arXiv:2301.01051v1 [math.MG] 3 Jan 2023

2022年11月8日

扩展外球条件

CHADI NOUR*黎巴嫩美国大学计算机科学与数学系，比布鲁斯校区，邮政信箱36号，比布鲁斯，黎巴嫩 电子邮箱：cnour@lau.edu.lbJEAN TAKCHE黎巴嫩美国大学计算机科学与数学系，比布鲁斯校区，邮政信箱36号，比布鲁斯，黎巴嫩 电子邮箱：jtakchi@lau.edu.lb

摘要。 我们证明，满足 S 扩展外球条件的闭集的补集，恰好是具有 相同半径的闭球之并。这推广了 [11, 定理 3]其中假设集合 S 是近正则的，这一性质 强于扩展外球条件。我们还给出了一个充分条件，用以保证近邻正则性与扩展外球条件等价，该条件推广了 [13, 推论3。12] 到 S不一定是正则闭集的情形。

1. 引言。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集。对于 $x \in S$，若存在 $\sigma = \sigma(x,\ \zeta) \geq 0$ 使得，则称向量 $\zeta \in \mathbb{R}^n$ 是 S 在 x 处的近端法向量

$$\langle \zeta, s - x \rangle \leq \sigma \|s - x\|^2, \quad \forall s \in S, \tag{1}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示标准内积和欧几里得范数。关系式 (1) 通常称为近端法向不等式。注意，对于 $\zeta \neq 0$ 和 $\sigma \neq 0$，近端法向不等式 (1) 等价于

$$B\left(x + \frac{1}{2\sigma}\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; \frac{1}{2\sigma}\right) \cap S = \emptyset,$$

其中， $B(y; \rho)$表示以 y为球心、半径为 ρ 的开球。在这种情况下，我们称ζ 由一个 $\frac{1}{2\sigma}$-球实现。另一方面，对于 $\zeta \neq 0$ 和 $\sigma = 0$，近端法向不等式 (1) 等价于对所有 $\rho > 0.$， $B(x + \rho\zeta; \rho) \cap S = \emptyset$。在这种情况下，对于任意 $\rho > 0$， ζ 由一个 ρ-球实现。现在，根据 (1)，在 x 处指向 S 的所有近端法向量构成一个包含 0 的凸锥，我们将其记为 $N_S^P(x)$。由于当 $x \in \text{int}\, S$ （ S的内部）时，不存在满足 (1) 的非零 ζ，因此我们推得

关键词。 邻近正则性、外球条件、闭球并性质、近端分析、非光滑分析。

* 通讯作者。

$N_S^P(x) = \{0\}$ 对所有 $x \in$ 内部 S。当 $x \in$ 边界 S（S的边界）时，也可能出现这种情况，例如当 S 是函数 $f(z) = -|z|$ 的上图集，且 x 是原点时。关于 $N_S^P(\cdot)$ 和近端分析的更多信息可参见 [6, 10, 19, 22]。

现在我们固定 $r > 0$。回顾一下，如果对于任意 $x \in$ bdry S 以及任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，$\zeta$都可由一个 r-球实现，则称集合 S 为 r-近正则。关于邻近正则性以及正可达性、近端光滑性、p-凸性和 φ_0-凸性等相关性质的更多信息，请参见 [1, 7, 8, 9, 20, 23]。另一方面，如果对于任意$x \in$ bdry S，都存在 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，使得 ζ可由一个 r-球实现，则称集合 S 满足外 r-球条件。显然，如果 S 是 r-近正则的，那么它满足外 r-球条件。反过来则一般不成立，[13]中的反例说明了这一点。在后者中，Nour、Stern 和 Takche 给出了邻近正则性与外球条件等价的充分条件。更确切地说，他们证明了：如果 S 是上图集 Lipschitz（或楔形）的，且具有紧边界，那么这两个性质等价，参见 [13, 推论 3.12]。[1] 回顾一下，如果闭集 S 在点 $x \in S$ 处满足以下条件，则称其在该点处为上图集 Lipschitz：经过正交矩阵变换后，集合 S 在 x附近可视为某个 Lipschitz 连续函数的上图集。如果对所有 $x \in S$都成立，我们就简称 S 为上图集 Lipschitz。Rockafellar 在 [21]中引入了这一几何定义。S 在 x 处的上图集 Lipschitz 性质，也可通过 S在 x 处的 Clarke 切锥的拓扑内部非空来刻画；这又等价于 S 在 x处的 Clarke 法锥为尖锥，参见 [5, 定理 7.3.1]。

在最近发表的论文 [11], Nacry 和 Thibault 在 [11, 定理 3] 中证明，如果 S 是r-近正则的，那么 S的补集（记为 S^c）是半径相同的闭球之并。这个结果的显著之处在于，集合 S 可以是任意闭集，包括并非正则闭的集合（也就是说，$S \neq$ cl (int S) 是 S内部的闭包）。

在本文中，我们通过将 S的 r-近正则性替换为较弱的条件来推广 [11, 定理 3]，其中包括当 S 是正则闭时的外部 r-球条件，以及当 S 不一定是正则闭时，对外部 r- 球条件的一种新的扩展版本。

