arXiv:2301.01052v1 [math.DS] 3 Jan 2023

平衡相关模型降阶的时域后验误差界 ⋆

比约恩·利耶格伦-赛勒 [a]

[a] *Universität Trier, FB IV - Mathematik, Lehrstuhl Modellierung und Numerik, D-54286 Trier, Germany*

摘要

模型降阶旨在通过低维且计算成本更低的降阶模型，近似由大规模动力系统描述的输入输出映射。虽然有多种方法能够实现高保真度，但其中只有少数方法能够提供严格的误差控制。本文针对采用平衡相关降阶方法对线性系统进行降阶，提出了一个严格的误差界。具体而言，我们研究有限时间区间内的仿真，并针对这一情形，对平衡截断和平衡奇异摄动近似的标准先验界进行事后调整，从而改善误差估计，同时仍能得到严格的误差界。我们的结果基于由输入的傅里叶级数近似所引出的误差分解，以及随后进行的精细误差分析。我们利用了系统理论概念，例如信号发生器驱动系统、稳态和可观测性的概念。即使存在非零初始条件，我们的误差界同样适用。文中还给出了数值证据，表明该误差界具有良好的紧致性。

Key words: 误差界；后验；平衡截断；平衡相关；模型降阶。

1 引言

考虑如下线性时不变系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N,\\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t)\end{aligned} \tag{1}$$

对于 $t \in [0,T]$ 状态为 $\mathbf{x}\colon\ [0,T] \to \mathbb{R}^N$、初始条件为 $\mathbf{x}_0$ 且状态方程渐近稳定的系统，即 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N,N}$ Hurwitz。此外，设 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N,1}$、$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1,N}$以及 $d \in \mathbb{R}$。当状态维数 N 相对于输入维数 u 和输出维数 y 较大时——为便于说明，我们假设标量值情形$u, y\colon\ [0,T] \to \mathbb{R}$——多次计算（1）的成本可能会变得非常高。该模型称为全阶模型（FOM）。我们关注的是一个更低维的降阶模型（ROM），其计算成本更低，同时仍具有足够的精度，即能够为所关注的输入 $y_{\mathrm{r}} \approx y$ 复现相似的输出

⋆ 通讯作者：B. Liljegren-Sailer。电话： +49 651 201-3468。*Email address:* bjoern.sailer@uni-trier.de（Bj¨orn Liljegren-Sailer）。

。所考虑的降阶模型为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{r}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{r}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t) + \mathbf{b}_{\mathrm{r}}u(t), \qquad \mathbf{x}_{\mathrm{r}}(0) = \mathbf{x}_{\mathrm{r}0} \in \mathbb{R}^n,\\ y_{\mathrm{r}}(t) &= \mathbf{c}_{\mathrm{r}}\mathbf{x}_{\mathrm{r}}(t) + d_{\mathrm{r}}u(t),\end{aligned} \tag{2}$$

其降阶状态为 $\mathbf{x}_{\mathrm{r}}\colon\ [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $n \ll N$。已有多种模型降阶方法（MOR），例如参见 [1,3]。例如，在基于投影的方法中，需要寻找合适的降阶基 V、W $\in \mathbb{R}^{N,\,n}$其中 $\mathbf{W}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$（单位矩阵）。随后将降阶模型定义为 $\mathbf{x}_{\mathrm{r}0} = \mathbf{W}^T\mathbf{x}_0, \mathbf{A}_{\mathrm{r}} = \mathbf{W}^T\mathbf{A}\mathbf{V}$，$\mathbf{b}_{\mathrm{r}} = \mathbf{W}^T\mathbf{b}$，$\mathbf{c}_{\mathrm{r}} = \mathbf{c}\mathbf{V}$ 以及 $d_{\mathrm{r}} = d$。降阶误差

$$E(t) := y(t) - y_{\mathrm{r}}(t), \qquad t \in [0,T],$$

在实际应用中并不知道这一点，因此人们非常希望能得到其界或估计。为了分析它，引入误差系统是有用的

$$\begin{aligned}\breve{\dot{\mathbf{x}}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \\ & \mathbf{A}_{\mathrm{r}}\end{bmatrix}}_{=:\breve{\mathbf{A}}}\breve{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{b}_{\mathrm{r}}\end{bmatrix}}_{=:\breve{\mathbf{b}}}\breve{u}(t), \quad \breve{\mathbf{x}}(0) = \breve{\mathbf{x}}_0,\\ \breve{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{c}, & -\mathbf{c}_{\mathrm{r}}\end{bmatrix}}_{=:\breve{\mathbf{c}}}\breve{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{(d - d_{\mathrm{r}})}_{=:\breve{d}}\breve{u}(t).\end{aligned} \tag{3}$$

