连续介质力学中的客观性：引言

运动、欧拉变量与拉格朗日变量及函数、变形梯度、李导数、速度叠加公式、科里奥利。

Gilles Leborgne，www.isima.fr/leborgne

2023年1月4日

arXiv:2301.01056v1 [physics.class-ph] 3 Jan 2023

在经典力学中，存在两种客观性：1- 协变客观性涉及物理定律的普适性，要求其与观察者无关（在任何参考系中均成立）；这是本手稿的主要议题。2- 等距客观性涉及材料的本构定律在参考系中表达后的形式。

连续介质力学中的协变客观性遵循麦克斯韦的要求，参见 [13] 第1页：“2.（.....）我们得出的公式必须满足这样一点：任何国家的人，只要将不同符号替换为按本国计量单位测得的量值，就能得到正确的结果。（.....）10.（.....）笛卡尔将坐标轴引入几何学，是数学进步中最伟大的步骤之一，因为这使几何学的方法归结为对数值进行计算。一个点的位置由三条始终沿确定方向绘制的线段长度来确定.....然而，在许多物理推理（而非计算）中，最好避免明确引入笛卡尔坐标，而是直接将注意力放在空间中的一个点，而不是它的三个坐标上；放在力的大小和方向上，而不是它的三个分量上。这种考察几何量和物理量的方式，比另一种方式更为原始、也更为自然.....”

另请参阅 Abraham and Marsden 所著《力学基础》引言中的（简短）历史札记 [1], ，其中谈到了定性理论与定量理论：“力学始于一个漫长的定性研究传统，这一传统在开普勒和伽利略时期达到顶峰。随后是定量理论时期（1687—1889年），其特点是力学、数学和科学哲学同步发展，牛顿、欧拉、拉格朗日、拉普拉斯、哈密顿和雅可比的著作正是这一时期的典型代表。（.....）对于天体力学（.....）问题的解决，我们要归功于庞加莱的天才；他重新振兴了定性观点（.....）其优势之一在于，通过省去不必要的坐标，理论的完整普遍性便显而易见。”

定义了运动、欧拉变量与拉格朗日变量及函数之后，我们将函数形式的变形梯度定义给出。随后，我们会对满足工程师需求的向量场李导数形成简单的认识。接着，我们推导出速度加法公式，并验证李导数具有客观性。请注意，若李导数在柯西生前已经存在，他肯定会使用它们：为了求得应力，柯西必须比较两个向量，而使用李导数时，一个向量就足够了。

我们系统地从定性定义（与观察者无关）入手，然后再用基和／或欧几里得点积进行量化（依赖观察者）。一篇相当长的附录试图在一份手稿中汇集定义、性质和解释；这些内容通常散见于多本书籍之中（而且并不总是那么容易找到）。

目录

I 运动、欧拉描述与拉格朗日描述、流 11

1 运动 **11**

1.1 参考系.11 1.2 爱因斯坦求和约定（对偶记号）.12 1.3 物体运动.12 1.4 虚运动与实运动.12 1.5 假设（牛顿与爱因斯坦）.13 1.6 构形.13

1.7 欧拉变量与拉格朗日变量的定义.13 1.8 轨迹.13

1.9 有基向量、切空间、纤维、向量场、丛.13

2 欧拉描述（实际时间 t 的空间描述）14

2.1 构形集合.14 2.2 欧拉变量与函数.14 2.3 欧拉速度（空间速度）与速率.15 2.4 欧拉速度的空间导数.15 2.4.1 定义.16

2.4.2 对流导数 $d\mathcal{E}ul.\vec{v}$ .16$\vec{}$2.4.3 基底中的量化： $df.\vec{u}$ 写作 $(\vec{u}.$梯度$)f$ .16$\vec{}$2.4.4 相对于欧几里得点积的表示：梯度f .17 2.4.5 向量值函数.17 2.5 流线（流动线）.17 2.6 物质时间导数（物质导数）.18 2.6.1 通常定义.18 2.6.2 备注：关于记号.19 2.6.3 定义二：时空定义.19 2.6.4 物质时间导数是一种导数.20 2.6.5 可交换性问题.20 2.7 欧拉加速度.20$\tilde{}$2.8 对 Φ 进行时间泰勒展开.21

3 从初始构形出发的运动：拉格朗日描述 21

3.1 初始构形与拉格朗日“运动”.21 3.1.1 定义.21 3.1.2 构形间微分同胚.22 3.1.3 轨迹.22 3.1.4 迹线（lignes d’émission）.22 3.2 拉格朗日变量与函数.23 3.2.1 定义.23 3.2.2 拉格朗日函数是一个双点张量.23 3.3 与欧拉函数相关联的拉格朗日函数.24 3.3.1 定义.24 3.3.2 注释.24 3.4 拉格朗日速度.24 3.4.1 定义.24 3.4.2 拉格朗日速度与欧拉速度的比较.24 3.4.3 微分之间的关系.25

.3.4.4 使用拉格朗日变量计算 $d\vec{v}$，称为 $L = F.F^{-1}$.25 3.5 拉格朗日加速度.25 3.6 Φ^{t_0} 的时间泰勒展开.26 3.7 可随运动发生变形的向量场.26

4 变形梯度 $F := d\Phi$ **26**
4.1 定义.27 4.1.1 变形梯度的定义 F .27 4.1.2 推前（ F的值）.27 4.1.3 F 是两点张量.28 4.1.4 演化：迈向李导数（在连续介质力学中）.28 4.1.5 拉回.29

4.2 基底下的量化.29 4.3 不恰当的记号 $d\vec{x} = F.dX$ .30 4.3.1 问题.30 4.3.2 这种不恰当的记号从何而来？.30 4.3.3 解释：向量方法.30 4.3.4 解释：微分方法.30

• • 4.3.5 含糊的记号 $d\vec{x} = F.dX$ .31 4.4 张量记号、警告、注释.31 4.5 t 处针对 F 的坐标系变换.32 4.6 Φ 和 F 的空间泰勒展开.32 4.7 F 的时间泰勒展开.32 4.8 均匀各向同性材料.33 4.9 变形梯度的逆.33

5 流 **34**
5.1 引言：运动与流.34 5.2 定义.34 5.3 柯西–利普希茨定理.34 5.4 示例.36

5.5 流的复合.36 5.5.1 流的复合法则（确定性）.36 5.5.2 平稳情形.37 5.6 沿相反方向经过的轨迹上的速度.38 5.7 流随初始时刻的变化.38 5.7.1 含糊与不含糊的记号.38 5.7.2 流随初始时刻的变化.39

II 推前 向前 40

6 推前 **40**
6.1 定义.40 6.2 点的推前与拉回.40 6.3 曲线的推前与拉回.41 6.4 标量函数的推前与拉回.41 6.4.1 定义.41 6.4.2 解释：这有什么用？.42 6.5 向量场的推前与拉回.42 6.5.1 通过近似给出的定义.42 6.5.2 向量场推前的定义.42 6.5.3 向量场的拉回.43 6.6 在基底下的量化.44 6.6.1 通常结果.44 6.6.2 示例：极坐标系.44

7 推前 微分形式的推前与拉回 46
7.1 定义.46 7.2 不兼容性：黎斯表示与推前.47

8 张量的推前与拉回 48

8.1 一阶张量的推前与拉回.48 8.2 二阶张量的推前与拉回.48 8.3 自同态的推前与拉回.49 8.4 向量场导数的应用.49 8.5 $\Psi_*(d\vec{u})$ 与 $d(\Psi_*\vec{u})$：不满足交换律.50 8.6 微分形式导数的应用.50 8.7 $\Psi_*(d\alpha)$ 与 $d(\Psi_*\alpha)$：不满足交换律.50

III 李导数 51

9 李导数 51

9.0 目的与初步结果.51 9.0.1 目的？.51 9.0.2 基本结果.51 9.1 定义.51 9.1.1 问题（普适性礼物）.51 9.1.2 ...走向解（没有普适性礼物）.52 9.1.3 ...李导数，初始定义.52 9.1.4 更一般的定义.52 9.1.5 等价定义（微分几何）.53 9.2 标量函数的李导数.53 9.3 向量场的李导数.54 9.3.1 公式.54