当 S 是正则闭时，S 的外部 r-球条件与 (int S)^c 的内部 r<style id='7}-球条件相一致；这是控制理论中一个众所周知的条件，例如参见 [2, 3, 4, 12]。[2] 利用这一事实和 [16, 猜想 1.2],[3]，我们得到以下定理，它是本文的第一个主要结果。

定理 1.1. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，使得cl (int S) 满足某个 $r > 0$ 的外部r-球条件。那么(int S)^c 是由闭$\frac{r}{2}$-球组成的并集。若另外 S 是正则闭集，则对于任意 $r' < \frac{r}{2}$，S^c 都是由闭 r'-球组成的并集。

[1]这一等价性结果在 [15]，中推广到了可变半径情形，[17] 中也有相关讨论。[2]在这些文献中，研究者利用内部球条件来研究与控制系统相关的单侧和双侧最短时间函数的正则性。[3]这一猜想在 [13, 14]，中提出，并在 [16] 中得到证明。该结果在可变半径情形下的推广见 [16, 定理 3。1], [18] 中也有相关讨论。

请注意，定理 1.1中“另外”部分在 S 不是正则闭集时未必成立，参见例 2.2。另一方面，假设“cl $(\operatorname{int} S)$ 满足外部 r-球条件”比假设“S 满足外部r-球条件”更弱，参见命题 2.1和例 2.1。

在下面的定理中，我们给出第二个主要结果，并证明：如果用一个较弱的性质——以下扩展外 r-球条件——替代邻近正则性，则可得到与 [11, 定理 3] 类似的结果。我们称 S满足扩展外 r-球条件，如果：

- 对于任意 $x \in$边界（int S） $\subset$边界 S，存在 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，使得 ζ由一个 r-球实现。
- 对于任意（ $x \in$边界 S） $\setminus$边界（int S），以及任意$0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$， ζ由一个 r-球实现。

定理 1.2。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为满足某个 $r > 0$下扩展外 r-球条件的闭集。那么 S^c 是闭$\frac{r}{2}$-球的并集。

容易看出，若 S 满足扩展外 r球条件，则 S满足外 r球条件。反之一般不成立（见例 2.1），但若 S 是正则闭的，则反向结论成立。注意，定理 1.2 中的扩展外 r 球条件不能替换为外 r 球条件，例 2.3 将对此予以说明。另一方面，显然，若 S 是 r近正则的，则 S 满足扩展外 r球条件。反之一般不成立，即使 S 是正则闭的也不成立，这一点已由反例 [13,第 2] 节证明。在下述定理中，我们给出第三个也是最后一个主要结果，为近邻正则性与扩展外球条件的等价性提供一个充分条件。该定理将 [13, 推论 3.12] 推广到 S 不一定是正则闭的情形。

定理 1.3。 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，使得$\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$ 是上半 *Lipschitz* 的，且具有紧边界。那么，当且仅当 S 满足某个 $r' > 0$的扩展外部球条件时， S 对于某个 $r > 0$ 是 r-近正则的。

定理 1.1、1.2 和1.3 的证明细节将在下一节介绍。届时，我们将简要说明本文所用的记号，并给出一些辅助结果。

2. 主要结果的证明。

我们分别用 $\|\cdot\|$、 $\langle\cdot,\cdot\rangle$、 B 和 B 表示欧几里得范数、通常内积、开单位球和闭单位球。对于 $\rho > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们定义 $B(x;\rho) := x + \rho B$ 以及 $B(x;\rho) := x + \rho B$。对于集合 $S \subset \mathbb{R}^n$， S^c、$\operatorname{int} S$、$\operatorname{bdry} S$ 和 $\operatorname{cl} S$ 分别表示 S 的补集（相对于 $\mathbb{R}^n$）、内部、边界和闭包。 $\mathbb{R}^n$ 中两点 x 和 y 之间的闭线段记为 $[x,y]$。点 x 到集合 S 的距离记为 $d_S(x)$。我们还用 $\operatorname{proj}_S(x)$ 表示 S 中距离 x 最近的点所组成的集合，即满足 $d_A(x) = \|s - x\|$ 的点 $s \in S$ 所组成的集合。对于 $\mathbb{R}^n$ 的两个子集 A 和 B， $d(A,B)$ 表示 A 与 B 之间的距离，也就是说，

$$d(A,B) := \inf\{\|a - b\| : (a,b) \in A \times B\}.$$

对于闭集 $S \subset \mathbb{R}^n$，下面的命题给出了集合 cl (int S) 的一些有用性质。

命题 2.1. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集。则有以下：

(i) cl (int S) $\subset S$，int (cl (int S)) $=$ int S，且

$$\operatorname{bdry}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)) = \operatorname{bdry}(\operatorname{int} S) \subset \operatorname{bdry} S.$$

(ii) $S = [\text{cl (int } S)] \cup [\text{(边界 } S) \setminus \text{边界 (int } S)]$ 满足

$$[\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)] \cap [(\operatorname{bdry} S) \setminus \operatorname{bdry}(\operatorname{int} S)] = \emptyset.$$

(iii) 若 $S = \operatorname{cl} O$，其中 O 是开集，则 S 是正则闭的。(iv) 若对于 $r > 0$，S 满足外部 r-球条件，则 $\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$ 也满足外部 r-球条件。