根据构造，若选择 $\breve{u} = u$ 和 $\breve{\mathbf{x}}_0 = [\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_{\mathrm{r}0}^T]^T$，则 $\breve{y}(t) = \mathrm{E}(t)$ for $t \in [0,T]$。因此，(3) 只是误差动力学的一种简洁表示。

本文基于系统理论概念，推导了有限时间内$\mathcal{L}^2$-误差的严格后验界 $[0,T]$。它最适合与平衡相关模型降阶方法结合使用，例如平衡截断（BT）和平衡奇异摄动近似（SPA） [6,11,10]，，因为它利用并依赖于这些方法的关键特性，这些特性总结如下述假设所示。

假设 1. 考虑平方可积输入 u 下的 *FOM* ： $[0,T] \to \mathbb{R}$，并采用满足以下条件的方法进行降阶：

i) 存在关于 *ROM*的先验界。也就是说，假设初始条件为零（$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$），则有

$$\|E\|_{\mathcal{L}_T^2} := \sqrt{\int_0^T |E(t)|^2 dt} \leq \alpha \|u\|_{\mathcal{L}_T^2}$$

其中常数 $\alpha > 0$已知。ii) 构造 *ROM*需要 *FOM* 的可观测性格拉姆矩阵 Q。iii) *ROM*渐近稳定。

此处及下文中，$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_T^2}$ 表示时间区间 $[0,T]$上的 $\mathcal{L}^2$范数。像假设 1 中那样，能够得到先验界本身就具有很高的实用价值，尤其有助于选择合适的降阶模型维数 n。然而，由于这一先验结果未考虑仿真设置中的任何具体信息，因此给出的是误差的最坏情况估计。本文提出的界可视为对先验界的后验调整。其主要思路是滤除信号 w ，并仅对剩余部分 $u - w$应用保守的先验界。选择近似 w，使得能够进行更明确的误差分析，从而减少过度估计。我们还将与 w 相关的误差部分分解为其长时间行为（亦称稳态）以及一个等价于某一初始状态在误差系统（3）中的输出能量的项。稳态可通过离线-在线高效方式确定，而另一误差项则可利用 [9]中的方法进行紧确界定。

我们所提出的误差界的独特之处在于，它考虑了输入 u 的信息，即，这是一个后验结果；同时还利用了平衡相关模型降阶所固有的特性，参见假设 1。因此，它优于其他严格的后验界，例如 [7] 中推导出的基于残差的界。需要指出的是，有效的误差估计已在文献 [4,5], 中提出，但这些估计通常并不严格，因此可能会低估实际误差，这对于某些应用而言是一个问题。

本文围绕误差界的推导展开。第 2 节简要概述平衡相关模型降阶的标准先验界，以及 [9] 针对非齐次初始条件给出的误差界。这些都是我们推导误差界所需的要素。此外，在误差分析中，我们利用稳态这一概念处理一类输入近似；相关结果见第3至4节。我们的后验界在第5节中得到证明。第6节通过两个学术基准算例对其有效性进行了数值验证。

2 平衡相关模型降阶的结果

全阶模型中状态的可观测性和能控性可分别通过可观测性格拉姆矩阵 Q 和能控性格拉姆矩阵 P 来量化，其定义如下：

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty e^{t\mathbf{A}^T} \mathbf{c}^T \mathbf{c} e^{t\mathbf{A}} dt, \quad \mathbf{P} = \int_0^\infty e^{t\mathbf{A}} \mathbf{b}\mathbf{b}^T e^{t\mathbf{A}^T} dt.$$

对于渐近稳定系统，这些矩阵是良好定义的。它们在平衡截断和平衡降阶中的奇异摄动近似的分析与实现中发挥着关键作用，见 [1]。值得注意的是，这些平衡相关模型降阶方法能够基于格拉姆矩阵进行严格的误差分析。本节概述文献中的误差界，这些误差界也在我们改进的误差分析中发挥作用。这些结果分别要求或论证了我们的方法中的假设 1。