9.3.2 解释：流动阻力测量.54 9.3.3 自主李导数与李括号.55 9.4 示例.55

9.4.1 向量场沿自身的李导数.55 9.4.2 沿均匀流的李导数.55 9.4.3 均匀向量场的李导数.55 9.4.4 弹性材料的单轴拉伸.55 9.4.5 弹性材料的简单剪切.56 9.4.6 剪切流.56 9.4.7 自旋.57 9.4.8 二阶李导数.57 9.5 微分形式的李导数.57 9.6 与黎斯表示向量的不相容性.59 9.7 张量的李导数.59 9.7.1 混合张量的李导数.59 9.7.2 逆变张量的李导数.60 9.7.3 协变张量的李导数.60

IV 速度 度叠加公式 61

10 参考系g与速度的 y-叠加公式 61

10.0 问题与结果（总结）.61 10.1 参考系与“矩阵运动”.61 10.1.1 绝对参考系和相对参考系.61 10.1.2 物质对象的运动 Obj .62 10.1.3 量化：Obj 的绝对和相对“运动”.62 10.1.4 $\mathcal{R}_B$ 的运动.63 10.1.5 量化：$\mathcal{R}_B$ 的驱动力和静止“运动”.63 10.2 平移算子 Θ_t .64 10.2.1 Θ_t 的定义.64~10.2.2 对运动 Φ 的 t 平移.64 10.3 $d\Theta_t$ .64 10.3.1 推前.64

10.3.2 Θ_t 在经典力学中是仿射的.65

10.4 平移速度.65 10.5 Θ 的定义.66 10.6 “Θ-速度”是驱动速度.66 10.7 速度叠加公式.66 10.8 科里奥利加速度与加速度叠加公式.67 10.9 带初始时刻的情形.67 10.10驱动力和科里奥利力.68 10.10.1 基本原理：要求采用伽利略参考系.68 10.10.2 驱动力 $+$ 科里奥利力 $=$ 惯性力.68 10.11“太阳和地球”总结.69 10.11.1 地球上的科里奥利力.69

11 客观性 **71**

11.1 “等距客观性”与“参考系不变原理”.71 11.2 协变客观性的定义与刻画.71 11.2.1 经典力学的框架.71 11.2.2 标量函数的协变客观性.71 11.2.3 向量场的协变客观性.72 11.2.4 微分形式的协变客观性.72 11.2.5 张量的协变客观性.72 11.3 速度的非客观性.73 11.3.1 欧拉速度 $\vec{v}$：非协变（且非等距）客观.73 11.3.2 $d\vec{v}$ 非客观.73 11.3.3 $d\vec{v}+d\vec{v}^T$ 为“等距客观”.74 11.3.4 拉格朗日速度.74 11.4 The

李导数是协变客观的.74

11.4.1 标量函数.74 11.4.2 向量场.74 11.4.3 张量.75

11.5 泰勒展开与普适性礼物.76

11.5.1 在 $\mathbb{R}^n$ 中无处不在.76 11.5.2 一般情形.76

附录 附录 7 **8**

A 经典与对偶记号 78

A.1 逆变向量与基.78

A.1.1 逆变向量.78 A.1.2 基.78 A.1.3 典范基.78 A.1.4 笛卡尔基.78

A.2 向量相对于基的表示.79 A.3 对偶基.79

A.3.1 线性形式 $=$ “协变向量”.79 A.3.2 协变对偶基（$=$ 给出向量分量的函数）. 80

A.3.3 示例：航空单位.81 A.3.4 线性形式的矩阵表示.81 A.3.5 示例：热力学.82

A.4 爱因斯坦求和约定.82 A.4.1 定义.82 A.4.2 切勿混淆.83 A.5 基变换公式.83 A.5.1 换基自同态与过渡矩阵.83 A.5.2 过渡矩阵的逆矩阵.84 A.5.3 对偶基变换.84 A.5.4 向量和线性形式的坐标系变换.84 A.6 双对偶基（及逆变性）.85 A.7 双线性形式.85

A.7.1 定义.85 A.7.2 双线性形式的转置.85 A.7.3 对称正定双线性形式.86 A.7.4 内积与度量.86 A.7.5 量化：矩阵 $[\beta_{ij}]$ 及张量表示.86 A.8 线性映射.87 A.8.1 定义.87 A.8.2 量化：矩阵 $[L_{ij}] = [L^i{}_j]$.88 A.8.3 端同态的迹.89 A.9 转置矩阵.89 A.10 转置端同态：取决于选定的内积.90 A.10.1 定义（需要内积：非客观）.90 A.10.2 基底下的量化.90 A.10.3 对称自同态.91 A.10.4 端同态的一般平坦 $^\flat$ 记号：相对于一个 $(\cdot,\cdot)_g$ . . . . . 92 A.11 线性映射的转置：取决于选定的内积.92 A.11.1 定义（主观）.93 A.11.2 基底下的量化.93 A.11.3 变形梯度对称：荒谬.93 A.11.4 等距变换.94 A.12 线性映射的伴随（客观）.94 A.12.1 定义.94 A.12.2 量化.95 A.12.3 引入内积后与转置的关系.95 A.13 线性映射的张量表示.95 A.13.1 一种张量表示.95 A.13.2 警告：混淆转置与伴随.96 A.14 双线性形式和线性映射的基变换公式.96 A.14.1 双线性形式和线性映射的过渡矩阵记号.96 A.14.2 双线性形式 $\in \mathcal{L}(A, B; \mathbb{R})$ 的坐标系变换.97 A.14.3 双线性形式 $\in \mathcal{L}(A^*, B^*; \mathbb{R})$ 的坐标系变换.97 A.14.4 双线性形式 $\in \mathcal{L}(B^*, A; \mathbb{R})$ 的坐标系变换.97 A.14.5 三线性形式 $\in \mathcal{L}(A^*, A, A; \mathbb{R})$ 的坐标系变换.98 A.14.6 线性映射 $\in \mathcal{L}(A; B)$ 的坐标系变换.98

B 欧几里得框架 **98**

B.1 欧几里得基.99 B.2 欧几里得点积.99 B.3 欧几里得基变换.100 B.3.1 两个欧几里得点积成比例.100 B.3.2 反例：不存在欧几里得点积.100 B.4 变形梯度的欧几里得转置.100 B.5 自同态的欧几里得转置.100 B.6 单位法向量、单位法形式.101 B.6.1 框架.101 B.6.2 单位法向量.101 B.6.3 与 $\vec{n}$ 相关联的单位法形式 $n^\flat$ .102 B.7 分部积分（格林–高斯–奥斯特罗格拉德斯基）.102

C 变形率张量和自旋张量 103

C.1 $d\vec{v}$ 的对称部分和反对称部分.103 C.2 基上的量化.103

D 解读　　变形率张量的表示 **104**

E 刚体运动与自旋张量 104
E.1 仿射运动与刚体运动.104 E.1.1 仿射运动.104 E.1.2 刚体运动.105 E.1.3 刚体运动的替代定义：$d\vec{v} + d\vec{v}^T = 0$ .106 E.2 自旋张量 Ω 的表示：向量与伪向量.106 E.2.1 提醒.106 E.2.2 向量积（叉积）的定义.107 E.2.3 向量积的计算.107 E.2.4 由向量表示的反对称自同态.108 E.2.5 旋度.109 E.3 伪叉积与伪向量.109 E.3.1 定义.109

E.3.2 用伪向量表示的反对称矩阵.110 E.3.3 反对称自同态及其伪向量表示.110 E.4 例子.110

E.4.1 直线运动.110 E.4.2 圆周运动.111 E.4.3 行星运动（向心加速度）.112

F 里斯表示定理 115
F.1 里斯表示定理.115 F.2 Riesz表示算子.116 F.3 用基进行量化.116 F.4 里斯表示向量的变化及欧几里得情形.117 F.5 里斯表示向量是逆变的.118 F.6 什么是向量，什么是一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$-向量？.119 F.7 一个基的“$(\cdot,\ \cdot)_g$-对偶向量基”（及警告）.119 F.7.1 一个基及其相关的多个“对偶向量基”.119 F.7.2 $\vec{e}_{jg}$ 在基 $(\vec{e}_i)$ 中的分量.120 F.7.3 $\vec{e}_{jg}$ 的分量的多种可用记号.121 F.7.4 “（协变）对偶基”与“对偶向量基”之间的（巨大）差异 121 F.7.5 关于 $g^{ij} =$ 作为 $(g^\flat)^{ij}$ 的简写记号.121

