aligned}$$

定义

$$[\lambda_m^\alpha - \lambda_x]_i^j = \prod_{x=i}^{j} (\lambda_\mu^\alpha - \lambda_x)$$

$$[a]_i^j = \prod_{x=i}^{j} a_x$$

对于 $i \leq j$。如果 $i > j$，则上述两个量都定义为 1。

注意，对于 $\mu = 1$ ，方程 (13) 变为

$$\gamma_{1,i} = \frac{1}{a_{i-1}} \gamma_{1,i-1}(\lambda_1^\alpha - \lambda_{i-1}) \tag{14}$$

并且我们得出（假设 $\Gamma(E_1) = \zeta_m^\epsilon E_1$）

$$\gamma_{1,i} = \frac{\zeta_m^\epsilon}{a_1 a_2 \cdots a_{i-1}} \prod_{x=1}^{i-1} (\lambda_1^\alpha - \lambda_x) = \frac{\zeta_m^\epsilon}{a_1 a_2 \cdots a_{i-1}} [\lambda_1^\alpha - \lambda_x]_1^{i-1}. \tag{15}$$

对于 $\mu \geq 2$ ，我们有 $\gamma_{\mu,\ 1} = 0$，因为根据假设 $TE_1 = \zeta_m^\epsilon E_1$。因此方程给出 (13)

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu,i} &= \sum_{\kappa_1=0}^{i-2} \frac{[\lambda_\mu^\alpha - \lambda_x]_{i-\kappa_1}^{i-1}}{[a]_{i-1-\kappa_1}^{i-1}} \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1} \gamma_{\mu_2,i-1-\kappa_1} [a]_{\mu_2}^{\mu-1} h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2}, \ldots, \lambda_\mu) \\ &= \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1} [a]_{\mu_2}^{\mu-1} h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2}, \ldots, \lambda_\mu) \sum_{\kappa_1=0}^{i-2} \frac{[\lambda_\mu^\alpha - \lambda_x]_{i-\kappa_1}^{i-1}}{[a]_{i-1-\kappa_1}^{i-1}} \gamma_{\mu_2,i-1-\kappa_1}. \end{aligned} \tag{16}$$

现在，我们将对 i 使用归纳法证明方程 (16)。对于 $i = 2,\ \mu \geq 2$ 我们有

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu,2} &= \frac{1}{a_1} \gamma_{\mu,1}(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_1) + \frac{1}{a_1} \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1} \gamma_{\mu_2,1} [a]_{\mu_2}^{\mu-1} h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2}, \ldots, \lambda_\mu) \\ &= \frac{1}{a_1} [a]_1^{\mu-1} h_{\alpha-\mu+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) \gamma_{1,1}. \end{aligned}$$

现在假设计算 $\gamma_{\mu,\ i-1}$ 时方程 (16) 成立。我们将讨论 $\gamma_{\mu,\ i}$ 情形。我们有

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu,i} &= \frac{(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_{i-1})}{a_{i-1}}\gamma_{\mu,i-1} + \frac{1}{a_{i-1}}\sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}\gamma_{\mu_2,i-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\\
&= \frac{(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_{i-1})}{a_{i-1}}\sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\sum_{\kappa_1=0}^{i-3}\frac{[\lambda_\mu^\alpha-\lambda_x]_{i-1-\kappa_1}^{i-2}}{[a]_{i-2-\kappa_1}^{i-2}}\gamma_{\mu_2,i-2-\kappa_1}\\
&+ \frac{1}{a_{i-1}}\sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}\gamma_{\mu_2,i-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\\
&= \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\sum_{\kappa_1=0}^{i-3}\frac{[\lambda_\mu^\alpha-\lambda_x]_{i-1-\kappa_1}^{i-1}}{[a]_{i-2-\kappa_1}^{i-1}}\gamma_{\mu_2,i-2-\kappa_1}\\
&+ \frac{1}{a_{i-1}}\sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}\gamma_{\mu_2,i-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\\
&= \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\sum_{\kappa_1=1}^{i-2}\frac{[\lambda_\mu^\alpha-\lambda_x]_{i-\kappa_1}^{i-1}}{[a]_{i-1-\kappa_1}^{i-1}}\gamma_{\mu_2,i-1-\kappa_1}\\
&+ \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\frac{1}{a_{i-1}}\gamma_{\mu_2,i-1}\\
&= \sum_{\mu_2=1}^{\mu-1}[a]_{\mu_2}^{\mu-1}h_{\alpha-\mu+\mu_2}(\lambda_{\mu_2},\ldots,\lambda_\mu)\sum_{\kappa_1=0}^{i-2}\frac{[\lambda_\mu^\alpha-\lambda_x]_{i-\kappa_1}^{i-1}}{[a]_{i-1-\kappa_1}^{i-1}}\gamma_{\mu_2,i-1-\kappa_1}
\end{aligned}$$

现已证明方程（16）。

我们递归地将方程（16）应用于每个加项$\gamma_{\mu_2,\ i-1-\kappa_1}$若 $\mu_2 > 1$ 且 $i-1-\kappa_1 > 1$。若 $\mu_2 = 1$, 则$\gamma_{\mu_2,\ i-1-\kappa_1}$ 由方程（14）计算得出；若 $\mu_2 > 1$ 且 $i-1-\kappa_1 \le 1$，则$\gamma_{\mu_2,\ i-1-\kappa_1} = 0$。我们可以通过序列集合 Σ_μ 来对所需的所有迭代进行分类，该集合由满足以下条件的序列（μ_s，μ_{s-1}，. . . ，μ_3，μ_2）组成:

$$1 = \mu_s < \mu_{s-1} < \cdots < \mu_3 < \mu_2 < \mu = \mu_1. \tag{17}$$

例如，对于 $\mu = 5$，这类序列的集合为

$$\Sigma_\mu = \{(1),(1,2),(1,3),(1,2,3),(1,4),(1,2,4),(1,3,4),(1,2,3,4)\}$$

对应于图1所示的迭代树。方程（17）中序列（μ_s，μ_{s-1}，.....，μ_2）的长度为 $s-1$。每次迭代中，i变为$i-1-k$，因此我们得到以下指标序列

$$i_1 = i \to i_2 = i-1-\kappa_1 \to i_3 = i-2-(\kappa_1+\kappa_2) \to \cdots \to i_s = i-(s-1)-(\kappa_1+\cdots+\kappa_{s-1})$$

对于序列 i_1，i_2，.....，我们可能会有 $i_t = 1$，对于 $t < s-1$。但在这种情况下，我们将得到元素 $\gamma_{\mu_{t+1},\ i_t} = \gamma_{\mu_t,\ 1} = 0$，因为 $\mu_t > 1$。这意味着我们只需考虑满足 $i_{s-1} \ge 1$ 的选取 κ_1，.....，κ_{s-1}。因此我们