证明。 性质 (i)-(iii) 在度量拓扑中是众所周知的。对于 (iv)，设 $r > 0$并假设 S 满足外部 r-球条件。令 $x \in$ bdry (cl (int S))。根据 (i)，我们有 $x \in$ bdry S，因此存在 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，使得 ζ 由一个 r-球实现。利用近端法向不等式可得

$$\left\langle \frac{\zeta}{\|\zeta\|}, s - x \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|s - x\|^2, \quad \forall s \in S.$$

由于 cl (int S) $\subset S$，我们得到

$$\left\langle \frac{\zeta}{\|\zeta\|}, s - x \right\rangle \leq \frac{1}{2r}\|s - x\|^2, \quad \forall s \in \operatorname{cl}(\operatorname{int} S).$$

因此，$\zeta \in N^P_{\operatorname{cl}(\text{内部 } S)}(x)$，且由一个 r-球实现。 □

例 2.1. 命题 2.1(iv) 的逆命题不一定成立。事实上，考虑 $\mathbb{R}^2$, $S := \bar{B}(0; 1) \cup [(1, 0), (2, 0)]$。显然，对于任意 $r > 0$，S 都不满足外部 r-球条件；但对于任意 $r > 0$，cl (int S) $= B(0; 1)$ 满足外部 r-球条件。

在下面的命题中，我们列出近正则和上图利普希茨性质的一些众所周知的刻画及推论。证明见 [5, 20, 22]。

命题 2.2. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集。则有以下结论：

(i) 如果 S 是近正则的，那么对每个 $x \in$ 边界 S，我们都有

$$N_S^P(x) = N_S^L(x) = N_S(x),$$

其中，$N_S^L(x)$ 和 $N_S(x)$ 分别表示 S 在 x 处的 *Mordukhovich*（或极限）法锥和 *Clarke* 法锥。*(ii)* 对于 $x \in$ 边界 S，S 在 x 处是上半 *Lipschitz* 的，当且仅当 $N_S(x)$ 是尖的，也就是说，$N_S(x) \cap -N_S(x) = \{0\}$。*(iii)* 如果对于 $x \in$ 边界 S，S 在 x 处是上半 *Lipschitz* 的，那么 $x \in$ *cl (int* S*)*。

2.1. 定理 1.1 的证明。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，使得 cl (int S) 满足某个 $r > 0$ 的外部 r-球条件。由于根据命题 2.1(iii)，我们有 cl (int S) 是正则闭的，因此得到 (int (cl (int S))^c $=$(int S)^c 满足内部 r-球条件。因此，根据 [16, 猜想 1.2]，我们得到 (int S)^c 是闭 $\frac{r}{2}$ -球的并集。

我们接下来证明定理 1.1 中的“此外”部分。我们假设 S 是正则闭的，并考虑 $r' < \frac{r}{2}$。令 $x \in S^c$。由于 $S^c \subset$ (内点 S)^{c}和 (内点 S)^{c}是闭 $\frac{r}{2}$-球的并，因此存在 $y_x \in$ (内点 S)^c 使得

$$x \in \bar{B}\left(y_x; \frac{r}{2}\right) \subset (\operatorname{int} S)^c. \tag{2}$$

若 $\|y_x - x\| < r'$，则利用（2）可得

$$x \in \bar{B}(y_x; r') \subset B\left(y_x; \frac{r}{2}\right) \subset \bar{B}\left(y_x; \frac{r}{2}\right) \subset (\operatorname{int} S)^c.$$

由此可得

$$x \in \bar{B}(y_x; r') \subset \operatorname{int}\left((\operatorname{int} S)^c\right) = (\operatorname{cl}(\operatorname{int} S))^c = S^c.$$

Now 我们假设 $\|y_x - x\| \geq r'$。那么由（2）且由于 $x \in S^c$，我们有 th at

$$\begin{aligned} x \in \bar{B}\left(x + r' \frac{y_x - x}{\|y_x - x\|}; r'\right) &\subset B\left(y_x; \|y_x - x\|\right) \cup \{x\} \\ &\subset B\left(y_x; \frac{r}{2}\right) \cup \{x\} \\ &\subset \operatorname{int}\left((\operatorname{int} S)^c\right) \cup S^c = S^c. \end{aligned}$$

因此，S^c 是闭 r'-球的并。这就完成了“此外”部分的证明，进而完成了定理的证明1.1。□

在下面的例子中，我们证明，定理 1.1 中的“此外”部分在 S 不是正则闭集时未必成立。

例 2.2. 令 $S := \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -e^x) : x \in \mathbb{R}\}$. 显然，$S$不是正则闭集，并满足外部 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ -球条件。另一方面，对于任何 $r > 0$，S^c 都不是闭 r-球的并。注意，对于任意 $r > 0$，S 都不满足扩展外部 r-球条件。

