arXiv:2301.01035v1 [math.FA] 3 Jan 2023

正则狄利克雷型与其活跃主部之间中间形式的边界表示

MATTHIAS KELLER、DANIEL LENZ、MARCEL SCHMIDT、MICHAEL SCHWARZ 和 MELCHIOR WIRTH

摘要。我们刻画了所有介于某个狄利克雷型的半群与其活跃主部的半群之间的半群。若该狄利克雷型是正则的，我们进一步以抽象边界上的开集与测度所组成的配对为参数，更明确地描述这些夹心半群对应的二次型。

引言

同一微分表达式的不同自伴实现的一个典型例子，是有界区域上的狄利克雷与诺伊曼拉普拉斯算子，也就是说，这两个算子仅在边界条件的选择上有所不同。更一般地，我们可以探讨通过选择边界条件能够得到某个微分表达式的哪些自伴实现。

对于拉普拉斯算子，Arendt 和 Warma 在 [AW03] 中给出了一种可能的答案：若 Ω 是具有利普希茨边界的定义域，则 $L^2(\Omega)$ 上的自伴正算子 L 是具有罗宾型边界条件的拉普拉斯算子，当且仅当其对应的半群 (e^{-tL}) 夹在狄利克雷热半群与诺伊曼热半群之间，即

$$e^{t\Delta^{(D)}} f \leq e^{-tL} f \leq e^{t\Delta^{(N)}} f$$

对所有 $f \geq 0$ 和 $t > 0$ 均成立。这里，具有罗宾型边界条件的拉普拉斯算子可以用其对应的二次型来最恰当地描述：与 L 相关联的狄利克雷型 Q 满足 $D(Q) = \{f \in H^1(\Omega \mid f = 0$ 在 $\Omega \setminus O$ 上准处处成立，且

$$Q(f) = \int_\Omega |\nabla f|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |\tilde{f}|^2 d\mu$$

对于某个开集 $O \subseteq \partial\Omega$ 和 Ω 上的测度 μ，该测度不赋予容量为零的集合任何测度。˜这里，f 表示 f 的一个拟连续修正。

请注意，在 Arendt 和 Warma 的原始工作中，还附加了一个条件，即 L 必须是局部的，但后来 Akhlil 证明该条件是多余的[Akh18]。

这一结果已从多个方向得到推广。Chill 和 Warma [CW12]给出了（非线性）半群的类似刻画，这些半群被夹在

由带狄利克雷边界条件的 p拉普拉斯算子和带诺伊曼边界条件的p拉普拉斯算子所生成的半群之间。后来，Claus[Cla21]将这一刻画推广到与局部非线性狄利克雷型相关的半群。在 [ACD21] 中，Arora、Chill 和 Djida 并未研究夹心半群，而是刻画了所有支配由正则型诱导的半群的半群。

Posilicano 在 [Pos14] 中研究了一个相关问题。对于边界光滑的有界区域，他刻画了所有通过边界上的某些狄利克雷型生成马尔可夫半群的拉普拉斯算子自伴实现。在对边界具有更高正则性假设的情况下，将他的结果应用于具有夹心半群的实现，可以得到 Arendt 和 Warma 的结果。对于与无限图相关联的离散拉普拉斯算子，前四位作者在 [KLSS19] 中得到了类似的马尔可夫实现刻画。在这种情况下，所采用的边界是图的罗伊登边界，它是利用盖尔范德理论定义的。

本文在狄利克雷型的抽象背景下探讨夹心半群问题。我们从一个无杀灭项的正则狄利克雷型出发，并将其生成元视为狄利克雷拉普拉斯算子的抽象类比。在这一框架下，诺伊曼拉普拉斯算子也有一个自然的类比，即给定正则狄利克雷型的活跃主部的生成元；这一概念在 [Sch17, Sch20a] 中被引入。我们的框架不仅涵盖了 Arendt 和 Warma 研究的区域上的拉普拉斯算子，也涵盖了各种类似拉普拉斯算子的算子，例如分数阶拉普拉斯算子、流形和度量测度空间上的拉普拉斯算子，以及加权图和量子图上的拉普拉斯算子。

首先，我们根据序性质，对夹在与正则狄利克雷型及其活跃主部相关的半群之间的半群生成元给出一个抽象刻画。

为了将这些夹心半群与边界条件联系起来，首先要解决的问题是在这一框架下找到恰当的边界概念。由于涉及的所有二次型都定义在某个抽象拓扑测度空间的 L^2-空间上，因此无法直接采用几何意义上的边界概念。与 [KLSS19] 和[ACD21] 一样，我们引入一种利用盖尔范德理论定义、且取决于给定正则狄利克雷型的边界概念。

借助这一边界概念，我们可以证明 Arendt 和 Warma 的主要结果（定理4.6）的一个抽象版本：

定理。 设 Q 是定义在 $L^2(X,m)$ 上的一个无杀灭正则狄利克雷型， $Q^{(M)}$ 为其活跃主部。对于定义在 $L^2(X,m)$ 上的一个狄利克雷型 Q' ，以下断言等价：

(i) 存在 $X \cup \partial X$ 的一个开子集 O ，以及 $O \cap \partial X$ 上的一个测度 μ ，该测度不赋予极性集正测度，使得 Q' 是二次型 $Q^{c}_{O,\,\mu}$ 的闭包

由 $D(Q^c_{O,\ \mu}) = D(Q) \cap C_c(O)$ 给出，且

$$Q^c_{O,\mu}(f) = Q(f) + \int_{O\cap\partial X} f^2 \, d\mu.$$

(ii) 与 Q' 相关的半群介于与 Q 相关的半群和与 $Q^{(M)}$ 相关的半群之间，并且 $D(Q') \cap C_c(X \cup \partial X)$是 Q' 的形式核。

换言之，夹在 Q 和 $Q^{(M)}$ 之间的狄利克雷型（就半群支配而言），可由抽象边界的开子集上的测度参数化。

从思想上说，我们关于正则狄利克雷型的主要结果与 [ACD21], 的结果相似；后者讨论的是一个更一般的情形，不要求马尔可夫性质。主要区别在于，对于第一个抽象部分，我们无需假设这些形式具有任何正则性；而在假设其正则性时，我们的结果则更为明确。

本文组织如下：第1节介绍全文使用的记号，并回顾有关狄利克雷型和半群支配的一些基本事实。第2节回顾正则狄利克雷型的活跃主部，并给出夹在给定正则狄利克雷型与其活跃主部之间的狄利克雷型的抽象刻画（定理 2.8）。第3节研究上述主定理中形式 $Q^c_{O,\ \mu}$ 的一些性质，尤其是它们的可闭性。第4节介绍我们的边界概念，并说明如何用边界开子集上的测度表示夹在中间的狄利克雷型（定理4.6）。最后，附录汇集了关于紧支撑连续函数空间上的双线性形式的一些事实。

本文部分内容基于第四位作者的博士论文[Sch20b]。

致谢。 前三位作者感谢德国研究联合会在“无穷远处的几何”优先计划中提供的经费支持。M.W. 感谢德国学术奖学金基金会、奥地利科学基金（FWF）通过编号为 F65 的资助项目以及 Esprit 计划 [ESP156], 提供的经费支持；同时感谢欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号 716117）提供的支持。为实现开放获取，作者已将本次投稿所产生的任何作者接受稿（AAM）版本采用知识共享署名许可（CC BY）公开版权许可。

1. 狄利克雷型与相关半群的支配

本节介绍记号，并回顾有关狄利克雷型及其相关半群支配的一些基本定义和结果。除非另有说明，所有函数均为实值函数。全文中，$(X,\mathrm{A}\ m)$ 是一个 σ-有限测度

空间， Q 表示一个定义域为 $D(Q) \subseteq L^2(X,m)$ 的非负二次型。我们默认将 Q 与其通过极化诱导的双线性型等同。特别地，我们采用约定：对于 $f \in D(Q)$， $Q(f) = Q(f,f)$。型范数 $\|\cdot\|_Q$ 是 $D(Q)$ 上定义的范数，其定义如下：

$$\|f\|_Q^2 = Q(f) + \|f\|^2,$$

其中，$\|\cdot\|$ 是 $L^2(X, m)$ 上的范数。若 Q' 是另一个二次型，则记 $Q \sqsubseteq Q'$，当且仅当对于所有 $f \in D(Q)$，都有 $D(Q) \subseteq D(Q')$ 且 $Q(f) \geq Q'(f)$。由此在所有二次型上诱导的序关系称为自然序。

若对所有非负的 $f, g \in D(Q)$，都有 $Q(f, g) \geq 0$，则称二次型为正。若 $fg = 0$ 蕴含对于所有 $f, g \in D(Q)$ 都有 $Q(f, g) = 0$，则称其为局部。此外，若只要 $f, g \in D(Q)$，就有 $|f| \leq |g|$ 蕴含 $Q(f) \leq Q(g)$，则称 Q 为单调。此时， $Q(f)$ 仅取决于 f 的绝对值，而不取决于其符号。我们在附录 A 中讨论定义域为连续函数的形式所具有的这些性质。

1.1.（正则）狄利克雷型。 Q 上定义稠密的闭二次型$L^2(X,m)$称为狄利克雷型，如果 $f \in D(Q)$蕴含 $f_+ \wedge 1 \in D(Q)$，且 $Q(f_+ \wedge 1) \leq Q(f)$。第二 *Beurling-Deny* 判据 [RS78，定理 XIII.51] 断言： Q是狄利克雷型，当且仅当与 Q相关联的正自伴算子 L 所生成的半群（e^{-tL}）具有马尔可夫性，即对所有 $t \geq 0$， $0 \leq f \leq 1$ 蕴含 $0 \leq e^{-tL} f \leq 1$ 。