G 柯西– 格林变形张量 $C = F^T.F$ 12 2
G.0 目标.122
G.1 转置 F^T：需要内积.122 G.1.1 函数 F^T 的定义.122 G.1.2 基底下的量化（矩阵表示）.123 G.1.3 备注： F^* .123 G.2 柯西–格林变形张量 C .124 G.2.1 C 的定义.124 G.2.2 量化.125

G.3 C 的时间泰勒展开.125 G.4 备注： $C^\flat$ .126 G.4.1 $C^\flat$的定义.126 G.4.2 .....以及关于 $C^\flat$和 Jaumann 的注释.126 G.5 伸长比与变形角.127 G.5.1 伸长比.127 G.5.2 变形角.127 G.6 C 的分解.128 G.6.1 球张量与偏张量.128 G.6.2 刚体运动.128 G.6.3 C 的对角化.128 G.6.4 莫尔圆.128 G.7 格林–拉格朗日变形张量 E .129 G.8 小变形（线性化）：无穷小应变张量 ε .130 G.8.1 朗道记号：大-O 和小-o .130 G.8.2 无穷小应变张量 ε 的定义.130

=

=

H 指张量 $F.F^T$ （左 Cauchy–Green 张量）131
H.1 定义.131
H.2 $\underline{b}^{-1}$.132 H.3 b^{-1} 的时间导数.132 H.4 欧拉–阿尔曼西张量 a .133 H.5 a的时间泰勒展开.133
H.6 Almansi 修正无穷小应变张量 $\tilde{\varepsilon}$ .133

=

=

=

I Polar 分解、弹性与客观性 ty 133
I.1 F 的极分解（“等距客观性”）.133 I.1.1 $F = R.U$ （右极分解）.134 I.1.2 $F = S.R_0.U$ （协变客观性的右移极分解） . . . . . 134 I.1.3 $F = V.R$ （左极分解）.135 I.2 线弹性：经典的“张量”方法.136 I.2.1 经典方法（“等距客观性”）及一个问题.136 I.2.2 泛函（张量）表述（“等距客观性”）.136 I.2.3 第二种泛函表述：使用 Finger 张量.138 I.3 采用协变客观方法的弹性？.138

J 位移 139
$\vec{}$J.1 位移向量 $\mathcal{U}$ .139 J.2 位移向量的微分.140 J.3 变形“张量” ε （矩阵），续.140 J.4 小位移假设，续.141 J.5 微分几何中的位移向量.141 J.5.1 移位算子.141 J.5.2 位移向量.142

=

K 行列式 142
K.1 交替多重线性形式.142 K.2 莱布尼茨公式.142 K.3 向量的行列式.143 K.4 矩阵的行列式.144 K.5 体积.144 K.6 自同态的行列式.145 K.6.1 定义与基本性质.145 K.6.2 自同态的行列式是客观的.146 K.7 线性映射的行列式.147 K.7.1 定义与首要性质.147 K.7.2 运动的雅可比行列式与膨胀.147 K.7.3 转置的行列式.148 K.8 膨胀率.148

K.8.1 $\frac{\partial J^t}{\partial t}^0(t,\ p_{t_0}) = J^{t_0}(t,\ p_{t_0})$ 散度$\vec{v}(t,\ p_t)$.14
2 莱布尼茨公式.14 9
K.8
K.9 $\partial J/\partial F = J\,F^{-T}$.150
K.9.1 $^{\partial}{}_{\det}{}_{\partial M_{ij}}$ 的含义? .150 K.9.2 $^{\partial}{}_{\det}{}_{\partial M_{ij}}$ 的计算.150 K.9.3 $\partial J/\partial F = J\,F^{-T}$通常写作 $[\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}] = J\,F^{-T}$.150 K.9.4 $\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}$的解释？.150

L Transpo 体积和面积的输运 151
L.1 变换后的平行六面体.151 L.2 变换后的体积.151 L.3 变换后的平行四边形.151 L.4 变换后的曲面.152 L.4.1 曲面的变形.152 L.4.2 欧几里得点积与单位法向量.152 L.4.3 曲面之间的关系.153 L.5 皮奥拉恒等式.153

L.6 Piola 变换.154

M 功 a nd 功率 154
M.1 定义.154
M.1.1 功.154M.1.2 及其相关的功率密度.155

M.2 Piola–Kirchhoff 张量.155
M.2.1 应力的客观内功率： $d\vec{v}$ 的函数.155 M.2.2 第一皮奥拉–基尔霍夫张量.156 M.2.3 第二类 Piola–Kirchhoff 张量.156

M.3 经典超弹性： $\partial W/\partial F$ .157
M.3.1 定义.157 M.3.2 用基表示（量化）： $\partial W/\partial L_{ij}$ .157 M.3.3 运动与 ω-引理.158 M.3.4 在经典超弹性中的应用： $PK = \partial W/\partial F$ .159 M.3.5 推论（超弹性）： $SK = \partial W/\partial C$ .160

N 质量守恒 **160**

O 动量平衡 **161**
O.1 框架.161
O.2 总平衡定律.161 O.3 柯西定理 $\vec{T} = \sigma.\vec{n}$ （应力张量 σ）.161

= =

P 角动量平衡 **163**

Q $\mathcal{L}^r$ 中的一致张量 $_s(E$ **163**
) Q.1 张量积与多重线性形式.163 Q.1.1 函数的张量积.163 Q.1.2 线性形式的张量积：多重线性形式.163 Q.2 $\mathcal{L}^0_s(E)$ 中的一致张量.164 Q.2.1 $\binom{0}{s}$ 型一致张量的定义.164 Q.2.2 示例： $\binom{0}{1}$ 型一致张量 =线性形式.164 Q.2.3 示例： $\binom{0}{2}$ 型一致张量.164 Q.2.4 示例：行列式.164 Q.3 $\mathcal{L}^r_s(E)$ 中的一致张量.164 Q.3.1 $\binom{r}{s}$ 型一致张量的定义.165 Q.3.2 示例： $\binom{1}{0}$ 型一致张量：视为一个向量.165 Q.3.3 示例： $\binom{1}{1}$ 型一致张量.165 Q.3.4 示例： $\binom{1}{2}$ 型一致张量.166 Q.4 外张量积.166 Q.5 缩并.166 Q.5.1 线性形式与向量的缩并.166 Q.5.2 $\binom{1}{1}$ 张量与向量的缩并.166 Q.5.3 一致张量的缩并.167 Q.5.4 一致张量的客观双重缩并.168 Q.5.5 非客观双重缩并：双矩阵缩并.169 Q.6 克罗内克（缩并）张量、迹.169

R 上的张量(U) 170
R.1 引言、模、导数.170 R.2 函数场与向量场.170 R.2.1 函数域.170 R.2.2 向量场.171 R.3 微分形式.171 R.4 张量.171

R.5 第一个例子.172 R.5.1 $\binom{0}{1}$ 型张量微分形式.172 R.5.2 $\binom{1}{0}$ 型张量（视同向量场）.172

R.5.3 度量是一个 $\binom{0}{2}$ 型张量.172 R.6 $\binom{1}{1}$ 张量，与自同态场的对应.172 R.7 非定常张量.172

S 微分 、其梯度与散度 173

S.1 微分.173

S.1.1 框架.173

S.1.2 方向导数与微分（与观察者无关）.173 S.1.3 二阶微分的记号.174 S.2 一组基与第 j 个偏导数.174 S.3 应用 1：实值函数.175 S.3.1 实值函数的微分（客观的）.175 S.3.2 量化.175 S.3.3 通过内积与微分相关联的梯度（主观的）.176 S.4 应用 2：坐标系基与克里斯托费尔符号.176 S.4.1 坐标系及坐标系基.176 S.4.2 标量值函数微分的参数表达式.177 S.4.3 克里斯托费尔符号.178 S.5 应用 3：向量场的微分.179 S.6 应用4：微分形式的微分.180 S.7 应用 5：(1,1) 阶张量的微分.180 S.8 向量场的散度：不变性.181 S.9 (1,1) 阶张量的客观散度.182 S.9.1 (2,0) 阶张量的散度.183 S.9.2 (0,2) 阶张量的散度.183 S.10 欧几里得框架与张量的“经典散度”（主观的）.184

