arXiv:2301.01039v1 [math.CA] 3 Jan 2023

超立方体上的 Brass-Stancu-Kantorovich 算子*

¨GULEN BAS¸CANBAZ-TUNCA 和 HEINER GONSKA

This study is dedicated to Professor Ioan Raşa on the occasion of his 70th birthday

Abstract. 我们研究依赖于一个非负整数参数、定义在单位超立方体上所有勒贝格可积函数所构成空间中的多元 Brass-Stancu-Kantorovich 算子。我们证明了 L^p-逼近，并用多元平均连续模及相应的 L^p-模给出了逼近误差的 L^p-范数估计。

1. Introduction and Historical Notes

著名伯恩斯坦算子的基本函数定义如下:

$$p_{n,k}(x)=\begin{cases}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}; & 0\le k\le n\\ 0; & k<0 \text{ or } k>n\end{cases},\quad x\in[0,1]. \tag{1.1}$$

在 [23], 使用概率方法的过程中，Stancu 将伯恩斯坦的基本函数推广为

$$w_{n,k,r}(x):=\begin{cases}(1-x)\,p_{n-r,k}\,(x)\,; & 0\le k<r\\ (1-x)\,p_{n-r,k}\,(x)+xp_{n-r,k-r}\,(x)\,; & r\le k\le n-r\\ xp_{n-r,k-r}\,(x)\,; & n-r<k\le n\end{cases},\ x\in[0,1], \tag{1.2}$$

其中， r 是一个非负整数参数， n 是满足 $n>2r$ 的任意自然数，每个 $p_{n-r,\ k}$ 由式 (1.1) 给出，因此构造并研究了如下伯恩斯坦型正线性算子:

$$L_{n,r}\,(f;x):=\sum_{k=0}^{n}w_{n,k,r}(x)f\left(\frac{k}{n}\right),\quad x\in[0,1], \tag{1.3}$$

当 $f\in C[0,1]$ 时。在此过程中，Stancu 受到 Brass 的一篇文章 [8] 的启发。Gonska [11] 对此作了进一步讨论。其中还给出了以二阶光滑模为依据的连续函数估计。

显然，对于式 (1.2) 中的 $x\in[0,1]$ Stancu 基本函数，有

$$w_{n,k,r}(x)\ge 0 \text{ and } \sum_{k=0}^{n}w_{n,k,r}(x)=1,$$

*Key words and phrases.*多元 Kantorovich 算子；多元平均光滑模；多元 K-泛函
2010 MSC：41A36，41A25，26A45

*本文是对 ICATA 2022 上所作报告的扩展。

因此，算子 $L_{n,\ r}$ 可表示为

$$L_{n,r}\left(f;x\right):=\sum_{k=0}^{n-r}p_{n-r,k}\left(x\right)\left[\left(1-x\right)f\left(\frac{k}{n}\right)+xf\left(\frac{k+r}{n}\right)\right],\qquad(1.4)$$

定义于 $n\geq r$，并满足端点插值 $L_{n,\ r}(f;0)=f(0)\ \ L_{n,\ r}(f;1)=f(1)$。因此，将其称为 $L_{n,\ r}$Brass-Stancu-Bernstein（BSB）算子似乎是合理的。

在 [24] Stancu 给出了一致收敛 $\lim_{n\to\infty}L_{n,\ r}(f)=f$ 于 $[0,1]$ 上（当 $f\in C[0,1]$ 时），并通过二阶差商给出了逼近公式 $f(x)=L_{n,\ r}(f;\ x)+R_{n,\ r}(f;\ x)$ 的余项 $R_{n,\ r}(f;\ x)$ 的表达式，同时还获得了该余项的积分表示。此外，作者通过经典连续模估计了算子 $L_{n,\ r}(f)$ 的逼近阶。他还研究了 $L_{n,\ r}$ 的谱性质。

在 $r=0$ 和 $r=1$的情况下，算子 $L_{n,\ r}$ 退化为经典的伯恩斯坦算子 B_n，即

$$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right).$$

还需提及的是：Stancu 本人在 1983年 的论文中指出：“如果取 $r=0$ 或 $r=1$，就可以优化利用 $L_{n,\ r}f$ 对函数f 进行逼近时的误差界，此时算子 $L_{n,\ r}$就退化为伯恩斯坦算子。”因此，这种方法存在一个缺点。

由于伯恩斯坦多项式不适用于逼近不连续函数（见 [14, 第 1.9]节），坎托罗维奇 [12] 将点求值 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ 替换为节点$\frac{k}{n}$ 附近小区间上的积分平均，从而推广了伯恩斯坦算子：

$$K_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(x\right)\left(n+1\right)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f\left(t\right)dt,\quad x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N},\qquad(1.5)$$