2.2. **定理 1.2 的证明。** 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是满足某个 r-球扩展外部条件的闭集，其中 $r > 0$。考虑 $x \in S^c$。令 $s_0 \in$ 投影$_S(x)$，并令 $r_0 := \|x - s_0\|$。显然有 $s_0 \in$ 边界 S，且 $s_0 \neq x$，因此 $r_0 \neq 0$。此外，我们有

$$B(x; r_0) \cap S = \emptyset. \tag{3}$$

有三种情形需要考虑。

情形 1：$r_0 > \frac{r}{2}$。

然后利用（3），我们得到

$$x \in \bar{B}\left(x; \frac{r}{2}\right) \subset B(x; r_0) \subset S^c.$$

情形 2：$r_0 \leq \frac{r}{2}$和 $s_0 \notin$ 边界（int S）。

那么，近端法向量 $\zeta_0 := x - s_0 \in N_S^P(s_0)$ 可由一个 r-球实现。因此可得

$$B\left(s_0 + r\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; r\right) \subset S^c. \tag{4}$$

我们断言

$$\bar{B}\left(x + \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; \frac{r}{2}\right) \subset B\left(s_0 + r\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; r\right). \tag{5}$$

事实上，对于 $y \in \bar{B}\left(x + \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; \frac{r}{2}\right)$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\|y - s_0 - r\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right\| &= \left\|\left(y - x - \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right) + \left(x - s_0 - \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right)\right\| \\
&\leq \left\|y - x - \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right\| + \left\|x - s_0 - \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right\| \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|r_0\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|} - \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}\right\| \\
&= \frac{r}{2} + \frac{r}{2} - r_0 = r - r_0 < r.
\end{aligned}$$

现在结合（4）和（5），我们得到

$$x \in \bar{B}\left(x + \frac{r}{2}\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; \frac{r}{2}\right) \subset B\left(s_0 + r\frac{\zeta_0}{\|\zeta_0\|}; r\right) \subset S^c.$$

情形 3：$r_0 \leq \frac{r}{2}$ 和 $s_0 \in$ 边界（int S）。

于是，对每个 $\varepsilon > 0$，我们有 $B(s_0; \varepsilon) \cap \text{int } S \neq \emptyset$. 令 $z_\varepsilon \in B(s_0; \varepsilon) \cap \text{int } S$。我们用 $\xi_\varepsilon := \frac{z_\varepsilon - x}{\|z_\varepsilon - x\|}$ 表示，并考虑 $s_\varepsilon \in [z_\varepsilon, x] \cap$ 边界 S，其中后一个交集非空，因为 $z_\varepsilon \in \text{int } S$ 且 $x \in S^c$。令 $\zeta_\varepsilon \in N_S^P(s_\varepsilon)$ 为由一个 r-球所实现的单位向量。因此，对于 $y_\varepsilon := s_\varepsilon + r\zeta_\varepsilon$，我们有

$$B(y_\varepsilon; r) \cap S = \emptyset. \tag{6}$$

如果 $y_\varepsilon = x$，那么

$$x \in \bar{B}\left(x; \frac{r}{2}\right) \subset B(y_\varepsilon; r) \subset S^c.$$

如果 $0 < \|y_\varepsilon - x\| < r$，那么对于 $w \in \bar{B}\left(x + \frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|}; \frac{r}{2}\right)$，我们有

$$\begin{aligned}
\|w - y_\varepsilon\| &\leq \left\|w - x - \frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|}\right\| + \left\|x + \frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|} - y_\varepsilon\right\| \\
&\leq \frac{r}{2} + \left\|\frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|} - (y_\varepsilon - x)\right\| \\
&= \frac{r}{2} + \left|\frac{r}{2} - \|y_\varepsilon - x\|\right| < r.
\end{aligned}$$

由此，利用（6）可得

$$x \in \bar{B}\left(x + \frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|}; \frac{r}{2}\right) \subset B(y_\varepsilon; r) \subset S^c.$$

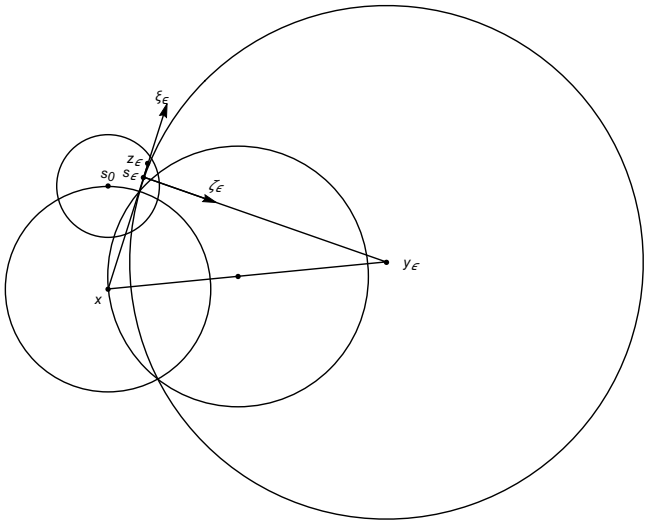

图1. 情形 3: $\|y_\varepsilon - x\| \geq r$

现在我们假设 $\|y_\varepsilon - x\| \geq r$，并记为

$$r_\varepsilon := \frac{r_0^2 \|y_\varepsilon - x\|}{\|y_\varepsilon - x\|^2 + r_0^2 - r^2} > 0. \tag{7}$$