T 自然典范同构 184

T.1 线性映射的伴随.184 T.2 同构 $E \simeq E^*$ 绝不自然（绝不客观）.185 T.3 自然典范同构 $E \simeq E^{**}$ .186 T.4 自然典范同构 $\mathcal{L}(E;\ F) \simeq \mathcal{L}(F^*,\ E;\ \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(E^*;\ F^*)$.186 T.5 自然典范同构 $\mathcal{L}(E;\ \mathcal{L}(E;\ F)) \simeq \mathcal{L}(E,\ E;\ F) \simeq \mathcal{L}(F^*,\ E,\ E;\ \mathbb{R})$ 187

U 分布简述：一种协变概念 188

U.1 定义.188 U.2 分布的导数.189 U.3 希尔伯特空间 $H^1(\Omega)$.190 U.3.1 动机.190 U.3.2 $H^1(\Omega)$ 的定义.190 U.3.3 子空间 $H_0^1(\Omega)$ 及其对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$.191

给定一个量 f，则：由“g 等于 f”定义的 g 记作 $g := f$。

第一部分

运动、欧拉描述与拉格朗日描述、流

1 运动

框架是经典力学，时间与空间相互独立。 $\mathbb{R}^3$ 是经典几何仿射空间（即我们生活的空间），而（$\vec{\mathbb{R}^3}$，$+$，。） $= \{\vec{pq} : \ p, \ q \in \mathbb{R}^3\} =$记作 $\vec{\mathbb{R}^3}$是配备通常运算规则的双点向量关联向量空间。我们还将 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{R}^3$的子空间，即~~˜~~我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$、 $n = 1$，2，3。

1.1 参考系

原点： 观察者选取一个原点 $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$；因此，观察者可以借助双点向量 $\overrightarrow{\mathcal{O}p} = \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}^n}$确定点 $p \in \mathbb{R}^n$ 的位置；于是 $p = \mathcal{O} + \vec{x}$，并且 $\vec{x} = \overrightarrow{\mathcal{O}p} =$记作 $p - \mathcal{O}$。

~~另一位观察者选择观察原点~~ ~~$\mathcal{O}$~~ ~~位观察者，因此，~~ ~~$\sim$~~ ~~$\rightarrow$~~ ~~$\sim$~~ ~~$\sim$~~ ~~$\sim$~~ ⟶也可以用双点向量 $\mathcal{O}p = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$定位点 p；所以 $p = \mathcal{O} + \vec{x} = \mathcal{O} + \vec{x}$，且 $\vec{x} = \mathcal{O}\mathcal{O} + \vec{x}$。

笛卡尔坐标系： 仿射空间 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡尔坐标系是一组 $\mathcal{R}_{\text{Cart}} = (\mathcal{O}, \ (\vec{e}_i)_{i=1, \ ..., \ n})$，其中 $\mathcal{O}$ 是原点，而 $(\vec{e}_i) := (\vec{e}_i)_{i=1, \ ..., \ n}$ 是观察者在 $\vec{\mathbb{R}^n}$ 中选取的一组基。~~˜~~因此，观察者可以通过 $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 量化点 $p \in \mathbb{R}^n$ 的位置，使得

$$p = \mathcal{O} + \vec{x} \quad \text{with} \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \quad \text{i.e.} \quad [\overrightarrow{\mathcal{O}p}]_{|\vec{e}} = [\vec{x}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$[\vec{x}]_{|\vec{e}} = [\overrightarrow{\mathcal{O}p}]_{|\vec{e}}$ 为包含 $\overrightarrow{\mathcal{O}p} = \vec{x}$ 在基 $(\vec{e}_i)$ 中的分量 $x_i \in \mathbb{R}$ 的列矩阵。另一位观察者以原点 O_b 和笛卡尔基 $(\vec{b}_i)_{i=1,...,n}$ 构成笛卡尔坐标系 $\mathcal{R}_{\text{Cart,b}} = (\mathcal{O}_b, (\vec{b}_i)_{i=1,...,n})$，并将同一位置 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中表示为，

$$p = \mathcal{O}_b + \vec{y} \quad \text{with} \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i \widetilde{\vec{b}}_i, \quad \text{i.e.} \quad [\overrightarrow{\mathcal{O}_b p}]_{|\vec{b}} = [\vec{y}]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$[\vec{y}]_{|\vec{b}} = [\overrightarrow{\mathcal{O}_b p}]_{|\vec{b}}$ 为包含 $\overrightarrow{\mathcal{O}_b p} = \vec{y}$ 在基 $(\vec{b}_i)$ 中的分量 $y_i \in \mathbb{R}$ 的列矩阵。并且，$\overrightarrow{\mathcal{O}_b p} = \overrightarrow{\mathcal{O}_b \mathcal{O}} + \overrightarrow{\mathcal{O}p}$，即 $\vec{y} = \widetilde{\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{O}}} + \vec{x}$，给出了 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 之间的关系（示意图）。

时间顺序： 时间顺序（或时间坐标系）是观察者选定的一组 $\mathcal{R}_{\text{time}} = (t_0, \ (\Delta t))$，其中 $t_0 \in \mathbb{R}$ 是时间原点，而 (Δt) 是时间单位（ $\vec{\mathbb{R}}$中的一个基）。

参考系： 参考系 $\mathcal{R}$ 是由以下部分组成的集合

$$\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{\text{time}}, \mathcal{R}_{\text{Cart}}) = (t_0, (\Delta t), \mathcal{O}, (\vec{e}_i)_{i=1,...,n}) = (\text{“chronologie”,“Cartesian coordinate system”}), \tag{1.3}$$

由观察者选定的时间顺序和笛卡尔坐标系。

在下文中，为简化书写，所有观察者都采用相同的隐式时间顺序，而参考系 $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{\text{time}}, \ \mathcal{R}_{\text{Cart}})$ 将简记为参考系 $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \ (\vec{e}_i))$（因此：$= \mathcal{R}_{\text{Cart}}$）。

1.2 爱因斯坦求和约定（对偶记号）

出发点：基下向量分量的经典记号 x_i，参见（1.1）。随后引入对偶的概念： x_i =记作x^i （使用分量时，可以借此区分向量与函数）。因此

$$\vec{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i}_{\text{classic not.}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i}_{\text{duality not.}}, \quad \text{and} \quad [\vec{x}]_{|\vec{e}} \overset{\text{clas.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{\text{dual}}{=} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

对偶记号是爱因斯坦求和约定的一部分；此外，爱因斯坦求和约定使用记号$\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i$ =记为 $x^i \vec{e}_i$，也就是说，当一个指标（i 此处）在一个位置出现两次，一次在上、一次在下时，可以省略求和符号 $\sum_{i=1}^{n}$，详见 § A.4。不过，本手稿中不会省略求和符号 $\sum$ （以避免歧义）：TEX-LaTEX 程序可以轻松地将其打印出来 $\sum_{i=1}^{n}$。

示例 1.1 儿童的身高用墙上的一个竖直双点向量表示 $\vec{x}$，该向量从地面延伸至铅笔画的线。问题：这个儿童的身高是多少?

答案：这取决于观察者.....（定量值 =主观结果）。例如，英国观察者选择一个竖直基向量 $\vec{a}_1$，其长度为一英尺（ft）。因此他写作 $\vec{x} = x_1 \vec{a}_1$，对他而言，儿童的身高（ $\vec{x}$的身高）是 x_1 英尺。例如， $x_1 = 4$ 表示这个儿童身高 4 英尺。法国观察者选择一个竖直基向量 $\vec{b}_1$，其长度为一米（m）。因此他写作 $\vec{x} = y_1 \vec{b}_1$，对他而言，儿童的身高（ $\vec{x}$的身高）是 y^1 米。例如，若 $x_1 = 4$，则 $y_1 \simeq 1.22$，因为 1 英尺：=0.3048 m：这个儿童身高既是 4 英尺，也是 1.22 米.....计量单位可以是英尺或米。这种量化写作 $\vec{x} = 4$ 英尺 $\simeq 1.22$ 米，其中 ft 表示 $\vec{a}_1$，m 在此表示 b_1。注意：定性向量 $\vec{x}$ 对所有观察者而言都是同一个向量，而 4 或 1.22 这样的定量值则不是（它们取决于测量单位的选择）。

使用对偶记号： $\vec{x} = x^1 \vec{a}_1 = y^1 \vec{b}_1$，因此如果 $x^1 = 4$，那么 $y^1 \simeq 1.22$。 ▗▖