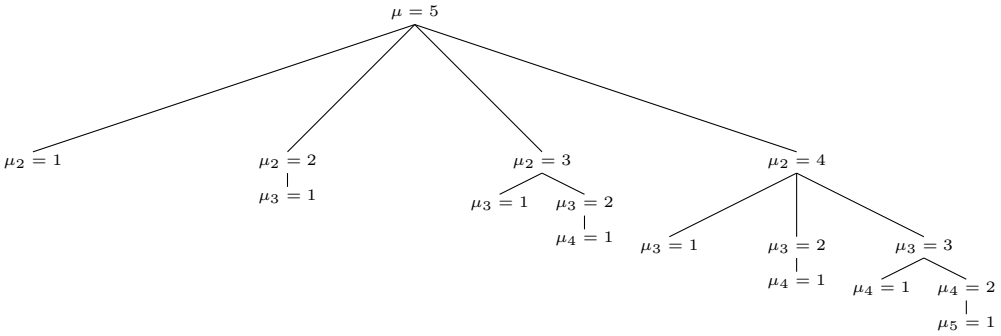


FIGURE 1. $\mu = 5$的迭代树

得到 $\mu \geq 2$ 的以下表达式

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu,i} = &\sum_{(\mu_s,\ldots,\mu_2)\in\Sigma_\mu} [a]_{\mu_2}^{\mu-1}[a]_{\mu_3}^{\mu_2-1}\cdots[a]_{\mu_s}^{\mu_{s-1}-1}\prod_{\nu=2}^{s} h_{\alpha-\mu_{\nu-1}+\mu_\nu}(\lambda_{\mu_\nu},\ldots,\lambda_{\mu_{\nu-1}})\\ &\cdot\sum_{i=i_1>i_2>\cdots>i_s\geq 1}\prod_{\nu=1}^{s-1}\frac{[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}}{[a]_{i_{\nu+1}}^{i_\nu-1}}\cdot\gamma_{1,i_s}.\\ =&\sum_{(\mu_s,\ldots,\mu_2)\in\Sigma_\mu}\prod_{\nu=2}^{s} h_{\alpha-\mu_{\nu-1}+\mu_\nu}(\lambda_{\mu_\nu},\ldots,\lambda_{\mu_{\nu-1}})\\ &\cdot\sum_{i=i_1>i_2>\cdots>i_s\geq 1}\frac{[a]_1^{\mu-1}}{[a]_{i_s}^{i-1}}\prod_{\nu=1}^{s-1}[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}\frac{\zeta_m^{\epsilon}[\lambda_1^{\alpha}-\lambda_x]_1^{i_s-1}}{[a]_1^{i_s-1}}\end{aligned}$$

(18)

$$=\sum_{(\mu_s,\ldots,\mu_2)\in\Sigma_\mu}\prod_{\nu=2}^{s}h_{\alpha-\mu_{\nu-1}+\mu_\nu}(\lambda_{\mu_\nu},\ldots,\lambda_{\mu_{\nu-1}})\frac{[a]_1^{\mu-1}}{[a]_1^{i-1}}\zeta_m^{\epsilon}\sum_{i=i_1>i_2>\cdots>i_s\geq 1}\prod_{\nu=1}^{s}[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}$$

其中 $i_{s+1}+1=1$，即 $i_{s+1}=0$。 □

现在我们将通过验证 $\Gamma T = T^{\alpha}\Gamma$，证明引理25的矩阵 Γ 存在。令 $(a_{\mu,\,i}) = \Gamma T$，$(b_{\mu,\,i}) = T^{\alpha}\Gamma$。对于 $i < d$，我们有

$$\begin{aligned}a_{\mu,i} &= \sum_{\nu=1}^{d}\gamma_{\mu,\nu}t_{\nu,i} = \gamma_{\mu,i}t_{ii} + \gamma_{\mu,i+1}t_{i+1,i}\\ &= \gamma_{\mu,i}\lambda_i + \gamma_{\mu,i}(\lambda_\mu^{\alpha}-\lambda_i) + \sum_{\nu=1}^{\mu-1}\gamma_{\nu,i}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}\\ &= \gamma_{\mu,i}\lambda_\mu^{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\mu-1}\gamma_{\nu,i}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)} = \sum_{\nu=1}^{\mu}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}\gamma_{\nu,i} = b_{\mu,i}.\end{aligned}$$

对于 $i = d$，我们有:

$$a_{\mu,d} = \sum_{\nu=1}^{d}\gamma_{\mu,\nu}t_{\nu,d} = \gamma_{\mu,d}t_{d,d} = \gamma_{\mu,d}\lambda_d$$

而

$$b_{\mu,d}=\sum_{\nu=1}^{d}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}\gamma_{\nu,d}=\sum_{\nu=1}^{\mu-1}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}\gamma_{\nu,d}+\lambda_{\mu}^{\alpha}\gamma_{\mu,d}$$

由此得到如下关系

$$(\lambda_d-\lambda_\mu^a)\gamma_{\mu,d}=\sum_{\nu=1}^{\mu-1}t_{\mu,\nu}^{(\alpha)}\gamma_{\nu,d} \tag{19}$$

对 $\mu=1$，利用方程 (15) 可得

$$\gamma_{1,d}\lambda_d=\gamma_{1,d}\lambda_1^{\alpha}\Rightarrow[\lambda_1^{\alpha}-\lambda_x]_1^d=0.$$

当 λ_1^{α}是 $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_d\}$之一时，该关系成立。不失一般性，假设

$$\lambda_i^{(a)}=\begin{cases}\lambda_{i+1} & \text{if } m\nmid i\\ \lambda_{i-m+1} & \text{if } m\mid i\end{cases} \tag{20}$$

我们有以下条件:

$$\begin{aligned}
&\mu=2 && (\lambda_d-\lambda_2^{\alpha})\gamma_{2,d}=t_{2,1}^{(\alpha)}\gamma_{1,d}\\
&\mu=3 && (\lambda_d-\lambda_3^{\alpha})\gamma_{3,d}=t_{3,1}^{(\alpha)}\gamma_{1,d}+t_{3,2}^{(\alpha)}\gamma_{2,d}\\
&\mu=4 && (\lambda_d-\lambda_4^{\alpha})\gamma_{4,d}=t_{4,1}^{(\alpha)}\gamma_{1,d}+t_{4,2}^{(\alpha)}\gamma_{2,d}+t_{4,3}^{(\alpha)}\gamma_{3,d}\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&\mu=d-1 && (\lambda_d-\lambda_{d-1}^{\alpha})\gamma_{d-1,d}=t_{d-1,1}^{(\alpha)}\gamma_{1,d}+t_{d-1,2}^{(\alpha)}\gamma_{2,d}+\cdots+t_{d-1,d-2}^{(\alpha)}\gamma_{d-1,d}
\end{aligned}$$

所有这些方程成立的条件是 $\gamma_{1,\ d},\ \ldots,\ \gamma_{d-2,\ d}=0$。最后，对于 $\mu=d$，我们有

$$(\lambda_d-\lambda_d^{\alpha})\gamma_{d,d}=\sum_{\nu=1}^{d-1}t_{d,\nu}^{(\alpha)}\gamma_{\nu,d} \tag{21}$$

当且仅当 $(\lambda_d-\lambda_d^{\alpha})\ \gamma_{d,d}=t_{d}^{(a)}{}_{,d-1}\gamma_{d-1,d}$.