断言1. $B\left(x + r_\varepsilon \frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|};\ r_\varepsilon\right) \subset B(x;\ r_0) \cup B(y_\varepsilon;\ r)$。

为证明这一断言，令 $w \in B\left(x + r_\varepsilon \frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|};\ r_\varepsilon\right)$ 并假设 $w \notin B(x;\ r_0)$。那么

$$\|w - x\| < 2r_\varepsilon \left\langle \frac{w - x}{\|w - x\|}, \frac{y_\varepsilon - x}{\|y_\varepsilon - x\|} \right\rangle. \tag{8}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\|w - y_\varepsilon\|^2 &= \|(w - x) - (y_\varepsilon - x)\|^2 \\
&= \|w - x\|^2 + \|y_\varepsilon - x\|^2 - 2\langle w - x, y_\varepsilon - x\rangle \\
&\overset{(8)}{<} \|w - x\|^2 + \|y_\varepsilon - x\|^2 - \frac{\|y_\varepsilon - x\|}{r_\varepsilon}\|w - x\|^2 \\
&= \|y_\varepsilon - x\|^2 + \|w - x\|^2 \left(1 - \frac{\|y_\varepsilon - x\|}{r_\varepsilon}\right) \\
&\overset{(7)}{=} \|y_\varepsilon - x\|^2 + \|w - x\|^2 \left(1 - \frac{\|y_\varepsilon - x\|^2 + r_0^2 - r^2}{r_0^2}\right) \\
&= \|y_\varepsilon - x\|^2 + \underbrace{\|w - x\|^2}_{\geq r_0^2} \underbrace{\left(\frac{r^2 - \|y_\varepsilon - x\|^2}{r_0^2}\right)}_{\leq 0} \\
&\leq \|y_\varepsilon - x\|^2 + r^2 - \|y_\varepsilon - x\|^2 = r^2.
\end{aligned}$$

由此得到 $w \in B(y_\varepsilon,\ r)$，从而完成该断言的证明。

断言 2. $\langle \xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon \rangle < \frac{\varepsilon}{2r}$。

为证明这一断言，首先注意到，由于 $z_\varepsilon \in \operatorname{int} S$，我们由 (6) 推得 $z_\varepsilon \notin B(y_\varepsilon; r) = B(s_\varepsilon + r\zeta_\varepsilon; r)$。因此，利用等式 $z_\varepsilon - s_\varepsilon = \|z_\varepsilon - s_\varepsilon\|\xi_\varepsilon$，可得

$$\|z_\varepsilon - s_\varepsilon\| > 2r \langle \xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon \rangle .$$

因此，利用 $s_0 \in \operatorname{proj}_S(x)$，可得

$$\begin{aligned} \langle \xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon \rangle < \frac{1}{2r}\|z_\varepsilon - s_\varepsilon\| &= \frac{1}{2r}\left(\|z_\varepsilon - x\| - \|s_\varepsilon - x\|\right) \\ &\le \frac{1}{2r}\left(\|z_\varepsilon - s_0\| + \underbrace{\|s_0 - x\| - \|s_\varepsilon - x\|}_{\le 0}\right) \\ &\le \frac{1}{2r}\|z_\varepsilon - s_0\| < \frac{\varepsilon}{2r}. \end{aligned}$$

该断言的证明至此完成。

断言 3。 若 $\varepsilon \in \left(0, \frac{r_0^3}{4r^2}\right]$ 则 $r_\varepsilon > \frac{r}{2}$。

为证明该断言，首先由 (7) 注意到 $r_\varepsilon > \frac{r}{2}$ 等价于

$$P(\|y_\varepsilon - x\|) := r\|y_\varepsilon - x\|^2 - 2r_0^2\|y_\varepsilon - x\| + r(r_0^2 - r^2) < 0. \tag{9}$$

由于判别式 Δ' 的 $P(\|y_\varepsilon - x\|)$ 是 $(r^2 - r_0^2)^2 + r^2 r_0^2 > 0$ 且根的乘积为 $r_0^2 - r^2 < 0$，我们得出 (9) 等价于