若 Q 是狄利克雷型，则 $D(Q) \cap L^\infty(X,m)$ 关于逐点乘法构成一个代数，并且

$$Q(fg)^{1/2} \leq \|g\|_\infty Q(f)^{1/2} + \|f\|_\infty Q(g)^{1/2}$$

对所有 $f, g \in D(Q) \cap L^\infty(X,m)$，参见 [FOT11，定理 1.4.2]。

狄利克雷型 Q 称为正则，如果满足以下条件：

- X 是局部紧可分度量空间，且 m 是全支撑的拉东测度。
- $D(Q) \cap C_c(X)$ 关于 $\|\cdot\|_Q$ 在 $C_c(X)$ 和 $D(Q)$ 中一致稠密。

在这种情况下，开集 $O \subseteq X$ 的 Q-容量（若 Q 固定，也简称容量）定义为

$$\operatorname{cap}(O) = \inf\{\|f\|_Q^2 \mid f \in D(Q) \text{ with } f \geq 1\, m\text{-a.e. on } O\}.$$

这里约定，若不存在 $f \in D(Q)$ 使得 $f \geq 1$ 在 O 上成立，则 $\operatorname{cap}(O) = \infty$ 。对于任意集合 $A \subseteq X$，容量定义为

$$\operatorname{cap}(A) = \inf\{\operatorname{cap}(O) \mid O \text{ open with } A \subseteq O\}.$$

容量是内正则的，也就是说，对于任意博雷尔集 $A \subseteq X$ ，它满足

$$\operatorname{cap}(A) = \sup\{\operatorname{cap}(K) \mid K \text{ compact with } K \subseteq A\},$$

参见 [FOT11，定理 2.1.1]。此外，根据 [FOT11，引理 2.2.7]，紧 $K \subseteq X$ 的容量也可以描述为

$$\operatorname{cap}(K) = \inf\{\|f\|_Q^2 \mid f \in D(Q) \cap C_c(X) \text{ with } f \geq 1 \text{ on } K\}.$$

A 的 X 子集称为极性的，如果 Cap(A) $= 0$ 成立。若某性质在极集的补集上成立，则称该性质准处处成立，简称 q.e.。

若可测函数 $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ 满足以下条件，则称其为准连续：对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个开集 O，使得 Cap(O) $< \varepsilon$，且 $f|_{X\setminus O}$ 取有限值并连续。若 Q 是一个正则狄利克雷型，则 $D(Q)$ 中的每个 f 都有唯一的（在准处处相等的意义下）准连续代表 f，参见 [CF12，定理 2.3.4]。

1.2. 狄利克雷型与半群的支配。 若 U, V 是 $L^2(X, m)$的子格，则称 U是 V中的一个序理想，如果 $f \in U$、 $g \in V$且 $|g| \le |f|$蕴含 $g \in U$。

若 U, V是 $L^\infty(X, m)$的子代数，则称 U是 V中的一个代数理想，如果 $f \in U$且 $g \in V$蕴含 $fg \in U$。

我们将经常使用以下刻画。(i) 与 (ii) 等价，即 Ouhabaz 支配判据 [Ouh96，定理 3.7]；而与 (iii) 等价则引自 [Sch20a，引理 2.2]。

命题 1.1 (支配的刻画)。设 Q, Q' 是狄利克雷型，其对应的自伴算子为 L, L'。以下断言等价。

(i) 对所有非负的 $f \in L^2(X, m)$ 以及所有 $t \ge 0$，都有

$$e^{-tL} f \le e^{-tL'} f.$$

(ii) $D(Q) \subseteq D(Q')$，$D(Q)$ 是 $D(Q')$ 中的序理想，并且

$$Q(f, g) \ge Q'(f, g)$$

对于所有非负的 $f, g \in D(Q)$。

(iii) $D(Q) \subseteq D(Q')$，$D(Q) \cap L^\infty(X, m)$ 是 $D(Q') \cap L^\infty(X, m)$中的代数理想，并且

$$Q(f, g) \ge Q'(f, g)$$

对所有非负的 f、 $g \in D(Q)$。

如果 Q 和 Q' 满足本命题的某个条件，我们就说 Q'支配 Q，并记作 $Q \preceq Q'$。类似地，在这种情况下，我们记作 $(e^{-tL}) \preceq (e^{-tL'})$，并称半群 $(e^{-tL'})$ 支配 半群 (e^{-tL})。

支配还在$L^2(X, m)$上所有狄利克雷型的集合中诱导出一种序关系。请注意，一般而言， $Q \preceq Q'$ 并不意味着 $Q \sqsubseteq Q'$，反之亦然。

2. 极大支配形式与夹心半群的抽象刻画

对于每个狄利克雷型 Q，都存在一个极大的狄利克雷型 $Q^{(M)}$（相对于自然序而言），它支配给定的狄利克雷型 Q。本节将介绍这一极大型的构造方法，并给出满足以下条件的所有狄利克雷型的抽象刻画

： Q' ，前提是 $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$ 是 $Q^{(M)}$ 的一个扩张 Q。

我们用 (T_t) 表示由 Q 生成的半群，用 $(T_t^{(M)})$ 表示由 $Q^{(M)}$ 生成的半群。根据第 1.2 小节中的讨论，任何满足以下条件的自伴C_0半群 (S_t)

$$(T_t) \preceq (S_t) \preceq (T_t^{(M)})$$

都对应于一个满足 $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$ 的狄利克雷型 Q' 。因此，我们的结果可视为对所有夹在 (T_t) 与 $(T_t^{(M)})$ 之间的半群的抽象刻画。

2.1. 活跃主部与杀死部分。接下来我们将回顾狄利克雷型的活跃主部与杀死部分的定义。两个具体例子见下文例 2.5 和例 2.6。

设 Q 是定义在 $L^2(X,m)$ 上的狄利克雷型。对于满足 $0 \leq \varphi \leq 1$ 的 $\varphi \in D(Q)$，我们在 $L^2(X,m)$ 上定义二次型 $\tilde{Q}_\varphi$ 的定义域如下：

$$D(\tilde{Q}_\varphi) = \{f \in L^2(X,m) \cap L^\infty(X,m) \mid f\varphi, f^2\varphi \in D(Q)\},$$

其作用方式为

$$\tilde{Q}_\varphi(f) = Q(\varphi f) - Q(\varphi f^2, \varphi).$$

由于 $D(Q) \cap L^\infty(X, m)$ 是一个代数，因此有 $D(Q) \cap L^\infty(X, m) \subseteq D(Q_\varphi)$。型 $\tilde{Q}_\varphi$ 在 $L^2(X, m)$ 上是可闭的。事实上， [Sch20a 定理 3.1] 表明， $\tilde{Q}_\varphi$ 在其定义域上关于依测度局部收敛是下半连续的，因此它在其定义域上关于 L^2-收敛也是下半连续的。我们将其闭包记为 Q_φ。下一个命题概述了 Q_φ 的其他重要性质。

命题 2.1。令 $\varphi, \psi \in D(Q)$ 其中 $0 \leq \varphi \leq \psi \leq 1$。

(a) Q_φ 是一个狄利克雷型，且其定义域满足

$$D(Q_\varphi) \cap L^\infty(X,m) = D(\tilde{Q}_\varphi) = \{f \in L^2(X,m) \cap L^\infty(X,m) \mid f\varphi \in D(Q)\}.$$

(b) $D(Q) \subseteq D(Q_\varphi)$ 以及

$$Q_\varphi(f) \leq Q(f), \quad f \in D(Q).$$

(c) $D(Q_\psi) \subseteq D(Q_\varphi)$ 且

$$Q_\varphi(f) \leq Q_\psi(f), \quad f \in D(Q_\psi).$$

证明。 这由 [Sch20a，定理 3.18] 得出。该文给出的证明将 Q_φ 扩张到所有在 m 几乎处处有定义的可测函数，并且该扩张关于依测度局部收敛是下半连续的。将这个定义域更大的形式限制到 $L^2(X, m)$，即可得到所有结论。□

注 2.2。 这个命题的 (a) 部分很重要，因为它给出了 Q_φ 在其定义域内的有界函数上的一个公式。具体而言，对于 $f,\ g \in D(Q_\varphi) \cap L^\infty(X,\ m)$˜，我们有 $f,\ g \in D(Q_\varphi)$，因此

$$Q_\varphi(f,g) = \tilde{Q}_\varphi(f,g) = Q(\varphi f, \varphi g) - Q(\varphi f g, \varphi).$$

˜对于最后一个等式，我们用到了 Q_φ 的定义和极化。

定义 2.3（活跃主部）。 Q 的活跃主部 $Q^{(M)}$ 定义如下：其定义域 $D(Q^{(M)})$由所有满足条件 $f \in D(Q_\varphi)$ 的 $f \in L^2(X,\ m)$ 构成，其中对所有满足条件 $0 \le \varphi \le 1$ 的 $\varphi \in D(Q)$，均有

$$\{\varphi \in D(Q) \mid 0 \le \varphi \le 1\} \to [0,\infty), \quad \varphi \mapsto Q_\varphi(f)$$

有界。在其上，$Q^{(M)}$ 的作用方式为

$$Q^{(M)}(f) = \sup\{Q_\varphi(f) \mid \varphi \in D(Q) \text{ with } 0 \le \varphi \le 1\}.$$

由于 $\varphi \mapsto Q_\varphi(f)$ 单调递增，形式 $Q^{(M)}$ 确实是一个狄利克雷型，参见 [Sch20a，定理 3.6]。结果表明，关于支配 Q的自然序，$Q^{(M)}$ 是最大的狄利克雷型，即 $Q \preceq Q^{(M)}$，且对于所有满足条件 $Q \preceq Q'$ 的狄利克雷型 Q'，均有 $Q' \sqsubseteq Q^{(M)}$，参见 [Sch20a，定理 3.19]。然而，$Q^{(M)}$ 未必是 Q 的扩张，因此我们引入以下定义。