2.1 先验误差界

渐近稳定系统可以转换为所谓的平衡形式，在该形式下，格拉姆矩阵 Q 和 P 同时对角化且彼此相等。所得对角矩阵的对角元素 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_N \geq 0$ 称为汉克尔奇异值（HSVs），用于衡量平衡状态的可观测性和能控性。在平衡截断（BT）和奇异摄动近似（SPA）中，降阶模型（ROM）均由与最大汉克尔奇异值相关的状态组成，关于这些方法的详细信息见 [6] 。给定降阶模型维数 n 的选取满足 $\sigma_n > \sigma_{n+1}$，并考虑零初始条件（$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$），可证明降阶误差满足先验误差界 $\|\mathbb{E}\|_{\mathcal{L}_\infty^2} \leq \alpha \|u\|_{\mathcal{L}_\infty^2}$，其中 $\alpha = 2\sum_{j=n+1}^N \sigma_j$ 由被忽略的汉克尔奇异值组成，见 [3]。由于我们要求有限时间区间 $[0,T]$ 上的误差界（假设 1-i)），因此将上述误差界应用于输入 u 在无限区间 $[0,\infty)$ 上的延拓： $[0,T] \to \mathbb{R}$，该延拓通过以下方式获得

令 $u(t) = 0$ 对于 $t > T$。由此得到

$$\|E\|_{\mathcal{L}_T^2} \le \|E\|_{\mathcal{L}_\infty^2} \le \alpha \|u\|_{\mathcal{L}_T^2}.$$

2.2 初始条件引起的误差

零输入情形（$u(t) = 0$ for $t \ge 0$）可基于可观测性的概念进行简单的误差分析。在这种情况下，误差系统 (3) 的输出完全由初始条件 $\breve{\mathbf{x}}(0) = \breve{\mathbf{x}}_0 = [\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_{\mathrm{r}0}^T]^T$ 决定。其表达式为 $y_{\breve{\mathbf{x}}_0} = \breve{\mathbf{c}} e^{t\breve{\mathbf{A}}} \breve{\mathbf{x}}_0$。如 [9], 所示，将可观测性的概念应用于误差系统，可直接得到其范数的一个界，即

$$\|y_{\breve{\mathbf{x}}_0}\|_{\mathcal{L}_T^2} \le \|y_{\breve{\mathbf{x}}_0}\|_{\mathcal{L}_\infty^2} = \sqrt{\breve{\mathbf{x}}_0^T \breve{\mathbf{Q}} \breve{\mathbf{x}}_0}, \tag{4}$$

$$\breve{\mathbf{Q}} = \int_0^\infty e^{t\breve{\mathbf{A}}^T} \breve{\mathbf{c}}^T \breve{\mathbf{c}} e^{t\breve{\mathbf{A}}} dt = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{Q}_{\mathrm{r}} \end{bmatrix}.$$

其中，Q 是误差系统的可观测性格拉姆矩阵，由全阶模型和降阶模型的格拉姆矩阵 Q 和 $\mathrm{Q_r}$ 以及矩阵 $\mathrm{S} \in \mathbb{R}^{N,\,n}$ 组成；矩阵 S 可通过求解一个稀疏-稠密西尔维斯特方程来确定 [9]。请注意，使用平衡截断或奇异摄动近似构造降阶模型时，已需要用到 Q，因此无需额外成本即可将其用于误差界（假设 1-ii）。只需确定矩阵 $\mathrm{Q_r}$ 和 S，这项计算的成本相对较低。完成后，对于任意初始条件，计算式 (4) 只需进行矩阵-向量乘法，因此可用作在线高效误差界。

注 2. 不等式 (4) 对任意 $T > 0$ 都成立，且当 $T \to \infty$ 时取等号。另一方面，采用有限时间模型降阶时，例如[12], $\breve{\mathrm{Q}}$ 可以替换为有限时间格拉姆矩阵，此时该不等式在有限时间 T下也取等号。

注 3. 在大规模场景中，出于计算方面的考虑，可能需要用低秩近似替代格拉姆矩阵，参见 [3]。存在低秩误差时，无法严格证明本节的结果，但它们仍可作为误差估计的基础。

3 线性信号发生器驱动系统

考虑如下线性渐近稳定系统

$$\begin{aligned} \dot{\breve{\mathbf{x}}}(t) &= \breve{\mathbf{A}}\breve{\mathbf{x}}(t) + \breve{\mathbf{b}} w(t), \qquad \breve{\mathbf{x}}(0) = \breve{\mathbf{x}}_0, \\ \breve{y}(t) &= \breve{\mathbf{c}}\breve{\mathbf{x}}(t) + \breve{d} w(t), \end{aligned} \tag{5}$$

其系统矩阵如式 (3) 所示。假设该系统由一个线性信号生成器驱动，即 w 由一个线性自治微分方程描述

$$w(t) = \mathbf{c}_\xi \boldsymbol{\xi}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}_\xi \boldsymbol{\xi}(t), \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{C}^q, \tag{6}$$