对于定义在 $[0,1]$上的勒贝格可积函数 f。

坎托罗维奇 [13] 在他的《数学回忆录》第 239 页写道：“我等待一位迟到的学生时，翻阅了《Fundamenta Mathematicae》第 XIII 卷，在其中看到莫斯科数学家 Khlodovskii 关于伯恩斯坦多项式的一则札记。我由此初次了解到伯恩斯坦多项式；他于 1912 年提出这种多项式，用以对著名的魏尔斯特拉斯定理作初等证明.....我立刻想到，能否将这些多项式中函数在某些点处的取值，改为函数在相应区间上更稳定的平均值。结果证明这是可行的，而且这种形式的多项式不仅适用于连续函数，也适用于任意勒贝格可和函数。”

洛伦兹 [14] 证明了 $\lim_{n\to\infty}\left\|K_n(f)-f\right\|_p=0, f\in L^p[0,1],\ 1\leq p<\infty$。

关于经典康托罗维奇算子的研究文章很多，尤其是关于其逼近阶以及

不同类型的二阶模的重要性。参见 Berens 和 DeVore [5], [6], Swetits 和 Wood [25] 以及 Gonska 和 Zhou [10]的研究。进一步讨论这一问题超出了本文的范围。作为对这里经典情形的进一步研究，我们仅提及 M¨uller[16], Maier [15], 和 Altomare 等人于 1976年发表的研究 [1], 另请参阅其中的参考文献。

类似于康托罗维奇算子，Bodur 等人 [7] 构造了 BSB算子的康托罗维奇型修正，即

$$K_{n,r}(f;x) := \sum_{k=0}^{n} w_{n,k,r}(x) \left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt \right), \quad x \in [0,1], \tag{1.6}$$

对于 $f \in L^1[0,1]$，其中 r 是非负整数参数， n 是满足 $n > 2r$ 且 $w_{n,\,k,\,r}(x)$ 的自然数，它们由（1.2）给出。并且，已证明，当 $f \in L^p[0,1]$、$1 \le p < \infty$ 时，$\lim_{n\to\infty} \|K_{n,\,r}(f) - f\|_p = 0$。此外，还得到每个 $K_{n,\,r}$ 也是变差递减的[7]。在全文中，我们将把由（1.6）给出的算子 $K_{n,\,r}$ 称为“Brass-Stancu-Kantorovich”算子，即 BSK算子。

注意，根据 $w_{n,\,k,\,r}$的定义， $K_{n,\,r}(f;\,x)$ 可表示为

$$\begin{aligned} & K_{n,r}(f;x) \\ = & \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)\,(n+1) \left[(1-x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt + x \int_{\frac{k+r}{n+1}}^{\frac{k+r+1}{n+1}} f(t)\,dt \right] \end{aligned} \tag{1.7}$$

且在 $r=0$ 和 $r=1$ 的情形下，它们退化为由 (1.5) 给出的坎托罗维奇算子；$K_{n,\,0} = K_{n,\,1} = K_n$ 同样，对所有 $n \ge r$均有定义。

多元情形

关于 BSB 和 BSK 算子的多元情形，已有一些研究。对于标准单纯形，例如 Yang、Xiong 和 Cao [27]以及 Cao [9], 对此进行了研究。例如，Cao 证明了多元斯坦库算子保持多元连续模的性质，并借助 Ditzian-Totik连续模得到了收敛速度。

在本文中，受 Altomare 等人的工作 [3], 启发，我们研究单位 d维超立方体上的 BSK算子的多元扩展，并研究这些算子的 L^p 逼近。对于收敛速度，我们用所谓的一阶多元 τ-模给出一个估计量，该量源自保加利亚逼近论学派。此外，受 M¨uller 在 [17], 中的方法启发，我们利用 τ-模的性质，给出关于可微函数及其类似函数的估计，这些估计用 L^p-光滑模表示。Quak[20], [21] 的工作在这里也很有帮助。

2. Preliminaries

考虑空间 $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$。令 $\|\mathbf{x}\|_\infty$ 表示点 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$的最大范数;

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \|\mathbf{x}\|_{\max} = \max_{i\in\{1,\ldots,d\}} |x_i|$$

并令 $\mathbf{1}$ 表示常函数 $\mathbf{1}$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 满足对 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 有 $\mathbf{1}(\mathbf{x}) = 1$。并且, 对每个 $j = 1, \ldots, d$, 令

$$pr_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

表示定义在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 上的第 j 个坐标函数, 其定义为

$$pr_j(\mathbf{x}) = x_j.$$

定义 2.1. 多重指标是由非负整数组成的 d 元组 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$。其范数（长度）为

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.$$

微分算子 $D^{\boldsymbol{\alpha}}$ 定义为

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} f = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} f,$$