定义 2.4（杀死部分）。 差

$$Q^{(k)} = Q - Q^{(M)}$$

其定义域为 $D(Q^{(k)}) = D(Q)$ 的部分称为 Q 的杀死部分 。

杀死部分是一个局部正二次型。这两种性质都是 $Q^{(k)}$ 单调性的结果，关于单调性参见 [Sch20a，引理 3.11] ；关于单调性如何推出其他性质，参见 [Sch20a，引理 B.1] 。特别地，$Q^{(k)}(f)$ 的值只取决于 $|f|$，而与 f 的符号无关。

我们通过一个例子来说明这些对象。该例表明，活跃主部是一种抽象方法，可从导出狄利克雷边界条件的二次型构造具有诺伊曼边界条件的算子。

例 2.5（区域上的狄利克雷与诺伊曼拉普拉斯算子）。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集（更一般地，设 Ω 为黎曼流形），且 $V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 非负。我们考虑定义在 $D(\mathrm{E}_V^{(N)}) = \{f \in H^1(\Omega) \mid V^{1/2} f \in L^2(\Omega)\}$ 上的狄利克雷型 $\mathrm{E}_{(N)V}$，其作用方式为

$$\mathcal{E}_V^{(N)}(f) = \int_\Omega |\nabla f|^2 dx + \int_\Omega |f|^2 V dx.$$

相应的算子是带有（抽象）诺伊曼边界条件的薛定谔算子的自伴实现$H = -\Delta + V$，我们将其记为$H^{(N)}$。此外，令 $\mathrm{E}_{(D)V}$为 $\mathrm{E}_{(N)V}$在 $D(\mathrm{E}_V^{(D)}) = \{f \in H_0^1(\Omega) \mid$上的限制

$V^{1/2} f \in L^2(\Omega)\}$。这是一个正则狄利克雷型，其相应的算子是带有（抽象）狄利克雷边界条件的薛定谔算子的自伴实现 $H = -\Delta + V$，我们将其记为 $H^{(D)}$。

$\mathsf{E}_{(D)V}$的活跃主部由 $\mathsf{E}_0^{(N)}$ 给出。因此，与活跃主部关联的自伴算子为 $-\Delta^{(N)}$。对于 $f \in D(\mathsf{E}_V^{(D)})$，$\mathsf{E}_V^{(D)}$ 的杀死部分由

$$(\mathcal{E}_V^{(D)})^{(k)}(f) = \int_\Omega |f|^2 V dx.$$

特别地，若 $V = 0$，那么上述讨论表明，狄利克雷型 Q 满足 $\mathsf{E}_0^{(D)} \preceq Q \preceq (\mathsf{E}_{(D)0})^{(M)}$，当且仅当关联半群 (S_t) 满足 $(e^{t\Delta^{(D)}}) \preceq (S_t) \preceq (e^{t\Delta^{(N)}})$。因此，夹在 $\mathsf{E}_{(D)0}$与 $(\mathsf{E}_{(D)0})^{(M)} = \mathsf{E}_{(N)0}$之间的形式，对应于夹在拉普拉斯算子的狄利克雷半群与诺伊曼半群之间的半群。这正是 [AW03] 所研究的情形。

证明。 这里我们仅勾勒证明的主要思路。详细内容请参阅[Sch20a, Example 3.9]。我们只考虑有界函数，一般情形可通过逼近处理。

设 $f \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，并设 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，其中 $0 \le \varphi \le 1$。利用 ∇ 的乘积法则直接计算可得 $f \in D((\mathsf{E}_V^{(D)})_\varphi)$，且

$$(\mathcal{E}_V^{(D)})_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi^2 |\nabla f|^2 dx.$$

令 $\varphi \nearrow 1$，并考虑到 $C_c^\infty(\Omega)$ 在 $D(\mathsf{E}_V^{(D)})$ 中稠密，可得$f \in D((\mathsf{E}_V^{(D)})^{(M)})$以及$(\mathsf{E}_V^{(D)})^{(M)}$的作用公式。

类似地，若 $f \in D((\mathsf{E}_V^{(D)})^{(M)}) \cap L^\infty(\Omega)$，根据 $(\mathsf{E}_{(D)V})_\varphi$和活跃主部的定义，对每个 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，有 $\varphi f \in D(\mathsf{E}_V^{(D)}) = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, V \cdot dx)$。由此可得 $\nabla f \in \vec{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。据此，像上面一样应用$\nabla$的乘积法则，可得 $(\mathsf{E}_V^{(D)})_\varphi(f) = \int_\Omega \varphi^2 |\nabla f|^2 dx.$。由于 $(\mathsf{E}_{(D)V})_\varphi(f) \le (\mathsf{E}_{(D)V})^{(M)}(f)$，且$\varphi$ 是任意的，我们得出 $\nabla f \in \vec{L}^2(\Omega)$，从而 $f \in H^1(\Omega)$。

关于杀死部分的陈述是一个直接推论。 □

例2.6 （分数阶拉普拉斯算子）。如上所述，令 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集。关于分数阶Sobolev空间的背景知识，请参阅 [DNPV12]。对于 $0 < s < 1$，我们用 $Q^{s,(N)}$ 表示定义域为 $D(Q^{s,(N)}) = W^s(\Omega)$ 的狄利克雷型，其作用方式为

$$Q^{s,(N)}(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx\, dy.$$

此型在 $W_0^s(\Omega)$ 上的限制记为 $Q^{s,(D)}$，它是一个正则狄利克雷型。注意，至少当 Ω 有界且具有 C^∞-边界时，根据 [LM72 定理 11.1]，，空间 $W_0^s(\Omega)$ 和 $W^s(\Omega)$ 对 $0 < s \le \frac{1}{2}$ 相同，因此寻找夹在 $Q^{s,(D)}$ 与 $Q^{s,(N)}$ 之间的狄利克雷型这一问题便变得显而易见。

众所周知，相应的自伴算子$H_s^{(N)}$和 $H_s^{(D)}$是由受限分数阶拉普拉斯算子 H_s 给出的算子限制，其定义为

$$H_s f(x) = \mathrm{P.V.} \int_\Omega \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy.$$

因此，它们可以视为具有抽象诺伊曼和狄利克雷边界条件的 H_s 实现。请注意，我们忽略了一个常数，因此我们的分数阶拉普拉斯算子只是「通常的」受限分数阶拉普拉斯算子的一个常数倍，参见 [DNPV12，第 3] 节。与前一个例子类似，$Q^{s,\,(D)}$ 的活跃主部为 $Q^{s,\,(N)}$。

证明。 这里我们只证明 $Q^{s,\,(D)}$的活跃主部这一结论，其余部分众所周知。由于 $Q^{s,\,(N)}$ 和 $(Q^{s,\,(D)})^{(M)}$ 都是狄利克雷型，只需证明$D(Q^{s,\,(N)}) \cap L^\infty(\Omega) = D((Q^{s,\,(D)})^{(M)}) \cap L^\infty(\Omega)$，并证明 $Q^{s,\,(N)}$与 $(Q^{s,\,(D)})^{(M)}$在这些集合上相同（利用有界函数在狄利克雷型的定义域中稠密这一事实，见 [FOT11，定理 1.4.2]）。

我们首先证明 $Q^{s,(N)}$ 是 $(Q^{s,(D)})^{(M)}$（在 $L^\infty(\Omega)$ 上）的一个限制。设 $f \in W^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，并令 $\varphi \in W_0^s(\Omega)$ 满足 $0 \le \varphi \le 1$。则 $f\varphi \in W_0^s(\Omega)$。由此可得

$$\begin{aligned} Q^{s,(D)}(\varphi f) - Q^{s,(D)}(\varphi f^2, \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(\varphi(x)f(x) - \varphi(y)f(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(\varphi(x)f(x)^2 - \varphi(y)f(y)^2)(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \varphi(x)\varphi(y) \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy. \end{aligned}$$

对这类 φ 取上确界，得到 $f \in D((Q^{s,(D)})^{(M)})$ 和 $(Q^{s,(D)})^{(M)}(f) = Q^{s,(N)}(f)$。

尚需证明 $D((Q^{s,(D)})^{(M)}) \cap L^\infty(\Omega) \subseteq W^s(\Omega)$。设 $f \in D((Q^{s,(D)})^{(M)}) \cap L^\infty(\Omega)$。对于满足 $0 \le \varphi \le 1$ 的 $\varphi \in W_0^s(\Omega)$，根据主部的定义$\varphi f, \varphi f^2 \in W_0^s(\Omega)$ 并且

$$\begin{aligned} (Q^{s,(D)})^{(M)}(f) &\ge Q^{s,(D)}(\varphi f) - Q^{s,(D)}(\varphi f^2, \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega\times\Omega} \varphi(x)\varphi(y) \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy. \end{aligned}$$

对于最后一个等式，我们采用了与上文相同的计算。由于 φ 是任意的，这表明 $f \in W^s(\Omega)$。□

注 2.7. 这些例子表明，将一个带有 $Q^{(k)} = 0$ 的正则狄利克雷型 Q 视为具有“狄利克雷型”边界条件的形式，而将 $Q^{(M)}$ 视为具有“同一”形式但带有“诺伊曼型”边界条件，是一种合理的直觉。

2.2. **夹心半群和形式的抽象刻画**。本文的主要抽象结果是对夹在无杀死项的狄利克雷型与其活跃主部之间的狄利克雷型所作的如下刻画。

定理 2.8。设 Q、Q' 是定义在 $L^2(X,\ m)$ 上的狄利克雷型，且满足 $Q^{(k)} = 0$。以下断言等价。

(i) $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$。*(ii) (a)* $D(Q') \subseteq D(Q^{(M)})$，且 $D(Q')$ 是 $D(Q^{(M)})$中的序理想。*(b)* $Q' - Q^{(M)}$ 是 $D(Q')$上的正局部形式。*(c)* Q' 是 Q 的扩张。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：(a) 这是命题 1.1 的推论。

