arXiv:2301.01034v1 [math.CT] 3 Jan 2023

定量代数或连续代数的簇（扩展摘要）

´ ´J. Adamek、M. Dostal 和 J. Velebil

Abstract. 定量代数是赋予度量空间范畴 Met 富集结构的代数，其所有运算均为非扩张映射。Mardare、Plotkin 和 Panangaden 将簇（又称 1-基本簇）引入为由定量方程呈现的定量代数类。我们证明，这些簇与 Met 上的强有限单子一一对应 T。这意味着， T 是其在有限离散空间上的限制的 Kan 延拓。对完备度量空间范畴 CMet 也有类似结果。

类似地，连续代数是赋予 CPO（连续偏序集范畴）富集结构的代数，其所有运算均为连续的。我们引入扩展项之间的方程，并证明，簇（由此类方程呈现的代数类）与 CPO 上的强有限单子一一对应 T。这意味着， T 是其在有限离散连续偏序集上的限制的 Kan 延拓。（这两个结果的证明有很大不同。）此外，我们还给出了 DCPO 上单子的类似结果。

我们还通过保持某些加权余极限，刻画了上述所有范畴中的强有限性。作为一个副结果，我们证明了在所有笛卡尔闭范畴中，有向余极限与有限积可交换。

1. Introduction

定量代数推理由 Mardare、Panangaden 和 Plotkin 在一系列论文中形式化 [10, 21, 22, 11]，作为研究概率计算中计算效应的工具。这些论文研究度量空间范畴 Met 或完备度量空间范畴 CMet 中的代数。度量始终取扩展意义：距离 ∞ 是允许的；态射是非扩张映射 f，这意味着对于定义域中的 x、 y，有 $d(x, y) \leq d(f(x)\ f(y))$。定量代数是在（完备）度量空间$A$ 上作用的代数，其中每个 n元运算都是从 A^n （赋予最大度量）到 A的非扩张映射。Mardare 等人引入了定量方程，即形如 $t =_\varepsilon t'$ 的形式表达式，其中 t和 t' 是项， $\varepsilon \geq 0$ 是有理数。定量代数 A 满足此方程，当且仅当对于变量的每一种解释， A 中与 t 和 t' 对应的元素之间的距离至多为 ε。一个簇（称为

J. Ad´amek 和 M. Dost´al 感谢捷克共和国资助机构通过资助项目 22-02964S 提供的支持。

[21]中的 1-基本簇）是由一组定量方程刻画的定量代数类。众所周知，非结构化代数的经典代数簇与 Set 上的有限元单子 $\mathbf{T} = (T, \mu, \eta)$ 一一对应，即 T保持有向余极限：每个簇都同构于 T 的代数范畴 $\mathbf{Set}^{\mathbf{T}}$，反之亦然。定量代数是否也存在类似的对应关系，这一问题曾在 LICS 22 的两场报告中提出，见 [2]和 [24]。我们通过研究度量空间范畴 Met 上的富集（即局部非扩张）单子来回答这一问题，并引入称为预同余的加权余极限。我们证明，定量代数簇与 $\mathbf{Met}^{\mathbf{T}}$ 中强有限单子 T 的代数范畴一一对应。我们还证明，这些单子恰好是保持有向余极限和预同余的余极限的单子（定理 3.21）。对于完备度量空间范畴 CMet 上的强有限单子，也有类似结论（定理 3.22）。

我们还研究密切相关的连续代数，它们是在一个 CPO（具有 ω-链上确界的偏序集）上作用的代数，其运算都是连续的。这里我们使用扩展项之间的方程 $t = t'$，这些方程不仅允许对 n 元运算 σ 构造复合项$t = \sigma(t_0, \ldots, t_{n-1})$，还允许对项的可数集合构造形式上确界 $t = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$。连续代数簇是由这样一组方程所呈现的类。我们再次研究富化（即局部连续）单子。我们证明，连续代数簇与 CPO 上强有限单子的范畴 $\mathbf{CPO}^{\mathbf{T}}$ 一一对应。并且我们将这些单子刻画为恰好是保有向余极限和自反余等化子的单子（定理 4.25）。证明在很大程度上利用了这样一个事实：与 Met 和 CMet 不同，CPO 是笛卡尔闭的。我们证明，在每个笛卡尔闭范畴中，有向余极限与有限积可交换（定理 2.12）。

相关工作 Mardare 等人（[21, 22]）的主要工具是 ω 基本方程：对于项的变量集合 M 上的有限度量空间 t 和 t'，可写出 $M \vdash t =_\varepsilon t'$。若每个不扩张解释 $f : M \to A$ 都使变量所对应的元素 t 和 t' 之间的距离至多为 ε，则代数 A 满足该方程。由此类方程刻画的定量代数类称为一个ω-簇。不幸的是，ω-簇的自由代数单子不一定是有限元的（[2], 例 4.1）。然而，当以超度量空间的全子范畴 UMet 替代度量空间范畴 Met 时，ω-簇已在 [2] 中被证明与保有向分裂单态射余极限和满态射的富集单子一一对应。

本扩展摘要中所述结果的完整证明可见于 [4] 和 [5]。

2. Strongly Finitary Monads

假设 2.1。本文始终研究富化于对称闭幺半范畴（$\mathscr{V}$, $\otimes$, I）上的范畴与函子。我们将简要回顾这些概念，并介绍 $\mathscr{V}$上的强有限单子，通过保持某些余极限来刻画它们。我们主要关注的 $\mathscr{V}$实例是（完备）度量空间和（完备）偏序集。

定义 2.2（[13], 6.12）。对称幺半范畴由一个范畴 $\mathscr{V}$、一个双函子 $\otimes$: $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\to\mathscr{V}$以及一个对象 I给出。此外，还给定自然同构，以表达 $\otimes$ 是交换的、结合的，并且具有单位 I（以上性质均满足相干自然同构）。最后，对于每个对象 Y，函子 $-\otimes Y\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$都有一个右伴随。我们将其记为 $[Y,-]$，并将与 $\widehat{\ }$对应的态射 $f\colon X\otimes Y\to Z$ 记为 $f\colon Y\to[X,Z]$。

通常，$\otimes$ 是范畴积，而 I 是终对象；此时称 $\mathscr{V}$为笛卡尔闭。

例 2.3。

(1) $\mathscr{V}=\mathbf{Pos}$，即偏序集范畴，是笛卡尔闭的；$[X,Y]$ 是所有单调映射 $f\colon X\to Y$ 组成的偏序集，其序按逐点序定义。这里，$\curvearrowright f=\mathrm{curry}f$ 是 f的柯里化形式。

(2) $\mathscr{V}=\mathbf{CPO}$，即连续偏序集的范畴（更准确地说：ω-连续偏序集），其对象是具有 ω-链上确界的偏序集。态射是连续映射：保持 ω-链上确界的单调映射。它还是笛卡尔闭的，$[X,Y]$ 是所有连续映射组成的连续偏序集（仍按逐点序排序）。类似地，$\mathscr{V}=\mathbf{DCPO}$ 是具有定向上确界的偏序集（有向完备偏序集）所构成的范畴，其态射（也称为连续映射）保持定向上确界。

(3) $\mathscr{V}=\mathbf{Met}$，即（扩展）度量空间与不扩张映射构成的范畴。对象是通常定义的度量空间，只是允许距离 ∞ 取值。非扩张映射是指满足以下条件的映射f：$X\to Y$，其中 $d(x,x')\geq d(f(x)\ f(x'))$，对所有 x, $x'\in X$均成立。度量空间 A_i ($i\in I$)的积是定义在 $\prod_{i\in I}A_i$上的度量空间，其度量为上确界度量

$$d((x_i),(y_i))=\sup_{i\in I}d(x_i,y_i).$$

这个范畴不是笛卡尔闭的：柯里化不是双射。然而，度量空间范畴关于张量积 $X\otimes Y$ 是对称闭幺半范畴，该张量积就是带有加法度量的笛卡尔积

$$d((x,y),(x',y'))=d(x,x')+d(y,y').$$

这里，$[X,Y]$ 是由所有态射 $f\colon X\to Y$ 构成的度量空间范畴 $\mathbf{Met}(X,Y)$，其度量为上确界度量：f、$g\colon X\to Y$之间的距离为 $\sup_{x\in X}d(f(x)\ g(x))$。而 I是单点空间。

(4) 完备度量空间范畴 CMet 是 Met 中由具有所有柯西序列极限的空间构成的全子范畴。它具有与上述相同的对称闭单体结构：如果 X 和 Y是完备空间，那么 $X \otimes Y$和 $[X,Y]$也都是完备空间。

记号 2.4。
(1) 每个集合 X 都视为一个离散 cpo，其中 $x \sqsubseteq x'$ 当且仅当 $x = x'$。这是 CPO 中的余积 $\coprod_X I$ （在 DCPO 中也一样）。类似地， X 被视为一个离散度量空间： $x \neq x'$ 的所有距离均为 ∞。这是 Met 中的余积 $\coprod_X I$ （在 CMet 中也一样）。
(2) 对于有限集合与映射的范畴 $\mathsf{Set_f}$，我们定义一个函子

$$K : \mathsf{Set_f} \to \mathscr{V}, \qquad X \mapsto \coprod_X I.$$

因此，对于 $\mathscr{V}$ = Met、CMet、CPO 或 DCPO，它将每个有限集对应到相应的离散度量空间或离散 cpo。

约定 2.5。我们所说的范畴 $\mathscr{C}$ 总是指一个在 $\mathscr{V}$上富集的范畴。它由以下内容给出
(1) 一个对象类 ob$\mathscr{C}$；(2) 对 ob$\mathscr{C}$ 中的每一对对象 X、Y，都有一个对象 $\mathscr{C}(X,Y)$，属于 $\mathscr{V}$（称为同态对象）；(3) 对每个对象 $X \in$ ∈ob$\mathscr{C}$，都有一个“单位”态射 u_X：$I \to \mathscr{C}(X,X)$，属于 $\mathscr{V}$；以及
(4) “复合”态射

$$c_{X,Y,Z} : \mathscr{C}(X,Y) \otimes \mathscr{C}(Y,Z) \to \mathscr{C}(X,Z)$$

对所有 X、Y、$Z \in$ ∈ob$\mathscr{C}$，满足表达复合结合律以及 u_X 是复合单位这一事实的交换图表。详情见 [13], 6.2.1。

例 2.6。
(1) 若 $\mathscr{V}$ =是度量空间范畴 Met，则 $\mathscr{C}$ 是一个普通范畴，其中每个同态集 $\mathscr{C}(X,Y)$ 都带有一个度量，使得复合不扩张。完备度量空间范畴 CMet 的情形类似。(2) 若 $\mathscr{V}$ =是 CPO，则每个同态集 $\mathscr{C}(X,Y)$ 都带有一个 cpo，使得复合连续。DCPO 的情形类似。