本手稿坚持协变客观性；因此，一位英国工程师（及其英尺）和一位法国工程师（及其米）将能够协同工作.....并避免发生类似火星气候轨道器探测器事故的碰撞，参见备注 A.14。他们也将能够运用伽利略、笛卡尔、牛顿、欧拉.....等人的成果；这些人使用各自的长度单位，对1793年定义并于1799年在法国采用的米（经过6年的测量）一无所知；而在十九世纪末，科学界也.....他们同样无法明确使用“欧几里得点积”（它似乎是格拉斯曼于1844年前后从数学上定义的）。

1.3 物体的运动

设Obj 是由粒子构成的“真实物体”或“物质对象”（例如月球：独立于观察者而存在）。设 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$。

定义 1.2 Obj 在 $\mathbb{R}^n$ 中的运动是映射

$$\widetilde{\Phi} : \begin{cases} [t_1, t_2] \times Obj & \to \mathbb{R}^n \\ (t, \underbrace{P_{Obj}}_{\text{particle}}) & \to \underbrace{p = \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})}_{\text{its position at } t \text{ in the Universe}} \end{cases}. \tag{1.5}$$

其中， t 是时间变量， p 是空间变量，$(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 是时空变量。并且假设$\widetilde{\Phi}$ 在时间上 C^2 。

给定原点 $\mathcal{O}$ （依赖观察者），运动可以用双点向量描述 or

$$\vec{x} = \overrightarrow{\mathcal{O}\widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})} = \overrightarrow{\mathcal{O}p} \overset{\text{noted}}{=} \widetilde{\vec{\varphi}}(t, P_{Obj}). \tag{1.6}$$

但是，具有不同原点 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}_b$ 的两个观察者，对运动的描述也不同。因此，以下我们不使用 $\vec{\varphi}$。然后，通过笛卡尔基（$\vec{e}_i$）进行量化以建立参考系 $\mathcal{R}$，即可得到（1.1）。

1.4 虚运动与实运动

~~**定义 1.3** Obj 的虚运动（或可能运动）是指一种函数 Φ “足够正则，使计算具有意义”。在所有虚运动中，被观测到的运动称为实运动。

1.5 假设（牛顿和爱因斯坦）

牛顿力学（伽利略相对性）和广义相对论（爱因斯坦）的假设:

1- 你只能在实际时间 t 并从你所在的位置 p 描述一种现象（你并不具备在时间或空间中无处不在的能力）；

2- 你不知道未来；3- 你可以使用自己的记忆，所以使用一些过去的时间 t_0 和一些过去的位置 p_{t_0}；

4- 如果你能够客观地交流，就可以使用他人的记忆（测量结果）。

1.6 构形

固定 $t \in [t_1, t_2]$，并定义 $\widetilde{\Phi}_t$: $\begin{cases} & \to \mathbb{R}^n \\ \text{物体 } P_{Obj} & \mapsto p = \widetilde{\Phi}_t(P_{Obj}) := \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj}) \text{。} \end{cases}$

~**定义 1.4** *Obj* 在 t 时的“构形”是 Φ_t 的值域（或像），即由下式定义的 $\mathbb{R}^n$（仿射空间）的子集

$$\Omega_t := \{p \in \mathbb{R}^n : \exists P_{Obj} \in Obj \text{ s.t. } p = \widetilde{\Phi}_t(P_{Obj})\} \overset{\text{noted}}{=} \widetilde{\Phi}_t(Obj) \overset{\text{noted}}{=} \mathrm{Im}(\widetilde{\Phi}_t). \tag{1.7}$$

如果 t 是实际时间，那么 Ω_t 就是实际（或当前，或欧拉）构形。
如果 t_0 是过去的某个时刻，那么 Ω_{t_0} 就是过去（或初始，或拉格朗日）构形。

~**假设:** 在任意时刻 t，Ω_t 都假定是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个“光滑区域”，并且假定映射 Φ_t 是单射（= 单射）：*Obj* 不会与自身相撞。

1.7 欧拉变量与拉格朗日变量的定义

• 如果 t 是实际时间，那么 $p_t = \widetilde{\Phi}_t(P_{Obj}) \in \Omega_t$ 称为相对于 P_{Obj} 和 t 的欧拉变量。

• 如果 t_0 是过去的某个时间，那么 $p_{t_0} = \Phi_{t_0}(P_{Obj}) \in \Omega_{t_0}$ 称为相对于 P_{Obj}和 t_0的拉格朗日变量。（拉格朗日变量是“过去的欧拉变量”。）（两个时间原点 t_0 和 $t_0{}'$ 不同的观察者，尽管具有相同的欧拉变量，却会得到不同的拉格朗日变量。）

1.8 轨迹

~设 Φ 是 *Obj*的运动，参见 (1.5)，而 $P_{Obj} \in Obj$ （*Obj* 中的一个粒子，= 例如月球）。

定义 1.5 P_{Obj} 的（参数）轨迹是函数

$$\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}} : \begin{cases} [t_1, t_2] & \to \mathbb{R}^n, \\ t & \mapsto p(t) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t) := \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj}) \quad \text{(position of } P_{Obj} \text{ at } t \text{ in the Universe).} \end{cases} \tag{1.8}$$

~其几何轨迹是 $\Phi_{P_{Obj}}$的值域（像），即

几何 t ~ ~ ~的轨迹 $P_{Obj} := \{q \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [t_1, t_2] \text{ 使得 } q = \Phi_{P_{Obj}}(t)\} = \mathrm{Im}(\Phi_{P_{Obj}}) = \Phi_{P_{Obj}}([t_1, t_2])$。 (1.9)

1.9 有基向量、切空间、纤维、向量场、丛

（例如参见 Abraham–Marsden [1]。）为了处理空间 $\mathbb{R}^3$中的曲面 S，例如球面 $S =$ （更一般地说，处理空间 $\mathbb{R}^n$中的流形），向量不能简单地定义为“连接 S中两点的双点向量”（否则会“穿过曲面”）。向量被定义为与 S相切：考虑一条“正则”曲线c： $s \in] - \varepsilon, \ \varepsilon[\to c(s) \in S$ 其中 S 是仿射空间中的曲面，而在 $c(0)$ 处与 S 相切的向量为$\vec{w}(c(0)) = \lim_{h \to 0} \frac{c(h) - c(0)}{h}$ （在一般流形中，它通过 c 的参数化来定义）；考虑所有可能的曲线，我们便得到“ S上的所有可能向量”。

记号:

$$T_pS := \{\text{tangent vectors } \vec{w}_p \text{ at } S \text{ at } p\} = \text{The tangent space at } p \in S. \tag{1.10}$$

例如，若 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个球面，且 $p \in S$，那么 T_pS 就是它在 S处、 p 点的通常切平面。

~例如，特殊情况：如果 $S = \Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，那么 $T_pS = T_p\Omega = \mathbb{R}^n$ 线性无关于 p。

定义 1.6

$$\text{The fiber at } p := \{p\} \times T_pS = \{ \underbrace{(p, \vec{w}_p)}_{\text{pointed vector}} \in \{p\} \times T_pS\}, \tag{1.11}$$

也就是说， p 处的纤维是“ p处的带基点的向量”集合；带基点的向量是由“基点” p 和在 p处定义的向量 $\vec{w}_p$ 组成的有序对（p， $\vec{w}_p$）。

~图示：向量 $\mathbb{R}^n$ 可以画在 $\mathbb{R}^n$中的任意位置；而“ p处的带基点的向量”必须画在 $\mathbb{R}^n$中的点 p 处。

If t上下文明确时，带基点的向量简单记作 $\widetilde{\vec{w}}$（p） =记作$\vec{w}$（p）（简化记法） .