(b) $Q' - Q^{(M)}$ 的正性直接由 $Q' \preceq Q^{(M)}$ 得出，参见命题 1.1。为证明 $Q' - Q^{(M)}$ 是局部的，令 $f,\ g \in D(Q')$，其中 $fg = 0$。不失一般性，可以假设 $f,\ g \geq 0$；否则，我们可以将 $f,\ g$ 分解为正部和负部，并使用 $f_\pm g_\pm = 0$。由于 Q' 和 $Q^{(M)}$ 是狄利克雷型，我们还可以进一步假设 $f,\ g$ 有界。既然我们已经证明了正性，接下来只需证明 $Q'(f,\ g) - Q^{(M)}(f,\ g) \leq 0$。

设 $\varphi \in D(Q)$，且满足 $0 \leq \varphi \leq 1$。根据命题 1.1，我们有 $f\varphi,\ g\varphi \in D(Q)$，因此由命题 2.1 $f,\ g \in D(Q_\varphi)$。利用 $fg = 0$ 和 $Q \preceq Q'$，可得

$$\begin{aligned} Q'(f,g) - Q_\varphi(f,g) &= Q'(f,g) - Q(\varphi f, \varphi g) + Q(\varphi f g, \varphi) \\ &= Q'(f,g) - Q'(\varphi f, \varphi g) \\ &= Q'((1-\varphi)f, g) + Q'(\varphi f, (1-\varphi)g). \end{aligned}$$

函数 $\eta = (1-\varphi)f$ 和 $\zeta = g$ 均为非负函数，并满足 $\eta\zeta = 0$。Q' 的狄利克雷型性质意味着

$$Q'(\eta + \zeta) = Q'(|\eta + \zeta|) = Q'(|\eta - \zeta|) \leq Q'(\eta - \zeta),$$

由此，根据双线性可推出 $Q'(\eta,\ \zeta) \leq 0$。对$\eta = \varphi f$ 和 $\zeta = (1-\varphi)g$ 作同样的论证，便可得到

$$Q'(f,g) - Q_\varphi(f,g) = Q'((1-\varphi)f, g) + Q'(\varphi f, (1-\varphi)g) \leq 0.$$

根据 $Q^{(M)}$ 的定义，我们可以选取 φ，使得 $Q_\varphi(f,\ g)$ 任意接近 $Q^{(M)}(f,\ g)$，从而得到局部性。

(c) 支配关系 $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$ 和 $Q^{(k)} = 0$ 对所有非负的$f,\ g \in D(Q)$ 都推出不等式

$$Q(f,g) = Q^{(M)}(f,g) \leq Q'(f,g) \leq Q(f,g).$$

将函数分解为正部和负部后，这表明 $Q = Q'$ 在 $D(Q)$ 上成立。(ii) $\Longrightarrow$ (i)：$Q' \preceq Q^{(M)}$ 直接由 (a)、(b) 以及支配的刻画命题 1.1 得出。

$Q \preceq Q'$：由于 $D(Q')$ 包含于 $D(Q^{(M)})$，且 $D(Q)$ 是 $D(Q^{(M)})$ 中的序理想，我们得到 $D(Q)$ 也是 $D(Q')$ 中的序理想。由于 Q' 是 Q的扩张，这已经意味着支配。□

我们可以稍微改述这个定理。设 Q 是一个具有 $Q^{(k)} = 0$ 的狄利克雷型。若一对 (F, q) 由一个向量格 $F \subseteq D(Q^{(M)})$（它是 $D(Q^{(M)})$ 中的序理想）和一个具有 $D(q) = F$ 的二次型 q 组成，并满足以下性质，则称其为 Q 的抽象可容许对：

- $D(Q) \subseteq D(q)$ 且 $q(f) = 0$ 适用于 $f \in D(Q)$,
- q 是局部的且为正,
- 型 $Q_{F,\ q} = Q_{(M)}|_F + q$ 是闭的。

推论 2.9。设 Q 是具有 $Q^{(k)} = 0$ 的狄利克雷型。以下断言等价。

(i) Q' 是一个狄利克雷型，且满足 $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$。*(ii)* 存在一个抽象可容许对$(F, q)$，使得$Q' = Q_{F,q}$。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：这只是对前一个定理的重新表述。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：利用前一个定理，只需证明$Q_{F,q}$ 是一个狄利克雷型。由于 $D(Q_{F,q}) = F$ 的闭性和稠密性是抽象可容许对定义的一部分，因此只需证明马尔可夫性质。根据假设，F 是 $D(Q^{(M)})$中的一个序理想，并且对于 $f \in F$，有 $f_+ \wedge 1 \in D(Q^{(M)})$且$|f_+ \wedge 1| \leq |f|$。这表明只要 $f \in F$，就有 $f_+ \wedge 1 \in F$。此外，正如引入杀死部分后所讨论的，q 的局部性和正性意味着 q 是单调的，见 [Sch20a，引理 B.1]。这些观察以及 $Q^{(M)}$ 的马尔可夫性意味着

$$Q_{F,q}(f_+ \wedge 1) = Q^{(M)}(f_+ \wedge 1) + q(f_+ \wedge 1) \leq Q^{(M)}(f) + q(f) = Q_{F,q}(f). \qquad \square$$

注 2.10。这个推论表明，为了确定 Q 与 $Q^{(M)}$ 之间的所有夹逼型，我们需要刻画所有抽象可容许对。当 $Q^{(M)}$ 是度量空间 K 上的正则狄利克雷型，且 K 包含 X 作为稠密开子集时，这是可行的。在下一节中，我们将证明在这种情况下：

(a) 如果正局部形式的定义域包含足够多的连续函数，则这些形式对应于测度，见附录 A。若这些形式满足 $q(f) = 0$ 对于 $f \in D(Q)$，则相应的测度支集位于边界 $K \setminus X$ 上。(b) $D(Q^{(M)})$ 中的闭序理想对应于在某个开集之外消失的函数（在对连续函数附加某些稠密性假设的条件下）。

这样我们就可以将抽象可容许对与边界的开子集及其上的某些测度对应起来。

3. 正则狄利克雷型部分的支配

设 Q 是 $L^2(X,\ m)$上的正则狄利克雷型。设 $O \subseteq X$ 为一个开集，且μ 是 O的 Borel σ-代数上的拉东测度。我们通过令 $D(Q^c_{O,\ \mu}) = D(Q) \cap C_c(O)$ 来定义二次型$Q^c_{O,\ \mu}$，并且

$$Q^c_{O,\mu}(f) = Q(f) + \int_O f^2 d\mu.$$

这里，默认为 $C_c(O)$ 与 $\{\varphi \in C_c(X) \mid \operatorname{supp}\varphi \subseteq O\}$ 等同。

命题 3.1. 以下断言等价。

(i) μ 不赋予任何 Q-容量为零的集合正测度。*(ii)* 二次型 $Q^c_{O,\mu}$ 是可闭的。

在这种情况下，$Q^c_{O,\mu}$ 的闭包$Q_{O,\mu}$ 由下式给出

$$D(Q_{O,\mu}) = \{f \in D(Q) \mid \tilde{f} = 0 \text{ q.e. on } X \setminus O \text{ and } \int_O \tilde{f}^2 d\mu < \infty\},$$

$$Q_{O,\mu}(f) = Q(f) + \int_O \tilde{f}^2 d\mu.$$

证明。 (i) $\Longrightarrow$ (ii)：如 [Sto92, 定理 1.2] 中所述可得。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：由容量的内正则性以及拉东测度 μ 的内正则性，只需证明对于紧集 $K \subseteq O$，$\operatorname{cap}(K) = 0$蕴含 $\mu(K) = 0$。

现在设 $K \subseteq O$ 为满足 $\operatorname{cap}(K) = 0$的紧集。由于 Q 是正则的，存在一个 $D(Q) \cap C_c(X)$ 中的序列 (φ_n)，使得 $\|\varphi_n\|_Q \to 0$, $0 \le \varphi_n \le 1$ 且 $\varphi_n \ge 1$ 在K上成立。设 G 为满足 $K \subseteq G \subseteq O$的开且相对紧的集合。再次利用 Q的正则性，可得存在函数 $\psi \in D(Q) \cap C_c(X)$，满足 $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$在 K 上成立，且 $\operatorname{supp}\psi \subseteq G$。

现在考虑 $f_n := \psi \cdot \varphi_n$。由于 Q 是狄利克雷型，它满足 $f_n \in D(Q) \cap C_c(O) = D(Q^c_{O,\ \mu})$，并且

$$Q(f_n)^{1/2} \le Q(\psi)^{1/2} + Q(\varphi_n)^{1/2}.$$

不等式 $0 \le f_n \le 1$ 和 $\operatorname{supp} f_n \subseteq G$ 推出 $\|f_n\| \to 0$，因为 $n \to \infty$ 并且

$$\int_O |f_n|^2 d\mu \le \mu(G), \quad n \ge 1.$$

特别是，这些估计表明 (f_n) 关于型范数 $\|\cdot\|_{Q_{O,\ \mu}}$是有界的。令 $Q_{O,\ \mu}$ 为$Q^c_{O,\ \mu}$的闭包，根据 (ii)，该闭包存在。巴拿赫–萨克斯定理意味着，对于某个子列 (f_{n_k})，切萨罗平均序列

$$g_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_{n_k}$$

关于 $\|\cdot\|_{Q_{O,\ \mu}}$收敛到某个 $g \in D(Q_{O,\ \mu})$。$Q_{O,\ \mu}$的型范数大于 $\|\cdot\|$，因此我们得到关于 $\|\cdot\|$ 的 $g_n \to g$。但是由于

$\mathbf{k}f_n\mathbf{k} \to 0$，我们得出 $g = 0$。根据 (f_n) 的选取，我们还有 $g_N \in D(Q) \cap C_c(O)$，$0 \le g_N \le 1$ 并且在 K 上有 $g_N \ge 1$。综上所述，我们得到

$$\mu(K) \le \int_O |g_N|^2 d\mu \le Q_{O,\mu}(g_N) \to 0 \text{ as } N \to \infty.$$

由此得到所需的 $\mu(K) = 0$。

关于公式$Q_{O,\ \mu}$的证明可参照 [SV96，命题1.1]。 □

定义 3.2. 满足前一定理中某个条件的对$(O,\ \mu)$称为形式 Q的可容许对。此时，我们用$Q_{O,\ \mu}$表示上述形式$Q^c_{O,\ \mu}$的闭包。

命题3.3. 设(O_i, μ_i)、 $i = 1$、2是 Q的可容许对。以下断言等价：

(i) $Q_{O_1,\mu_1} \preceq Q_{O_2,\mu_2}$.
(ii) $\operatorname{cap}(O_1 \setminus O_2) = 0$ *and* $\mu_2(A) \le \mu_1(A)$ *for every Borel set* $A \subseteq O_1 \cap O_2$.