回顾一下富集函子 F 的概念： $\mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ 对于（富集）范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$，它赋予
(1) 为每个对象 $X \in$ ob$\mathscr{C}$ 指定一个对象 $FX \in$ ob$\mathscr{C}'$，以及 (2) 为每一对 $X, Y \in$ ob$\mathscr{C}$ 指定一个态射 $F_{X,Y}$： $\mathscr{C}(X,Y) \to \mathscr{C}'(FX,FY)$，其属于 $\mathscr{V}$，使得表达 F 保持复合与恒等态射的预期图表交换。

约定 2.7. 我们总是将函子理解为富集函子。只有在少数情况下指非富集函子时，我们才使用“普通函子”一词。

例 2.8。
（1）对于由 Met-富集范畴构成的范畴，$F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ 是一个局部非扩张的普通函子：给定 $f, g \in \mathscr{C}(X, Y)$，我们有 $d(f, g) \geq d(Ff, Fg)$。CMet 的情形类似。（2）对于由 Pos-富集范畴构成的范畴，函子 F 是局部单调的普通函子：给定 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中的 $f \sqsubseteq g$，我们得到 $\mathscr{C}(FX, FY)$ 中的 $Ff \sqsubseteq Fg$。（3）若 $\mathscr{V} =$ 是 CPO，则 F 是一个局部连续的普通函子：它局部单调，并且对于所有 ω-链 f_n：$\mathscr{C}(X, Y)$ 中的 $X \to Y$，我们有 $F(\bigsqcup_{n<\omega} f_n) = \bigsqcup_{n<\omega} Ff_n$。DCPO 的情形类似。

备注 2.9.
(1) 一般来说，还需要引入平行的（富化）函子之间的富化自然变换这一概念。然而，如果 $\mathscr{V}$ 是例 2.3 中的某个范畴，这一概念就等同于底层普通函子之间的普通自然变换。(2) 给定两个范畴 $\mathscr{D}$、$\mathscr{C}$，我们用 $[\mathscr{D}, \mathscr{C}]$ 表示全体函子 $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 所成的范畴；该范畴通过为每一对函子 F、G：$\mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 指定一个适当的对象 $[F, G]$，使其富化于由所有自然变换构成的 $\mathscr{V}$。当 $\mathscr{V} =$ 为 Pos、CPO 或 DCPO 时，$[F, G]$ 的序是逐分量定义的：给定 τ、τ'：$F \to G$，令 $\tau \sqsubseteq \tau'$，当且仅当 $\tau_X \sqsubseteq \tau'_X$ 在由所有 $X \in$ 构成的 $[FX, GX]$ 中成立 $\mathscr{D}$。当 $\mathscr{V} =$ 为 Met 或 CMet 时，τ、τ' 之间的距离为 $\sup_{X \in \mathrm{ob}\mathscr{D}} d(\tau_X, \tau'_X)$

.

定义 2.10（[13, 16]）。范畴 $\mathscr{C}$ 中的加权图表由函子 $D\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 及权 $W\colon \mathscr{D}^{op} \to \mathscr{V}$给出。加权余极限是对象 $C = \mathrm{colim}_W D$ of $\mathscr{C}$，并带有 $\mathscr{V}$中的同构：

$$\psi_X : \mathscr{C}(C, X) \to [\mathscr{D}^{op}, \mathscr{C}](W, \mathscr{C}(D-, X))$$

在 $X \in \mathrm{ob}\mathscr{C}$中自然。此余极限的单位是自然变换

$$\nu = \psi_C(id_C) : W \to \mathscr{C}(D-, C).$$

例 2.3 中的所有范畴都存在加权余极限（对所有 $\mathscr{D}$ small）。

例 2.11.（锥形）有向余极限是这样一种特殊情形：$\mathscr{D}$ 是有向偏序集，而权 W 是平凡的，即取值为 1（终对象）的常值函子。

（1）在偏序集范畴中，有向余极限是在底层集合的层面上构造的。它们与有限积可交换。
(2) 在 CPO 中，有向余极限存在，但并非在底层集合层面上构造。例如，有限序数 $A_n = \{0, \dots, n-1\}$构成一个有向图表，其连接映射为包含映射 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$，对应于 $n < \omega$。该图表在 CPO 中的余极限是

$$\mathbb{N}^\top = \operatorname*{colim}_{n<\omega} A_n,$$

添加了最大元 $\top$ 的自然数链。不过，在 CPO 中，有向余极限与有限积可交换:

定理 2.12. 在每个笛卡尔闭范畴 $\mathscr{C}$ 中，有向余极限与有限积可交换。

证明。
(1) 设 $D, D' \colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 为图表，其中 $\mathscr{D}$ 是一个有向偏序集。给定余极限余锥 $c_d \colon Dd \to C$ 和 $c'_d \colon D'd \to C$，我们的任务是证明，对于图表 $D \times D' \colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$（由$d \mapsto Dd \times D'd$给出），余锥 $c_d \times c'_d \colon Dd \times D'd' \to C \times C'$ 也是一个余极限。
(2) 定义图表 $D * D' \colon \mathscr{D} \times \mathscr{D} \to \mathscr{C}$，使得 $(d, d') \mapsto Dd \times D'd'$。我们将证明它具有余极限 $c_d \times c'_{d'} \colon Dd \times D'd' \to C \times C'$。这就证明了定理: 由于 $\mathscr{D}$ 是有向的，对角线 $\Delta : \mathscr{D} \to \mathscr{D} \times \mathscr{D}$ 是一个共终函子，因此 $D * D'$ 与 $D \times D' = (D * D') \cdot \Delta$ 具有相同的余极限。
(3) 给定 $D * D'$ 的余锥 $f_{d,d'} \colon Dd \times D'd' \to E$，我们证明它可经由 $c_d \times c'_{d'}$ 分解；容易验证该分解是唯一的。固定一个对象 $d' \in \mathscr{D}$，并对所有 $d \in \mathscr{D}$ 构造伴随转置 $\curlywedge f_{d,d'} \colon D'd' \to [Dd, E]$。它们构成 D 的一个余锥，因此存在唯一的分解经由余锥 c_d。$\widehat{\ }$也就是说，存在唯一的 $g_{d'} \colon D'd' \times C \to E$，使得 $f_{d,d'} = \widehat{g}_{d'} \cdot c_d$（对所有 $d \in \mathscr{D}$）。对于同构 $u \colon C \times D'd' \to D'd' \times C$，令 $h_{d'} = g_{d'} \cdot u \colon C \times D'd' \to E$，并对所有 $d' \in \mathscr{D}$ 构造伴随转置 $\curlywedge h_{d'} \colon D'd' \to [C, E]$。这是 D' 的一个余锥，因此存在唯一的分解经由余锥 $c'_{d'}$: 我们有 $\widehat{\ }$一个唯一的 $h \colon C \times C' \to E$，使得 $h'_{d'} = h \cdot c'_{d'}$（对所有 $d' \in \mathscr{D}$）。由此可知，h 是 $f_{d,d'}$ 所需的分解:

$$h \cdot (c_d \times c'_{d'}) = h \cdot (C \times c'_{d'}) \cdot (c_d \times C') = h_{d'} \cdot (c_d \times D'd') = f_{d.d'}.$$

□

例 2.13。（锥形）度量空间范畴和完备度量空间范畴中的有向余极限也存在。同样，它们并非在底层集合层面上构造的。例如，考虑度量空间图表 $A_n = \{0, 1\}$ with$d_n(0, 1) = 2^{-n}$，其中连接映射为 $\mathrm{id} \colon A_n \to A_{n+1}$ $(n < \omega)$。其余极限是一个单点空间。

定理 2.14。度量空间范畴或完备度量空间范畴中的有向余极限与有限积可交换。

证明概要。

(1) 对于度量空间范畴 Met 中的有向图表 $(D_i)_{i\in I}$，在 [8], 引理 2.4 中，我们用以下性质刻画了构成余极限的余锥 $c_i : D_i \to C$：

(a) $C = \bigcup_{i\in I} c_i[D_i]$，以及 (b) 对每个 $i \in I$，
给定 $y, y' \in D_i$，我们有

$$d(c_i(y), c_i(y')) = \inf_{j\geq i} d(f_j(y), f_j(y'))$$

其中 $f_j : D_i \to D_j$ 表示连接映射。
给定另一个有向图表 $(D'_i)_{i\in I}$，以及满足 (a) 和 (b) 的余锥 $c'_i : D'_i \to C'$，我们的任务是证明余锥$c_i \times c'_i : D_i \times D'_i \to C \times C'$ 也满足 (a) 和 (b)。由于 I是有向的，(a) 显然成立，而 (b) 只需简单计算即可。

(2) 对于 CMet 中的有向余极限，余极限余锥的刻画类似：(b) 保持不变，而在 (a) 中，表述为$\bigcup_{i\in I} c_i[D_i]$ 在 C中稠密。接下来的论证与 (1) 类似。

□

例 2.15。

(1) 在接下来的讨论中，Pos、CPO 或 DCPO 中一种重要的加权余极限是余等化子。设 $f_0, f_1 : A \to B$ 是一个有序平行对。其余等化子是满足性质 $c \cdot f_0 \sqsubseteq c \cdot f_1$ 的泛态射$c : B \to C$。泛性质意味着：(a) 每个满足 $c' \cdot f_0 \sqsubseteq c' \cdot f_1$ 的态射 c' 都可经由 c 分解；(b) 给定 $u, v : C \to D$ 且 $u \cdot c \sqsubseteq v \cdot c$，可推出 $u \sqsubseteq v$。对于 Pos，这恰好是图表 $D : \mathscr{D} \to$ Pos 的加权余极限，其中 $\mathscr{D}$ 由一个平行对 $\delta_0, \delta_1 : d \to \overline{d}$ 构成（其中 $\mathscr{D}(d, \overline{d})$ 是离散偏序集），且 $D\delta_i = f_i$。权 $W : \mathscr{D}^{op} \to$ Pos 由 $W\overline{d} = \{0, 1\}$ 给出，其中 $0 < 1$, $Wd = \{*\}$ 且 $W\delta_i(*) = i$。对于 CPO 或 DCPO，情况类似。

（2）一个具体例子：每个偏序集 C 都是离散偏序集之间一个平行对的余等化子。事实上，令 $|C|$ 为 C 的底层离散偏序集，并令 $C^{(2)} \subseteq |C| \times |C|$ 为 C 中所有形如 $x_0 \sqsubseteq x_1$ 的有序对所组成的集合。对于投影对 π_0、$\pi_1 : C^{(2)} \to |C|$，其余等化子为 id : $|C| \to C$。CPO 和 DCPO 的情形类似。