其中 D_i、 $i = 1$、.....、 d 是相应的偏导数算子（见[4,第 335] 页）。

全文中, $Q_d := [0,1]^d$、 $d \in \mathbb{N}$ 表示 d 维单位超立方体, 我们考虑空间

$$L^p(Q_d) = \{f : Q_d \to \mathbb{R} \mid f \ p\text{-integrable on } Q_d\}, \ 1 \le p < \infty,$$

其标准范数为 $\|.\|_p$。回顾通常的L^p阶光滑模量的一阶定义:

定义 2.2. 设 $f \in L^p(Q_d)$ $1 \le p < \infty$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ 且 $\delta > 0$。函数 f 关于步长 δ 的一阶光滑模量在L^p-范数下定义为

$$\omega_1(f;\delta)_p = \sup_{0<\|\mathbf{h}\|_\infty \le \delta} \left(\int_{Q_d} |f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in Q_d$ [21]。

设 $M(Q_d) := \{f \mid f$ 在 $Q_d\}$ 上有界且可测。下面介绍一阶平均光滑模量的概念。

定义 2.3. 设 $f \in M(Q_d)$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$ 和 $\delta > 0$。函数f 的一阶多元平均光滑模, 或 τ-模, 步长为 δ, 在 L^p-范数下定义为

$$\tau_1(f,\delta)_p := \|\omega_1(f,.;\delta)\|_p, \ 1 \le p < \infty,$$

其中

$\omega_1(f,\mathbf{x};\delta) =$

$\sup\left\{|f(\mathbf{t}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{t})| : \mathbf{t}, \mathbf{t}+\mathbf{h} \in Q_d, \ \|\mathbf{t}-\mathbf{x}\|_\infty \le \frac{\delta}{2}, \|\mathbf{t}+\mathbf{h}-\mathbf{x}\|_\infty \le \frac{\delta}{2}\right\}$

是函数f 在点 $\mathbf{x} \in Q_d$ 处、步长为 δ 时的一阶多元局部光滑模。 [21]。

为便于后续讨论，我们需要以下关于一阶多元平均光滑模的性质：

对于 $f \in M(Q_d)$ $1 \leq p < \infty$ 和 $\delta, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}^+$，有

τ_1) $\tau_1(f,\delta)_p \leq \tau_1(f,\lambda)_p$ for $0 < \delta \leq \lambda$,

τ_2) $\tau_1(f,\lambda\delta)_p \leq (2\lfloor\lambda\rfloor+2)^{d+1}\tau_1(f,\delta)_p$, where $\lfloor\lambda\rfloor$ is the greatest integer that does not exceed λ,

τ_3) $\tau_1(f,\delta)_p \leq 2\sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\geq 1}\delta^{|\boldsymbol{\alpha}|}\left\|D^{\boldsymbol{\alpha}}f\right\|_p$, $\alpha_i = 0$ or 1, if $D^{\boldsymbol{\alpha}}f \in L^p(Q_d)$ for all multi-indices $\boldsymbol{\alpha}$ with $|\boldsymbol{\alpha}| \geq 1$ and $\alpha_i = 0$ or 1 (see [19] or [21]).

关于平均光滑模的详细介绍，请参阅 Sendov 和 Popov 的著作 [22]。

现在，考虑由函数 $f \in L^p(Q_d)$ $1 \leq p < \infty$构成的索伯列夫空间 $W_1^p(Q_d)$，其（分布）导数 $D^{\boldsymbol{\alpha}}f$ 属于 $L^p(Q_d)$，其中$|\boldsymbol{\alpha}| \leq 1$，并配备半范数

$$|f|_{W_1^p} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=1}\left\|D^{\boldsymbol{\alpha}}f\right\|_p$$

（见 [4, 第 336] 页）。回顾一下，对于所有 $f \in L^p(Q_d)$， L^p 范数下的 K-泛函定义为

$$K_{1,p}(f;t) := \inf\left\{\|f-g\|_p + t\,|g|_{W_1^p} : g \in W_1^p(Q_d)\right\} \quad (t>0). \tag{2.1}$$

$K_{1,\ p}(f;\ t)$与通常的一阶光滑模f、 $\omega_1(f;\ t)_p$等价；也就是说，存在正常数 c_1和 c_2，使得

$$c_1 K_{1,p}(f;t) \leq \omega_1(f;t)_p \leq c_2 K_{1,p}(f;t) \quad (t>0) \tag{2.2}$$

对所有 $f \in L^p(Q_d)$均成立（参见 [4, 第 341]页的公式4.42）。

下面这个由 Quak [21] 给出的结果，利用一阶平均光滑模，给出了多元正线性算子逼近误差的 L^p-范数的上界估计。注意到，这一思想最早由 Popov 在 [18]的单变量情形中使用。