特例：若 $S = \Omega$是 $\mathbb{R}^n$中的一个开集，则 p 处的纤维为 $T_p\Omega = \{p\} \times \vec{\mathbb{R}}^n$。

定义 1.7

$$\text{The tangent bundle } TS := \bigcup_{p \in S} (\{p\} \times T_pS), \tag{1.12}$$

也就是说，它是各纤维的并集。

~**定义 1.8** $\vec{w}$ 中的向量场是一个 S 函数（或者至少是以下所述的 C^2 ）

$$\widetilde{\vec{w}} : \begin{cases} S \ \to TS \\ p \ \to \widetilde{\vec{w}}(p) = (p, \vec{w}(p)). \end{cases} \tag{1.13}$$

若上下文明确，向量场可简记为 $\widetilde{\vec{w}}$ =记作 $\vec{w}$ （以简化书写）。

2 欧拉描述（在实际时刻 t的空间描述）

2.1 构形集合

~ ~设 Φ 是 Obj的一个运动，参见 (1.5)，且 $\Omega_t = \Phi_t($ Obj) $\subset \mathbb{R}^n$是 t时刻的构形，参见 (1.7)。构形集合是由下式定义的子集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ （“时空”）：

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} (\{t\} \times \Omega_t) \quad (= \text{set in which you find particles in “time-space”}) \\ &= \{(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \exists (t, P_{Obj}) \in [t_1, t_2] \times Obj,\ p = \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

问题：为什么我们不直接使用 $\bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \Omega_t$ ，而要使用 $\mathcal{C} = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} (\{t\} \times \Omega_t)$?

答案： $\mathcal{C}$ 给出了生命的影片，其中 Obj = 是每个 t拍摄的照片 Ω_t 的连续过程；而 Ω_t则借助 $\mathcal{C}$ 在 t处的暂停功能获得。相比之下，$\bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ 是图像 $\bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \Omega_t$上所有照片的叠加.....我们无法区分过去与现在。

2.2 欧拉变量和函数

定义 2.1 简而言之：相对于 Obj 的欧拉函数是一个函数，其中有 $m \in \mathbb{N}^*$ ，

$$\mathcal{E}ul : \begin{cases} \mathcal{C} \ \to \vec{\mathbb{R}^m} \text{ (or more generally a suitable set of tensors)} \\ (t, p) \ \to \mathcal{E}ul(t, p), \end{cases} \tag{2.2}$$

空间变量 p 就是欧拉变量。

详细说明 ^：给定如式（2.2）所示的函数 $\mathcal{E}ul$ ，与之相关的欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 为

$$\widehat{\mathcal{E}ul} : \begin{cases} \mathcal{C} \ \to \mathcal{C} \times \vec{\mathbb{R}^m} \text{ (or } \mathcal{C} \times \text{ some suitable set of tensors)} \\ (t, p) \ \to \widehat{\mathcal{E}ul}(t, p) = ((t, p), \mathcal{E}ul(t, p)) = (\text{time-space position , value}), \end{cases} \tag{2.3}$$

^，并称为“函数域”。因此，(t, p) 处的 $\mathcal{E}ul$ 是时空中 (t, p) 点的“ $\mathcal{E}ul(t, p)$”。

因此，欧拉函数 $\widehat{\mathcal{E}ul}$ 的值域 $\text{Im}(\widehat{\mathcal{E}ul}) = \widehat{\mathcal{E}ul}(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{E}ul$ 的图像。（回顾：函数 f: $x \in A \to f(x) \in B$ 的图像是子集 $\{(x, f(x)) \in A \times B\} \subset A \times B$: 它给出了“ f 的图像”。）

如果没有歧义， $\widehat{\mathcal{E}ul}$ =简记为 $\mathcal{E}ul$ 。

在 t处， t处的欧拉向量场为 $\widehat{\mathcal{E}ul}_t$： $\begin{cases}\Omega_t \to {}_t\times\vec{\mathbb{R}}^n\ \Omega(\ ) := (p, \mathcal{E}ul_t(p)) = (\text{位置，值})。\\ p \to \widehat{\mathcal{E}ul}_t\ p\end{cases}$

示例 2。 **2** $\mathcal{E}ul(t,\ p) = \theta(t,\ p) \in \mathbb{R} =$位于 t处的粒子温度 $P_{Obj}(\ p = \Phi t,\ P_{Obj})$; ∎

示例 2。**3** $\mathcal{E}ul(t,\ p) = \vec{u}(t,\ p) \in \vec{\mathbb{R}}^n =$ 作用于位于 t 处的粒子上的力 $P_{Obj}\ p$。 ∎

示例 2。**4** $\mathcal{E}ul(t,\ p) = d\vec{u}(t,\ p) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n : \vec{\mathbb{R}}^n) =$ 欧拉函数 $\vec{u}$在 $t\ p$ 处的微分。 ∎

问题： 为什么要引入 $\mathcal{E}ul$? $\mathcal{E}ul$ 不是就足够了吗?

答案： </style}“有基值”(, p) $= ((t,p)\ \mathcal{E}ul((t,p)))$ 标绘在 $\mathcal{E}ul$的图像上 .

例如，在 t 在 p 速度向量 $\vec{v}(t,p) \in \mathbb{R}^3$ 可以绘制在任意位置，而“有基向量” $\vec{v}$ $(t,p) = ((t,p); \vec{v}(t,p))$ 则绘制在 $\vec{v}(t,p)$ 处，即 t在 p处（并且 $\vec{v}$称为速度场）。

此外，(2.3) 强调了欧拉向量场与拉格朗日向量函数之间的区别，见 (3.14)。

备注 2.5 例如，柯西最初用于描述力的框架是欧拉框架：在实际时间 t ，于点 $p \in \Omega_t$处考虑柯西应力向量 $\vec{t} = \sigma.\vec{n}$ 。（这不是拉格朗日描述。） ∎

2.3 欧拉速度（空间速度）和速率

定义 2.6 简而言之：考虑一个粒子 P_{Obj} 及其（正则）轨迹 $\Phi_{P_{Obj}}: t \to p(t) = \Phi_{P_{Obj}}(t)$, 参见 (1.8)。它在 t 处、 $p(t) = \Phi_{P_{Obj}}(t)$时的欧拉速度为

$$\vec{v}(t, p(t)) := \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t, P_{Obj}), \quad \text{when} \quad p(t) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t), \tag{2.4}$$

即, $\vec{v}(t,p(t))$ 是轨迹 $\Phi_{P_{Obj}}$在 t处、 $p(t) = \Phi_{P_{Obj}}(t)$时的切向量。这定义了向量场（简记为） $\vec{v}$: $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{C} \to \vec{\mathbb{R}}^n \\ t\ p_t \to \vec{v}\ t \end{array}\ \begin{array}{c}(,)\ (,p_t)\end{array}\right\}$。

详细来说：参见 (2.3)，欧拉速度是函数 $\widehat{v}$: $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{C} \to \mathcal{C}\times\vec{\mathbb{R}^m} \\ t\ p \to \widehat{\vec{v}}\ t\ p \end{array}\ \begin{array}{c}(,)\ (,) = ((t,p)\ \vec{v}(t,p))\end{array}\right\}$（有基向量），其中 $\vec{v}(t,p)$ 由 (2.4) 给出。

备注 2。7 $\frac{d\Phi_{P_{Obj}}}{dt}(t) = \vec{v}(t,\ \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t))$, 其中 $p(t) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t)$, 通常写作

$$\frac{dp}{dt}(t) = \vec{v}(t, p(t)), \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t, \vec{x}(t)), \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t, \vec{x}), \tag{2.5}$$

最后两个记号，此时选定一个原点 O ，并且 $\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}p\ t}(\ )$。这样的方程是常微分方程（ODE）的原型，可利用柯西–利普希茨定理求解，参见第 5 节。（拉格朗日速度不会产生常微分方程，见式（3.21）。）

∎

定义 2.8 如果观察者选定一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$ （例如以英尺或米为单位），相应范数为 $||.||_g$，那么长度 $||\vec{v}(t,\ p)||_g$ 就是 P_{Obj} 的速率（或标量速度）（例如单位为英尺/秒或米/秒）。此外，必须根据上下文消除歧义：“速度”可能是矢量速度$\vec{v}(t,\ p) = \Phi_{P_{Obj}}{}'(t)$, 也可能是速率（标量速度） $||\vec{v}(t,\ p)||_g$。

练习 2.9 欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$, $\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}p\ t}(\ )$, $\vec{T}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{||\vec{x}'(t)||_g}$, 以及 $f(t) = ||\vec{x}'(t)||_g$(速率)。证明: $\frac{df}{dt}(t) = (\vec{x}''(t)\ \vec{T}(t))_g =$记作$\vec{x}''(t) \bullet \vec{T}(t)$（=切向加速度）。