定义 2.16. 若 c 是 f_0, f_1 的余等化子，且 c 是满射映射，则称其为满射的。若 f_0, f_1 是自反的，即它们是具有共同分裂 d ($f_0 \cdot d = f_1 \cdot d =$ id)的分裂满态射，则称其为自反的。

例 2.17. 例 2.15 (2) 中的余等化子是自反的且为满射。在偏序集范畴中，所有余等化子都是满射的；而在 CPO 中通常并非如此。

命题 2.18。在偏序集范畴 Pos、CPO 和 DCPO 中，自反余等化子与有限积可交换。

证明与定理 2.12 的证明类似。

类似于通过离散 cpo 的余等化子得到所有连续偏序集，我们现在在度量空间范畴 Met 中引入图表的加权余极限，这些图表称为预同余（名称借自 [14]）。它们将每个度量空间表示为离散空间的余极限。（不过，预同余所用的权并非离散的。）

在以下定义中，$|M|$ 表示度量空间 M的底层集合（视为离散度量空间）。

定义 2.19。

(1) 我们将基本权 $W_0\colon \mathscr{D}_0^{op} \to$ Met 定义如下。范畴 $\mathscr{D}_0$ 有一个对象 a，并且对每个有理数$\varepsilon > 0$都有对象 ε。唯一非平凡的同态空间是这些空间

$$\mathscr{D}_0(\varepsilon, a) = \{\lambda_\varepsilon, \rho_\varepsilon\} \text{ with } d(\lambda_\varepsilon, \rho_\varepsilon) = \varepsilon$$

因此，$\mathscr{D}_0$ 由正有理数构成的离散范畴以及一对余锥（其余锥对象为 a）组成。W_0 的取值为 $W_0a = \{0\}$ 和 $W_0\varepsilon = \{l, r\}$，其中 $d(l, r) = \varepsilon$。态射 $W_0\lambda_\varepsilon, W_0\rho_\varepsilon\colon \{0\} \to \{l, r\}$ 分别由 $0 \mapsto l$、$0 \mapsto r$ 给出。

(2) 对每个度量空间 M，我们将其预同余定义为加权图表 $D_M\colon \mathscr{D}_0 \to$ Met，其基本权为 W_0，其中 $D_Ma = |M|$，而 $D_M\varepsilon \subseteq |M| \times |M|$是所有距离至多为$\varepsilon$的点对构成的集合。这里，$D\lambda_\varepsilon, D\rho_\varepsilon\colon D_M\varepsilon \to |M|$分别是左投影和右投影。

命题 2.20. 每个度量空间 M 都是度量空间范畴 Met 中其预同余的加权余极限。

证明. 给定一个空间 X，要给出一个自然变换 $\tau\colon W_0 \to [D_M-, X]$，需要指定一个映射 $f = \tau_a(0)\colon |M| \to X$，以及$\tau_\varepsilon(l)\ \tau_\varepsilon(r)\colon D_M\varepsilon \to X$，其中 $\tau_\varepsilon(l) = f \cdot \pi_l$且 $\tau_\varepsilon(r) = f \cdot \pi_r$。因此，$\tau$由 f 确定，而给定的方程等价于 $f\colon M \to X$是不扩张的。定义 2.10 中所需的同构 ψ_X 由 $\psi_X(\tau) = f$给出。□

注 2.21. 类似地，我们在完备度量空间范畴 CMet 中定义预同余：只需使用余域限制 $W_0\colon \mathscr{D}_0^{op} \to$ CMet 和 $D_M\colon \mathscr{D}_0 \to$ CMet。同样，每个完备空间都是完备度量空间范畴 CMet 中其预同余的加权余极限。

注记 2.22。

(1) 设 $C = \mathrm{colim}_W D$ 是 D 的一个加权余极限：$\mathscr{D} \to \mathscr{C}$，其单位为 ν：$W \to \mathscr{C}(D-, C)$。给定一个（富集）函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$，如果图表 FD：$\mathscr{D} \to \mathscr{C}'$（其权为 W）具有余极限 $\mathrm{colim}_W FD = FC$，且其单位 $\overline{\nu}$：$W \to \mathscr{C}'(FD-, FC)$ 的分量为 $\overline{\nu}_d = F\nu_d$，那么该函子保留此余极限。

(2) 如果一个函子保持有向余极限，则称它为有限元的。

例 2.23。

(1) 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，Met 或 CMet 上的自函子 $(-)^n$ 都保持预同余关系的余极限。这一点很容易验证。根据例 2.13，$(-)^n$ 是有限元的。

(2) 根据命题 2.18，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，CPO 或 Pos 上的自函子 $(-)^n$ 都保持自反的余等化子，并且根据定理 2.12，它是有限元的。

我们来回顾函子 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 沿着函子 $K\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的（富集）左 Kan 延拓 [16] 的概念：它是一个自函子 $\mathrm{Lan}_K F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$，并带有一个普适自然变换 $\tau\colon F \to (\mathrm{Lan}_K F) \cdot K$。其普适性质指出，给定任意自函子 $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 的自然变换 $\sigma\colon F \to G \cdot K$，存在唯一的自然变换 $\overline{\sigma} : \mathrm{Lan}_K F \to G$，使得 $\sigma = \overline{\sigma} K \cdot \tau$。

定义 2.24. 若自函子 F of $\mathscr{V}$ 是其限制 $F \cdot K$ to Set_f 的左 Kan 延拓，则称其为强有限元的：

$$F = \mathrm{Lan}_K(F \cdot K)$$

（参见记号 2.4）。

例 2.25.

(1) Set 上的自函子是强有限元的，当且仅当它是有限元的。(2) Pos 上的自函子是强有限元的，当且仅当它是有限元的且保留自反余等化子，参见 [3]。

为了刻画 $\mathscr{V}$ =CPO、DCPO、度量空间范畴和完备度量空间范畴上的强有限性，我们将应用 Kelly 的稠密表示概念，现予以回顾。

记号 2.26. 设 $K\colon \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 为一个函子。我们用 $\widetilde{K}\colon \mathscr{C} \to [\mathscr{A}^{op}, \mathscr{V}]$ 表示函子 $KC = \mathscr{C}(K-, C)$。

例如，函子 $K : \mathrm{Set}_\mathrm{f} \to \mathrm{CPO}$ 诱导出 $\widetilde{K} : \mathrm{CPO} \to [\mathrm{Set}^{op}_\mathrm{f}, \mathrm{CPO}]$，它将一个 cpo C 映射为函子 $C^{(-)} : \mathrm{Set}^{op}_\mathrm{f} \to \mathrm{CPO}$，该函子取 C 的有限次幂。对于 $K : \mathrm{Set}_\mathrm{f} \to \mathrm{Met}$，情况类似。

定义 2.27（[16]）。函子 $K : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的稠密表示，是 $\mathscr{C}$ 中的一组加权余极限，满足

(1) K 保持这些余极限，且 (2) $\mathscr{C}$ 是像 $\widetilde{K}[\mathscr{A}]$ 在这些余极限下的（迭代）闭包。

例 2.28。

(a) $K : \mathsf{Set}_f \to$ 偏序集范畴具有一个由有向余极限和自反余等化子组成的稠密表示。事实上，上述定义中的条件（2）由例 2.15 (2) 得出：每个有限偏序集都是 Set_f 中一对态射的余等化子。并且每个偏序集都是有限子偏序集的有向余极限。对于条件（1），注意到 K : 偏序集范畴 $\to$[$\mathsf{Set}^{op}{}_f$ ·偏序集范畴将每个偏序集 A 映射为其有限幂的函子 $A^{(-)} : \mathsf{Set}^{op}{}_f \to$偏序集范畴。该函子保持有向余极限（命题 2.12）和自反余等化子（例 2.23）。

(b) $K : \mathsf{Set}_f \to \mathsf{CPO}$ 也有一个由有向余极限和自反余等化子组成的稠密表示。这里，条件（1）如上所述，利用命题 2.12 和例 2.23 得以验证。为验证条件（2），我们分四步从 Set_f 出发，表示每个连续偏序集：

(i) 每个有限连续偏序集都是 Set_f 中某个平行对的自反余等化子（例 2.15 (2)）。(ii) 连续偏序集 $\mathbb{N}^\top$ 是有限连续偏序集 A_n 的有向余极限（例 2.11 (2)）。类似地，r 个 $r \in \mathbb{N}$ 的余幂 $r \bullet \mathbb{N}^\top$ 是 $r \bullet A_n$ 的有向余极限，其中 $n < \omega$。(iii) 在这一步中，我们为所有 r、$r' \in \mathbb{N}$ 构造所有由一对 f_0、f_1 组成的自反余等化子 $C : r \bullet \mathbb{N}^\top \to r' \bullet \mathbb{N}^\top$。这样的连续偏序集 C 称为基本连续偏序集。(iv) 证明的最后一步是证明，每个连续偏序集 A 都是由其所有基本子连续偏序集 A_i 组成的图表的有向余极限 $i \in I$。事实上，该图表是有向的，这显然是因为两个基本连续偏序集的余积仍然是基本的。给定一个余锥 $s_i : A_i \to S$，我们要证明存在唯一的连续映射 $s : A \to S$，使其延拓每个 s_i。对于每个 $x \in A$，子偏序集 $\{x\}$ 显然是基本的。因此，给定满足 $x \in A_i$ 的 i，值 $s_i(x)$ 与 i 无关。这很容易由余锥 s_i 的相容性推出。所需的映射定义为 $s(x) = s_i(x)$。验证 s 连续稍微复杂一些。

注 2.29。

（1）上一个例子的步骤（i）和（iii）中所使用的自反余等化子都是满射的。因此，$K : \mathsf{Set}_f \to \mathsf{CPO}$ 也具有由有向余极限以及自反的满射余等化子组成的稠密表示。（2）函子 $K : \mathsf{Set}_f \to \mathsf{DCPO}$ 也具有由所有有向余极限和自反（满射）余等化子组成的稠密表示。证明与 CPO 的情形相同：上一个例子中使用的所有连续偏序集确实都是有向完备偏序集。

推论 2.30. CPO 或 DCPO 上的自函子是强有限元的，当且仅当它保有向余极限和自反（满射）余等化子。

事实上，根据 [16], 定理 5.29，给定 $K : \mathsf{Set}_{\mathsf{f}} \to \mathbf{CPO}$ 的稠密表示，强有限性恰好意味着保留该表示中的所有余极限。同一推论在 DCPO 中也成立。