定理2.1. 设 $L : M(Q_d) \to M(Q_d)$是一个保持常数的正线性算子。则对于任意 $f \in M(Q_d)$和 $1 \leq p < \infty$，有如下估计：

$$\|L(f)-f\|_p \leq C\tau_1\left(f,\ \sqrt[2d]{A}\right)_p,$$

其中 C 是正常数，并且

$$A := \sup\left\{L\left((pr_i \circ \psi_{\mathbf{x}})^2;\mathbf{x}\right) : i = 1,\ldots,d,\ \mathbf{x} \in Q_d\right\},$$

其中，对于固定的 x， $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \mathbf{y} - \mathbf{x}$；对于每个 y， $\in Q_d$ 且 $\in Q_d$ $A \leq 1$ [21]。

3. Multivariate BSK-Operators

本节受 Altomare 等人的研究 [1] 以及 Al-tomare 等人的研究 [3], 启发，考虑 BSK 算子在 $L^p(Q_d)$上的多元扩展，并研究这些算子的 L^p-范数逼近性质。我们以一阶τ-模和通常的一阶 L^p-光滑模来考察其收敛速度。

设 r 为一个给定的非负整数。对于任意满足 $n > 2r$ 的 $n \in \mathbb{N}$，其中 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \{0, \dots, n\}^d$ 且 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Q_d$，定义

$$w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{d} w_{n,k_i,r}(x_i), \tag{3.1}$$

其中，$w_{n,\,k_i,\,r}(x_i)$ 是由（1.2）给出的 Stancu 基本函数，分别针对每个 $i = 1$、...、d、$0 \le k_i \le n$ 和 $x_i \in [0,1]$ 写出。因此，对于 $\mathbf{x} \in Q_d$，我们有

$$w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x}) \ge 0 \text{ and } \sum_{\mathbf{k} \in \{0,\dots,n\}^d} w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x}) = 1. \tag{3.2}$$

对于 $f \in L^1(Q_d)$ 和 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Q_d$，我们考虑如下由（1.6）给出的 BSK 算子的多元扩展 $K_{n,\,r}$：

$$K_{n,r}^{d}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k_1,\dots,k_d=0}^{n} \prod_{i=1}^{d} w_{n,k_i,r}(x_i) \int_{Q_d} f\left(\frac{k_1+u_1}{n+1}, \dots, \frac{k_d+u_d}{n+1}\right) du_1 \cdots du_d.$$

注意，根据 (3.1)，并按惯例将任意 $f \in L^1(Q_d)$ 的 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Q_d$ 记作 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$，我们可以将这些算子表示为紧凑形式：

$$K_{n,r}^{d}(f;\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \{0,\dots,n\}^d} w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x}) \int_{Q_d} f\left(\frac{\mathbf{k}+\mathbf{u}}{n+1}\right) d\mathbf{u}. \tag{3.3}$$

显然，多元 BSK 算子是正线性算子；当 $r = 0$ 和 1 时，它们给出超立方体 Q_d上的多元 Kantorovich 算子，这可以从 [1] 作为特例得到。

引理3.1. 对于 $\mathbf{x} \in Q_d$，有

$$\begin{aligned}
K_{n,r}^{d}(\mathbf{1};\mathbf{x}) &= 1, \\
K_{n,r}^{d}(pr_i;\mathbf{x}) &= \frac{n}{n+1}x_i + \frac{1}{2(n+1)}, \\
K_{n,r}^{d}(pr_i^2;\mathbf{x}) &= \frac{n^2}{(n+1)^2}\left[x_i^2 + \left(1 + \frac{r(r-1)}{n}\right)\frac{x_i(1-x_i)}{n}\right] \\
&\quad + \frac{3nx_i+1}{3(n+1)^2},
\end{aligned}$$

对于 $i = 1, \dots, d.$

考虑到这一引理，根据 Volkov 的著名定理 [26], ，我们立即得到：

定理 3.1. 设 r 为固定非负整数，且 $f \in C(Q_d)$。则 $\lim_{n\to\infty} K_{n,\,r}^{d}(f)$ 在 Q_d. 上一致地 $= f$

现在，我们需要以下计算结果以用于后续结论：对于$0 \leq x_i \leq 1$、 $i = 1$、.....、d，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x_i)\, p_{n-r,k_i}(x_i)\, dx_i &= \binom{n-r}{k_i} \int_0^1 x_i^{k_i} (1-x_i)^{n-r-k_i+1}\, dx_i \\ &= \frac{n-r-k_i+1}{(n-r+2)(n-r+1)}\end{aligned}$$

当 $0 \leq k_i < r$ and

$$\begin{aligned}\int_0^1 x_i p_{n-r,k_i-r}(x_i)\, dx_i &= \binom{n-r}{k_i-r} \int_0^1 x_i^{k_i-r+1} (1-x_i)^{n-k_i}\, dx_i \\ &= \frac{k_i-r+1}{(n-r+2)(n-r+1)}\end{aligned}$$