答案。二维及欧几里得基: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t)\ (t)$ 给出 $f(t) = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$, 因此 $f'(t) = \frac{x'(t)x''(t)+y'(t)y''(t)}{f(t)} = \vec{r}'(t) \bullet \vec{r}''(t)\ ||\vec{r}'(t)||$。同上，在 n 维中。

∎

2.4 欧拉速度的空间导数

$t \in [t_1, t_2]$ 是固定的， $\mathcal{E}ul$ 是给定的欧拉函数，而 $\mathcal{E}ul_t$: $\left\{\begin{array}{c} t \to \vec{\mathbb{R}^m} \\ \Omega p \to \mathcal{E}ul_t(p) := \mathcal{E}ul(t,\ p) \end{array}\right\}$ 是 C^1。

2.4.1 定义

回顾：若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 $f:\Omega \to \mathbb{R}$ 在 p处可微，则其在 p 处的微分是线性形式 $df(p) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\mathbb{R})$（实数值线性映射），定义如下：对所有 $\vec{u} \in \vec{\mathbb{R}}^n$（ p处的向量），

$$df(p).\vec{u} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h\vec{u}) - f(p)}{h}. \tag{2.6}$$

所有观察者（英语、法语.....）的这个表达式都相同：（这里没有内积）。

定义 2.10 $\mathcal{E}ul$ 在（t,p）处的空间导数是 p处的微分 $d\mathcal{E}ul_t$，也就是说，对于所有 $t \in [t_1,t_2]$、所有 $p \in \Omega_t$ 以及所有 $\vec{w}_p \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$（位于 p的向量），

$$(d\mathcal{E}ul_t(p).\vec{w}_p =) \quad \boxed{d\mathcal{E}ul(t,p).\vec{w}_p = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{E}ul(t,p+h\vec{w}_p) - \mathcal{E}ul(t,p)}{h}} \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial p}(t,p).\vec{w}_p. \tag{2.7}$$

In Ω_t（ t处的照片）， $d\mathcal{E}ul$（t,p）$.\vec{w}_p$给出了 $\mathcal{E}ul_t$ 在 p 处沿 $\vec{w}_p$方向的变化率 .

例如，在 t处，欧拉速度场的空间导数 $d\vec{v}$ 定义为

$$d\vec{v}(t,p).\vec{w}_p = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{v}(t,p+h\vec{w}_p) - \vec{v}(t,p)}{h} \quad (= d\vec{v}_t(p).\vec{w}_p). \tag{2.8}$$

备注 2.11 在微分几何中，(2.6) 也写作 $\vec{u}(f)(p) = \frac{d}{dh} f(p+h\vec{u})|_{h=0}$；如果你不熟悉微分几何（在微分几何中，向量被定义为导数，因此 $\vec{u}[f]$ 是 $\vec{u}$对 f 的导数），就不要使用这种记号。

2.4.2 对流导数 $d\mathcal{E}ul.$ $\vec{v}$

定义 2.12 如果 $\vec{v}$ 是欧拉速度场，那么 $d\mathcal{E}ul.\vec{v}$ 称为 $\mathcal{E}ul$的对流导数。

$\vec{}$2.4.3 基中的量化： $df.\vec{u}$ 写作 $(\vec{u}$.梯度$)f$

量化： 设 $f:\ p \in \mathbb{R}^n \to f(p) \in \mathbb{R}$ 为 C^1。设 $(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$中的一个基。（通常的定义）

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := df(p).\vec{e}_i \quad \text{and} \quad [df(p)]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \ \text{(line matrix)}. \tag{2.9}$$

（回顾：表示线性形式的矩阵是行矩阵。）而 $[df(p)]_{|\vec{e}}$ 是 f 在 p 处相对于 $(\vec{e}_i)$ 的雅可比矩阵。因此，设 $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i\vec{e}_i$ 是 p 处的一个向量，并采用通常的矩阵乘法规则，我们有

$$df(p).\vec{u} = [df(p)]_{|\vec{e}}.[\vec{u}]_{|\vec{e}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)u_i = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \overset{\text{noted}}{=} (\vec{u}.\vec{\text{grad}})_{|e} f(p), \tag{2.10}$$

其中 $(\vec{u}.\ \vec{\text{grad}})_{|e}:\ C^1(\Omega;\mathbb{R}) \to C^0(\Omega;\mathbb{R})$ 是相对于基 $(\vec{e}_i)$ 定义的微分算子

$$(\vec{u}.\vec{\text{grad}})_{|e}(f) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{2.11}$$

如果基 $(\vec{e}_i)$ 已明确指定，那么 $(\vec{u}.\ \vec{\text{grad}})_{|e} =$记作$\vec{u}.\ \vec{\text{grad}}$

对于向量值函数 $\vec{f}:\Omega \to \vec{\mathbb{R}}^m$，上述步骤适用于 $\vec{\mathbb{R}}^m$ 中基 $(\vec{b}_i)$ 下 $\vec{f}$ 的分量：如果 $\vec{f} = \sum_{i=1}^m f_i\vec{b}_i$，即 $\vec{f}(p) = \sum_{i=1}^m f_i(p)\vec{b}_i$，那么

$$(\vec{u}.\vec{\text{grad}})_{|e}(\vec{f}) = \sum_{i=1}^m (df_i.\vec{u})\vec{b}_i = \sum_{i=1}^m ((\vec{u}.\vec{\text{grad}})_{|e} f_i)\vec{b}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_j.\frac{\partial f_i}{\partial x_j})\vec{b}_i. \tag{2.12}$$

2.4.4 相对于欧几里得点积的表示：梯度f

观察者选择一个距离单位（英尺、米.....），并使用与之关联的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，$f\in C^1(\Omega;\mathbb{R})$（标量值函数），且 $p\in\Omega$。那么，微分形式 $df(p)$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示向量称为 f 在 p 处相对于 $(\cdot,\cdot)_g$ 的梯度，记作 $\vec{\text{grad}}_g f(p)\in\vec{\mathbb{R}}^n$：其定义为

$$\forall\vec{u}\in\vec{\mathbb{R}}^n,\quad (\vec{\text{grad}}_g f(p),\vec{u})_g = df(p).\vec{u},\quad \text{written}\quad \vec{\text{grad}}f\bullet\vec{u}=df.\vec{u}, \tag{2.13}$$

只有在对所有观察者都施加欧几里得点积（$\cdot$，$\cdot$）时，最后一种记号才成立（这相当主观：英尺、米？）。

（因此，选定欧几里得点积后，一阶泰勒展开 $f(p+h\vec{u}) = f(p) + h\,df(p).\vec{u}+o(h)$ 可以写成 $f(p+h\vec{u}) = f(p) + h\ \vec{\text{梯度}}_g f(p)\bullet_g\vec{u}+o(h)$。）

量化：设 $(\vec{e}_i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个笛卡尔基。那么 (2.13) 给出 $[df].[\vec{u}] = [\ \vec{\text{梯度}}f]^T.[g].[\vec{u}]$，对所有$\vec{u}\in\vec{\mathbb{R}}^n_t$（更准确地说 $[df]_{|\vec{e}}.[\vec{u}]_{|\vec{e}} = [\ \vec{\text{梯度}}_g f]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{u}]_{|\vec{e}}$）均成立，因此（因为 $[g]_{|\vec{e}}$ 是对称的）

$$[\vec{\text{grad}}f] = [g].[df]^T\quad(\text{column matrix}). \tag{2.14}$$

也就是说，如果 $\vec{\text{grad}}f=\sum_{i=1}^n a_i\vec{e}_i$，那么 $a_i=\sum_{j=1}^n g_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 对所有 i 都成立。特别地，如果 $(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，那么 $[\ \vec{\text{grad}}f]=[df]^T$。

用对偶记号，$\vec{\text{grad}}f=\sum_{i=1}^n a^i\vec{e}_i$，由（2.14）可得 $a^i=\sum_{j=1}^n g_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$：不满足 爱因斯坦求和约定（指标 j 在下方出现两次），这正如预期，因为 $\vec{\text{grad}}_g f$ 的定义取决于一个主观选择（长度单位）。相比之下，$df=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$ 满足爱因斯坦求和约定（微分是客观的）。

注意记号：梯度 $\vec{\text{grad}}_g f$ =记作 $\vec{\text{grad}}f$，取决于 $(\cdot,\cdot)_g$，参见 (2.13)-(2.14)；而 $(\vec{u}.\ \vec{\text{grad}})f$ 则不取决于此（只取决于一个基），参见 (2.11)（历史记号.....）。

2.4.5 向量值函数

对于向量值函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$，上述步骤适用于相对于 $\vec{\mathbb{R}}^m$ 中一个基 $(\vec{b}_i)$ 的 f 的分量 f_i .....但是，根据你读的书不同：

1- 有歧义：有时，也称为“梯度矩阵”（尽管并不需要欧几里得点积）。

2- 有歧义：它可能指微分.....雅可比矩阵.....或其转置.....因为此处选取了一个相对于给定欧几里得点积的正交归一基（选的是哪一个？），然后$[\ \vec{\text{grad}}f_i]=[df_i]^T$.....而计算中混淆了 $[.]$ 和 $[.]^T$.....