证明。 (ii) $\Longrightarrow$ (i)：这直接由(ii)以及命题3.1中给出的公式$Q_{O_i,\ \mu_i}$得出。

(i) $\Longrightarrow$(ii)：由于 $D(Q_{O_1,\ \mu_1})$ 是 $D(Q_{O_2,\ \mu_2})$ 中的格和序理想，因此有 $D(Q_{O_1,\ \mu_1}) \subseteq D(Q_{O_2,\ \mu_2})$。因此，每个 $f \in D(Q_{O_1,\ \mu_1})$ 都在 $X \setminus O_2$ 上准处处满足 $f = 0$。

现在，假设 $\operatorname{cap}(O_1 \setminus O_2) > 0$。根据 [FOT11，《定理 2.1》1]，存在一个紧集 $K \subseteq O_1 \setminus O_2$，使得 $\operatorname{cap}(K) > 0$；根据 [FOT11，《定理 2.1》5]，存在 $f \in D(Q)$，满足 $0 \le f \le 1$，并且在 K 上准处处满足 $f = 1$。由 Q 的正则性，存在 $\varphi \in D(Q) \cap C_c(O_1)$，使得在 K 上满足 $\varphi \ge 1$。于是，我们得到 $\varphi f \in D(Q_{O_1,\ \mu_1})$ 在 $X \setminus O_1$ 上准处处为 $\varphi f = 0$，并且

$$\int_{O_1} |\varphi \tilde{f}|^2 d\mu_1 \le \int_{O_1} |\varphi|^2 d\mu_1 < \infty.$$

此外，$\varphi f \ge 1$ 在 $K \subseteq X \setminus O_2$ 上准处处成立。这与 $\operatorname{cap}(K) > 0$ 一起，和函数在 $D(Q_{O_1,\mu_1})$ 中在 $X \setminus O_2$ 上准处处为零这一事实相矛盾。

还需证明关于测度的不等式。支配关系意味着

$$Q(\varphi) + \int_{O_2} |\varphi|^2 d\mu_2 \le Q(\varphi) + \int_{O_1} |\varphi|^2 d\mu_1$$

对所有非负的 $\varphi \in D(Q) \cap C_c(O_1)$ 均成立。对于任意紧集 $K \subseteq O_1 \cap O_2$ 以及 K 的任意开邻域 G，满足 $G \subseteq O_1 \cap O_2$，存在 $\psi \in C_c(X) \cap D(Q)$，使得 $\operatorname{supp} \psi \subseteq G$, $0 \le \psi \le 1$ 且 $\psi \ge 1$ 在 K 上成立。将其代入上一个不等式可得

$$\mu_2(K) \le \int_{O_2} |\psi|^2 d\mu_2 \le \int_{O_1} |\psi|^2 d\mu_1 \le \mu_1(G).$$

因此，根据拉东测度μ_1的外正则性，我们得到 $\mu_2(K) \le \mu_1(K)$。由拉东测度的内正则性可知，该结论对所有博雷尔集都成立。□

4. 正则狄利克雷型的边界及夹心半群的刻画

4.1. 正则狄利克雷型的边界。 设 Q 是 $L^2(X,m)$上的正则狄利克雷型。在本小节中，我们引入一个局部紧可分度量空间K，它包含 X 作为开子集，并将 m 扩展为K上的拉东测度$\hat{}m$，使得 $Q^{(M)}$ 可视为 $L^2(\mathrm{K},\hat{}m)$上的正则型。

空间 $C_c(X)$ 和 $L^2(X,\ m)$ 是可分的，因为 X 是局部紧可分度量空间，且 m 是拉东测度。映射

$$L^2(X,m)\to D(Q^{(M)}),\quad f\mapsto (L^{(M)}+1)^{-1}f$$

关于型范数 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q^{(M)}}$（其中 $L^{(M)}$ 表示与 $Q^{(M)}$ 相关联的正自伴算子），该映射是连续的。其像 $D(L^{(M)})$ 在 $D(Q^{(M)})$ 中关于 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q^{(M)}}$ 稠密，这表明 $(D(Q^{(M)}),\ \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q^{(M)}})$ 也是可分的。此外，[Sch20a, Theorem 4.3] 断言，对于正则狄利克雷型 Q，空间 $D(Q^{(M)})\cap C_b(X)$ 在 $D(Q^{(M)})$ 中关于 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q^{(M)}}$ 稠密（这是迈耶斯-塞林定理的一个抽象版本）。

结合这些观察可得，存在一个 $D(Q^{(M)})\cap C_b(X)$ 的子代数 C，具有以下三条性质：

- C 由可数多个元素生成。
- C 在 $D(Q_{(M)})$ 中是 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q_{(M)}}$-稠密的。
- $\mathrm{C}\cap C_c(X)$ 在 $C_c(X)$ 中一致稠密。

设 A 是 C 的一致闭包。其复化 $\mathrm{A}^{\mathbb{C}}=\{f+ig\mid f,g\in\mathrm{A}\}$ 是一个满足 $C_0(X;\mathbb{C})\subseteq\mathrm{A}^{\mathbb{C}}\subseteq C_b(X;\mathbb{C})$ 的交换 C^*- 代数。根据盖尔范德理论，存在一个局部紧、可分的豪斯多夫空间 K（在同胚意义下唯一），具有以下性质：

- X 是 K 的一个稠密开子集。
- 每个 $f\in\mathrm{A}^{\mathbb{C}}$ 都可以扩张为一个定义在 $\hat{}\ f\in C_0(\mathrm{K};\mathbb{C})$ 上的函数，并且

$$C_0(\mathcal{K};\mathbb{C})=\{\hat{f}\mid f\in\mathcal{A}^{\mathbb{C}}\}.$$

由于 C 是可数生成的，空间 K 是可度量的。因此，K 是波兰空间，也就是说，它是可分且完全可度量的，因为每个局部紧、可分且满足第二可数公理的空间都是波兰空间。由于 X 在 K 中稠密，从 A 到 K 的函数的连续扩张是唯一的，因此我们不再区分 A 的元素及其扩张。对于实值函数，这种解释得出 $\mathrm{A}=C_0(\mathrm{K})(=C_0(\mathrm{K};\mathbb{R}))$。

测度 m 在 X 上可扩张为 K 上的博雷尔测度 $\hat{}m$，定义如下：

$$\hat{m}(A)=m(A\cap X),\quad A\in\mathcal{B}(\mathcal{K}).$$

测度 $\hat{}m$ 仍然是一个具有全支撑的拉东测度。根据此定义，空间 $L^2(\mathrm{K},\hat{}m)$ 可通过酉映射自然地识别为 $L^2(X,m)$

$$R\colon L^2(\mathcal{K},\hat{m})\to L^2(X,m),\quad f\mapsto f|_X.$$

我们的讨论表明 R^{-1}(A∩L^2(X,m)) $= C_0$(K)∩L^2(K,$\hat{}m$)。由于 R 也保持序关系，因此在此变换下， L^2(X,m) 上的任意狄利克雷型都可以视为定义在 L^2(K,$\hat{}m$) 上的狄利克雷型。特别地，型 $Q^{(M)}$ 是 L^2(K,$\hat{}m$) 上的正则狄利克雷型，参见 [Sch20a，定理 4.4]。

下面的注释概述了空间 K 的唯一性。细节（尤其是相关定义，可见 [FOT11，附录 A.4]）留给读者。

注 4.1（K 的唯一性）。 空间 K 取决于代数 C 的选择。不过，给定两个具有所需性质的代数 C,C′ 及相应的空间 K,K′，存在一个酉序同构

$$U\colon L^2(\mathcal{K},\hat{m}) \to L^2(\mathcal{K}',\hat{m}')$$

使得 $0 \le f_n \le 1$, f_n ⋂ 1 蕴含 Uf_n ⋂ 1，且 U 与 $Q^{(M)}$ 和 $Q^{(M)}$相交织（将其视为定义在相应空间上的形式时）。这意味着这两个形式在 [FOT11，附录 A.4]的意义下等价。由于它们也是正则的， [FOT11，定理 A.4.2] 得出 K 与 K′ 拟同胚（并确立了相应拟同胚的其他性质）。

鉴于前面的评注，我们作如下定义。

定义 4.2. 集合 $\partial X = \mathsf{K} \setminus X$ 称为 X 相对于型 Q的边界 。

例 4.3（狄利克雷与诺伊曼拉普拉斯算子——续）. 我们沿用例 2.5 中的情形与记号，并假设势函数恒为零，即 $V = 0$。

如例 2.5 中所述，我们有 $(\mathsf{E}_0^{(D)})^{(M)} = \mathsf{E}_{(N)0}$，因此 $D((\mathsf{E}_{(D)0})^{(M)}) = H^1(\Omega)$，且 Ω 上的标准索伯列夫范数与 $(\mathsf{E}_0^{(D)})^{(M)}$ 的型范数一致。如果 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 具有连续边界（精确定义见例如 [EE18，定义 4.1]），则空间 $\{f|_\Omega \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ 关于标准索伯列夫范数在 $H^1(\Omega)$ 中稠密。因此，在这种情况下，我们可以选取代数 C，使其为 $\{f|_\Omega \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\} \subseteq C_c(\Omega)$ 的子集。由于根据斯通-魏尔施特拉斯定理，$\{f|_\Omega \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密，我们还可以假设 C 在 $C_0(\Omega)$ 中稠密，从而代数 A（即 C 的一致闭包）等于 $C_0(\Omega)$。于是，我们的构造得到 K = Ω（差一个同胚），并且 Ω 相对于 $\mathsf{E}_0^{(D)}$ 的边界与 $\mathbb{R}^n$ 中的度量边界 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ 重合。