例 2.31. 范畴 Met 和 CMet 有一个稠密性表示 K，由所有有限空间的有向图表和预同余组成。事实上，条件（1）由例 2.13 和 2.23（1）得出。对于条件（2），注意到根据引理 2.20，有限度量空间可由 $\mathsf{Set}_{\mathsf{f}}$ 作为预同余的余极限得到；并且在 Met（或分别在 CMet）中，每个（完备）度量空间都是其所有有限子空间的有向余极限。

推论 2.32. Met 或 CMet 上的自函子是强有限元的，当且仅当它保有向余极限和预同余的余极限。

例 2.33. Met、CMet、CPO 或 DCPO 上，任何由 n 有限个自函子 $-^n$ 构成的余积 $-^n$ 都是强有限元的。事实上，强有限元函子对余积封闭，这直接由定义可得。

3. Varieties of Quantitative Algebras

现在我们证明，度量空间范畴 Met 和完备度量空间范畴 CMet 上的定量代数簇与强有限单子一一对应。后者是由强有限元自函子承载的单子。本节中，$\Sigma = (\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示一个签名，V 表示一个指定的可数变量集。

记号 3.1。
(1) 按照 Mardare、Panangaden 和 Plotkin 的定义，[21], 定量代数是一个度量空间 A，并且对每个 $\sigma \in \Sigma_n$ 都配备一个非扩张运算 $\sigma_A : A^n \to A$（相对于上确界度量，见例 2.3）。我们用 Σ-Met 表示定量代数及其非扩张同态所构成的范畴。其遗忘函子记作 $U_\Sigma : \Sigma\text{-Met} \to \mathbf{Met}$。(2) 类似地，完备定量代数是由完备度量空间承载的定量代数。范畴 Σ-CMet 是 Σ-Met 的相应全子范畴。遗忘函子仍记作 $U_\Sigma : \Sigma\text{-CMet} \to \mathbf{CMet}$。(3) 度量空间 M 的底层集合记作 $|M|$。

例 3.2. (1) 度量空间 M 上的自由定量代数，是变量 M 上项的通常代数 $T_\Sigma M$。也就是说，它是包含 $|M|$ 的最小集合，并且对于每个 n 元符号 σ 和每个由项 t_i $(i < n)$ 构成的 n 元组，我们得到一个复合项 $\sigma(t_i)_{i<n}$。为了描述度量，我们引入 $T_\Sigma M$ 上的等价关系 $\sim$（项的相似性）：它是使 $|M|$ 的所有变量属于同一个等价类的最小等价关系，并且满足 $\sigma(t_i)_{i<n} \sim \sigma'(t'_i)_{i<n}$

当且仅当 $\sigma = \sigma'$ 且对所有 $i < n$ 都有 $t_i \sim t'_i$ 时成立。$T_\Sigma M$ 上的度量按如下方式扩展 M 上的度量：若 t 与 t' 不相似，则 $d(t,t') = \infty$。对于相似的项 $t = \sigma(t_i)$ 和 $t' = \sigma(t'_i)$，令 $d(t,t') = \sup_{i<n} d(t_i,t'_i)$。

(2) 若 M 是完备空间，则 $T_\Sigma M$ 也完备，并且它是 M 在 Σ-完备度量空间范畴中的自由定量代数。

特别地，将指定的变量集 V 视为离散度量空间，则 $T_\Sigma V$就是通常项构成的离散代数。对于每个代数 A 以及每个变量解释 f：$V \to A$ （在度量空间范畴或完备度量空间范畴中），我们用 $f^\sharp$：$T_\Sigma V \to A$ 表示相应的同态：它将项解释为 A中的元素。

定义 3.3（[21]）。定量方程（又称 1-基本定量方程）是指如下形式表达式：$t =_\varepsilon t'$，其中 t、t' 是 $T_\Sigma V$ 中的项，$\varepsilon \geq 0$ 是一个有理数。代数 A在Σ-度量空间范畴（或 Σ-完备度量空间范畴）中满足该方程，若对每个解释f：$V \to A$，都有 $d(f^\sharp(t)\ f^\sharp(t')) \leq \varepsilon$。在 $\varepsilon = 0$的情况下，我们记作 $t = t'$。

所谓定量（或完备定量）代数的簇，即 1-基本簇，是指由一组定量方程刻画的 Σ-度量空间范畴（或分别为 Σ-完备度量空间范畴）的全子范畴。

例 3.4。

（1）定量幺半群由通常的签名给出：一个二元符号 $\cdot$ 和一个常元 e，以及通常的方程：$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$、$e \cdot x = x$ 和 $x \cdot e = x$。（2）近似交换幺半群是定量幺半群，其中 ab 和 ba 的距离始终至多为 1。它们由定量方程 $x \cdot y =_1 y \cdot x$ 给出。

命题 3.5（见 [21]）。每个定量代数的簇 $\mathcal{V}$ 都有自由代数：遗忘函子 $U_\mathcal{V} : \mathcal{V} \to$ 度量空间范畴具有一个左伴随 $F_\mathcal{V}$: 度量空间范畴 $\to \mathcal{V}$。

记号 3.6. 我们用 $\mathbf{T}_\mathcal{V}$ 表示度量空间范畴 Met 上一个簇$\mathcal{V}$的自由代数单子。其底层函子为 $T_\mathcal{V} = U_\mathcal{V} \cdot F_\mathcal{V}$。

例 3.7. 对于 $\mathcal{V} = \Sigma$-Met，我们在例 3.2 中见过单子 T_Σ： $T_\Sigma M$ 是由 M上的所有项构成的度量空间。注意，T_Σ是自函子 $(-)^n$的余积，每个加项对应于 M 上关于 n 个变量的一个项相似类（这与选择M无关）。因此，$\mathbf{T}_\Sigma$ 是一个强有限单子：见例 2.33。

注 3.8.

(1) 回顾比较函子 $K_\mathcal{V}$： $\mathcal{V} \to$ 度量空间范畴$^{\mathbf{T}_\mathcal{V}}$：它将每个代数 A 赋予一个定义在 $U_\mathcal{V}A$ 上的、对应于 $\mathbf{T}_\mathcal{V}$ 的代数，该代数由唯一的同态 α： $F_\mathcal{V}U_\mathcal{V}A \to A$ 延拓 $\mathrm{id}_{U_\mathcal{V}A}$ 给出。更确切地说：$K_\mathcal{V}A = (U_\mathcal{V}A, U_\mathcal{V}\alpha)$。

（2）度量空间范畴上的具体范畴，指的是一个范畴连同一个忠实的“遗忘”函子 $U_\mathcal{V}$： $\mathcal{V} \to$度量空间范畴。例如，一个簇，

或者对于每个单子 T 都有度量空间范畴$^{\mathbf{T}}$ 。具体函子是一个函子 $F:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$，满足 $U_{\mathcal{V}}=U_{\mathcal{W}}F$。例如，比较函子 $K_{\mathcal{V}}$。

命题 3.9. 每个定量代数簇 $\mathcal{V}$ 都与范畴 Met$^{\mathbf{T}_{\mathcal{V}}}$具体同构：比较函子 $K_{\mathcal{V}}:\ \mathcal{V}\to$Met$^{\mathbf{T}_{\mathcal{V}}}$ 是一个具体同构。

证明. 对于经典代数簇（在 Set 上），这一点已在 [20], Theo- rem VI.8.1 中证明。将 Set 换成 Met 后，证明过程类似。□

记号 3.10. (1) 给定一个自然数 n，记 $[n]$ 为一个 n-元符号 δ的签名。若一个项 $t\in T_\Sigma V$ 至多包含 n 个变量（例如，x_0、……、x_{n-1}），我们便得到一个单子态射$\overline{t}:\mathsf{T}_{[n]}\to\mathsf{T}_\Sigma$，定义如下。对于每个空间 M，函数 $\overline{t}_M$ 取一个使用唯一符号 δ 的项 s，并将其中每次出现的 δ替换为 $t(x_0$、……、$x_{n-1})$。

(2) 每个度量空间 A 都定义一个单子 $\langle A,A\rangle$，它将 Met 中的$X\in$ 赋为度量空间 $\langle A,A\rangle X=[[X,A],A]$。更准确地说：函子 $[-,A]:$ Met $\to$Met^{op} 是自伴的，而 $\langle A,A\rangle$ 是与该伴随对应的单子。

(3) 设 T 是 Met 上的一个单子，且 $\alpha:\ TA\to A$ 是它的一个代数。我们用 $\widehat{\alpha}_X:\ TX\to\langle A,A\rangle X$ 表示与下列复合相伴的态射

$$[X,A]\otimes TX\xrightarrow{T(-)\otimes TX}[TX,TA]\otimes TX\xrightarrow{ev}TA\xrightarrow{\alpha}A.$$

定理 3.11 ([15]). 给定 Met 上单子 T 的一个代数 $\alpha:\ TA\to A$，上文的态射 $\widehat{\alpha}_X$ 构成一个单子态射 $\widehat{\alpha}:\mathsf{T}\to\langle A,A\rangle$。从 T 到 $\langle A,A\rangle$ 的每个单子态射都具有这种形式，且对应唯一的 α。

引理 3.12. 设 A 是 Met$^{\mathbf{T}_\Sigma}$ 中由 $\alpha:\ T_\Sigma A\to A$ 表示的一个 Σ-代数。当且仅当 $\mathsf{T}_{[n]}\to\langle A,A\rangle$ 中$\widehat{\alpha}\cdot\overline{l},\widehat{\alpha}\cdot\overline{r}$的距离至多为 ε 时，它满足定量方程 $l=_\varepsilon r$。

记号 3.13。Met 上有限元单子（及单子态射）所成的范畴记为 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{f}}$(Met)。其强有限单子所成的全子范畴记为 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{sf}}$(Met)。我们还用 Mon_c(Met) 表示保持可数有向余极限的单子所成的范畴。

引理 3.14。范畴 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{f}}$(Met) 存在加权余极限，而 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{sf}}$(Met) 对这些余极限封闭。

证明概要。（1）范畴 Mon_c(Met) 是局部可数可呈的富集范畴，因此存在加权余极限，并且

(2) $\mathsf{Mon}_{\mathsf{f}}$(Met) 和 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{sf}}$(Met) 都是 Mon_c(Met) 的余反射子范畴。可数可及单子 T 在 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{sf}}$(Met) 中的余反射由左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}_K(T\cdot K)$ 给出；对于 $\mathsf{Mon}_{\mathsf{f}}$(Met}，情况类似。