其中 $\mathrm{A}_\xi \in \mathbb{C}^{q,\,q}$ 且 $\mathrm{c}_\xi \in \mathbb{C}^{1,\,q}$。我们采用 [2,8] 中的稳态概念，以及由此得到的式 (5) 解的表示。此处的稳态指解在长时间内趋近的行为，该行为独立于初始条件 $\breve{\mathbf{x}}_0$ 的选取。请注意，由于系统渐近稳定，初始条件的影响会随时间推移逐渐消失。我们假设 A 和 A_ξ 没有任何公共特征值，这意味着西尔维斯特方程

$$\breve{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Pi} + \breve{\mathbf{b}}\mathbf{c}_\xi = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{A}_\xi \tag{7}$$

对于 $\boldsymbol{\Pi} \in \mathbb{R}^{N+n,\,q}$，其解是唯一的。由此可得

$$\begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} & \breve{\mathbf{b}}\mathbf{c}_\xi \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Pi} + (-\breve{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}\mathbf{A}_\xi) \\ \mathbf{A}_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \mathbf{A}_\xi,$$

其中 $\mathrm{I}_q \in \mathbb{R}^{q,\,q}$ 表示单位矩阵。利用后一个关系，可以证明，由信号生成器驱动的系统的稳态为 $\breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st}}(t) = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\xi}(t)$, $t \ge 0$。这是方程（5）—（6）在 $\breve{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\xi}_0$ 条件下的特解，因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st}}(t) \\ \boldsymbol{\xi}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \breve{\mathbf{A}} & \breve{\mathbf{b}}\mathbf{c}_\xi \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \mathbf{A}_\xi \boldsymbol{\xi}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\xi}(t). \end{aligned}$$

因此，对于由线性信号发生器给定的信号 w，我们可以唯一确定一个稳态，并且线性映射

$$\breve{\mathcal{F}} : w(\cdot) \mapsto \breve{\mathcal{F}}(w(\cdot)) = (\breve{\mathbf{c}}\boldsymbol{\Pi} + \breve{d}\mathbf{c}_\xi)\boldsymbol{\xi}(\cdot)$$

是定义良好的。最后请注意，方程（5）—（6）在一般选择 $\breve{\mathbf{x}}_0$ 下的输出响应为

$$\breve{y}(t) = \underbrace{(\breve{\mathbf{c}}\boldsymbol{\Pi} + \breve{d}\mathbf{c}_\xi)\boldsymbol{\xi}(t)}_{\text{steady-state response } \breve{\mathcal{F}}(w)} + \underbrace{\breve{\mathbf{c}} e^{\breve{\mathbf{A}}t}(\breve{\mathbf{x}}_0 - \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\xi}_0)}_{\text{transient response}},$$

且暂态响应呈指数衰减。图1展示了在零初始条件下收敛至稳态的示意图。

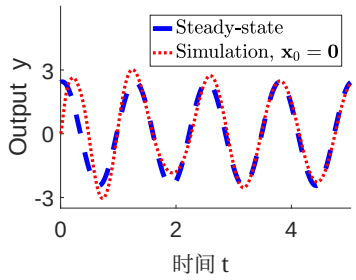

图1. 信号 $w(t) = \cos(5t)$以及 Beam 基准测试所给模型的稳态响应收敛示意图（参见第6.1节和[3, 第 24]节）。

4 傅里叶级数的稳态响应

对于给定的阶数 $K \geq 0$，函数 $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ 的截断傅里叶级数定义为

$$w^K(t) = \lambda_0 + \sum_{\ell=1}^{K} \lambda_\ell \cos\left(2\pi\ell\frac{t}{T}\right) + \lambda_{K+\ell}\sin\left(2\pi\ell\frac{t}{T}\right) =: \sum_{\ell=0}^{2K} \lambda_\ell g_\ell(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

其傅里叶系数为 $\lambda_\ell = \int_0^T g_\ell(t)u(t)dt/\|g_\ell\|^2_{\mathcal{L}^2_T}, \ell = 0, \ldots, 2K$。本节将更详细地考察截断傅里叶级数 w^K 以及它在线性系统上的稳态响应 $\breve{\mathcal{F}}(w^K)$（参见第 3 节）。对 $\breve{\mathcal{F}}(w^K)$ 采用便于计算的表示形式，是高效实现误差界的关键。