引理 26。对于 $n\geq 2$ 以下数组中每一行各项乘积的垂直和 S_n

y						
1	1	(x_1-x_2)	(x_1-x_3)	$\cdots$	$\cdots$	(x_1-x_n)
2	$(z-x_1)$	1	(x_1-x_3)	$\cdots$	$\cdots$	(x_1-x_n)
3	$(z-x_1)$	$(z-x_2)$	1	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$n-1$	$(z-x_1)$	$(z-x_2)$	$\cdots$	$(z-x_{n-2})$	1	(x_1-x_n)
n	$(z-x_1)$	$(z-x_2)$	$\cdots$	$(z-x_{n-2})$	$(z-x_{n-1})$	1

由下式给出

$$S_n=\sum_{y=1}^{n}\prod_{\nu=y+1}^{n}(x_1-x_\nu)\prod_{\mu=1}^{y-1}(z-x_\mu)=(z-x_2)\cdots(z-x_n).$$

特别地，当 $z = x_n$ 时，该和为零。

证明。我们将用归纳法证明该引理。对于 $n = 2$，我们有 $S_2 = (x_1 - x_2) + (z - x_1) = z - x_2$。假设等式对 n 成立。和 S_{n+1} 对应于以下数组：

y						
1	1	$(x_1 - x_2)$	$(x_1 - x_3)$	$\cdots$	$(x_1 - x_n)$	$(x_1 - x_{n+1})$
2	$(z - x_1)$	1	$(x_1 - x_3)$	$\cdots$	$(x_1 - x_n)$	$(x_1 - x_{n+1})$
3	$(z - x_1)$	$(z - x_2)$	1	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$(z - x_1)$	$\cdots$	$(z - x_{n-2})$	1	$(x_1 - x_n)$	$(x_1 - x_{n+1})$
n	$(z - x_1)$	$(z - x_2)$	$\cdots$	$(z - x_{n-1})$	1	$(x_1 - x_{n+1})$
$n+1$	$(z - x_1)$	$(z - x_2)$	$\cdots$	$(z - x_{n-1})$	$(z - x_n)$	1

根据定义有 $S_{n+1} = S_n(x_1 - x_{n+1}) + (z - x_1)(z - x_2)\cdots(z - x_n)$，由归纳法可得

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (z - x_2)\cdots(z - x_n)(x_1 - x_{n+1}) + (z - x_1)(z - x_2)\cdots(z - x_n) \\ &= (z - x_2)\cdots(z - x_n)(x_1 - x_{n+1} + z - x_1) \end{aligned}$$

从而得到所需结果。 □

引理 27. 考虑 $A < l < L < B$。该量

$$\sum_{l \le y \le L} [\lambda_a - \lambda_x]_A^{y-1} \cdot [\lambda_b - \lambda_x]_{y+1}^B$$

等于

$$[\lambda_a - \lambda_x]_A^{l-1} \cdot [\lambda_b - \lambda_x]_{L+1}^B \cdot \frac{[\lambda_a - \lambda_x]_l^L - [\lambda_b - \lambda_x]_l^L}{(\lambda_a - \lambda_b)}$$

证明。我们写作

$$\begin{aligned} &\sum_{l \le y \le L} [\lambda_a - \lambda_x]_A^{y-1} \cdot [\lambda_b - \lambda_x]_{y+1}^B \\ &= [\lambda_a - \lambda_x]_A^{l-1} \cdot [\lambda_b - \lambda_x]_{L+1}^B \cdot \sum_{l \le y \le L} [\lambda_a - \lambda_x]_l^{y-1} \cdot [\lambda_b - \lambda_x]_{y+1}^L \end{aligned}$$

最后一个求和可视为以下数组中每一行各项乘积的垂直和 S：

y						
l	1	$(\lambda_b - \lambda_{l+1})$	$(\lambda_b - \lambda_{l+2})$	$\cdots$	$(\lambda_b - \lambda_{L-1})$	$(\lambda_b - \lambda_L)$
$l+1$	$(\lambda_a - \lambda_l)$	1	$(\lambda_b - \lambda_{l+2})$	$\cdots$	$(\lambda_b - \lambda_{L-1})$	$(\lambda_b - \lambda_L)$
$l+2$	$(\lambda_a - \lambda_l)(\lambda_a - \lambda_{l+1})$	1			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$L-2$	$(\lambda_a - \lambda_l)(\lambda_a - \lambda_{l+1})$	$\cdots$	1		$(\lambda_b - \lambda_{L-1})$	$(\lambda_b - \lambda_L)$
$L-1$	$(\lambda_a - \lambda_l)(\lambda_a - \lambda_{l+1})$	$\cdots$	$(\lambda_a - \lambda_{L-2})$	1		$(\lambda_b - \lambda_L)$
L	$(\lambda_a - \lambda_l)(\lambda_a - \lambda_{l+1})$	$\cdots$	$(\lambda_a - \lambda_{L-2})$	$(\lambda_a - \lambda_{L-1})$	1	

如果 $l = b$，那么引理 26 表明 $S = [\lambda_a - \lambda_x]_{b+1}^L$。此外，如果 $L = a$，那么 $S = 0$。

如果 $l \neq b$，则无法直接利用引理 26 计算量 S。我们通过构造以下数组来继续：

y									
b	1	$(\lambda_b-\lambda_{b+1})$	$\cdots$	$(\lambda_b-\lambda_l)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(\lambda_b-\lambda_L)$
$\vdots$				$\vdots$					$\vdots$
$l-1$	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	1	$(\lambda_b-\lambda_l)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$(\lambda_b-\lambda_L)$
l	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	1	$(\lambda_b-\lambda_{l+1})$	$(\lambda_b-\lambda_{l+2})$	$\cdots$	$(\lambda_b-\lambda_{L-1})$	$(\lambda_b-\lambda_L)$
$l+1$	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	$(\lambda_a-\lambda_l)$	1	$(\lambda_b-\lambda_{l+2})$	$\cdots$	$(\lambda_b-\lambda_{L-1})$	$(\lambda_b-\lambda_L)$
$l+2$	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	$(\lambda_a-\lambda_l)$	$(\lambda_a-\lambda_{l+1})$	1		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$L-2$	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	$(\lambda_a-\lambda_l)$	$(\lambda_a-\lambda_{l+1})$	$\cdots$	1	$(\lambda_b-\lambda_{L-1})$	$(\lambda_b-\lambda_L)$
$L-1$	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	$(\lambda_a-\lambda_l)$	$(\lambda_a-\lambda_{l+1})$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{L-2})$	1	$(\lambda_b-\lambda_L)$
L	$(\lambda_a-\lambda_b)$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{l-1})$	$(\lambda_a-\lambda_l)$	$(\lambda_a-\lambda_{l+1})$	$\cdots$	$(\lambda_a-\lambda_{L-2})$	$(\lambda_a-\lambda_{L-1})$	1

利用引理 26 可计算出此数组的值为 $[\lambda_a-\lambda_x]_{b+1}^{L}$。我们注意到，左上数组各乘积之和可利用引理 26 计算，而右下数组各乘积之和为 S。

$$[\lambda_a-\lambda_x]_b^{l-1}\cdot S+[\lambda_a-\lambda_x]_{b+1}^{l-1}\cdot[\lambda_b-\lambda_x]_l^{L}=[\lambda_a-\lambda_x]_{b+1}^{L}$$