例4.4（分数阶拉普拉斯算子——续）。 我们采用例2.6中的情形和记号。如上所述，我们有 $D((Q^{s,(D)})^{(M)}) = W^s(\Omega)$。此外，若 Ω 具有利普希茨边界，则 $\{f|_\Omega \mid f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ 在 $W^s(\Omega)$ 中关于 $Q^{s,(N)}$ 的型范数稠密；该型范数与 $W^s(\Omega)$ 上的通常范数一致，参见[DNPV12，推论 5.5]。由此，采用前一例中的相同论证可知，我们可以选取 K = Ω，使得 Ω 相对于$Q^{s,(D)}$ 的边界与度量边界 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中一致。

4.2.正则狄利克雷型的夹心半群刻画。本小节证明本文的主要结果。设 Q 是 $L^2(X,m)$ 上的一个正则狄利克雷型。我们将第3节中发展的理论应用于形式 $Q^{(M)}$，并将其视为 K，$\hat{}m$ 上的正则狄利克雷型。首先给出一个由前述讨论可得的简单观察。

命题4.5。设 Q 是一个正则狄利克雷型。那么，$(\mathcal{K},0)$ 和$(X,0)$ 是定义在 $L^2(\mathcal{K},\hat{}m)$ 上的正则狄利克雷型 $Q^{(M)}$ 的可容许对，并且有 $Q^{(M)}=(Q^{(M)})_{\mathcal{K},0}$和 $Q=(Q^{(M)})_{X,0}$。特别地，

$$D(Q)=\{f\in D(Q^{(M)})\mid \tilde{f}=0 \text{ q.e. on } \partial X\}.$$

以下是本文的主要结果。

定理4.6。设 Q 是一个满足 $Q^{(k)}=0$ 的正则狄利克雷型。对于狄利克雷型 Q'，以下断言等价:

(i) 存在一个 $Q^{(M)}$ 的可容许对(O,μ)，满足 $X\subseteq O$ 且 $\mu(X)=0$，使得 $Q'=(Q^{(M)})_{O,\mu}$.*(ii) (a)* $Q\preceq Q'\preceq Q^{(M)}$*(b)* $D(Q')\cap C_c(\mathcal{K})$ 关于 $\|\cdot\|_{Q'}$ 在 $D(Q')$ 中稠密。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii)：(a)由命题3.3以及命题4.5中讨论的恒等式得出。关于 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{(Q^{(M)})_{O,\mu}}$，$D((Q^{(M)})_{O,\mu})\cap C_c(O)$ 在 $D((Q^{(M)})_{O,\mu})$ 中的稠密性，是形式 $(Q^{(M)})_{O,\mu}$ 的定义的一部分。

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：令 D 为代数 $D(Q')\cap C_c(\mathrm{K})$ 的一致闭包。由于$D(Q')\cap C_c(\mathrm{K})$ 是 $D(Q^{(M)})\cap C_c(\mathrm{K})$ 中的代数理想（此处用到了支配性和命题3.3），D 是

$$\overline{D(Q^{(M)})\cap C_c(\mathcal{K})}^{\|\cdot\|_\infty}=C_0(\mathcal{K})$$

（此处用到了 $Q^{(M)}$ 的正则性）。此外，由定理 2.8 可得 $D(Q)\subseteq D(Q')$，因此 $D(Q)\cap C_c(X)\subseteq D(Q')\cap C_c(\mathrm{K})$。由于 Q 在 $L^2(X,m)$ 上是正则的，由此得到 $C_0(X)\subseteq \mathrm{D}$。根据 $C_0(\mathrm{K})$ 中闭理想的刻画，存在一个开集 $X\subseteq O\subseteq \mathrm{K}$，使得

$$\mathcal{D}=\{f\in C_0(\mathcal{K})\mid f=0 \text{ on } \mathcal{K}\setminus O\}.$$

综上所述，这一讨论表明，$D(Q')\cap C_c(O)$ 在 $D(Q')$ 中关于 $\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{Q'}$ 稠密，并在 $C_c(O)$ 中一致稠密。

接下来，我们证明 $D(Q')\cap C_c(O)=D(Q^{(M)})\cap C_c(O)$。设 $\varphi\in D(Q^{(M)})\cap C_c(O)$，并设 $K=\operatorname{supp}\varphi\subseteq O$。由于 Q' 是狄利克雷型，且 $D(Q')\cap C_c(O)$ 在 $C_c(O)$ 中一致稠密，因此存在 $\psi\in D(Q')\cap C_c(O)$，使得 $\psi=1$ 在 K 上成立。由于 $D(Q')\cap C_c(O)$ 是 $D(Q^{(M)})\cap C_c(O)$ 中的代数理想，我们得到 $\varphi=\psi\varphi\in D(Q')\cap C_c(O)$（此处用到了支配性和命题3.3）。

根据定理 2.8，支配条件 (a) 意味着形式 $q=Q'-Q^{(M)}$的定义域为 $D(q)=D(Q^{(M)})\cap C_c(O)$，且该形式为正、局部，并满足 $q(f)=0$，对于

所有 $f \in D(Q) \cap C_c(X)$。根据推论 A.4，存在一个拉东测度 μ 定义在 O 上，使得

$$q(f) = \int_O |f|^2 d\mu, \quad f \in D(Q^{(M)}) \cap C_c(O).$$

由于 $D(Q) \cap C_c(X)$ 在 $C_c(X)$ 中一致稠密，故 $q(f) = 0$ for $f \in D(Q) \cap C_c(X)$ 蕴含 $\mu(X) = 0$。

对于 $f \in D(Q^{(M)}) \cap C_c(O)$，根据 q 的定义，我们有

$$Q'(f) = Q^{(M)}(f) + \int_O |f|^2 d\mu = (Q^{(M)})^c_{O,\mu}(f).$$

由于 Q' 是闭的，且 $D(Q^{(M)}) \cap C_c(O)$ 在 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}_{Q'}$ 意义下于 $D(Q')$ 中稠密，这意味着 (O, μ) 是 $Q^{(M)}$ 和 $Q' = (Q^{(M)})_{O,\mu}$ 的可容许对。□

我们可以将此定理改述如下。

推论 4.7。设 Q 是一个具有 $Q^{(k)} = 0$的正则狄利克雷型。对于狄利克雷型 Q'，以下断言等价。

(i) 存在一个开子集 $\partial_\mu X \subseteq \partial X$ 以及一个定义在 $\partial_\mu X$ 上、对 $Q^{(M)}$-容量为零的集合不赋予测度的拉东测度 μ，使得

$$D(Q') = \{f \in D(Q^{(M)}) \mid \tilde{f} = 0 \ q.e. \ on \ \partial X \setminus \partial_\mu X \ and \ \int_{\partial_\mu X} |\tilde{f}|^2 d\mu < \infty\}$$

and

$$Q'(f) = Q^{(M)}(f) + \int_{\partial_\mu X} |\tilde{f}|^2 d\mu.$$

(ii) (a) $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$ *(b)* $D(Q') \cap C_c(\mathcal{K})$ 关于 $\|\cdot\|_{Q'}$ 在 $D(Q')$ 中是稠密的。

作为这一结果及我们的例子的应用，我们在稍弱的限制性假设下得到了 [AW03] 的主要结果之一。

例 4.8。我们再次考虑例 2.5 中 Ω 上薛定谔算子的情形，其中有 $V = 0$。进一步假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 具有连续边界，并令 Q 为定义在 $L^2(\Omega)$ 上且对应于马尔可夫半群 (S_t) 的狄利克雷型。令 $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ 为 Ω 的度量边界。结合例 2.5 和例 4.3 中的讨论以及前面的推论，可得以下断言彼此等价。

(i) 存在一个开子集 $\partial_\mu\Omega \subseteq \partial\Omega$，以及定义在 $\partial_\mu\Omega$ 上的拉东测度 μ，该测度不赋予 $\mathrm{E}_0^{(N)}$ -容量为零的集合任何测度，使得

$$D(Q) = \{f \in H^1(\Omega) \mid \tilde{f} = 0 \text{ q.e. on } \partial\Omega \setminus \partial_\mu\Omega \text{ and } \int_{\partial_\mu\Omega} |\tilde{f}|^2 d\mu < \infty\}$$

and

$$Q(f) = \int_\Omega |\nabla f|^2 dx + \int_{\partial_\mu\Omega} |\tilde{f}|^2 d\mu.$$

(ii) (a) $(e^{t\Delta^{(D)}}) \preceq (S_t) \preceq (e^{t\Delta^{(N)}})$

(b) $D(Q) \cap C_c(\overline{\Omega})$ is dense in $D(Q)$ with respect to $\|\cdot\|_Q$.