设 i 表示虚数单位（$\mathrm{i}^2 = -1$），并令 $\alpha \in \mathbb{R}$。指数脉冲 $t \mapsto e^{\mathrm{i}\alpha t}$ 可由式 (6) 中的信号生成器描述，因此可以使用标量状态$\xi_\alpha\colon [0,T] \mapsto \mathbb{C}$。相关的 Sylvester 方程 (7) 可简化为一个线性方程，即，

$$\begin{aligned} &e^{\mathrm{i}\alpha t} = \xi_\alpha(t), \qquad \dot{\xi}_\alpha(t) = \mathrm{i}\alpha\xi_\alpha(t), \quad \xi_\alpha(0) = 1, \\ &\mathbf{\Pi}_\alpha = (\mathrm{i}\alpha\mathbf{I} - \breve{\mathbf{A}})^{-1}\breve{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^N. \end{aligned} \tag{9}$$

该脉冲的稳态响应为$\breve{\mathcal{F}}(e^{\mathrm{i}\alpha\cdot}) = (\breve{\mathbf{c}}\mathbf{\Pi}_\alpha + \breve{d})e^{\mathrm{i}\alpha\cdot}$。利用余弦函数和正弦函数分别是指数脉冲的实部和虚部这一性质，即对于任意 $t \geq 0$，都有

$$\cos(\alpha t) = \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\alpha t}), \quad \sin(\alpha t) = \mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\alpha t}),$$

我们可以推导出 $\breve{\mathcal{F}}(g_\ell)$在$\ell = 1, \ldots\ldots, 2K$时的一种便捷表示。对于余弦函数，该表示为

$$\begin{aligned} \breve{\mathcal{F}}(\cos(\alpha\cdot)) &= \breve{\mathbf{c}}\mathrm{Re}\left(\mathbf{\Pi}_\alpha\left(\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}\alpha\cdot}) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}\alpha\cdot})\right)\right) + \breve{d}\cos(\alpha\cdot) \\ &= (\breve{\mathbf{c}}\mathrm{Re}(\mathbf{\Pi}_\alpha) + \breve{d})\cos(\alpha\cdot) - (\breve{\mathbf{c}}\mathrm{Im}(\mathbf{\Pi}_\alpha))\sin(\alpha\cdot), \end{aligned}$$

并且，经过类似的计算可得

$$\breve{\mathcal{F}}(\sin(\alpha\cdot)) = (\breve{\mathbf{c}}\mathrm{Im}(\mathbf{\Pi}_\alpha))\cos(\alpha\cdot) + (\breve{\mathbf{c}}\mathrm{Re}(\mathbf{\Pi}_\alpha) + \breve{d})\sin(\alpha\cdot).$$

总之，利用 $\mathcal{F}$ 的线性 $\{g_0, \ldots, g_{2K}\}$，并注意到 $\{\breve{\mathcal{F}}(g_0)\ldots, \breve{\mathcal{F}}(g_{2K})\}$ 是关于 $\mathcal{L}^2_T$-内积的正交函数组，我们得出以下引理。

引理 4. 系统 (5) 在$w = w^K$ 如 (8) 所示，即 $\breve{\mathcal{F}}(w^K) = \sum_{\ell=0}^{2K}\lambda_\ell\breve{\mathcal{F}}(g_\ell)$ 时的稳态响应满足

$$(\|\breve{\mathcal{F}}(w^K)\|_{\mathcal{L}^2_T})^2 = T\left|\breve{\mathbf{c}}\mathbf{\Pi}_0 + \breve{d}\right|^2\lambda_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{\ell=1}^{K}\left|\breve{\mathbf{c}}\mathbf{\Pi}_\ell + \breve{d}\right|^2(\lambda_\ell^2 + \lambda_{K+\ell}^2),$$

其中，对于 $\ell = 0, \ldots\ldots, K$， $\mathbf{\Pi}_\ell$ 由 (9) 给出。此外，稳态响应的初始条件为

$$\breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st},0} := \lambda_0\mathbf{\Pi}_0 + \sum_{\ell=1}^{K}\lambda_\ell\mathrm{Re}(\mathbf{\Pi}_\ell) + \lambda_{K+\ell}\mathrm{Im}(\mathbf{\Pi}_\ell).$$

注 5. 量 $\breve{\mathbf{c}}\mathbf{\Pi}_\ell$、 $\ell = 0$、……、 K是误差系统 (3) 在频率 $s_\ell = \mathrm{i}\ell$处的所谓矩，参见 [1]。换言之，它们是全阶模型与降阶模型的矩之差。