我们得到

$$[\lambda_a-\lambda_x]_b^{l-1}S=[\lambda_a-\lambda_x]_{b+1}^{l-1}\left([\lambda_a-\lambda_x]_l^{L}-[\lambda_b-\lambda_x]_l^{L}\right)$$

或者等价地

$$(\lambda_a-\lambda_b)\cdot S=[\lambda_a-\lambda_x]_l^{L}-[\lambda_b-\lambda_x]_l^{L}$$

□

引理 28. 对于所有 $1\le\mu\le d-2$，我们有 $\gamma_{\mu,d}=0$。

证明. 令 $\mu_1=\mu>\mu_2>\cdots>\mu_s=1\in\Sigma_\mu$ 为一组选定的迭代，$d=i_1>i_2>\cdots\cdots i_s\ge 1>i_{s+1}=0$ 为 i 的序列。利用方程 (20)，我们看到，量 $[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}\neq 0$ 成立，当且仅当以下两个不等式之一成立：

$$\text{either}\qquad i_{\nu+1}>\mu_\nu-mf(\mu_\nu) \tag{22}$$

$$\text{or}\qquad i_\nu<\mu_\nu+2-mf(\mu_\nu), \tag{23}$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } m\mid x\\ 0 & \text{if } m\nmid x\end{cases}$$

当应用于整数 ν 时，我们将上述两个不等式分别记为 (22)$_\nu$、(23)$_\nu$。假设对所有 $1\le\nu\le s$，不等式 (22)$_\nu$、(23)$_\nu$ 中有一个成立，即 $[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}\neq 0$。当 $\nu=s$ 时，不等式 (22)$_s$ 不可能成立，因为这会推出 $0=i_{s+1}>1=\mu_s$，因此我们有 $m\nmid 1=\mu_s$。

我们将保持序列 $\bar\mu$：$\mu_1>\mu_2>\cdots>\mu_s$ 固定，并对所有可能选取的 $i_1>\cdots i_s>i_{s+1}=0$序列求和，也就是说，我们将证明这个和

$$\Gamma_{\bar\mu,i}:=\sum_{i=i_1>i_2>\cdots>i_s\ge 1}\prod_{\nu=1}^{s}[\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha}-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1} \tag{24}$$

为零，这将表明$\gamma_{\mu,\ d}=0$ 利用方程（18）。

现在注意，若（23）$_\nu$成立且 $m\nmid\nu$，$\nu-1$，则（23）$_{\nu-1}$也成立。事实上，（23）$_\nu$与（22）$_{\nu-1}$结合可得出不可能成立的不等式

$$\mu_\nu+2 \overset{(23)_\nu}{>} i_\nu \overset{(22)_{\nu-1}}{>} \mu_{\nu-1}.$$

现在假设 $m\mid\nu$ 且(23)$_\nu$ 成立，那么(23)$_{\nu-1}$ 也成立。事实上，将(23)$_\nu$ 与(22)$_{\nu-1}$ 结合可得

$$\mu_\nu+2-m \overset{(23)_\nu}{>} i_\nu \overset{(22)_{\nu-1}}{>} \mu_{\nu-1}-mf(\mu_{\nu-1}).$$

若 $m\nmid\mu_{\nu-1}$，则上述不等式不可能成立，因为它意味着

$$\mu_\nu+2-m>\mu_{\nu-1}>\mu_\nu.$$

若 $m\mid\mu_{\nu-1}$，则该不等式也不可能成立，因为它意味着 $\mu_\nu+2>\mu_{\nu-1}$ 因此，若我们写作 $\mu_{\nu-1}=k'm$ 和 $\mu_\nu=km$, $k,\ k'\in\mathbb{N}$, $k'>k$，便可得出 $2>(k'-k)m\geq m$。这证明了以下结论

引理 29。 不等式*(22)*$_{\nu-1}$ 可能仅在 $m\mid\mu_{\nu-1}$,$m\nmid\mu_\nu$的情况下成立。

假设对所有 ν，不等式 (23) 都成立。那么对 $\nu=1$，可得（回想一下，$\mu\leq d-2$）

$$\mu+2\leq d=i_1<\mu_1+2-mf(\mu_1)=\mu+2-mf(\mu), \tag{25}$$

这不可能。因此，要么存在 ν，使得两个不等式 (22)$_\nu$、(23)$_\nu$ 均不成立（此时对总和的贡献为零）；要么存在 (22) 成立的情形。

方程 (24) 中出现的被加数可能为零。例如，序列 $\mu_1=m>\mu_2=1$，其中 $i_2=2<i_1=d$、$s=2$，给出的贡献为

$$[\lambda_{\mu_2}^\alpha-\lambda_x]_1^{i_2-1}[\lambda_{\mu_1}^\alpha-\lambda_x]_{i_2}^{d-1}=[\lambda_1^\alpha-\lambda_x]_1^1[\lambda_m^\alpha-\lambda_x]_{i_2+1}^{d-1}=(\lambda_2-\lambda_1)[\lambda_1-\lambda_x]_3^{d-1}$$

而对 $i_2=1<i_1=d$，其贡献为

$$[\lambda_{\mu_2}^\alpha-\lambda_x]_1^{i_2-1}[\lambda_{\mu_1}^\alpha-\lambda_x]_{i_2+1}^{d-1}=[\lambda_1^\alpha-\lambda_x]_1^0[\lambda_m^\alpha-\lambda_x]_2^{d-1}=[\lambda_1-\lambda_x]_2^{d-1}$$

显然，这些 非零贡献在以下情形下相互抵消 已添加。

引理 30。 假设 $m\mid\mu_{\nu_0-1}$，其中 *(23)*$_{\nu_0}$ 和 *(22)*$_{\nu_0-1}$ 成立。那么，我们可以从 μ 和 i 的序列的两种选取中分别消去 μ_{ν_0-1} 和 i_{ν_0}，即可以构成长度为 $s-1$ 的序列

$$\bar\mu_{s-1}=\mu_s<\bar\mu_{s-2}=\mu_{s-1}<\cdots<\bar\mu_{\nu_0-1}=\mu_{\nu_0}<\bar\mu_{\nu_0-2}=\mu_{\nu_0-2}<\cdots<\bar\mu_1=\mu_1.$$

以及相应的等长序列

$$\bar i_{s-1}=i_s<\bar i_{s-2}=i_{s-1}<\cdots<\bar i_{\nu_0-1}=i_{\nu_0-1}<\bar i_{\nu_0}=i_{\nu_0+1}<\cdots<\bar i_1=i_1=d,$$

使得

$$\Gamma_{\bar\mu,i}=\sum_{i_1>\cdots>i_s}\prod_{\nu=1}^{s}[\lambda_{\mu_\nu}^\alpha-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1}=(\star)\sum_{\bar i_1>\cdots>\bar i_{s-1}}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\nu_0-1}}^{s}[\lambda_{\mu_\nu}^\alpha-\lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1},$$