$$\|y_\varepsilon - x\| < \frac{r_0^2 + \sqrt{\Delta'}}{r}. \tag{10}$$

我们有

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon - x\|^2 &= \|y_\varepsilon - s_\varepsilon\|^2 + \|s_\varepsilon - x\|^2 + 2\langle y_\varepsilon - s_\varepsilon, s_\varepsilon - x\rangle \\ &= r^2 + \|s_\varepsilon - x\|^2 + 2r\|s_\varepsilon - x\| \langle \zeta_\varepsilon, \xi_\varepsilon \rangle \\ &\overset{\text{Claim 2}}{<} r^2 + \|s_\varepsilon - x\|^2 + \varepsilon\|s_\varepsilon - x\| \\ &\overset{s_\varepsilon \in [z_\varepsilon, x]}{\le} r^2 + \|z_\varepsilon - x\|^2 + \varepsilon\|z_\varepsilon - x\| \\ &\le r^2 + (\|z_\varepsilon - s_0\| + \|s_0 - x\|)^2 + \varepsilon(\|z_\varepsilon - s_0\| + \|s_0 - x\|) \\ &\le r^2 + (\varepsilon + r_0)^2 + \varepsilon(\varepsilon + r_0) \\ &= r^2 + r_0^2 + 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon r_0 \\ &\overset{\varepsilon \in \left(0, \frac{r_0^3}{4r^2}\right]}{\le} r^2 + r_0^2 + \frac{r_0^6}{8r^4} + \frac{3r_0^4}{4r^2} \\ &= r^2 + r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\left(\frac{r_0^2}{8r^2} + \frac{3}{4}\right) \\ &\overset{r_0 \le \frac{r}{2}}{<} r^2 + r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}(r_0^2+\sqrt{\Delta'})^2 &= 2r_0^4+r^4-r^2r_0^2+2r_0^2\sqrt{\left(r^2-\frac{1}{2}r_0^2\right)^2+\frac{3r_0^4}{4}}\\ &> 2r_0^4+r^4-r^2r_0^2+2r_0^2\left(r^2-\frac{1}{2}r_0^2\right)\\ &= r_0^4+r^4+r^2r_0^2.\end{aligned}$$

这表明

$$\left(\frac{r_0^2+\sqrt{\Delta'}}{r}\right)^2>r^2+r_0^2+\frac{r_0^4}{r^2}.$$

将后者与（11）结合，得到不等式（10），由此完成断言3的证明。

现在固定 $\varepsilon\in\left(0,\frac{r_0^3}{4r^2}\right]$。根据断言 3，可得 $\frac{r}{2}<r_\varepsilon$。因此，利用断言 1和（6），可得 (3)

$$\begin{aligned}x\in\bar{B}\left(x+\frac{r}{2}\frac{y_\varepsilon-x}{\|y_\varepsilon-x\|};\frac{r}{2}\right) &\subset B\left(x+r_\varepsilon\frac{y_\varepsilon-x}{\|y_\varepsilon-x\|};r_\varepsilon\right)\cup\{x\}\\ &\subset B(x;r_0)\cup B(y_\varepsilon;r)\subset S^c.\end{aligned}$$

在上述三种情形中，我们已证明 x 属于一个包含于 S^c中的闭 $\frac{r}{2}$-球。定理 1.2 的证明至此完成。□

在下面的例子中，我们证明，定理 r的扩展外1.2 球条件假设不能替换为外 r球条件。

例 2.3。 在图2中， S 是由两条曲线及其间的虚线区域组成的集合。集合 S 满足外部 r球条件，但不满足扩展外部 r球条件，因为右侧的一些边界点有两个法向量，但只有其中一个能由一个 r球实现。显然， S^c 不是任意 r'球的并集。 $r'>0$。

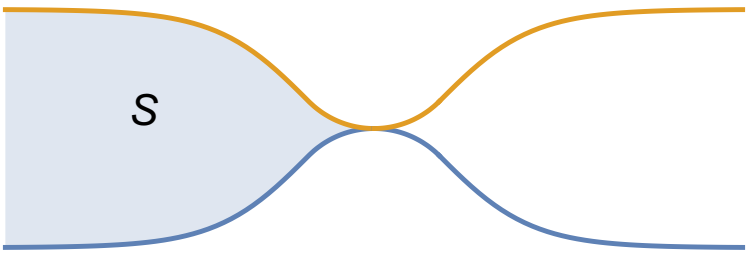

图2。 例2.3

注2.1。 由定理 1.2，我们推得，若 S 是正则闭集，且满足外部 r-球面条件，其中 $r>0$，则 S^c 是闭 $\frac{r}{2}$-球的并，这比定理1.1中“此外”部分的结论更强。当然，我们可以调整 -