5 后验误差界

本文的主要结果依赖于对给定输入 u 的傅里叶级数近似 w^K，以及对降阶误差的特定分解。误差被分解为由w^K 和初始条件引起的稳态响应与暂态响应，以及由输入 $u - w^K$ 的其余部分引起的响应。我们采用不同的方法分别界定这三项。

定理 6（后验误差界）。设假设 1 成立，考虑平方可积输入$u\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ 以及初始条件 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}_{\mathrm{r}0}$。设 $\breve{\mathbf{Q}}$ 如式 (4) 所示，且 $K \in \mathbb{N}$。设 w^K, $\breve{\mathcal{F}}(w^K)$ 和 $\breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st},0}$ 如引理 4 所示。
那么，降阶误差 $\mathbf{E} = y - y_{\mathrm{r}}$ 有如下界

$$\begin{aligned} &\|E\|_{\mathcal{L}^2_T} \leq \gamma_{K,u,\mathbf{x}_0} \\ &\gamma_{K,u,\mathbf{x}_0} = \|\breve{\mathcal{F}}(w^K)\|_{\mathcal{L}^2_T} + \sqrt{\breve{\mathbf{x}}_c^T\breve{\mathbf{Q}}\breve{\mathbf{x}}_c} + \alpha\|u - w^K\|_{\mathcal{L}^2_T}, \end{aligned}$$

$where\ \breve{\mathbf{x}}_c = [\mathbf{x}_0^T, \mathbf{x}_{\mathrm{r}0}^T]^T - \breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st},0} \in \mathbb{R}^{N+n}$.

证明。我们利用系统的线性，将降阶误差分解为三个子部分。每个子部分都可表示为误差系统 (3) 在特定输入 $\breve{u}$ 和初始条件 $\breve{\mathbf{x}}(0)$ 下的输出。我们根据 $\mathbf{E} = \breve{y}_{\mathrm{st}} + \breve{y}_{\breve{\mathbf{x}}_c} + \breve{y}_{\mathrm{rest}}$分解降阶误差，其中

- $\breve{y}_{\mathrm{st}}$ 由输入 $\breve{u} = w$ 和 $\breve{\mathbf{x}}(0) = \breve{\mathbf{x}}_{\mathrm{st},\,0}$得到；
- $\breve{y}_{\breve{\mathbf{x}}_c}$ 零输入 $\breve{u} \equiv 0$ 和 $\breve{\mathbf{x}}(0) = \breve{\mathbf{x}}_c$时得到；
- $\breve{y}_{\text{其余部分}}$ 由输入 $\breve{u} = u - w^K$ 和 $\breve{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$得到。

显然，根据三角不等式，$\|\mathbf{E}\|_{\mathcal{L}_T^2} \le \|\breve{y}_{\mathrm{st}}\|_{\mathcal{L}_T^2} + \|\breve{y}_{\breve{\mathbf{x}}_c}\|_{\mathcal{L}_T^2} + \|\breve{y}_{\mathrm{rest}}\|_{\mathcal{L}_T^2}$ 成立。所声称的误差界$\gamma_{K,u,\mathbf{x}_0}$ 是通过引理 4 对稳态 $\breve{y}_{\mathrm{st}}$进行界定、利用公式 (4) 对暂态响应 $\breve{y}_{\breve{\mathbf{x}}_c}$ 进行界定，以及利用假设 1 中的先验误差结果对其余部分 $\breve{y}_{\mathrm{rest}}$进行界定而得到的。 □

注 7. 傅里叶级数 w^K 的阶数 K 是我们误差界中唯一需要选择的参数。我们建议将 $K \approx 10$ 作为参考值。在第 6.2 节中，我们通过一个示例研究了其影响。

需要强调的是，我们的误差界支持高效的离线-在线分解。除傅里叶系数λ_ℓ 外，几乎所有所需量都与输入 u 和初始条件 $\mathbf{x}_0$ 无关，因此可以在离线阶段确定。此外，利用 w^K 与 u的正交性，可以得到 $\|u - w^K\|_{\mathcal{L}_T^2} = \sqrt{\|u\|_{\mathcal{L}_T^2}^2 - \|w^K\|_{\mathcal{L}_T^2}^2}$成立。因此，傅里叶系数的计算是在线阶段的主要步骤，其计算成本不会随全阶模型的维数而增加。