其中 $(\star)$ 是一个非零元素。

证明。（引理 30 的证明）我们处于 $m \mid \mu_{\nu_0-1}$ 和 $m \nmid \mu_{\nu_0}$ 的情形，其中 $(23)_{\nu_0}$ 和 $(22)_{\nu_0-1}$ 成立，

$$\mu_{\nu_0-1} - m \overset{(22)_{\nu_0-1}}{<} i_{\nu_0} \overset{(23)_{\nu_0}}{<} \mu_{\nu_0} + 2, \tag{26}$$

或等价地

$$\mu_0 := \mu_{\nu_0-1} - m + 1 \le i_{\nu_0} \le \mu_{\nu_0} + 1$$

对于 i_{ν_0+1}，不等式 $(22)_{\nu_0}$ $i_{\nu_0+1} > \mu_{\nu_0} - mf(\mu_{\nu_0})$ 不成立，因为它意味着

$$i_{\nu_0+1} < i_{\nu_0} \overset{(23)_{\nu_0}}{<} \mu_{\nu_0} + 2 < i_{\nu_0+1} + 2.$$

注意到还有

$$i_{\nu_0+1} + 1 \le i_{\nu_0} \le i_{\nu_0-1} - 1.$$

令 $l = \max\{\mu_0, i_{\nu_0+1}+1\}$，且 $L = \min\{\mu_{\nu_0}+1, i_{\nu_0-1}-1\}$。则 $y = i_{\nu_0}$ 满足

$$l \le y \le L.$$

根据引理 27，量

$$\sum_{l \le y \le L} [\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{y-1} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{y+1}^{i_{\nu_0-1}-1}$$

等于

$$[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{l-1} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{L+1}^{i_{\nu_0-1}-1} \cdot \frac{[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_l^L - [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_l^L}{(\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_{\mu_0})}$$

$$\frac{[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{L} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{L+1}^{i_{\nu_0-1}-1} - [\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{l-1} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{l}^{i_{\nu_0-1}-1}}{(\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_{\mu_0})} \tag{27}$$

情形 A1 $l = \mu_0 \ge i_{\nu_0+1} + 1$。于是 $[\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_l^L = 0$。

情形 A2 $l = i_{\nu_0+1} + 1 > \mu_0$。令 $z := i_{\nu_0+1}$，由方程 $(23)_{\nu_0+1}$可知其有界，即

$$\mu_0 \overset{\text{Case A2}}{\le} z \overset{(23)_{\nu_0+1}}{\le} \mu_{\nu_0+1} + 1.$$

注意，在这种情况下 $m \nmid \mu_{\nu_0+1}$。事实上，我们假设不等式 $(23)_{\nu_0+1}$成立，由此得到

$$\mu_{\nu_0-1} - m = \mu_0 - 1 \overset{(\text{Case A2})}{<} i_{\nu_0+1} \overset{(23)_{\nu_0+1}}{<} \mu_{\nu_0+1} + 2 - m,$$

这意味着 $\mu_{\nu_0-1} < \mu_{\nu_0+1} + 2$，矛盾。因此，对于 $l = z + 1$，我们计算得

$$\sum_{\mu_0 \le z \le \mu_{\nu_0+1}+1} [\lambda_{\mu_{\nu_0+1}}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+2}+1}^{i_{\nu_0+1}-1} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_l^L =$$

$$= \sum_{\mu_0 \le z \le \mu_{\nu_0+1}+1} [\lambda_{\mu_{\nu_0+1}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+2}+1}^{z-1} \cdot [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{z+1}^L =$$

$$= (\star) \cdot \frac{[\lambda_{\mu_{\nu_0+1}+1} - \lambda_x]_{\mu_0}^{\mu_{\nu_0+1}+1} - [\lambda_{\mu_0} - \lambda_x]_{\mu_0}^{\mu_{\nu_0+1}+1}}{\lambda_{\mu_{\nu_0+1}+1} - \lambda_{\mu_0+1}} = 0.$$

情形 B1 $L = \mu_{\nu_0} + 1 \le i_{\nu_0-1} - 1$。在这种情况下 $[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_l^L = 0$。

情形 B2 $L = i_{\nu_0-1} - 1 < \mu_{\nu_0} + 1$。在这种情况下，方程 (27) 化简为

$$\frac{[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{i_{\nu_0-1}-1}}{(\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_{\mu_0})}$$

这意味着我们已从乘积中消去了 μ_{ν_0-1}，并且我们有

$$\sum_{i_1>\cdots>i_s} \prod_{\nu=1}^{s} [\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1} = (\star) \sum_{i_1>\cdots>i_s} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\nu_0-1}}^{s} [\lambda_{\mu_\nu}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu-1},$$

其中 $(\star)$ 是一个非零元素。这个过程得到原来的量

$$[\lambda_{\mu_{\nu_0}}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{i_{\nu_0}-1} \cdot [\lambda_{\mu_{\nu_0-1}}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu_0}+1}^{i_{\nu_0-1}-1}$$

对 i_{ν_0} 求和后变为量

$$[\lambda_{\mu_{\nu_0}}^{\alpha} - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{i_{\nu_0-1}-1} = [\lambda_{\bar{\mu}_{\nu_0-1}}^{\alpha} - \lambda_x]_{\bar{i}_{\nu_0}+1}^{\bar{i}_{\nu_0-1}-1},$$

也就是说，我们已从 μ 和 i 的序列的两组选取中消去了 μ_{ν_0-1} 和 i_{ν_0}，即得到长度为 $s-1$ 的序列

$$\bar{\mu}_{s-1} = \mu_s < \bar{\mu}_{s-2} = \mu_{s-1} < \cdots < \bar{\mu}_{\nu_0-1} = \mu_{\nu_0} < \bar{\mu}_{\nu_0-2} = \mu_{\nu_0-2} < \cdots < \bar{\mu}_1 = \mu_1.$$

以及与之对应的等长序列

$$\bar{i}_{s-1} = i_s < \bar{i}_{s-2} = i_{s-1} < \cdots < \bar{i}_{\nu_0-1} = i_{\nu_0-1} < \bar{i}_{\nu_0} = i_{\nu_0+1} < \cdots < \bar{i}_1 = i_1 = d.$$

□

注 31. 这里应当谨慎，因为 $i_{\nu_0-1} = i_{\nu_0-1} > i_{\nu_0} > i_{\nu_0} = i_{\nu_0+1}$，所以 $i_{\nu_0-1} > i_{\nu_0} + 1$。这意味着新的序列 $i_{s-1} > \cdots > i_1$ 满足一个更强的不等式，位于 ν_0 位置，除非在计算 $\gamma_{d,d}$ 时出现 $\nu_0 - 1 = d$。

考虑集合 $s, s-1, \ldots, \nu_0$，使得 $m \nmid \mu_\nu$ 对 $s \geq \nu \geq \nu_0$ 成立，并假设 $m \mid \mu_{\nu_0-1}$ 和 (23)$_{\nu_0}$ 以及 (22)$_{\nu_0-1}$ 成立。应用引理 30，得到一个新的序列，其中包含 μ，并去掉了 μ_{ν_0-1}，条件是 $\nu_0 - 1 > 1$。我们继续以这种方式进行，在 μ 的序列中消去所有可能出现的类似 (26) 的不等式，从而得到一列 μ，其中只包含 (23) 型不等式。但根据方程 (25)，若 $\mu \leq d-2$，这是不可能的。这证明所有 $\gamma_{\mu,d} = 0$ 都满足 $1 \leq \mu \leq d-2$，由此完成引理 28 的证明。□