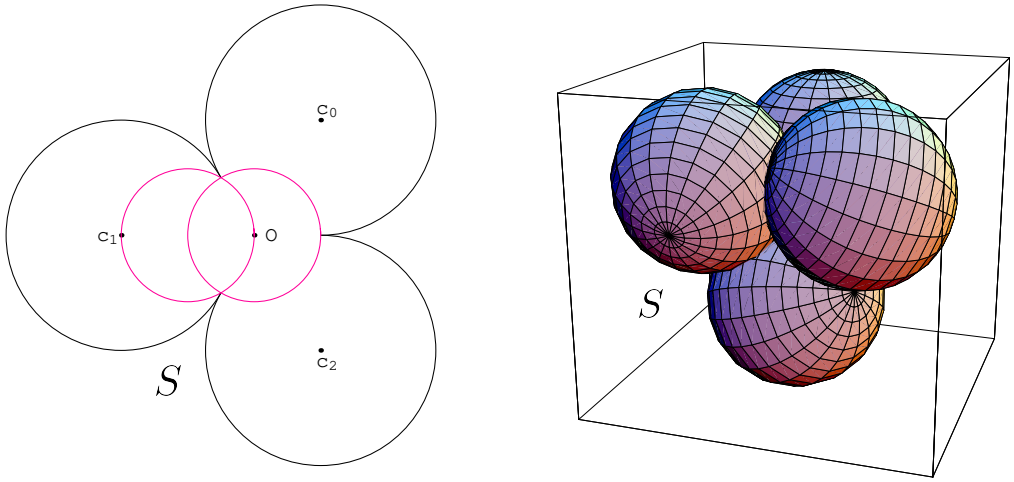

图 3. 注 2.2 示例

定理 1.1中“此外”部分的证明，并得到半径 $\frac{r}{2}$ 而非 $r' < \frac{r}{2}$。我们没有这样做，以免使定理 1.1的证明复杂化，同时也为了说明，当 $r' < \frac{r}{2}$ 时，其证明是闭球并猜想 的直接推论 [16, 猜想 1。2]。注意，由于 $\frac{r}{2} < \frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$ 对所有 $n \geq 2$均成立，将定理 1.1 证明中使用的相同技巧与闭球并猜想的强版本 [16, 猜想 1。3], 结合，可得 S^c 是闭球r'的并，对任意 $r' < \frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$均成立，包括 $r' = \frac{r}{2}$。遗憾的是，由于闭球并猜想的强版本至今仍是一个未解决问题，这一后者结果无法得到确认。

注 2.2. 定理 1.2 的半径 $\frac{r}{2}$ 是一个最大半径：对于任意 $n \geq 2$，它在所有空间 $\mathbb{R}^n$ 中都成立。事实上，假设将定理 1.2 的半径 $\frac{r}{2}$ 替换为一个 $r' > 0$。-我们断言 $r' \leq \frac{r}{2}$。事实上，受 [17, 示例 2], 的启发，我们在 $\mathbb{R}^n$ 中考虑集合 S，令其为以 $C_i i = 0, \ldots, n$为中心的 $(n+1)$ 个开 r-球的补集，其中对于 $(e_i)_{i=1}^n$， $\mathbb{R}^n$ 的标准基以及 $e_0 := 0$，有

$$C_i := \frac{-nr}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\sqrt{\frac{i}{i+1}}\, e_i + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{-1}{\sqrt{k(k+1)}} e_k \right)$$
$$= \frac{-nr}{\sqrt{n(n-1)}} \left(0, \ldots, 0, \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}}, \frac{-1}{\sqrt{(i+1)(i+2)}}, \frac{-1}{\sqrt{(i+2)(i+3)}}, \ldots, \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \right).$$

集合 S 满足扩展外部 r-球条件（事实上，它是正则闭的，并满足外部 r-球条件），但包含于S^c 且包含原点的最大闭球 $0 \in S^c$ 半径为 $\frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$，见图 3 中关于 $n = 2$ 和$n = 3$的内容。因此，$r' \leq \frac{nr}{2\sqrt{n^2-1}}$ 对所有 $n \geq 2$均成立。取 $n \longrightarrow \infty$ 代入后者，我们得出 $r' \leq \frac{r}{2}$。

2.3. 定理 1.3 的证明。设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭集，使得 cl (int S) 是 epi-Lipschitz 的，且具有紧边界。由于第一个蕴含显然成立（取 $r' = r$），我们着重证明第二个蕴含。因此，假设 S 满足某个 $r' > 0$对应的扩展外部 r'-球条件。那么 S 满足外部r'-球条件，因此根据命题 2.2(iv)，cl (int S) 满足外部r'-球条件。现在将 [13, 推论 3.12]，应用于 cl (int S)，可知对于某个 $\rho > 0$，cl (int S) 是 ρ-近正则的。

断言1. d(边界 (cl (int S)), (边界 S) $\setminus$ 边界 (int S)) $= r_S > 0$.

否则，存在两个序列 x_n 和 y_n，使得

$$x_n \in \operatorname{bdry}(\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)), \quad y_n \in (\operatorname{bdry} S) \setminus \operatorname{bdry}(\operatorname{int} S) \text{ and } \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

由于 cl(int S) 具有紧边界，因此存在 $\bar{x} \in$ 边界 (int S) 以及 y_n的一个子序列（不重新编号），使得 $y_n \longrightarrow \bar{x}$。由于 $y_n \notin \operatorname{cl}(\operatorname{int} S)$，由命题 2.2($iii$) 可知 S 在 y_n处不是上半 Lipschitz。这根据命题2.2(ii) 可得存在单位向量 ζ_n 使得

$$\zeta_n \in N_S(y_n) \cap -N_S(y_n). \tag{12}$$

现在，由于 $y_n \in$ (边界 S) $\setminus$ 边界 (int S) 且 S满足扩展外 r'-球条件，我们有 S 在 r'-近正则 y_n附近，即在 (边界 S)-邻域内。于是，命题2.2(i) 和 (12) 推出

$$\zeta_n \in N_S^P(y_n) \cap -N_S^P(y_n).$$

利用近端法向不等式，以及 ζ_n 是单位向量且由一个r'-球实现这一事实，我们得到 $(\zeta_n)_n$ 有一个子序列（不再重新标记），该子序列收敛到满足下式的单位向量 ζ

$$\zeta \in N_S^P(\bar{x}) \cap -N_S^P(\bar{x}).$$

由于 $N_S^P(\bar{x}) \subset N^P_{\operatorname{cl}(\text{内 } S)}(\bar{x})$，我们推得

$$\zeta \in N^P_{\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)}(\bar{x}) \cap -N^P_{\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)}(\bar{x}).$$