□

引理 3.15. 度量空间范畴 $\mathbf{Mon}_{\mathrm{f}}(\mathbf{Met})$ 中的每个单子态射 $\alpha : \mathsf{T}_\Sigma \to \mathsf{S}$ 都可分解为一个分量为满射的态射 $\mathsf{T}_\Sigma \to \mathsf{S}$，后接一个分量为等距嵌入的态射 $\mathsf{S} \to \mathsf{S}$。

定理 3.16. 对于每个由定量代数构成的簇 $\mathcal{V}$，其自由代数单子 $\mathsf{T}_\mathcal{V}$ 都是强有限元的。

证明概要。

(1) 设 $\mathcal{V}$ 由签名 Σ 和定量方程 $l_i =_\varepsilon r_i (i \in I)$给出，其中每个方程都含有 n_i 个变量。对于每个 $i \in I$，我们考虑签名 $[n(i)]$，它只有一个元数为 $n(i)$的符号 δ_i；于是，项 l_i、r_i 给出记号 3.10 中相应的单子态射 $\overline{l}_i, \overline{r}_i : \mathsf{T}_{[n(i)]} \to \mathsf{T}_\Sigma$。代数 $\alpha : T_\Sigma A \to A$ 属于 $\mathcal{V}$，当且仅当对于每个 i，$\widehat{\alpha} \cdot \overline{l}_i, \widehat{\alpha} \cdot \overline{r}_i : \mathsf{T}_{[n(i)]} \to \langle A, A \rangle$ 的距离至多为 ε_i（引理 3.12）。

(2) 我们验证 $\mathsf{T}_\mathcal{V}$ 是 $\mathbf{Mon}_{\mathrm{f}}(\mathbf{Met})$ 中强有限单子的一个加权余极限。加权图表 $D : \mathscr{D} \to \mathbf{Mon}_{\mathrm{f}}(\mathbf{Met})$ 的定义域 $\mathscr{D}$ 是离散范畴 I（以这些方程为指标），再添入一个新对象 a以及对于每个 $i \in I$的态射 $\lambda_i, \rho_i : i \to a$。然后令 $D_i = \mathsf{T}^{[n(i)]}$ 和 $Da = \mathsf{T}_\Sigma$；此外还有 $D\lambda_i = \overline{l}_i$和 $D\rho_i = \overline{r}_i$。权 $W : \mathscr{D}^{op} \to \mathbf{Met}$ 将 i 映到空间 $\{l, r\}$，其 $d(l, r)$ 为 $= \varepsilon_i$，并将 a 映到 $\{0\}$。我们定义 $W\lambda_i(0) = l$和$W\rho_i(0) = r$。单子 T_Σ 和 $\mathsf{T}^{[n(i)]}$ 根据例 3.7 是强有限元的。由引理 3.14 即可完成证明。

我们将 T 记为 $\mathbf{Mon}_{\mathrm{f}}(\mathbf{Met})$ 中的加权余极限 $\mathsf{T} = \mathrm{colim}_W D$。证明的最后一步是证明，作为具体范畴，$\mathcal{V}$ 与 T 的代数范畴 $\mathbf{Met}^{\mathbf{T}}$ 同构。于是 T 是 $\mathcal{V}$的自由代数单子。对于 T，我们有加权余极限 $\mathsf{T} = \mathrm{colim}_W D$（定义 2.10）的单位 $\gamma : W \to [\![D -]\!]$。其分量 ν_a 将 0 映为单子态射$\gamma = \nu_a(0) : \mathsf{T}_\Sigma \to \mathsf{T}$；而对于 $i \in I$，分量 ν_i 由$l \mapsto \gamma \cdot \overline{l}_i$和 $r \mapsto \gamma \cdot \overline{r}_i$给出。由于 ν_i不扩张，我们得出 $\gamma \cdot \lambda_i, \gamma \cdot \overline{\rho}_i : \mathsf{T}_{[n(i)]} \to \mathsf{T}$ 的距离至多为 ε_i。由此得到函子 $E : \mathbf{Met}^{\mathbf{T}} \to \mathcal{V}$，它将每个代数 $\alpha : TA \to A$ 映为与 $\alpha \cdot \gamma_A : T_\Sigma A \to A$ 对应的Σ-代数：由 $d(\gamma \cdot \overline{\lambda}_i, \gamma \cdot \overline{\rho}_i) \leq \varepsilon_i$可知，它满足 $l_i =_{\varepsilon_i} r_i$。此外，$\gamma$具有满射分量，这可由引理 3.15 得出。因此，$E$ 是一个具体同构，证明至此完成。

□

构造 3.17。反过来，对于 $\mathbf{Met}$ 上每个强有限单子 $\mathsf{T} = (T, \mu, \eta)$，我们赋予它一个簇 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$，并证明 T 是其自由代数单子。对于每个态射 $k : X \to Y$，记相应的 $\mathbf{Met}^{\mathbf{T}}$ 中的同态为 $k^* = \mu_Y \cdot Tk : TX \to TY$。回想一下我们固定的变量集 $V = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$ 构造有限离散空间 $V_n = \{x_i \mid i < n\}$。

我们使用的签名以空间 TV_n:$\Sigma_n = |TV_n|$ 的元素作为 n-元符号，其中 $n \in \mathbb{N}$。簇 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 由以下定量方程给出，其中每个符号 $\sigma \in \Sigma_n$ 都被视为项$\sigma(x_1, \ldots, x_{n-1})$，而下文中的 n, m 遍历 $\mathbb{N}$:

(1) $\sigma =_\varepsilon \sigma'$ 对所有 σ、$\sigma' \in \Sigma_n$ 及满足 $d(\sigma, \sigma') \leq \varepsilon$ 属于 TV_n的情形;
(2) 对所有 $\sigma \in \Sigma_n$ 以及所有映射 $k\colon\ V_n \to \Sigma_m$，$k^*(\sigma) = \sigma(k(x_i))_{i<n}$；
(3) 对所有 $i = 0$、……、$n-1$，$\eta_{V_n}(x_i) = x_i$。

引理 3.18. 每个代数 $\alpha\colon\ TA \to A$ in 度量空间范畴$\mathbf{T}$ 都产生一个代数A in $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$，其运算 $\sigma_A\colon\ A^n \to A$ 定义为：对于所有 $\sigma \in \Sigma_n$ 和 $a\colon\ V_n \to A$，$\sigma_A(a(x_i)) = a^*(\sigma)$。此外，度量空间范畴$\mathbf{T}$中的每个同态也是相应代数在 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 中的一个 Σ-同态。

证明概要。(1) 运算 σ_A 是不扩张的，因为 T 在局部是不扩张的。它满足构造 3.17 中的 1)，因为对于每个解释 $a\colon\ V_n \to A$，我们都有 $d(a^*(l)\ a^*(r)) \leq \varepsilon$。由 $a^* \cdot k^* = (a^* \cdot k)^*$可推出满足 2)，而 3) 显然也得到满足。因此，Σ-代数 A属于 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$。
(2) 给定 Met 中的态射 $h\colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$（即 $h \cdot \alpha = \beta \cdot Th$），我们要证明，对于所有 $\sigma \in TV_n$，都有 $h \cdot \sigma_A = \sigma_B \cdot h^n$。由 $h \cdot a^* = (h \cdot a)^*$，对每个 a，可轻易推出：$V_n \to A$。

□

定理 3.19. Met 上的每个强有限元单子 T 都是簇 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 的自由代数单子。

证明. 对每个度量空间 M，我们要证明，引理 3.18 中与 (TM, μ_M) 关联的 Σ-代数相对于泛映射 η_M，是 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 中的自由代数。于是由命题 3.9 可得该定理。

我们有两个强有限元单子：T 和 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 的自由代数单子（定理 3.16）。因此，只需对有限离散空间 M 证明上述结论。由于有 $M = $ 余极限$_{W_0} D_M$（引理 2.20），且两个单子都保持该余极限，这一结论便可推广到所有有限空间。它们在所有有限离散空间上相同，因此在 M 上也相同。最后，上述结论可推广到所有空间 M：由所有有限子空间 M_i $(i \in I)$ 构成的图表有一个有向余极限 $M =$余极限$_{i \in I} M_i$，而两个单子都保持该余极限。

给定有限离散空间 M，不失一般性，我们可以假设 $M = V_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$。对于 $\mathcal{V}_{\mathbf{T}}$ 中的每个代数 A 以及一个解释 $f\colon\ V_n \to A$，我们证明存在唯一的 Σ-同态 $\overline{f}\colon\ TV_n \to A$，满足 $f = \overline{f} \cdot \eta_{V_n}$。

存在性：对每个 $\sigma \in TV_n$，定义 $\overline{f}(\sigma) = \sigma_A(f(x_i))_{i<n}$。等式 $f = \overline{f} \cdot \eta_{V_n}$ 成立，因为 A 满足方程 $\eta_{V_n}(x_i) = x_i$，因此与 $\eta_{V_n}(x_i)$ 对应的 A 的运算是第 i 个投影。映射 $\overline{f}$ 是不扩张的：给定 $d(l, r) \leq \varepsilon$，代数 A 满足 $l =_\varepsilon r$。

因此，给定一个 n-元组 $f\colon\ V_n \to A$，我们有

$$d(l_A(f(x_i)), r_A(f(x_i))) \leq \varepsilon.$$

为证明 $\overline{f}$ 是一个 Σ-同态，取一个 m元运算符号$\tau \in TV_m$。我们证明 $\overline{f} \cdot \tau_{V_m} = \tau_A \cdot \overline{f}^m$。这意味着每个 $k\colon\ V_m \to TV_n$ 都满足

$$\overline{f} \cdot \tau_{V_m}(k(x_j))_{j<m} = \tau_A \cdot \overline{f}^m(k(x_j))_{j<m}.$$

$\overline{f}$的定义表明，右边为 $\tau_A(k(x_j)_A(f(x_i)))$。根据构造 3.17 中的方程 (2)，以 σ 替换 τ，可得$k^*(\tau)_A(f(x_i))$。左边得到相同结果，因为

$$\overline{f}^m(k(x_j)) = (k(x_j))_A(f(x_i)).$$

唯一性：设 $\overline{f}$ 是一个不扩张的 Σ-同态，且满足 $f = \overline{f} \cdot \eta_{V_n}$。在 TV_n 中，运算 σ 将值 σ赋给 $\eta_{V_n}(x_i)$。（事实上，对于每个 $a\colon\ n \to |TV_n|$，我们都有 $\sigma_{TV_n}(a_i) = a^*(\sigma) = \mu_{V_n} \cdot Ta(\sigma)$。因此$\sigma_{TV_n}(\eta_{V_n}(x_i)) = \mu_{V_n} \cdot T\eta_{V_n}(\sigma) = \sigma^n$。）由于 $\overline{f}$是一个同态，我们得出

$$f(\sigma) = \sigma_A(\overline{f} \cdot \eta_{V_n}(x_i)) = \sigma_A(f(x_i))$$

这就是上面的公式。

□

推论 3.20. 定量代数的簇与度量空间范畴 Met 上的强有限单子一一对应，且对应关系在同构意义下成立。

事实上，可以从定理 3.16 和 3.19 推导出一个更强的结果：令 Var(Met) 表示定量代数簇与具体函子的范畴（注 3.8）。回顾一下，$\mathbf{Mon}_{\mathrm{sf}}$(Met) 表示强有限单子的范畴。