引理 32. 若 $\mu_2 \neq d-1$，则相应求和项 $\Gamma_{\bar{\mu},\ i}$ 对 $\gamma_{d,\ d}$ 的贡献为零。

证明. 我们处于 $\mu = d = i$ 的情形。我们先使用引理 30，开始消去所有形如 (23)$_{\nu_0}$, (22)$_{\nu_0-1}$ 的不等式序列，其中 $m \mid \nu_0 - 1, m \nmid \nu_0$。对于 $\nu = 1$，不等式 $(23)_1$ 不可能成立，因为它意味着不可能的不等式 $d = i_1 < d + 2 - m$。因此，$(22)_1$ 成立，也就是说 $i_2 > d - m$。另一方面，通过消去过程，我们可以假设 $(23)_2$ 成立，因此有

$$d - m \overset{(22)_1}{<} i_2 \overset{(23)_2}{<} \mu_2 + 2.$$

按照引理 28 证明中的分析，我们看到，当情形 B2 成立时，对 $\gamma_{d,\ d}$ 的贡献非零，也就是说（在此情形下 $\nu_0 = 2$）$d - 1 = i_{\nu_0-1} - 1 < \mu_2 + 1$，从而得到 $\mu_2 = d - 1$。□

引理 33。 等式 *(21)* 成立，即

$$(\lambda_d - \lambda_d^\alpha)\gamma_{d,d} = \sum_{\nu=1}^{d-1} t_{d,\nu}^{(\alpha)} \gamma_{\nu,d} = t_{d,d-1}^{(\alpha)} \gamma_{d-1,d}.$$

证明。我们将采用引理 30 的证明过程。回顾一下，对于每个固定的序列 $\mu_s > \cdots > \mu_1$，我们对所有可能的序列 $i_1 > \cdots > i_{s+1} = 0$。在最后一步中，对于 $\nu_0 = 2$、$\mu_{\nu_0} = \mu_2 = d-1$、$\nu_0 - 1 = 1$ 和 $\mu_{\nu_0 - 1} = \mu = d$，会出现不等式 (26)，即：

$$0 = \mu_{\nu_0 - 1} - m \overset{(22)_2}{<} i_{\nu_0} \overset{(23)_1}{<} \mu_{\nu_0} + 2 = d + 1.$$

与引理 30 的证明一样，我们对 $y = i_\nu$ 求和，结果在情形 B1 下为零；而在情形 B2 下，其中 $\mu_{\nu_0} = \mu_2 = d-1$ 和 $\mu_0 = \mu_{\nu_0 - 1} - m + 1 = d - m + 1$，其贡献计算结果为

$$\frac{[\lambda_{\mu_{\nu_0}+1}^\alpha - \lambda_x]_{i_{\nu_0+1}+1}^{i_{\nu_0-1}-1}}{(\lambda_{\mu_{\nu_0}+1} - \lambda_{m_0})} = \frac{[\lambda_d^\alpha - \lambda_x]_{i_3+1}^{d-1}}{\lambda_d - \lambda_d^\alpha}.$$

上面的表达式中消去了最后一个 $\mu_{\nu_0 - 1} = \mu_1 = d$。这意味着，对于固定的序列 $\mu_1 > \ldots > \mu_s$，方程 (24) 中内和的贡献为

$$\frac{1}{\lambda_d - \lambda_d^\alpha} \cdot \sum_{d-1 = i_2 > i_3 > \cdots > i_s \geq 1} \prod_{\nu=2}^{s} [\lambda_{\mu_\nu}^\alpha - \lambda_x]_{i_{\nu+1}+1}^{i_\nu - 1}.$$

注意，$\mu_1 = d$ 并未出现在这个表达式中，而且该表达式对应于序列 $\bar{\mu}_1 = \mu_2 = d-1 > \bar{\mu}_2 = \mu_3 > \cdots > \bar{\mu}_{s-1} = \bar{\mu}_s = 1$。还要注意，注 31 中描述的问题在这里并未出现，因为我们删去的是i_1，它不是位于某些 i 之间的项，而是第一个项。因此，我们可以将它与一个类似的表达式联系起来，该表达式对 $\gamma_{d-1,\,d}$有贡献。反过来，$\gamma_{d-1,\,d}$ 的每一项贡献都会通过乘以 $\lambda_d - \lambda_d^\alpha$，产生对 $\gamma_{d,\,d}$的一项贡献。由方程 (18) 给出的 $\gamma_{\mu,\,d}$ 的表达式即可推出所需结果。□

到目前为止，我们已经展示了如何构造矩阵 Γ，T 使得

$$T^q = 1, \Gamma T \Gamma^{-1} = T^\alpha. \tag{28}$$

现在我们将证明 Γ 的阶为 m。根据方程（28），Γ^k 应满足方程

$$\Gamma^k T \Gamma^{-k} = T^{\alpha^k}.$$

利用命题25所断言的、将 α 替换为 α^k 后此类 Γ^k 的唯一性，我们得到：Γ 各项的矩阵乘法所产生的（$\gamma_{\mu\,i}^{(k)}{}_{,}$）$= \Gamma^k$，与将命题（28）的递归方法应用于 $\Gamma' = \Gamma^k$、$\alpha' = \alpha^k$ 和 $\Gamma' E_1 = \zeta_m^{\epsilon k} E_1$所得的值相一致。特别地，对于 $k = m$，对于所有 $1 \leq \nu \leq h$，我们有$\alpha^m \equiv 1$模p^ν，也就是说，矩阵 Γ^k 应当利用命题（28）对关系 $\Gamma^m T \Gamma^m = T$、$\Gamma^m E_1 = E_1$进行递归构造，从而得到结论 $\Gamma^m = \mathrm{Id}$。注意到，Γ 的第一个特征值是一个本原单位根，因此 Γ 的阶恰好为 m。

根据引理 10，σ 在特殊纤维上的作用由一个下三角矩阵给出。因此，我们必有

$$\gamma_{\nu,i} \in \mathfrak{m}_r \text{ for } \nu < i. \tag{29}$$

命题34。若

$$v(\lambda_i - \lambda_j) > v(a_\nu) \text{ for all } 1 \le i, j \le d \text{ and } 1 \le \nu \le d-1 \tag{30}$$

那么，矩阵 $(\gamma_{\mu,i})$ 的元素属于环 R，并且模 $\mathfrak{m}_R$为下三角矩阵。

证明。 假设方程（30）的条件成立。在方程（18）中，我们计算分式

$$\frac{[a]_1^{\mu-1}}{[a]_1^{i-1}} = \begin{cases} \frac{1}{[a]_\mu^{i-1}} & \text{if } i > \mu \\ 1 & \text{if } i = \mu \\ [a]_i^{\mu-1} & \text{if } i < \mu \end{cases} \tag{31}$$