6 数值验证

我们通过两个学术基准示例展示了误差界的效率。我们将其与著名的先验界（第 2 节）进行比较，并说明底层傅里叶级数中所用阶数 K 的影响，参见注 7。

数值测试中使用的全阶模型（梁和 CD播放器）来自 SLICOT 基准测试集 [3, 第 24]节。所有数值结果均使用 MATLAB 9.1.0 版（R2016b）在配备 16.0GB RAM 的英特尔 Core i5-7500 处理器上生成。仿真基于 MATLAB 内置积分器 ode15s，容差设为 'AbsTol $= 10^{-10}$' 和 'RelTol$= 10^{-7}$'。时间积分采用均匀时间网格上的梯形法进行数值求积，网格包含 2000 个点。最后，所有测试均采用仿真时间 $T = 2\pi$ 。

6.1 梁（研究 *ROM* 维数 n）

Beam 基准测试是一个具有 $N = 349$ 的单输入单输出模型。我们对该全阶模型进行仿真，采用零初始条件和输入 $u(t) = 4\sin^3(2.7t) + \mathrm{e}^{0.2t}, t \in [0, T]$，并将结果与采用平衡截断或奇异摄动近似得到的不同维数降阶模型的仿真结果进行比较$n \in [2, 30]$。如图 2 所示，我们提出的界（参数为 $K = 10$）使误差估计

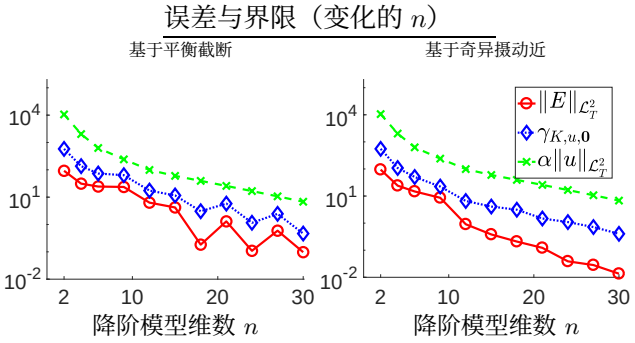

图 2. 梁。降阶误差与所提出的后验界 $\gamma_{K,\,u,\,\mathbf{x}_0}$（其中 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 和 $K = 10$）以及标准先验界的比较。

相较于先验界平均提高了约一个数量级。采用奇异摄动近似进行降阶时，这种改进更为显著，同时降阶误差也更小。相比之下，平衡截断和奇异摄动近似的先验界相同，也就是说，该先验界未针对具体设置进行调整。

6.2 CD播放器（傅里叶级数的阶数 K）

我们考虑 SLICOT 基准测试集中的 CD播放器，这是一个具有 $N = 120$ 的多输入多输出模型。由于本文仅讨论单输入单输出情形，因此在数值测试中，我们将输入矩阵替换为其第一列，并将输出矩阵替换为其第二行。该全阶模型采用平衡截断进行降阶，使用 $n = 8$。这里我们重点考察参数 K 对所提出的界的性能的影响。为进行比较，我们根据 [9], 调整先验界，其中与初始条件有关的误差根据式 (4) 与输入分开进行界定，从而得到界 $\Delta_{\mathbf{x}_0} := \breve{\mathbf{x}}_0^T \breve{\mathbf{Q}} \breve{\mathbf{x}}_0$ ，其中 $\breve{\mathbf{x}}_0$ 给定为误差系统的初始条件。

对于仿真，我们选择 $\mathbf{x}_0 = [1, \ldots, 1]^T/100$，而输入

$$u(t) = \begin{cases} t - 8\exp(-t/2) & t \le \pi \\ (\pi - t) - 8\exp(-t/2) & t > \pi \end{cases},$$

其在 $t = \pi$ 处存在不连续性，时间域图示见图3。非零初始条件和输入的不连续性导致输出响应出现两个峰值，参见图4。此外，不连续性意味着 u 的傅里叶级数近似衰减缓慢。图5展示了 $K \in [0, 15]$ 的这一情况，同时给出了所得后验界与先验界及降阶误差的对比。可以看出，对于 $K = 15$，傅里叶级数近似 w^K 的误差仍约为 10%。当 $K \ge 10$ 时，我们的后验误差界对误差的高估不到一个数量级；与先验界相比，这有了显著改善。先验界的高估幅度几乎达到两个数量级，