定理 3.21. 定量代数簇的范畴 Var(Met) 等价于度量空间范畴 Met 上强有限单子范畴 $\mathbf{Mon}_{\mathrm{sf}}$(Met) 的对偶。

证明。$\mathbf{Mon}_{\mathrm{sf}}$(Met) 中单子之间的态射 $\varphi : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$ 与具体函子 $\overline{\varphi}\colon \mathbf{Met}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Met}^{\mathbf{S}}$ 一一对应（[12], 定理 3.3）：$\overline{\varphi}$ 将 $\mathbf{Met}^{\mathbf{T}}$ 的一个代数 $\alpha\colon\ TA \to A$ 赋予 $\mathbf{Met}^{\mathbf{S}}$ 中的代数$\alpha \cdot \varphi_A\colon\ SA \to A$。我们知道，对于每个簇 $\mathcal{V}$，比较函子都是可逆的（命题 3.9）。由此得到一个函子 $\Phi : \mathbf{Var(Met)}^{op} \to \mathbf{Mon}_{\mathrm{sf}}\mathbf{(Met)}$，它将簇 $\mathcal{V}$ 映射为单子 $\mathbf{T}_{\mathcal{V}}$（定理 3.16）。给定簇之间的具体函子 $F\colon\ \mathcal{V} \to \mathcal{W}$，存在唯一的单子态射 $\varphi : \mathbf{T}_{\mathcal{W}} \to \mathbf{T}_{\mathcal{V}}$，使得$\overline{\varphi} = K_{\mathcal{W}} \cdot F \cdot K_{\mathcal{V}}^{-1} : \mathbf{Met}^{\mathbf{T}_{\mathcal{V}}} \to \mathbf{Met}^{\mathbf{T}_{\mathcal{W}}}$。我们定义 $\Phi F = \varphi$，并得到一个显然是满且忠实的函子。因此，定理 3.19 表明，Φ 是范畴等价。□

本节的全部论述在 Σ-CMet 中同样适用，也适用于 CMet。首先注意，对于每个完备空间 M，例 3.2 中的空间 $T_\Sigma M$ 也是完备的（因为它是 M 的有限次幂的余积）。由此得到的 CMet 上的单子 T_Σ 是强有限单子（如例 3.7）。更一般地，每个完备定量代数簇 $\mathcal{V}$ 都会导出 CMet 上的一个强有限单子 $\mathsf{T}_\mathcal{V}$，且 $\mathcal{V}$ 同构于 $\mathbf{Met}^{\mathbf{T}_\mathcal{V}}$。其证明与定理 3.16 的证明类似，只是在最后，我们使用的不是 Met 的分解系统（满射、等距嵌入），而是 CMet 的分解系统：先是稠密态射 $f\colon A \to B$（B 的每个元素都是 $f[A]$ 中某个序列的极限），随后是闭等距嵌入。证明 CMet 上的每个强有限单子都是某个簇的自由代数单子，与定理 3.19 的证明完全类似。因此我们得到

定理 3.22。完备定量代数簇的范畴 Var(CMet) 等价于 CMet 上强有限单子的范畴 $\mathbf{Mon}_{\mathsf{sf}}$(CMet) 的对偶。

4. Varieties of Continuous Algebras

对于偏序集范畴 Pos、CPO 和 DCPO，我们在此处以及第 5 节中得到相同的结果：代数簇与强有限单子一一对应。我们已在 [3] 中证明了 Pos 的情形。下文给出的 CPO 证明与 [3] 中以及上一节中的证明截然不同。事实上，方程的概念本身就完全不同，因为它使用了由项集合 t_0、t_1、t_2 等构成的形式并 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$。这种形式并的思想源自 [7],，但我们的概念略为严格：我们要求所有项 t_i 仅包含有限集的变量。我们再次假设 Σ 是有限元签名，并且已选定一个可数变量集 V。CPO M 的底层集合记作 $|M|$。

定义4.1. 连续代数是一个 CPO A，其上赋有连续运算 $\sigma_A\colon A^n \to A$，对每个 n 元符号 $\sigma \in \Sigma$ 均如此（关于 A^n 上的逐坐标序）。我们将连续代数及连续同态构成的范畴记作 Σ-CPO。

例 4.2. CPO M 上的自由连续代数是通常的项代数 $T_\Sigma M$，其变量取自 $|M|$（比较例 3.2），并赋予如下序 $\sqsubseteq$，该序扩展了 M 上的序：$t \sqsubseteq t'$ 当且仅当 t 和 t' 相似，$t = \sigma(t_i)_{i<n}$，$t' = \sigma(t'_i)_{i<n}$，并且对每个 $i < n$ 都有 $t_i \sqsubseteq t'_i$。

特别地，将 V 视为离散 cpo（不同元素之间不可比较），则 $T_\Sigma V$ 就是通常项构成的离散 cpo。对于每个连续代数 A 以及变量的每种解释 $f\colon V \to A$，我们仍用 $f^\sharp\colon T_\Sigma V \to A$ 表示相应的同态。正如前面提到的，通常项不足以用于

方程表示：我们需要项的形式并。我们用符号 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}$ 表示它们，而 $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}$ 表示给定偏序集中的 ω-上确界。

定义 4.3。

(1) $\mathscr{T}_\Sigma V$ 扩展项的集合是包含 $T_\Sigma V$ 的最小集合，并且满足：对于每个仅含有限个变量的扩展项可数集合 t_k ($k \in \mathbb{N}$)，我们都得到一个扩展项 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$。(2) 对于每个连续代数 A 和每个变量解释 $f\colon V \to A$，我们将扩展项的解释定义为如下部分函数 $f^{@}\colon \mathscr{T}_\Sigma V \rightharpoonup A$: (a) $f^{@}$ 扩展了 $f^\sharp$（因此 $f^{@}(t)$ 对所有项 $t \in T_\Sigma V$ 都有定义），并且 (b) $f^{@}$ 在 $t = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$ 中有定义，当且仅当每个 $f^{@}(t_k)$ 都有定义，且满足 $f^{@}(t_k) \sqsubseteq f^{@}(t_{k+1})$ 在 A 中；于是 $f^{@}(t) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} f^{@}(t_k)$。

例 4.4. 给定一个一元运算 σ，扩展项 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \sigma^k(x)$ 是良构的，但 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} \sigma(x_k)$ 不是：它包含无限多个变量。

定义 4.5. 方程是指形式表达式 $t = t'$，其中 t、t' 是 $\mathscr{T}_\Sigma V$ 中的扩展项。

连续代数满足 $t = t'$，是指对于变量的每个解释 $f\colon V \to A$，$f^{@}(t)$ 和 $f^{@}(t')$ 都有定义且相等。

连续代数簇是由一组方程表示的 Σ-CPO 的全子范畴。

注 4.6。

（1）我们不需要通过不等式 $t \le t'$ 来表示。事实上，满足这样的不等式，恰好意味着满足 $t = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$，其中对于所有 $k > 0$，$t_0 = t$ 且 $t_k = t'$。（2）项 t 在代数 A 中是可定义的，当且仅当对于变量的每个解释 $f\colon V \to A$，$f^{@}(t)$ 都有定义。我们可以使用可定义性而不是方程来引入簇。事实上，代数满足 $t = t'$，当且仅当项 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} s_k$ 是可定义的，其中对于 $k \ge 2$，$s_0 = t$、$s_1 = t'$ 且 $s_k = t$。反之，t 在 A 中是可定义的，当且仅当 A 满足 $t = t$。

例 4.7。

(1) 连续幺半群是在连续偏序集上作用且具有连续乘法的幺半群：对于所有 ω 链 (a_k)、(b_k)，我们有 $(\bigsqcup a_k)(\bigsqcup b_k) = \bigsqcup (a_k b_k)$。这是由通常的幺半群方程所呈现的簇（见例 3.4）。(2) 满足 $a \sqsubseteq a^2$ 的连续幺半群由项 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x^k$ 的可定义性所呈现。

(3) 方程 $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} x^k = e$ 呈现了满足 $a \sqsubseteq a^2$ 和 $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} a^k = e$ 的连续幺半群，其中 a 均成立。

注 4.8。在经典泛代数中，Birkhoff 簇定理指出，簇恰好是 HSP类，即对同态像、子代数和积封闭的类。在 Σ-CPO中，我们有相应的构造：

(i) 代数 A_i ($i \in I$) 的积是它们的笛卡尔积 $\prod_{i\in I} A_i$，其运算和序按坐标给出。(ii) 代数 A 的子代数是一个子对象 $m: B \to A$，使得m 是一个嵌入：在 B 中，$x \sqsubseteq y$ 成立，当且仅当 $m(x) \sqsubseteq m(y)$。(iii) 代数 A 的同态像是一个商对象 $e: A \to B$，使得 e 是满射。

引理 4.9。每个连续代数簇都是 HSP类。

[7] 中第 339—340 页的证明在我们的情形下无需任何改动。[7] 的主要结果是其逆命题，但该证明不适用于我们的扩展项（比所引文献中的项更特殊）：

开放问题4.10。 Σ-CPO 中的每个 HSP 类都是连续代数的一个簇吗?