分子中 $(\lambda_\mu^\alpha - \lambda_x)$ 因子的个数等于（回想一下， $i_{s+1} = 0$）

$$\sum_{\nu=1}^{s} (i_\nu - 1 - i_{\nu+1} - 1 + 1) = i - s,$$

以及 $i > \mu \ge s$，因此 $i - s > 0$。所以，对于矩阵 $i > \mu$ 的上部，我们有 $i - s$ 个形如 $(\lambda_i^\alpha - \lambda_j)$ 的因子位于分子中，而有 $i - \mu$ 个因子 a_x 位于分母中。它们的差等于 $(i - s) - (i - \mu) = \mu - s \ge 0$。根据假设，该矩阵模 $\mathfrak{m}_R$化为上三角矩阵。□

注记35。 方程（30）中给出的条件可以通过以下方式满足：显然， $\lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{m}_R$。即使在 $v_{\mathfrak{m}_R}(\lambda_i - \lambda_j) = 1$ 的情况下，我们也可以考虑环 R 的分歧扩张 R'，其分歧指数为 e，以使赋值 $v_{\mathfrak{m}_{R'}}(\lambda_i - \lambda_j) = e$，这样便有空间选取 $v_{\mathfrak{m}_{R'}}(a_i) < v_{\mathfrak{m}_{R'}}(\lambda_i - \lambda_j)$。

命题36。我们有

$$\gamma_{i,i} \equiv \zeta_m^\epsilon \alpha^{i-1} \bmod \mathfrak{m}_R \tag{32}$$

令 $A = \{a_1, \ldots, a_{d-1}\} \in R$ 为方程 *(9)* 中对角线下方元素的集合。若$a_i \in \mathfrak{m}_R$，则

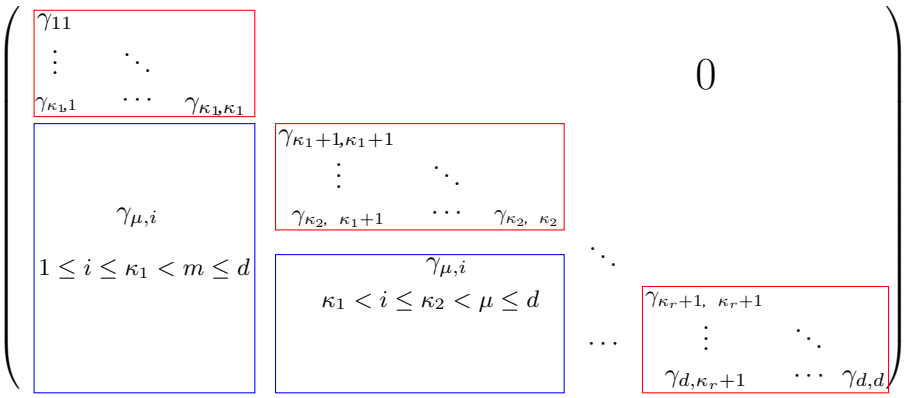
$$\gamma_{\mu,i} \in \mathfrak{m}_R \text{ for } \mu \ne i,$$

也就是说， E_i 是 Γ 对模 $\mathfrak{m}_R$ 的约化作用的特征向量。若 $a_{\kappa_1}, \ldots, a_{\kappa_r}$ 是集合 A 中属于 $\mathfrak{m}_R$的元素，则 Γ 的约化矩阵具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Gamma_r \end{pmatrix}$$

其中 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{r+1}$ 对于 $1 \le \nu \le r+1$ 是$(\kappa_\nu - \kappa_{\nu-1}) \times (\kappa_\nu - \kappa_{\nu-1})$ 下三角矩阵（令 $\kappa_0 = 0, \kappa_{r+1} = d$）。

证明。 考虑矩阵 Γ:



我们有 $\mu = i$ ， 而 Σ_μ 中唯一不含任何形如 $(\lambda_y^\alpha - \lambda_x)$ 的因子的元素是序列

$$1 = \mu_s = \mu_{s-1} - 1 < \mu_{s-1} < \cdots < \mu_2 = \mu_1 - 1 < \mu_1 = \mu$$

对于这个序列，方程（18）变为

$$\gamma_{i,i} = \prod_{\nu=2}^{s} h_{\alpha-1}(\lambda_{\mu_\nu}, \lambda_{\mu_{\nu-1}})\zeta_m^\epsilon \bmod \mathfrak{m}_R,$$

由此得到所需结果，因为 $h_{\alpha-1}(\lambda_{\mu_\nu}, \lambda_{\mu_{\nu-1}}) \equiv \binom{\alpha}{1} = \alpha$ 模$\mathfrak{m}_R$。

为证明所有满足 $\gamma_{\mu,i} \in \mathfrak{m}_R$ 的项（即中心块下方的所有项），我们注意到，由方程（18）与方程（31）可得，$\gamma_{\mu,i}$ 可被 $[a]_i^{\mu-1} = a_i a_{i+1} \cdots a_{\kappa_\nu+1} \cdots a_{\mu-1} \in \mathfrak{m}_R$ 整除。

□

回想一下，根据引理 2，存在一个 $1 \le a_0 \le m$ 使得 $\alpha = \zeta_m^{a_0}$。

命题37。 不可分解模 V 模 $\mathfrak{m}_R$ 可分解为 $r+1$ 个不可分解 $k[C_q \rtimes C_m]$ 模的直和 V_ν, $1 \le \nu \le r+1$。每个 V_ν 都同构于 $V_\alpha(\epsilon + a_0\kappa_{\nu-1}, \kappa_\nu - \kappa_{\nu-1})$。

证明。 由式 (32)，约化矩阵块 Γ_ν 的第一个特征值为

$$\zeta_m^\epsilon \alpha^{\kappa_{\nu-1}} = \zeta_m^{\epsilon+(\kappa_{\nu-1})a_0}.$$

由于第一个特征值与矩阵块的大小共同决定最后一个特征值，也就是 C_m 在底上的作用，因此约化矩阵块在同构意义下唯一确定。□

由此我们得到一个新的障碍。假设由引理16中的矩阵 T 给出的不可分解表示模 $\mathfrak{m}_R$ 约化后成为若尔当块之和。那么，在特殊纤维中， σ 对每个若尔当块首项元素的作用，应由 σ 对 V的首个特征向量 E 的相应作用来描述。特殊纤维上的相应作用应当彼此相容。

这一观察在命题 1 中得到了形式化表述，现证明如下：每个集合I_ν, $1 \le \nu \le t$ 都对应一个不可分解的 $R[G]$-模，它可分解为特殊纤维的不可分解直和项 $V_\alpha(\epsilon_\mu,\ \kappa_\mu)$， $\nu \in I_\nu$ 。不可分解

直和项在 R中有不同的单位根，因此 $\sum_{\mu\in I_\nu} k_\nu \le q$，这就是条件（1.a）。第二个条件（1.b）来自命题 13。如果 1 是提升 T的可能特征值之一，那么 $\sum_{\mu\in I_\nu} \kappa_\mu \equiv 1 \bmod m$。如果提升 T 的所有特征值都不等于 1，那么 $\sum_{\mu\in I_\nu} \kappa_\mu \equiv 0 \bmod m$。如果 $\#I_\nu = q$，那么有一个零特征值，且总和模m等于 1。