这正是 [AW03, 定理 4.1] 的表述，只是采用了稍微宽松一些的假设：Ω 具有连续边界，而非利普希茨边界。

例4.9。 我们采用例2.6中分数阶拉普拉斯算子的情形。进一步假设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 具有利普希茨边界，并令 Q 为定义在 $L^2(\Omega)$ 上且具有相应马尔可夫半群 (S_t) 的狄利克雷型。令 $\partial\Omega = \Omega \setminus \Omega$ 为 Ω 的度量边界。结合例2.6和例4.4中的讨论以及前面的推论，可得以下断言彼此等价。

(i) 存在一个开子集 $\partial_\mu\Omega \subseteq \partial\Omega$ 以及 Ω 上的一个拉东测度 μ，该测度不赋予 Q^s-$^{(N)}$容量为零的集合以正测度，使得

$$D(Q) = \{f \in W^s(\Omega) \mid \tilde{f} = 0 \text{ q.e. on } \partial\Omega \setminus \partial_\mu\Omega \text{ and } \int_{\partial_\mu\Omega} |\tilde{f}|^2 d\mu < \infty\}$$

and

$$Q(f) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dx\, dy + \int_{\partial_\mu\Omega} |\tilde{f}|^2 d\mu.$$

(ii) (a) $(e^{-tH_s^{(D)}}) \preceq (S_t) \preceq (e^{-tH_s^{(N)}})$ (b) $D(Q) \cap C_c(\Omega)$ 关于 $\|\cdot\|_Q$ 在 $D(Q)$ 中稠密。

蕴含关系 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 也由 Claus 和 Warma [在与一种相关但不同的分数阶拉普拉斯算子相联系的狄利克雷型情形下证明了2]CW20，定理 4。

正如引言中所提到的，我们希望为一般狄利克雷型给出 [AW03] 结果的一个版本。在抽象框架中，我们尽可能地保持一般性；但对于正则狄利克雷型，我们则有所保留。以下评注汇总了从我们的一般框架还可以推导出的其他结论（代价是牺牲简洁性和技术上的简便性）。

注 4.10. (a) [AW03] 的另一个结果是，将与半群 $(e^{t\Delta^{(D)}}) \preceq (S_t) \preceq (e^{t\Delta^{(N)}})$ 相对应的算子描述为具有罗宾型边界条件的拉普拉斯算子。在此处也可以通过在抽象边界 ∂X 上赋予所谓的调和测度来实现类似的做法。这使得法向导数密度的定义成为可能，并导出抽象的罗宾边界条件。在欧几里得情形下，若 Ω 具有利普希茨边界，则调和测度相对于 Ω 上的曲面测度彼此绝对连续，而抽象法向导数就是通常意义下的法向导数。

(b) 在定理4.6中，我们利用了 $D(Q') \cap C_c(K)$ 在 $D(Q')$ 中稠密这一点，因为我们将集合 O 构造为该闭理想零集的补集

$$\overline{D(Q') \cap C_c(\mathcal{K})}^{\|\cdot\|_\infty}$$

在 $C_0(K)$ 中。可以去掉稠密性假设，改用 [S 到 93] 中给出的正则狄利克雷空间中闭理想的刻画来替代这一论证。

在这种情况下，定理4.6无需断言 (ii)(b) 仍然成立，但应将 O open 替换为 O quasi-open。

（c）我们始终假设杀死部分消失。若 $Q^{(k)} \neq 0$，则最大形式的参考对象有两种可能的选择:

（1）可以通过抽象可容许对刻画所有满足 Q' 且具有 $Q \preceq Q' \preceq Q^{(M)}$ 的狄利克雷型。由于在这种情况下， $Q^{(M)}$ 不是 Q的扩张，与 Q' 对应的抽象可容许对的形式 q在 D（Q）上不消失，而是被 $Q^{(k)}$从上方界定。在正则情形下，这意味着与 Q' 对应的可容许对中的测度 μ 不一定仅支集于 ∂X。它在 X 上满足 $\mu \leq k$ ，其中 k 是与局部正形式 $Q^{(k)}$ 对应的测度（参见附录 A）。

（2）不将 Q' 与 $Q^{(M)}$ 进行比较，可以刻画 $Q \preceq Q' \preceq Q^{\mathrm{ref}}$，其中 Q^{ref} 是 Q 的活跃反射狄利克雷形式。它通过将 $Q^{(k)}$ 的适当扩张添加到 $Q^{(M)}$而得到，参见 [Sch20a，第3节。3]在这种情况下，我们的主要定理仍然成立，但证明会大幅变长。

附录 A. $C_c(X)$ 上的双线性形式

设 X 是一个局部紧度量空间。本节我们将刻画定义在 $C_c(X)$ 上的正局部形式。首先证明，如果定义在 $C_c(X)$ 上的稠密定义正形式的定义域是一个格，那么它们可以扩张到整个 $C_c(X)$。接下来，我们证明一个表示定理。这两个结果当然为专家所熟知。由于我们未能找到合适的参考文献，为方便读者起见，我们在此给出证明。

在下面的引理中，我们用 $C(K)$ 表示子空间 $\{f \in C_c(X) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K\}$。

引理 A.1. 设 q 是定义在 $D(q) \subseteq C_c(X)$ 上的稠密定义（相对于一致范数）二次型。假设 q 是正的，且 $D(q)$ 是一个格。

(a) 对任意紧 $K \subseteq X$， q 在 $D(q) \cap C(K)$ 上的限制都是连续的。

(b) q 可唯一延拓为定义在 $C_c(X)$ 上的正二次型。

证明。 首先证明，对于任意紧集 $K \subseteq X$， q 在 $D(q) \cap C(K)$ 上的限制关于上确界范数是连续的。

令 $f, g \in D(q) \cap C(K)$ 非负。取 $\theta_K \in D(q)$，使得 $\theta_K \geq 0$ 且 $\theta_K \geq 1$ 在 K 上成立。这样的函数存在，因为 $D(q)$ 是 $C_c(X)$ 中的稠密格。不失一般性，假设

$$q(\|f\|_\infty \theta_K, g) - q(\|g\|_\infty \theta_K, f) \leq 0,$$

for 否则，我们可以交换 f 和 g。然后，利用 q 的正性，我们得到 t

$$\begin{aligned} 0 &\leq q(\|f\|_\infty \theta_K - f, \|g\|_\infty \theta_K + g) \\ &= -q(f,g) + \|f\|_\infty \|g\|_\infty q(\theta_K, \theta_K) + q(\|f\|_\infty \theta_K, g) - q(\|g\|_\infty \theta_K, f) \\ &\leq -q(f,g) + \|f\|_\infty \|g\|_\infty q(\theta_K, \theta_K). \end{aligned}$$

这意味着

$$0 \leq q(f,g) \leq \|f\|_\infty \|g\| q(\theta_K, \theta_K).$$

对于任意 f，$g \in D(q) \cap C(K)$，由于$D(q)$ 是一个格，我们有 f^+，f^-，g^+，$g^- \in D(q) \cap C(K)$。由此得到

$$\begin{aligned} |q(f,g)| &\leq q(f^+,g^+) + q(f^+,g^-) + q(f^-,g^+) + q(f^-,g^-) \\ &\leq 4\|f\|_\infty \|g\|_\infty q(\theta_K, \theta_K). \end{aligned}$$

利用这一连续性，为了证明 q 可以唯一延拓为 $C_c(X)$ 上的正二次型，只需证明以下命题：对于每个非负的$\varphi \in C_c(X)$，都存在一个紧集 $K \subseteq X$，使得 $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$，并且 φ 可以用 $D(q) \cap C(K)$ 中的非负函数逼近。

为此，我们选取一个非负的 $\theta \in D(q)$，使得在 $\operatorname{supp}\varphi$ 上 $\theta \geq \mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty$。这样的函数存在，因为 $D(q)$ 是一个稠密格。令 $K = \operatorname{supp}\theta$. 由于 q 在稠密定义的，存在 $D(q)$ 中的 $(\tilde{\varphi}_n)$，使得 $\tilde{\varphi}_n \to \varphi$ 一致收敛，且 $n \to \infty$。由于 $D(q)$ 是一个格，序列

$$\varphi_n = (\tilde{\varphi}_n)^+ \wedge \theta$$

属于 $D(q)$。它是非负的，并且对所有 $n \geq 1$，$\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \operatorname{supp}\theta = K$。此外，利用 $0 \leq \varphi \leq \theta$，我们得到 $\varphi_n \to \varphi$ 一致收敛，当 $n \to \infty$时。□

以下定理给出了 $C_c(X)$ 上单调二次型的刻画。

定理 A.2. 令 $q\colon C_c(X) \to [0,\infty)$ 为一个二次型。以下断言等价：

(i) q 是正的且局部的。*(ii)* 对所有 $f, g \in C_c(X)$，不等式 $fg \geq 0$ 蕴含 $q(f,g) \geq 0$。*(iii)* 对所有 $f, f', g, g' \in C_c(X)$，不等式 $fg \geq f'g'$ 蕴含 $q(f,g) \geq q(f',g')$。*(iv)* q 是单调的。*(v)* 存在一个拉东测度 μ 定义在 X 上，使得

$$q(u) = \int_X f^2 d\mu, \quad f \in C_c(X).$$

在这种情况下，测度 μ 是唯一的。

证明。显然，(ii) 蕴含 (i)，(iii) 蕴含 (ii)，而 (v) 蕴含所有其他断言。(i) $\Longrightarrow$ (iv)：令 $f, g \in C_c(X)$，其中 $|g| \leq |f|$。q 的正性得出

$$q(|f|) = q(|g|,|f|) + q(|f|-|g|,|f|) \geq q(|g|,|f|) = q(|g|) + q(|g|,|f|-|g|) \geq q(|g|).$$

尚需证明，对于每个 $f \in C_c(X)$，$q(f) = q(|f|)$。由于 f^+，$f^- \in C_c(X)$ 且 $f^+ f^- = 0$，由 q的局部性可知 $q(f^+, f^-) = 0$，因此

$$q(f) = q(f^+) - 2q(f^+,f^-) + q(f^-) = q(f^+) + 2q(f^+,f^-) + q(f^-) = q(|f|).$$