当 $n-r < k_i \leq n$。因此，由 (1.1) 和 (1.2) 可得

$$\int_0^1 w_{n,k_i,r}(x_i)dx_i = \begin{cases} \frac{n-r-k_i+1}{(n-r+2)(n-r+1)}; & 0 \leq k_i < r \\ \frac{n-2r+2}{(n-r+2)(n-r+1)}; & r \leq k_i \leq n-r \\ \frac{k_i-r+1}{(n-r+2)(n-r+1)}; & n-r < k_i \leq n \end{cases}. \tag{3.4}$$

注意，我们可以写出以下估计

$$\begin{aligned} n-r-k_i+1 &\leq n-r+1 \text{ when } 0 \leq k_i < r, \\ n-2r+2 &\leq n-r+1 \text{ when } r \leq k_i \leq n-r, \\ k_i-r+1 &\leq n-r+1 \text{ when } n-r < k_i \leq n \end{aligned} \tag{3.5}$$

对每个 $i = 1, \ldots, d$，其中在中间项中，我们用到了假设$n > 2r$。利用 (3.5)、(3.4) 和 (3.1)，可得

$$\int_{Q_d} w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^d \int_0^1 w_{n,k_i,r}(x_i)dx_i \leq \frac{1}{(n-r+2)^d}. \tag{3.6}$$

通过多元 Stancu-Kantorovich 算子序列进行 L^p-逼近，见以下定理。

定理 3.2. 设 r 为固定非负整数，且 $f \in L^p(Q_d)$ $1 \leq p < \infty$。则 $\lim_{n\to\infty} \left\| K_{n,\,r}^d(f) - f \right\|_p = 0$。

证明。由于情形 $r = 0$ 和 1 对应于多元 Kantorovich 算子（参见 [1] 或 [3]），我们只考虑情形 $r > 1$，并将其视为固定。从定理 3.1 可得，对于任意 $f \in C(Q_d)$，$\lim_{n\to\infty} \left\| K_{n,\,r}^d(f) - f \right\|_p = 0$。由于 $C(Q_d)$ 在 $L^p(Q_d)$ 中稠密，记算子 $K_{n,\,r}^d$ 作用于 $L^p(Q_d)$ 并映到自身时的范数为 $\left\| K_{n,\,r}^d \right\|$，因此只需证明存在一个 M_r，其中 M_r 是一个可能依赖于 r 的正常数，使得对所有 $n > 2r$，$\left\| K_{n,\,r}^d \right\| \leq M_r$。现在，如 [3, 第 604], 页所示，我们采用记号

$$Q_{n,\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^d \left[\frac{k_i}{n+1}, \frac{k_i+1}{n+1} \right] \subset Q_d; \bigcup_{\mathbf{k} \in \{0,\ldots,n\}^d} Q_{n,\mathbf{k}} = Q_d.$$

利用函数 $\varphi(t)$ 的凸性: $=|t|^p$, $t\in\mathbb{R}$, $1\le p<\infty$ （例如参见 [2]），并结合 (3.2)，对于每个 $f\in L^p(Q_d)$ $n>2r$ 和 $\mathbf{x}\in Q_d$，可得

$$\begin{aligned}\left|K_{n,r}^d(f;\mathbf{x})\right|^p &\le \sum_{\mathbf{k}\in\{0,\dots,n\}^d} w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x})\int_{Q_d}\left|f\left(\frac{\mathbf{k}+\mathbf{u}}{n+1}\right)\right|^p d\mathbf{u}\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\{0,\dots,n\}^d} w_{n,\mathbf{k},r}(\mathbf{x})\,(n+1)^d\int_{Q_{n,\mathbf{k}}}|f(\mathbf{v})|^p\,d\mathbf{v}.\end{aligned}$$

考虑到（3.6），我们得到

$$\int_{Q_d}\left|K_{n,r}^d(f;\mathbf{x})\right|^p d\mathbf{x}\le\sum_{\mathbf{k}\in\{0,\dots,n\}^d}\left(\frac{n+1}{n-r+2}\right)^d\int_{Q_{n,\mathbf{k}}}|f(\mathbf{v})|^p\,d\mathbf{v}.$$

由于 $\sup_{n>2r}\left(\frac{n+1}{n-r+2}\right)^d=\left(\frac{2r+2}{r+3}\right)^d:=M_r$ 对于 $r>1$，其中 $1<\frac{2r+2}{r+3}<2$，我们得到

$$\int_{Q_d}\left|K_{n,r}^d(f;\mathbf{x})\right|^p d\mathbf{x}\le M_r\int_{Qd}|f(\mathbf{v})|^p\,d\mathbf{v},$$

这意味着 $\left\|K_{n,\ r}^d(f)\right\|_p\le M_r^{1/p}\|f\|_p$。注意，对于 $r=0$和 1 的情形，我们有 $M_r=1$ （见 [3]）。因此，证明完成。□