定义4.11。若 cpo C 的子集 X 所包含的唯一子-cpo 是整个 C，则称 X 稠密。

例 4.12。给定一个有向图表 D，其在 CPO 中的余极限为 $a_s : A_s \to A$ ($s \in S$)，则并集 $\bigcup_{s\in S} a_s[A_s]$ 在 A 中稠密。事实上，若某个子-cpo A' 包含该并集，那么余域限制映射 $a'_s: A_s \to A'$ 构成 D 在 CPO 中的一个余锥。由该余锥可经由 a_s 分解这一事实可知，$A' = A$。

引理 4.13。若 X 在 cpo C 中稠密，则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，X^n 在 C^n 中稠密。

命题 4.14。每个连续代数簇 $\mathcal{V}$ 都有自由代数：遗忘函子 $U_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \to$ CPO 有一个左伴随 $F_{\mathcal{V}}$: CPO $\to \mathcal{V}$。

证明概要。对于 $\mathcal{V} =$ Σ-CPO，我们已在例 4.2 中描述了自由代数。根据引理 4.9，每个簇 $\mathcal{V}$ 都对积和子代数封闭。范畴 Σ-CPO 是完备且良基的。它具有分解系统 $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$，其中 $\mathcal{E}$ 由同态 $e: A \to B$ 组成，且 $e[A]$ 在 B 中稠密；$\mathcal{M}$ 由闭子代数的嵌入组成。（事实上，设连续同态$f: A \to C$ 具有如下分解 $f = m \cdot e$，其中 $e: A \to X$ 且$m: X \to C$ 属于度量空间范畴。则在 X上存在唯一的代数结构，使得 e 和 m 是同态。）由此可知，$\mathcal{V}$ 是反射子范畴：包含函子 $E: \mathcal{V} \to$ Σ-CPO 有一个左伴随

根据 [6] 中的定理 16.8。由于 $U_{\mathcal{V}} = U_{\Sigma} \cdot E$，我们得出 $U_{\mathcal{V}}$ 有一个左伴随。□

记号 4.15。
(1) 我们用 $\mathbf{T}_{\mathcal{V}}$ 表示 CPO 上一个簇 $\mathcal{V}$ 的自由代数单子。其底层函子为 $T_{\mathcal{V}} = U_{\mathcal{V}} \cdot F_{\mathcal{V}}$。(2) CPO 上的具体范畴（及函子）的定义与注 3.8 类似。

例 4.16。对于 $\mathcal{V} = \Sigma$-CPO，例 4.2 中的单子 $\mathbf{T}_{\Sigma}$ 将一个 cpo M 映射为 cpo $T_{\Sigma}M$。与例 3.7 一样，$\mathbf{T}_{\Sigma}$ 是强有限元的。

命题 4.17。每个连续代数簇 $\mathcal{V}$ 都与范畴 $\mathbf{CPO}^{\mathbf{T}_{\mathcal{V}}}$具体同构：比较函子$K_{\mathcal{V}}$： $\mathcal{V} \to \mathbf{CPO}^{\mathbf{T}_{\mathcal{V}}}$ 是一个具体同构。

这与命题 3.9 一样，类似于经典情形。

引理 4.18（[7, 命题 3.5）。设 h： $A \to B$ 是Σ-CPO 中的一个态射，且 t 是一个扩展项。给定一个解释 f： $V \to A$，并且 $f^{@}(t)$ 已定义，则 $(hf)^{@}$也有定义：$(hf)^{@}(t) = h(f^{@}(t))$。

命题 4.19。遗忘函子 U_{Σ}： Σ-CPO $\to$CPO 创建有向余极限：给定一个连续代数的有向图表 D，以及 CPO 中的一个余极限 c_i： $UD_i \to C$，在 C 上存在唯一的代数结构，使得所有 c_i 都是同态；此外，所得的余锥 c_i： $D_i \to C$ 是 Σ-CPO 中 D 的余极限。

证明概要。由 CPO 是笛卡尔闭的可得此结论。因此，有向余极限与有限积交换（定理 2.12）。给定一个 n-元符号 $\sigma \in \Sigma$，由 c_i^n： $UD_i^n \to C^n$ 是一个有向余极限这一事实可知，存在唯一的态射 σ_C： $C_i^n \to C$，使得给定的运算 σ_{C_i}： $C_i^n \to C_i$ 满足 $\sigma_C \cdot c_i^n = c_i \cdot \sigma_{C_i}$。也就是说，$c_i$ 是同态。验证这确实给出了 CPO 中 D 的余极限是容易的。□

命题 4.20. 函子 U_{Σ} 创建自反余等化子。

证明概要. 事实上，若 e： $B \to C$ 是 $f_0, f_1 : A \to B$的一个余等化子，则对于一个 n元符号 σ，我们有一个 e^n的余等化子 f_0^n, f_1^n（例 2.23）。因此，我们得到唯一的 σ_C： $C^n \to C$，满足 $\sigma_C \cdot e^n = e \cdot \sigma_B$，故 e 是一个同态，并且很容易看出它是 Σ-CPO中的余等化子。□

定理 4.21. 每个连续代数簇在 Σ-CPO 中对有向余极限封闭。

证明概要。设 a_s： $A_s \to A$ ($s \in S$) 是 Σ-CPO 中的一个有向余极限。考虑一个扩展项 $t \in \mathcal{T}_{\Sigma}V$，使得它在每个代数 A_s t 中都是可定义的。我们证明 t 在 A 中是可定义的。结合注 4.6，即可完成证明。我们使用结构归纳：如果 a_s 是一个经典项，则该命题

显然成立。因此，我们需要证明归纳步骤：设 $t = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} t_k$，且每个 t_k 在所有 A_s ($s \in S$) 中都是可定义的，那么 t 在 A 中也是可定义的。根据扩展项的定义，我们知道存在一个变量有限集 $V_0 \subseteq V$，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $t_k \in \mathscr{T}_\Sigma V_0$。因此，我们可以处理解释 $f\colon V_0 \to A$。余极限余锥 $a_s\colon A_s \to A$ 具有这样的性质：集合 $X = \bigcup_{s\in S} a_s[A_s]$ 是稠密的（例 4.12）。因此，在由所有解释构成的 CPO $[V_0, A]$ 中，子集 $[V_0, X]$ 也是稠密的（引理 4.13）。我们利用这一点，通过对 f 作结构归纳，证明 $f^{@}(t)$ 是由以下内容定义的：

(i) 若 $f[V_0] \subseteq X$ then $f^{@}$ 有定义，且 (ii) 给定 $f = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $[V_0, A]$，其中所有 $f_n^{@}(t)$ 均有定义，则 $f^{@}(t)$ 有定义。

步骤 (i) 很简单，利用这样一个事实：由于 V_0 是有限的，$f\colon V_0 \to \bigcup a_s[A_s]$ 会经由某个子集 $a_s[A_s]$ 分解，如 $f = a_s \cdot \overline{f}$。对于解释 $\overline{f}\colon V_0 \to A_s$，我们知道 $\overline{f}^{@}(t)$ 有定义。然后将引理 4.18 应用于 $h = a_s$。步骤 (ii) 则更复杂，因为它涉及双重归纳：针对 t_k 和 f_n。□

推论 4.22. 对于每个连续代数簇 $\mathcal{V}$，CPO 上的单子 $\mathsf{T}_\mathcal{V}$ 都是强有限元的。

证明. 我们知道 $U_\Sigma\colon \Sigma\text{-CPO} \to \mathrm{CPO}$ 创造有向余极限和自反余等化子（命题 4.19 和 4.20）。

给定一个簇 $\mathcal{V}$，嵌入 $E\colon \mathcal{V} \hookrightarrow \Sigma\text{-CPO}$ 保持有向余极限（定理 4.21）和自反满同态：事实上，$\mathcal{V}$ 在同态像下封闭（引理 4.9）。因此，遗忘函子 $U_\mathcal{V} = U_\Sigma \cdot E$ 保持有向余极限和自反满余等化子。其左伴随 $F_\mathcal{V}$ 保持加权余极限。因此，$T_\mathcal{V} = U_\mathcal{V} \cdot F_\mathcal{V}$ 保持有向余极限和自反余等化子。由推论 2.30，证明完成。□

构造 4.23. 与构造 3.17 类似，对于 CPO 上的每个强有限单子 $\mathsf{T} = (T, \mu, \eta)$，我们赋予一个由签名 $\Sigma_n = |TV_n|$ 的代数构成的簇 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$，其由以下方程给出：

(1) 对 cpo TV_n 中每个满足 $\sigma = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$ 的 ω-链 $(\sigma_k)_{k<\omega}$，$\sigma = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$；(2) 对所有 $\sigma \in \Sigma_n$ 以及所有映射 $k\colon V_n \to \Sigma_m$，$k^*(\sigma) = \sigma(k(x_i))_{i<n}$；(3) 对所有 $i = 0, \ldots, n-1$，$\eta_{V_n}(x_i) = x_i$。

引理 4.24. CPO 中的每个代数 $\alpha\colon TA \to A$ in $\mathrm{CPO}^\mathbf{T}$ 都定义了 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 中的一个代数，并且对于所有 $\sigma \in \Sigma_n$ 和 $a\colon V_n \to A$，有 $\sigma_A(a(x_i)) = a^*(\sigma)$。此外，$\mathrm{CPO}^\mathbf{T}$ 中的每个同态也是 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 中相应代数之间的 Σ-同态。

证明与引理 3.18 的证明类似。

定理 4.25. CPO 上的每个强有限元单子 T，都是簇 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 的自由代数单子。

证明。由例 2.28 可知，函子 $K : \mathsf{Set}_\mathsf{f} \to \mathsf{CPO}$ 的稠密表示由有向余极限和满射自反余等化子组成。$\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 的自由代数单子 T′ 和 T 都是强有限元的（推论 4.22）。因此，只需证明：对每个有限离散 cpo X，与 $\mathsf{CPO}^\mathbf{T}$ 中自由代数 (TX, μ_X) 对应的 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 的 Σ-代数，是 $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 中 X 上的自由代数。换言之，T 和 T′ 在 Set_f 的对象上具有相同的自由代数。由于它们都保留 $K : \mathsf{Set}_\mathsf{f} \hookrightarrow \mathsf{CPO}$ 的稠密表示中的余极限，因此对于每个 cpo，T 和 T′ 的自由代数都相同。由此，单子 T 和 T′ 同构，这就证明了该定理。我们可以假设 $X = V_n$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。

验证过程与定理 3.19 中的类似：对于每个代数 A in $\mathcal{V}_\mathbf{T}$ 和每种解释 $f : V_n \to A$，都存在唯一的 Σ-同态 $\overline{f} : T_\Sigma V_n \to A$，使得 $f = \overline{f} \cdot \eta_{V_n}$。在“存在性”部分，$\overline{f}$ 由相同的公式定义。它是连续的，因为给定 TV 中的一个 ω-并 $\sigma = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$，代数 A 满足 $\sigma = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k$，因此

$$\overline{f}(\sigma) = \sigma_A(f(x_i)) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} (\sigma_k)_A(f(x_i)) = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} f(\sigma_k).$$