利用 cl(内 S) 的邻近正则性以及命题 2.2(i)，可得

$$\zeta \in N_{\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)}(\bar{x}) \cap -N_{\operatorname{cl}(\operatorname{int} S)}(\bar{x}),$$

这与 cl (int S) 是上半 Lipschitz 的事实矛盾。该断言的证明至此完成。

现在我们证明，对于 $r := \min\{\rho, r', \frac{r_S}{4}\}$，$S$ 是 r-近正则的。令 $x \in$ 边界 S。如果 $x \in$ (边界 S) $\setminus$ 边界 (cl (int S))，那么根据扩展 r'-球条件的定义，我们知道任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$ 都由一个 r'-球实现。这说明任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$ 都由一个 r-球实现。现在假设 $x \in$ 边界 (cl (int S))。由于 cl (int S) 是 ρ-近正则的，因此对于任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x) \subset N^P_{\operatorname{cl}(\text{内部 } S)}(x)$，我们有

$$B\left(x + \rho\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; \rho\right) \cap \operatorname{cl}(\operatorname{int} S) = \emptyset.$$

这说明对于任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，我们有

$$B\left(x + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right) \cap \mathrm{cl}\,(\mathrm{int}\, S) = \emptyset. \tag{13}$$

另一方面，由于 $r < \frac{r_S}{4}$并利用断言 1，对于任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，我们有

$$B\left(x + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right) \subset B\left(x; \frac{r_S}{2}\right) \subset [(\mathrm{bdry}\, S) \setminus \mathrm{bdry}\,(\mathrm{int}\, S)]^c.$$

将后者与命题 2.1(ii) 以及 (13) 结合起来，对于任意 $0 \neq \zeta \in N_S^P(x)$，我们得到

$$B\left(x + r\frac{\zeta}{\|\zeta\|}; r\right) \cap S^c = \emptyset.$$

至此，定理 1.3 的证明结束。 □

参考文献

[1] A. Canino，关于 p-凸集与测地线，微分方程杂志 75/1 (1988) 118–157。[2] P. Cannarsa, H. Frankowska：可达集的内球性质与时间最优控制问题，ESAIM：控制、优化与变分法 12 (2006) 350–370。[3] P. Cannarsa，C. Sinestrari：最短时间函数的凸性性质，Calc. Var. 3 (1995) 273–298。[4] P. Cannarsa，C. Sinestrari：半凹函数、Hamilton-Jacobi 方程与最优控制，Birkh¨aser，波士顿 (2004)。[5] F. H. Clarke：优化与非光滑分析，John Wiley，纽约 (1983)。[6] F. H. Clarke，Yu. Ledyaev，R. J. Stern，P. R. Wolenski：非光滑分析与控制理论，数学研究生教材 178，施普林格，纽约 (1998)。[7] F. H. Clarke，R. J. Stern，P. R. Wolenski：近端光滑性与下方-C^2 性质，凸分析杂志 2/1-2 (1995) 117–144。[8] G. Colombo，A. Marigonda：一类非凸函数的可微性，Calc. Var. 25 (2005) 1–31。[9] H. Federer：曲率测度，美国数学会会刊 93 (1959) 418–491。[10]B. S. Mordukhovich：变分分析与广义微分。I：基础理论，施普林格，柏林 (2006)。[11] F. Nacry，L. Thibault：与近端正则集相关的距离函数，Set-Valued Var. Anal. 30 (2022) 731–750。[12] C. Nour，R. J. Stern：双侧最短时间函数的半凹性：线性情形，系统与控制快报 57 (2008) 863–866。[13] C. Nour，R. J. Stern，J. Takche：近端光滑性与外球条件，凸分析杂志 16/2 (2009) 501–514。[14] C. Nour，R. J. Stern，J. Takche：一致闭球并集猜想，控制与控制论 38/4B (2009) 1525–1534。[15] C. Nour，R. J. Stern，J. Takche： θ外球条件、 φ-凸性与局部半凹性，非线性分析：理论、方法与应用 73/2 (2010) 573–589。[16] C. Nour，R. J. Stern，J. Takche：一致闭球并集猜想的有效性，凸分析杂志 18/2 (2011) 589–600。[17] C. Nour，R. J. Stern，J. Takche：广义外球条件与 φ-凸性，离散与连续动力系统 29/2 (2011) 615–622。[18] C. Nour，J. Takche：关于闭球并集性质，优化理论与应用杂志 155 (2012) 376–389。

[19] J.-P.Penot：《无导数微积分》，数学研究生教材 266，施普林格，纽约 (2013)。[20] R. A.Poliquin，R. T.Rockafellar，L. Thibault：《距离函数的局部可微性》，美国数学会会刊 352 (2000) 5231–5249。[21] R. T. Rockafellar：《Clarke切锥与闭集的边界》， R^n，《非线性分析：理论、方法与应用》3 (1979) 145–154。[22] R. T. Rockafellar，R. J.-B. Wets：《变分分析》，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 317，施普林格，柏林 (1998)。[23] A. S. Shapiro：《希尔伯特空间中度量投影的存在性与可微性》，SIAM优化杂志 4 (1994) 231–259。