4. Estimates for the rate of convergence

在 [17], M¨uller 研究了由 Cheney-Sharma-坎托罗维奇算子（CSK）的序列所作的 L^p-逼近。作者用单变量 τ-模给出了该逼近的一个估计；此外，利用 τ-模的一些性质，他还得到了连续函数以及一阶可微函数的逼近误差的 L^p-范数上估计。在本部分中，我们表明，在多元情形下，对于 $\left\|K_{n,\ r}^d(f)-f\right\|_p$，也可以得到类似的估计。我们的第一个结果是定理2.1中Quak方法的一个应用

定理4.1. 设 r 为固定非负整数， $f\in M(Q_d)$且 $1\le p<\infty$。则

$$\left\|K_{n,r}^d(f)-f\right\|_p\le C\tau_1\left(f,\ \sqrt[2d]{\frac{3n+1+3r(r-1)}{12(n+1)^2}}\right)_p \tag{4.1}$$

对于所有满足 $n>2r$的 $n\in\mathbb{N}$，其中正常数 C 与 f无关。

证明. 根据定理2.1；对固定的$\mathbf{x}\in Q_d$，取 $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=\mathbf{y}-\mathbf{x}$，并对每个$\mathbf{y}\in Q_d$定义

$$A_{n,r}:=\sup\left\{K_{n,r}^d\left((pr_i\circ\psi_{\mathbf{x}})^2;\mathbf{x}\right):i=1,\dots,d,\ \mathbf{x}\in Q_d\right\},$$

其中 $(pr_i\circ\psi_{\mathbf{x}})^2=pr_i^2-2x_ipr_i+x_i^2\mathbf{1}$, $i=1,\dots,d$，我们得到以下估计

$$\left\|K_{n,r}^d(f)-f\right\|_p\le C\tau_1\left(f;\ \sqrt[2d]{A_{n,r}}\right)$$

对于任意 $f \in M(Q_d)$，在条件 $A_{n,r} \leq 1$ 下。现在，应用算子 $K_{n,r}^d$ 并利用引理3.1，对于每个 $i = 1,\ldots,d$ 和 $\mathbf{x} \in Q_d$，我们得到

$$\begin{aligned} K_{n,r}^d\left(\left(pr_i \circ \psi_{\mathbf{x}}\right)^2; \mathbf{x}\right) &= \frac{n-1+r(r-1)}{(n+1)^2} x_i(1-x_i) + \frac{1}{3(n+1)^2} \\ &\leq \frac{n-1+r(r-1)}{4(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^2} \\ &= \frac{3n+1+3r(r-1)}{12(n+1)^2} \end{aligned}$$

对于所有满足 $n > 2r$ 的 $n \in \mathbb{N}$，其中 $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。因此，由于我们有 $n \geq 2r+1$，取 $r \leq \frac{n-1}{2}$，可得 $A_{n,\,r} \leq \frac{3n+1+3r}{(r-1)\ 12\cancel{(n+1)_2}} \leq 1$ 成立，由此完成证明。□

现在，利用多元一阶τ-模的性质 $\tau 1$)-$\tau 3$)，可得

定理4.2。设 r 为固定非负整数，$f \in L^p(Q_d)$ $1 \leq p < \infty$，且对所有满足 $|\boldsymbol{\alpha}| \geq 1$、$\alpha_i = 0$ 或 1 的多重指标 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $D^{\boldsymbol{\alpha}} f \in L^p(Q_d)$。那么

$$\left\| K_{n,r}^d(f) - f \right\|_p \leq 2C_r \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}} \right)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \left\| D^{\boldsymbol{\alpha}} f \right\|_p,$$

对于所有满足 $n > 2r$ 的 $n \in \mathbb{N}$，其中 C_r 是依赖于 r 的正常数。

证明。由于 $n > 2r$，我们立即得到 $n+1 \geq 2(r+1)$。因此，公式 (4.1) 中 $2d$ 次根号内的项分别可估计为：对于 $r > 1$ 和 $r = 0,1$,

$$\begin{aligned} \frac{3n+1+3r(r-1)}{12(n+1)^2} &= \frac{3n+3+3r(r-1)-2}{12(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{4} + \frac{3r(r-1)-2}{12(n+1)}\right] \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{4} + \frac{3r(r-1)-2}{24(r+1)}\right] \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{3r^2+3r+4}{24(r+1)}\right] \end{aligned}$$

and

$$\frac{3n+1}{12(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}\frac{3n+1}{4(3n+3)} < \frac{1}{4(n+1)}.$$

现在，定义

$$B_r := \begin{cases} \frac{3r^2+3r+4}{24(r+1)}; & r > 1, \\ \frac{1}{4}; & r = 0,1, \end{cases}$$