“唯一性”部分完全相同。 □

推论 4.26. 连续代数簇与 CPO 上的强有限单子在同构意义下双射对应。

证明与定理 3.21 的证明类似。

5. Varieties of Δ-Continuous Algebras

现在我们从 CPO 转向 DCPO。

定义 5.1。 Δ-连续代数是一个配备连续运算的 dcpo。我们将 Σ-DCPO 记作 Δ-连续代数及连续（保持有向上确界）同态所构成的范畴。

我们再次假设给定了一个签名 Σ，并选定了一个可数变量集 V。

例 5.2。在 dcpo M 上的自由 Δ-连续代数是由来自 $|M|$ 的变量构成的项代数 $T_\Sigma M$，见例 4.2。事实上，其底层偏序集是若干个 $|M|^n$ 的副本的余积（例 3.7），因此 $T_\Sigma M$ 是一个 dcpo。我们再次使用记号 $f^\sharp : T_\Sigma M \to A$ 表示延拓 $f : M \to A$ 的同态。

现在我们可以定义 Δ-连续代数的方程和簇。这里的扩展项具有如下形式：$\bigvee_{k<\alpha} t_k$，其中 α 是任意序数。具体来说，我们利用这样一个事实：偏序集是 DCPO，当且仅当它具有由序数索引的链的上确界；映射保留定向上确界，当且仅当它保留由序数索引的链的上确界（[9], 推论 1.7）。回想一下，序数是所有较小序数构成的线性有序集，$\alpha = \{k \in \mathsf{Ord} \mid k < \alpha\}$。

定义 5.3.
(1) 我们将 Δ-扩展项定义为包含 $T_\Sigma V$ 且满足以下条件的最小集合 $\mathscr{T}_\Sigma^\Delta V$：对于每个序数 α 以及每组 Δ-扩展项 t_k （$k<\alpha$），若其中只包含有限个变量，则可得到一个 Δ-扩展项 $\bigvee_{k<\alpha} t_k$。(2) 对于每个 Δ-连续代数 A 和每个解释 $f\colon V \to A$，我们将部分映射 $f@\colon \mathscr{T}_\Sigma^\Delta V \rightharpoonup A$ 记为扩展 $f^\sharp$ 的映射；当且仅当每个 $f^@(t_i)$ 都有定义且满足 $f@(t_i) \sqsubseteq f@(t_j)$（对所有 $i<j<\alpha$），它才在 $t=\bigvee_{i<\alpha} t_i$ 上有定义；此时 $f^@(t) = \bigsqcup_{i<\alpha} f@(t_i)$。(3) 方程是扩展项组成的一对；我们仍记作 $t=t'$。代数 A 满足该方程，当且仅当对于每个解释 $f\colon V \to A$，$f@(t)$ 和 $f^@(t')$ 都有定义且相等。

因此，我们得到由一组 Δ-扩展项之间的方程所呈现的 Σ-DCPO 的全子范畴，即 Δ-连续代数的簇。请注意，尽管 $\mathscr{T}_\Sigma^\Delta V$ 是一个真类，但每个簇都是由一组（而非真类）方程所呈现的。

命题 5.4. 每个 Δ-连续代数的簇 $\mathcal{V}$ 都有自由代数；对于由此得到的单子 $\mathsf{T}_\mathcal{V}$，它与 $\mathbf{DCPO}^{\mathbf{T}_\mathcal{V}}$ 具体同构。

证明. 自由代数的存在性可按照命题 4.14 中的方法验证。我们只需明确：对于一个 dcpo C，集合 $X \subseteq C$ 的稠密性是指，包含 X 的唯一子有向完备偏序集就是 C本身。其余部分与命题 3.9 一样，类似于经典情形。□

定理 5.5. 对于每个 Δ-连续代数簇，DCPO 上的单子$\mathsf{T}_\mathcal{V}$ 都是强有限元的。

证明与推论 4.22 的证明类似。
构造 5.6. 对每个 DCPO 上的强有限单子 T，我们都赋予一个签名为 $\Sigma_n = |TV_n|$的 Δ-连续代数簇。它由方程表示，如构造 4.23 中所述，不同之处在于，在第 1) 项中，我们选择任意序数

$$\alpha \leq \operatorname{card} |TV|$$

然后构造以下方程：

$$\sigma = \bigvee_{k<\alpha} \sigma_k$$

对于 DCPO TV_n 中的每个 α-链 $(\sigma_k)_{k<\alpha}$，其中 $\sigma = \bigsqcup_{k<\alpha} \sigma_k$。注意，第 1)–3) 项只产生一个方程集。

定理 5.7. 每个 DCPO 上的强有限单子都是上述簇的自由代数单子。

证明与定理 3.19 的证明类似。
推论 5.8。 Δ-连续代数的簇与 DCPO 上的强有限单子在同构意义下构成双射。

6. Conclusion and Open Problems

Mardare 等人的定量代数簇（又称 1-基本簇） [21, 22] 与度量空间范畴 Met 上的强有限单子构成双射。这是我们论文的主要结果。这与原文中 ω-簇的情形形成了令人惊讶的对比：正如 [2]所示，这类簇（其中考虑了方程中有限多个变量上的距离限制）通常甚至不能导出有限元单子。对于完备定量代数的簇，同样的结果也成立：它们与完备度量空间范畴 CMet 上的强有限单子构成双射。这使 Mardare 等人的定量代数推理与泛代数中的经典等式推理密切联系起来；在泛代数中，众所周知，簇与 Set 上的有限元单子相对应 [20]。

开放问题 6.1。刻画 Met 或 CMet 上对应于 ω-定量代数簇的单子。

在 [2] 中已有部分解答：从 Met 转到其涵盖所有超度量空间的全子范畴 UMet 时，已刻画出 UMet 上对应于 UMet 中 ω-定量代数簇的富化单子。

与经典代数中著名的比尔克霍夫簇定理类似，正如 [23], 中所证明的，定量代数簇恰好可以刻画为 HSP 类：在 Σ-Met 中对同态像、子代数和积封闭。然而，在 CMet 中，这个证明似乎行不通。

开放问题 6.2。比尔克霍夫簇定理是否存在适用于完备定量代数簇的类似定理?

我们还提出了连续代数簇的平行理论。在这里，我们在 ω-连续偏序集范畴 CPO（或有向完备偏序集范畴 DCPO）中开展研究，并证明簇与 CPO（或 DCPO）上的强有限单子一一对应。尽管这一结果听起来与度量空间范畴 Met 中的结果相同，但证明却大不相同。这一证明依赖于 CPO 和 DCPO 是笛卡尔闭范畴。

开放问题 6.3. 比尔克霍夫簇定理的类似结论是否适用于连续代数簇?

在 [7] 中给出了肯定的回答，但其中使用的扩展项比我们论文中的更一般。

我们在 CPO 和 DCPO 中的工作基于我们证明的一个令人惊讶的事实：在笛卡尔闭范畴中，有向余极限与有限积可交换。

References

[1] J. Ad´amek, 《范畴语言中的自由代数与自动机实现》, Comment. Math. Univ. Carolinae 15 (1974), 589–602[2] J. Ad´amek, 《定量代数簇及其单子》, 计算机科学逻辑会议论文集（LICS 2022）, 1–12[3] J. Ad´amek、M. Dost´al 和 J. Velebil, 《有序代数簇的范畴视角》, Math. Struct. Comput. Sci. 32, no. 4 (2022), 349–373[4] J. Ad´amek、M. Dost´al 和 J. Velebil, 《定量代数与度量单子的分类》, arXiv:2210.01565.[5] J. Ad´amek、M. Dost´al 和 J. Velebil, 《连续代数的强有限元单子》, 手稿。[6] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. Strecker, 《抽象范畴与具体范畴：范畴之乐》, 约翰·威立父子公司, 纽约, 1990[7] J. Ad´amek、E. Nelson 和 J. Reiterman, 《连续代数的比尔克霍夫簇定理》, Algebra Universalis 20 (1985), 328-350 [8] J. Ad´amek 和 J. Rosick´y, 《度量富集范畴中的近似内射性与小性》, J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), 1–30[9]J. Ad´amek 和 J. Rosick´y, 《局部可呈示范畴与可达范畴》, 剑桥大学出版社, 1994[10] G. Bacci、R. Mardare、P. Panaganden 和 G. D. Plotkin, 《马尔可夫过程的代数理论》, 计算机科学逻辑会议论文集（LICS 2018）, ACM (2018), 679–688[11] G. Bacci、R. Mardare、P. Panaganden 和 G. D. Plotkin, 《定量等式理论的张量积》, 计算机科学中的余代数与代数方法会议论文集（CALCO 2021）。[12] M. Barr 和 Ch. Wells, 《托普斯、三元组与理论》, 施普林格出版社, 纽约, 1985[13] F. Borceux, 《范畴代数手册：第 2 卷, 范畴与结构》, 剑桥大学出版社, 1994 [14] J. Bourke 和 R. Garner, 《单子与理论》, Adv. Math. 351 (2019), 1024–1071[15] E. J. Dubuc, 《富集范畴论中的 Kan 延拓》, 数学讲义, 第 145 卷, 施普林格出版社, 1970[16] G. M. Kelly, 《富集范畴论基本概念》, 伦敦数学学会讲义丛书第 64 卷, 剑桥大学出版社, 1982；亦可见 Repr. Theory Appl. Categ. 10 (2005)[17] G. M. Kelly, 《富集语境 I 中由有限极限定义的结构》, Cah. Topol. G´eom. Diff´er. Cat´eg. XXIII (1982), 3–42[18] G. M. Kelly 和 S. Lack, 《保持有限积的函子、Kan 延拓与强有限 2-单子》, Appl. Categ. Structures 1 (1993), 85–94[19] A. Kurz 和 J. Velebil, 《有序代数的拟簇与簇：正则性与正合性》, Math. Structures Comput. Sci. (2016), 1–42.[20] S. Mac Lane, 《工作数学家的范畴论》, 第 2 版, Springer, 1998[21] R. Mardare、P. Panangaden 和 G. D. Plotkin, 《定量代数推理》, 计算机科学逻辑会议论文集（LICS 2016）, IEEE 计算机科学, 2016, 700–709[22] R. Mardare、P. Panangaden 和 G. D. Plotkin, 《定量代数的可公理化性》, 计算机科学逻辑会议论文集（LICS 2017）, IEEE 计算机科学, 2017, 1–12[23] S. Milius 和 H. Urbat, 《带结构代数的等式公理化》, arXiv 1812-02016v2

[24] M. Mio 和 V. Vignudelli，《非确定性与概率的单子和定量等式理论》，CONCUR 2020 论文集，LIPIcs 第 171 卷。[25] J. Rosick´y，《度量单子》，Math. Struct. Comput. Sci.，31(5)（2021），535– 552[26] J. Rosick´y，《离散等式理论》，arXiv 2204.02590v1

Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Czech Republic and Institute for Theoretical Computer Science, Technical University Braunschweig,Germany

电子邮箱：j.adamek@tu-bs.de

Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague, Czech Republic电子邮箱：{dostamat,velebil}@fel.cvut.cz