由式 (32) 可知，条件 (1.c) 是必要条件。另一方面，若满足 (1.c)，我们可以将集合 $\{1,\dots,S\}$, $S=\sum_{\nu=1}^{t}\#I_\nu$ 写成如下形式（必要时先进行置换）：

$$J_1 = \{1,2,\dots,\kappa_1^{(1)},\kappa_1^{(1)}+1,\dots,\kappa_1^{(1)}+\kappa_2^{(1)},\dots,\sum_{j=1}^{r_1}\kappa_j^{(1)} = b_1\}, I_1 = \{\kappa_1^{(1)},\dots,\kappa_{r_1}^{(1)}\}$$

$$J_2 = \{b_1+1, b_1+2,\dots,b_2 = b_1+\sum_{j=1}^{r_2}\kappa_j^{(2)}\}, I_2 = \{\kappa_1^{(2)},\dots,\kappa_{r_2}^{(2)}\}$$

.....

$$J_s = \{b_{s-1}+1, b_{t-1}+2,\dots,b_t = S\}, I_s = \{\kappa_1^{(s)},\dots,\kappa_{r_s}^{(s)}\}$$

式 (9) 中给出的矩阵，其中

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i\in\{b_1,\dots,b_{s-1}\} \\ \pi & \text{if } i\in\{\kappa_1^{(\nu)},\kappa_1^{(\nu)}+\kappa_2^{(\nu)},\kappa_1^{(\nu)}+\kappa_2^{(\nu)}+\kappa_3^{(\nu)},\dots,\kappa_1^{(\nu)}+\kappa_2^{(\nu)}+\cdots+\kappa_{r_\nu-1}^{(\nu)}\} \\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

提升了 τ 生成元，并且根据 (12)， σ也有定义良好的扩展作用。

例： 考虑群 $q=5^2, m=4, \alpha=7$,

$$G = C_{5^2}\rtimes C_4 = \langle \sigma,\tau | \sigma^4=\tau^{25}=1, \sigma\tau\sigma^{-1}=\tau^7\rangle.$$

注意，$\mathrm{ord}_5 7 = \mathrm{ord}_{5^2} 7 = 4$。

- 模 $V(\epsilon,25)$ 是射影的，并且已知可以在零特征下提升。这与命题 1 十分吻合，因为 $4 \mid 25-1 = 4\cdot 6$。
- 如果 $4\nmid\kappa$ 或 $4\nmid\kappa-1$，模 $V(\epsilon,\kappa)$ 就不能在零特征下提升。因此，只有 $V(\epsilon,1)$、 $V(\epsilon,4)$、$V(\epsilon,5)$、 $V(\epsilon,8)$、 $V(\epsilon,9)$、 $V(\epsilon,12)$、 $V(\epsilon,13)$、$V(\epsilon,16)$、 $V(\epsilon,17)$、 $V(\epsilon,20)$、 $V(\epsilon,21)$、$V(\epsilon,24)$、 $V(\epsilon,25)$ 可以提升。
- 模 $V(1,2)\oplus V(3,2)$ 可提升到零特征域中，其中相对于基 E_1,E_2,E_3,E_4， T 的矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \zeta_q & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta_q^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & \zeta_q^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_q^4 \end{pmatrix}$$

且 $\sigma(E_1) = \zeta_q E_1$。
- 模 $V(1,2)\oplus V(1,2)$ 不能提升到零特征域中。无论如何置换这些直和项，都无法使 σ 的特征值为 $\zeta_m^\epsilon, \alpha\zeta_m^\epsilon, \alpha^2\zeta_m^\epsilon, \alpha^3\zeta_m^\epsilon$。注意， $\alpha = 2 = \zeta_m$。
- 模 $V(\epsilon_1,21)\oplus V(2^{21}\cdot\epsilon_1,23)$ 在零特征下无法提升。总和 $21+24$ 能被 4 整除， $\epsilon_2 = 2^{21}\epsilon_1$ 是相容的，但 $21+23=44>25$因此，在假设由它们的和构成的不可分解模中， T 的表示

不能具有不同的特征值，而这些特征值应当是 25 次单位根。

References

[1] J. L. Alperin。 *Local representation theory* 11 *Cambridge Studies in Advanced*，第 卷。*Mathematics* 1986
剑桥大学出版社，剑桥，。作为有限群局部表示论入门的模表示。[2] Frauke M. Bleher、Ted Chinburg 和 Aristides Kontogeorgis。曲线全纯微分的伽罗瓦结构。 *J. Number Theory*，216：1–68，2020。[3] T. Chinburg、R. Guralnick 和 D. Harbater。Oort 群与提升问题。
Compos.，（）：–
Math. 144 4 849
866，2008。[4] Ted Chinburg、Robert Guralnick 和 David Harbater。有限群在曲线上的作用的局部提升问题。 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，44(4)：537–605，2011。[5] Ted Chinburg、Robert Guralnick 和 David Harbater。全局 Oort 群。 *J. Algebra*，473 374 396，2017：–。[6] Huy Dang、Soumyadip Das、Kostas Karagiannis、Andrew Obus 和 Vaidehee Thatte。局部 Oort 群与孤立微分数据判据，2019。[7] A. Heller 和 I. Reiner。整数环中循环群的表示。I。
Ann. of Math.，：–。
(2) 76 73 92, 1962
[8] A. Heller 和 I. Reiner。整数环中循环群的表示。II。
Ann. of Math.，：–。
(2) 77 318 328, 1963
[9] Sotiris Karanikolopoulos 和 Aristides Kontogeorgis。正特征下循环群的表示与魏尔斯特拉斯半群。 *J. Number Theory*，133(1)：158–175，2013。[10] Aristides Kontogeorgis 和 Alexios Terezakis。典范理想与具有自同构的曲线的变形理论，2021。[11] Andrew Obus。曲线的（局部）提升问题。载于 *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry* 63 *Adv. Stud. Pure Math.* 359 412 ，第 卷，
第 – 页。日本数学会，东京，2012。[12] Andrew Obus。Oort 猜想的推广。 *Comment. Math. Helv.*，92(3)：551–620，2017。[13] Andrew Obus 和 Rachel Pries。野分歧循环扩张。 *J. Pure Appl. Algebra*，214 5 565 573，2010（）：–。[14] Andrew Obus 和 Stefan Wewers。循环扩张与局部提升问题。
Ann. of，（）：–。
Math. (2) 180 1 233 284, 2014
[15] Florian Pop。关于曲线覆盖提升的 Oort 猜想。 *Ann. of Math. (2)*，180(1)：285–322，2014。[16] Jean-Pierre Serre。 *Linear representations of finite groups*。施普林格出版社，纽约，1977。由 Leonard L. Scott 从法文第二版翻译，数学研究生教材，第42卷。[17] Jean-Pierre Serre。 *Local fields*。施普林格出版社，纽约，1979。由 Marvin Jay Greenberg 从法文翻译。[18] Bradley Weaver。 D_4的局部提升问题。 *Israel J. Math.*，228(2)：587–626，2018。

Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens Panepistimioupolis, 15784 Athens, Greece*Email address*: kontogar@math.uoa.gr

Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Panepis-timioupolis, 15784 Athens, Greece*Email address*: aleksistere@math.uoa.gr