并利用 τ-模的性质 τ_1)-τ_3)，由 (4.1) 可得

$$\begin{aligned}\left\|K_{n,r}^{d}(f)-f\right\|_p &\leq C\tau_1\left(f,\sqrt[2d]{\frac{3n+1+3r(r-1)}{12(n+1)^2}}\right)_p\\ &\leq C\tau_1\left(f,\sqrt[2d]{B_r}\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)_p\\ &\leq C\left(2\left\lfloor\sqrt[2d]{B_r}\right\rfloor+2\right)^{d+1}\tau_1\left(f,\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)_p\\ &\leq 2C_r\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\left\|D^{\boldsymbol{\alpha}}f\right\|_p,\end{aligned}$$

其中正常数 C_r 定义为 $C_r:=C\left(2\left\lfloor\sqrt[2d]{B_r}\right\rfloor+2\right)^{d+1}$.

□

对于不可微函数，我们可以用一阶光滑模给出以下估计，采用 L^p-范数。

定理4.3。设 r 为固定非负整数，且 $f\in L^p(Q_d)$ $1\leq p<\infty$。则

$$\left\|K_{n,r}^{d}(f)-f\right\|_p\leq c_2C_{r,p}\omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)_p,$$

其中， ω_1 是 f 的多元一阶光滑模，$C_{r,\ p}$是依赖于 r 和 p的常数。

证明。由定理 3.2 可知，由于 $K_{n,\ r}^{d}$ 有界，且$\left\|K_{n,\ r}^{d}\right\|_p\leq M_r^{1/p}$，对于所有满足 $n>2r$的 $n\in\mathbb{N}$，有$\left\|K_{n,\ r}^{d}(g)-g\right\|_p\leq\left(M_r^{1/p}+1\right)\|g\|_p$（当$g\in L^p(Q_d)$时）。此外，由定理4.2可得

$$\left\|K_{n,r}^{d}(g)-g\right\|_p\leq 2C_r\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\left\|D^{\boldsymbol{\alpha}}g\right\|_p$$

对于满足 g 的 $D^{\boldsymbol{\alpha}}g\in L^p(Q_d)$，对所有满足 $|\boldsymbol{\alpha}|\geq 1$且 $\alpha_i=0$ 或为 1 的多重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 均成立。因此，对于 $f\in L^p(Q_d)$，很容易推出

$$\begin{aligned}\left\|K_{n,r}^{d}(f)-f\right\|_p &\leq \left\|K_{n,r}^{d}(f-g)-(f-g)\right\|_p+\left\|K_{n,r}^{d}(g)-g\right\|_p\\ &\leq \left(M_r^{1/p}+1\right)\left\{\|f-g\|_p+2C_r\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)^{|\boldsymbol{\alpha}|}\left\|D^{\boldsymbol{\alpha}}g\right\|_p\right\}.\end{aligned}$$

在最后一个公式中，对所有 $g \in W_1^p(Q_d)$ 取下确界。由于超集的下确界不大于子集的下确界，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\|K_{n,r}^d(f)-f\right\|_p \\
\leq\ & \left(M_r^{1/p}+1\right)\inf\left\{\|f-g\|_p+\frac{2C_r}{\sqrt[2d]{n+1}}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=1}\|D^{\boldsymbol{\alpha}}g\|_p : g\in W_1^p(Q_d)\right\} \\
=\ & \left(M_r^{1/p}+1\right)\inf\left\{\|f-g\|_p+\frac{2C_r}{\sqrt[2d]{n+1}}|g|_{W_1^p} : g\in W_1^p(Q_d)\right\} \\
=\ & \left(M_r^{1/p}+1\right)K_{1,p}\left(f;\frac{2C_r}{\sqrt[2d]{n+1}}\right), \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

其中 $K_{1,\,p}$ 是由（2.1）给出的 K-泛函。证明由 K-泛函与 L^p-范数中的一阶光滑模之间的等价性（2.2），以及模的单调不减性得到。事实上，我们得到

$$\begin{aligned}
K_{1,p}\left(f;\frac{2C_r}{\sqrt[2d]{n+1}}\right) &\leq c_2\omega_1\left(f;\frac{2C_r}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)_p \\
&\leq c_2\left(2C_r+1\right)\omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt[2d]{n+1}}\right)_p. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

将（4.3）与（4.2）结合，并定义 $C_{r,\,p}:=\left(M_r^{1/p}+1\right)(2C_r+1)$，其中 $M_r^{1/p}$ 和 C_r 分别与定理 3.2 和 4.2 中的相同，我们得到所需结果。□