(iv) $\Longrightarrow$(ii)：设 f， $g \in C_c(X)$，其中 $fg \geq 0$。于是 $|f+g| \geq |f-g|$，由单调性可得

$$q(f)+q(g)-2q(f,g)=q(f-g) \leq q(f+g) \leq q(f)+q(g)+2q(f,g).$$

这证明了（ii）。

我们已经证明了（i）、（ii）和（iv）等价，并证明这些断言可由（iii）推出。接下来证明它们可以推出（iii）。

设 $f, f', g, g' \in C_c(X)$，其中 $fg \geq f'g'$。若 $f = f'$，则不等式 $q(f,g) \geq q(f', g')$ 可直接由（ii）得出。借助一个逼近，我们将情形$f \neq f'$ 归结为此情形。

我们先作如下观察： q 的局部性意味着，对于 $\varphi, \chi \in C_c(X)$，只要 $\chi = 1$ 在 supp φ 上，值 $q(\varphi, \chi)$ 就与 χ 无关。在这种情况下，我们记 $I(\varphi) := q(\varphi, \chi)$。

设 $\varepsilon > 0$。由支集的紧性，我们可以选取有限多个相对紧开集 $G_j, j = 1, \ldots, N$，覆盖f, f', g, g'的支集之并，并选取 $\xi_j \in G_j$，使得

$$\sup_{x \in G_j} |f(x) - f(\xi_j)| < \varepsilon \text{ and } \sup_{x \in G_j} |f'(x) - f'(\xi_j)| < \varepsilon.$$

令 $\chi_j \in C_c(X)$、 $j = 1$、.....、 N 为一个从属单位分解，即 $0 \leq \chi_j \leq 1$，supp $\chi_j \subseteq G_j$ and

$$\sum_{j=1}^{N} \chi_j = 1 \text{ on } \bigcup_{j=1}^{N} G_j.$$

由于度量空间是正规空间，这样的单位分解存在。定义

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\chi_j \text{ and } \tilde{f'} = \sum_{j=1}^{N} f'(\xi_j)\chi_j.$$

然后，在 f、 g 的支集上使用 $\sum_j \chi_j = 1$ ，得到

$$|q(\tilde{f}, g) - q(f, g)| \leq \sum_{j=1}^{N} |q(\chi_j(f - f(\xi_j)), g)| \leq \varepsilon q(\sum_{j=1}^{N} \chi_j, |g|) = \varepsilon I(|g|).$$

对于第二个不等式，我们使用了 $|q(\varphi, \psi)| \leq q(|\varphi|, |\psi|)$，这直接由 q 的正性以及 $|\chi_j(f - f(\xi_j))| \leq \varepsilon\chi_j$ 这一事实得到。同样地，我们有

$\sim|q(f',g') - q(f'g')| \le \varepsilon I(|g'|)$。此外，

$$\begin{aligned} q(\tilde{f},g) - q(\tilde{f}',g') &= \sum_{j=1}^{N}(q(f(\xi_j)\chi_j,g) - q(f'(\xi_j)\chi_j,g')) \\ &= \sum_{j=1}^{N} q(\chi_j, f(\xi_j)g - f'(\xi_j)g') \\ &\ge \sum_{j=1}^{N} q(\chi_j, fg - f'g') - \varepsilon q(\sum_{j=1}^{N}\chi_j, |g| + |g|') \\ &\ge -\varepsilon I(|g| + |g'|). \end{aligned}$$

对于第一个不等式，我们使用了 (ii) 和估计

$$\chi_j(f(\xi_j)g - f'(\xi_j)g') \ge \chi_j(fg - f'g' - \varepsilon(|g| + |g'|)).$$

最后一个不等式由 $\chi_j(fg - f'g') \ge 0$ 以及 $\sum_j \chi_j = 1$ 在$|g| + |g'|$的支集上成立推出。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这些估计表明 (iii) 成立。

(iii) $\Longrightarrow$ (v)：如上所述，我们定义 I： $C_c(X) \to \mathbb{R}$，令

$$I(\varphi) = q(\chi, \varphi)$$

对某个 $\chi \in C_c(X)$，其在 φ 的支集上满足 $\chi = 1$。由 (iii) 可知，这一定义良好且为正。此外， I 是线性的。根据黎斯-马尔可夫-角谷表示定理，存在唯一的拉东测度 μ，使得

$$I(\varphi) = \int_X \varphi d\mu$$

对所有 $\varphi \in C_c(X)$ 均成立。现在令 f， $g \in C_c(X)$，并令 $\chi \in C_c(X)$ 满足 $\chi = 1$ 在 f 和 g 的支集上成立。由于 $fg = \chi(fg)$，性质 (iii) 给出

$$q(f,g) = q(\chi, fg) = I(fg) = \int_X fg d\mu.$$

因此， μ就是所需的测度。 □

注 A.3. 该定理的陈述不仅对连续函数上的二次型成立。(ii) 与 (iv) 的等价性已在 [Sch20a，附录 B] 中针对 $L^0(Y, m)$ 的子格上的二次型得到证明，其中 Y是任意集合， m 是 Y上的测度。事实上，上述证明在这种情形下给出了 (i)、(ii) 与 (iv) 的等价性。与 (iii) 等价还要求 q 的定义域中存在适当的单位分解；与 (v) 等价则要求 q 的定义域是一个代数，并且正泛函满足表示定理。

推论 A.4. 设 q 是定义在$C_c(X)$ 上的稠密定义的正局部二次型，且 $D(q)$是一个格。那么存在唯一的拉东测度 μ 定义在X 上，使得

$$q(f) = \int_X f^2 d\mu, \quad f \in D(q).$$

证明。 如前一条注记所述，型 q 也是单调的。根据引理 A.1，它可以唯一扩张为定义在 $C_c(X)$上的正二次型；由于限制到紧集的连续性，此扩张也是单调的。因此，结论由前一定理得出。□

参考文献

[ACD21] Sahiba Arora、Ralph Chill 和 Jean-Daniel Djida。正则型生成的半群的支配。2021。[Akh18] Khalid Akhlil。半群的局部性与支配。Results Math., 73(2):Art. 59, 11, 2018。[AW03] Wolfgang Arendt 和 Mahamadi Warma。狄利克雷和诺伊曼边界条件：两者之间是什么？J. Evol. Equ., 3(1):119–135, 2003。谨以此文献献给 Philippe Bénilan。[CF12] Zhen-Qing Chen 和 Masatoshi Fukushima。《对称马尔可夫过程、时间变换与边界理论》，伦敦数学会专著丛书第35卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012。[Cla21] Burkhard Claus。非线性狄利克雷型。博士论文，德累斯顿工业大学，德累斯顿，2021。[CW12] Ralph Chill 和 Mahamadi Warma。p-拉普拉斯算子的狄利克雷和诺伊曼边界条件：两者之间是什么？Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 142(5):975–1002, 2012。[CW20] Burkhard Claus 和 Mahamadi Warma。通过型方法实现具有非局部外部条件的分数阶拉普拉斯算子。J. Evol. Equ., 20(4):1597–1631, 2020。[DNPV12] Eleonora Di Nezza、Giampiero Palatucci 和 Enrico Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间入门指南。Bull. Sci. Math., 136(5):521–573, 2012。[EE18] D. E. Edmunds 和 W. D. Evans。谱理论与微分算子。牛津数学专著。牛津大学出版社，牛津，2018。[FOT11] Masatoshi Fukushima、Yoichi Oshima 和 Masayoshi Takeda。《狄利克雷型与对称马尔可夫过程》，德格鲁特数学研究丛书第19卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，增订版，2011。[KLSS19] Matthias Keller、Daniel Lenz、Marcel Schmidt 和 Michael Schwarz。离散空间上狄利克雷型的边界表示。J. Math. Pures Appl. (9), 126:109–143, 2019。[LM72] J.-L. Lions 和 E. Magenes。《非齐次边值问题及其应用》第I卷。数学科学基础丛书第181卷。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1972。P. Kenneth 英译自法文。[Ouh96] E. Ouhabaz。闭凸集的不变性与半群的支配判据。Potential Analysis, 5(6):611–625, 1996。[Pos14] Andrea Posilicano。对称二阶椭圆微分算子的马尔可夫扩张。Math. Nachr., 287(16):1848–1885, 2014。[RS78] Michael Reed 和 Barry Simon。《现代数学物理方法》第IV卷：算子分析。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]，纽约—伦敦，1978。[Sch17] Marcel Schmidt。能量型。博士论文，2017年3月。[Sch20a] Marcel Schmidt。关于反射狄利克雷型的一则注记。Potential Anal., 52(2):245–279, 2020。[Sch20b] Michael Schwarz。《狄利克雷型的节点域与边界表示》。博士论文，2020年1月。[Sto92] Peter Stollmann。正则狄利克雷型的光滑扰动。Proc. Amer. Math. Soc., 116(3):747–752, 1992。[Sto93] Peter Stollmann。狄利克雷空间中的闭理想。Potential Anal., 2(3):263–268, 1993。

[SV96] Peter Stollmann 和 Jürgen Voigt。测度对狄利克雷型的扰动。*PotentialAnal.*, 5(2):109–138, 1996。M.Keller，数学研究所，波茨坦大学，戈尔姆校区，9号楼，Karl-Liebknecht-Str. 24-25，14476 Potsdam OT Golm，德国电子邮箱：matthias.keller@uni-potsdam.deD.Lenz，数学研究所，耶拿弗里德里希·席勒大学，07737 耶拿，德国电子邮箱：daniel.lenz@uni-jena.de M. Schmidt，数学研究所，莱比锡大学，Augustusplatz 10，04109 莱比锡，德国电子邮箱：marcel.schmidt@math.uni-leipzig.deM. Schwarz，dotSource GmbH，歌德街1号，07743 耶拿，德国电子邮箱：m.schwarz@dotSource.deM. Wirth，奥地利科学技术研究所（ISTA），Am Campus 1，3400 克洛斯特新堡，奥地利电子邮箱：melchior.wirth@ist.ac.at