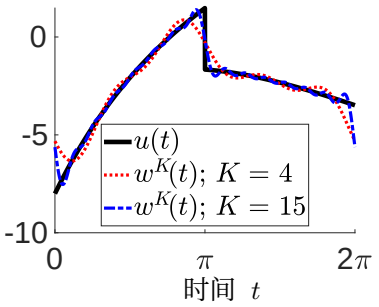

图3. CD播放器。输入 u 的时域图，以及两个不同阶数的傅里叶级数近似。

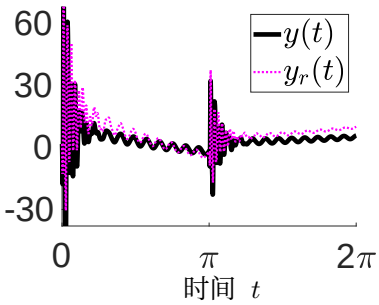

图4. CD播放器。全阶模型和降阶模型的输出 y 和 y_r 的时域图。

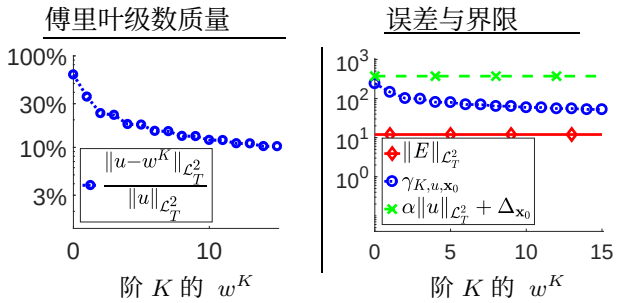

图5. CD播放器， K中的参数研究。 *Left:* 傅里叶级数近似的相对误差。 *Right:* 降阶误差与所提出的后验界$\gamma_{K,\ u,\ \mathbf{x}_0}$ 以及标准先验界（初始条件使用 $\Delta_{\mathbf{x}_0}$，如 [9] 中所示）。通过平衡截断得到的降阶模型， $n = 8$。

而我们的后验界即使在底层傅里叶级数近似质量平平的情况下，仍然有效。这个小例子展示了这一点。

结论

我们提出了一种针对平衡相关模型降阶中已有先验误差界的后验扩展。它缓解了先验误差界固有的最坏情况型误差估计问题。其思路是对输入信号进行滤波，得到一个近似，从而能够以高效的方式进行更明确的误差分析。本文使用了输入的截断傅里叶级数近似，并为其推导出一种高效的离线-在线分解。

最后，我们想指出本研究结果可能的扩展方向。对于某些应用，研究其他输入近似方式可能会很有趣，例如使用与已知感兴趣频率范围相关的信号生成器。利用 [12]，中的结果（参见注释 2），将我们的误差界推广到时限平衡截断是直接的。也可以考虑多输入多输出系统，但这需要分别对每个输入分量进行近似。

参考文献

[1] A. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*，第 6 卷， *Adv. Des. Control*。SIAM，费城，宾夕法尼亚州，2005 年。[2] A. Astolfi. 通过矩匹配对线性和非线性系统进行降阶。 *IEEE Transactions on AutomaticControl*，55(10):2321–2336，2010 年。[3] P. Benner、V. Mehrmann 和 D. C. Sorensen（编）。*Dimension Reduction of Large-Scale Systems*。计算科学与工程讲义。Springer，第 1 版，2005 年。[4] L. Feng、A. C. Antoulas 和 P. Benner。关于（非）参数化线性系统降阶建模的一些后验误差界。 *ESAIM: Math. Model. Numer.Anal.*，51(6):2127–2158，2017 年。[5] L. Feng 和 P. Benner。线性参数系统的一种新型误差估计器。 *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*，67(12):4848–4859，2019 年。[6] M. Green 和 D. J. Limebeer。 *Linear robust control*。CRRC，2012 年。[7] B. Haasdonk 和 M. Ohlberger。通过离线/在线分解，为参数化动力系统构建高效降阶模型并进行后验误差估计。 *Math. Comput.Model. Dyn. Syst.*，17(2):145–161，2011 年。[8] A. Isidori 和 C. I. Byrnes。非线性系统的稳态行为及其在鲁棒扰动抑制中的应用。 *Annu. Rev. Control*，32(1):1–16，2008 年。[9] B. Liljegren-Sailer。含非齐次初始条件的模型降阶的有效误差估计。arXiv 电子预印本 2201.06631，2022 年。[10]Y. Liu 和 B. D. Anderson。平衡系统的奇异摄动近似。 *Internat. J. Control*，50(4):1379–1405，1989 年。[11]B. Moore。线性系统中的主成分分析：能控性、可观测性与模型降阶。 *IEEETrans. Automat. Control*，26(1):17–32，1981 年。[12] M. Redmann。时限平衡截断的一个 L^2_T误差界。 *Systems Control Lett.*，136:104620，2020 年。