References

[1] F. Altomare，M. Cappelletti Montano，V. Leonessa，关于单形和超立方体上 Kantorovich 算子的推广，《纯数学与应用数学进展》1（2010），第3期，359–385。[2] F. Altomare，《Korovkin 型定理与正线性算子逼近》，Surv. Approx. Theory 5（2010），92–164。[3] F. Altomare，M. Cappelletti Montano，V. Leonessa，I. Ra.sa，凸紧子集上 Kantorovich 算子的推广，Banach J. Math. Anal. 11 （ 2017 ），第 3 期，591–614。[4] C. Bennett，R. Sharpley，《算子插值》，Academic Press Inc.，1988。[5] H. Berens，R. DeVore，L_p空间的定量 Korovkin 定理。载于：Approx. Theory II，国际研讨会论文集，奥斯汀，1976，289–298（1976）。[6] H. Berens，R. DeVore，L_p空间上正线性算子的定量 Korovkin 定理，Transactions AMS 245（1978），349–361。[7] M. Bodur，T. Bostancı，G. Ba.scanbaz-Tunca，依赖于非负整数的广义 Kantorovich 算子，已投稿至某期刊。[8] H. Brass，Bernstein 算子的一种推广，Abh. Math. Sem.Univ. Hamburg 38（1971），111–122。[9] Fei-long Cao，多元 Stancu 多项式与连续模（中文），Acta Math. Sinica（中文版）48（2005），第1期，51–62。[10] H. Gonska，Xin-long Zhou，Bernstein-Kantorovich 多项式的强逆不等式。Comput. Math. Appl. 30（1995），103–128。[11] H. H. Gonska，关于正线性算子的复合与分解，载于：Kovtunets，V. V.（编）等，《逼近理论及其应用》。论文集，

纪念 Vl. K. Dzyadyk 国际会议，基辅，乌克兰，1999年5月27日至31日。乌克兰国家科学院数学研究所论文集，Mat. Zastos. 31，161–180（2000）。[12] L. V. Kantorovich，关于按 S. Bernstein 型多项式展开的某些问题，I、II，苏联科学院通报，（1930年），563–568，595–600。[13] L. V. Kantorovich，我的科学之旅（提交给莫斯科数学学会的报告），Russ. Math. Surv，42(2)（1987年），233–270。俄文原文：《数学科学进展》42(2)（1987年），183–213。[14] G. G. Lorentz，《伯恩斯坦多项式》，多伦多大学出版社，多伦多，1953年（第2版，切尔西出版公司，纽约，1986年）。[15] V. 迈尔，通过 Kantorovich 算子作 L_p逼近，《数学分析》，4（1978），289–295。[16] M. W. M¨uller，Kantorovich 多项式的 L_p逼近的¨性质，《数学杂志》151（1976），243–247。[17] M. W. M¨uller，在 L_p度量下用 Cheney-Sharma-Kantorovich 多项式作逼近，《落基山数学杂志》19(1)（1989），281–291。[18] V. A. 波波夫，关于 L_p中的定量 Korovkin 定理，《保加利亚科学院通报》35（1982），897–900。[19] V. A. 波波夫，V. Kh. 赫里斯托夫，《多元函数的平均光滑模及由其生成的函数空间》，《正交级数与函数逼近》，论文集。献给院士尼古拉·尼古拉耶维奇·卢津，以纪念其诞辰100周年，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》， 164, 1983, 136 141 164 1985 155 160 –；《斯捷克洛夫数学研究所学报》， （），– E. 夸克，借助 L_p [20] 164, 1983, 136 141 164 1985 155 160 模对正线性算子逼近误差所作的单变量与多变量估计，博士论文，多特蒙德大学，1985年。[21] E. 夸克，通过一阶 τ模对正线性算子的多元 L_p误差作出的估计，《逼近理论杂志》56（1989），277–286。[22] Sendov，V. A. 波波夫，《平均光滑模：在数值方法与逼近中的应用》。奇切斯特（英国）等：威利出版社，1988年。[23] D. D. 斯坦库，利用某些正线性算子构造的求积公式，《数值积分》（会议论文集，奥伯沃尔法赫，1981），ISNM 57（1982），241–251，Birkh¨auser 出版社，巴塞尔。[24] D. D. 斯坦库，利用一种新的广义伯恩斯坦算子逼近函数，《计算》20（1983），第2期，211–229。[25] J. J. 斯韦蒂茨，B. 伍德，利用正线性算子作 L_p 逼近的定量估计，《逼近理论杂志》38（1983），81–89。[26] V. I. 沃尔科夫，关于二元连续函数空间中正线性算子序列的收敛性（俄文），《苏联科学院院刊》（新辑），115（1957），17–19。[27] R. 杨，J. 熊，F. Cao，定义在单纯形上的多元 Stancu 算子，《应用数学与计算》138（2003），189–198。

Ankara University,
Faculty of Science, Department of Mathematics, Str.Dögol 06100, Beşevler,
Ankara, Turkey*Email address*: tunca@science.ankara.edu.tr
University of Duisburg-Essen, Faculty of Mathematics, Forsthausweg 2,
D-47057 Duisburg, Germany

Email address: heiner.gonska@uni-due.de 和 gonska.sibiu@gmail.com