3- 没有歧义：在本手稿的客观框架中，我们将首先使用微分 $d\vec{f}$（客观的）；只有在为定量目的明确选定基（$\vec{e}_i$）之后，才会使用雅可比矩阵，即 $[df]_{|\vec{e}}$。

练习 2.13 选定一个欧几里得框架后，证明：$(\vec{v}.\ \vec{\text{grad}})\vec{v}=\frac{1}{2}\ \vec{\text{grad}}(||\vec{v}||^2)+\ \vec{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v}$.

答案。欧几里得基 $(\vec{E}_i)$、欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$ =记作 $(\cdot,\cdot)$，相应范数 $||.||_g$ =记作 $||.||$。因此$\vec{v}=\sum_{i=1}^n v_i\vec{E}_i$ 给出 $||\vec{v}||^2=\sum_i v_i^2$，于是 $\frac{\partial||\vec{v}||^2}{\partial x_k}=\sum_i 2v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$，对任意 $k=1,2,3$ 均成立。此外，$\vec{\text{rot}}\vec{v}$ 的第一分量为 $(\vec{\text{rot}}\vec{v})_1=\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}$；$(\vec{\text{rot}}\vec{v})_2$ 和 $(\vec{\text{rot}}\vec{v})_3$ 同理（循环置换）。因此，（第一分量）$(\vec{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v})_1=(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1})v_3-(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2})v_2$，$(\vec{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v})_2$ 和 $(\vec{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v})_2$同理。因此 $(\frac{1}{2}\ \vec{\text{grad}}(||\vec{v}||^2)+\ \vec{\text{rot}}\vec{v}\wedge\vec{v})_1=v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}v_3-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}v_3-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}v_2+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}v_2=v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}=(\vec{v}.\ \vec{\text{grad}})v_1$。其余分量同理。 ∎

2.5 流线（当前线）

固定 $t\in\mathbb{R}$，并考虑照片 $\Omega_t=\Phi_t(Obj)$。令 $p_t\in\Omega_t$, $\varepsilon>0$，并考虑 Ω_t中由 p_t 定义的空间曲线：

$$c_{p_t}:\left\{\begin{array}{rl}]-\varepsilon,\varepsilon[& \to\Omega_t\\ s & \to q=c_{p_t}(s)\end{array}\right\}\quad\text{s.t.}\quad c_{p_t}(0)=p_t. \tag{2.15}$$

因此， s 是一个曲线空间坐标（长度维数），而 c_{p_t} 的图像绘制在照片 Ω_t 的 t处。

定义 2。14 $\vec{v}: (t,p) \to \vec{v}(t,p)$ 为 Obj 的欧拉速度场，经过一点$p_t \in \Omega_t$ 的流线是微分方程的一个（参数）空间曲线 c_{p_t} 解

$$\frac{dc_{p_t}}{ds}(s) = \vec{v}_t(c_{p_t}(s)) \quad \text{with} \quad c_{p_t}(0) = p_t. \tag{2.16}$$

而 $\mathrm{Im}(c_{p_t})$ 是相关几何流线（$\subset \Omega_t$）。

注意：(2.16) 不能与 (2.5) 混淆：(2.5) 中的变量是时间变量 t，而此处的变量是空间变量 s。 (2.16)

常用记号： 若观察者在 t 处选取原点 $\mathcal{O}$，且 $\vec{x}(s) := \overrightarrow{\mathcal{O}c_{p_t}\ s}()$，则 (2.16) 可写为

$$\frac{d\vec{x}}{ds}(s) = \vec{v}_t(\vec{x}(s)) \quad \text{with} \quad \vec{x}(0) = \overrightarrow{Op_t}. \tag{2.17}$$

此外，观察者在 t 处选取笛卡尔基 $(\vec{e}_i)$，并且 $\vec{x}(s) = \sum_{i=1}^n x_i(s)\vec{e}_i$，可得$\frac{d\vec{x}}{ds}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{ds}(s)\vec{e}_i$，而 (2.17) 可写成关于 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 的 n 个方程组成的微分方程组

$$\forall i = 1, ..., n, \quad \frac{dx_i}{ds}(s) = v_i(t, x_1(s), ..., x_n(s)) \quad \text{with} \quad x_i(0) = (\overrightarrow{Op_t})_i \tag{2.18}$$

（函数 $x_i: \ s \to x_i(s)$ 是未知数）。也写作

$$\frac{dx_1}{v_1} = ... = \frac{dx_n}{v_n} = ds, \tag{2.19}$$

这意味着 答案：这是一个包含 n 个方程和 n 个未知数的微分方程组（2.18），必须求解 d.

（采用对偶记号，$\frac{dx^i}{ds}(s) = v^i(t, x^1(s) ..., x^n(s)$，且 $x^i(0) = (\overrightarrow{Op_t})^i$ 对所有 i 均成立。）

2.6 物质时间导数（物质导数）

2.6.1 通常定义

~目标：计算欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 沿粒子轨迹 $\Phi_{P_{Obj}}$ 的变化 P_{Obj}（例如粒子沿其轨迹运动时的温度）。因此，考虑函数 $g_{P_{Obj}}$，它给出 $\mathcal{E}ul$ 相对于 P_{Obj} 沿其轨迹的值：

$$g_{P_{Obj}}(t) := \mathcal{E}ul(t, p(t)) \quad \text{when} \quad p(t) := \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t). \tag{2.20}$$

定义 2.15 $\mathcal{E}ul$ 在 $(t, p(t))$ 处的物质时间导数为 $g_{P_{Obj}}'(t)$ =记作 $\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t, p(t))$。 ——

So:

$$\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t, p(t)) := g_{P_{Obj}}'(t) \quad (= \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{E}ul(t+h, p(t+h)) - \mathcal{E}ul(t, p(t))}{h}). \tag{2.21}$$

由于 $g_{P_{Obj}}(t) := \mathcal{E}ul(t, \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t))$，我们得到 $g_{P_{Obj}}'(t) = \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}(t, \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t)) + d\mathcal{E}ul(t, \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t)).\widetilde{\Phi}'_{P_{Obj}}(t)$，因此，令$\widetilde{\Phi}'_{P_{Obj}}(t) = \vec{v}(t, p(t))$（欧拉速度），则 $\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t, p(t)) = \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}(t, p(t)) + d\mathcal{E}ul(t, p(t)).\vec{v}(t, p(t))$：

$$\boxed{\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt} := \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t} + d\mathcal{E}ul.\vec{v}}. \tag{2.22}$$

练习 2.16 证明，若 $\mathcal{E}ul$ 是 C^2:

$$\frac{D^2\mathcal{E}ul}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}ul}{\partial t^2} + 2d\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}.\vec{v} + d\mathcal{E}ul.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d^2\mathcal{E}ul(\vec{v}, \vec{v}) + d\mathcal{E}ul.d\vec{v}.\vec{v} \tag{2.23}$$

答案。

$$\begin{aligned}\frac{D^2\mathcal{E}ul}{Dt^2} = \frac{D\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}}{Dt} = g''_{P_{Obj}}(t) &= \frac{\partial(\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t} + d\mathcal{E}ul.\vec{v})}{\partial t} + d(\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t} + d\mathcal{E}ul.\vec{v}).\vec{v} \\ &= \frac{\partial^2 \mathcal{E}ul}{\partial t^2} + \frac{\partial(d\mathcal{E}ul)}{\partial t}.\vec{v} + d\mathcal{E}ul.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}.\vec{v} + d^2\mathcal{E}ul(\vec{v}, \vec{v}) + d\mathcal{E}ul.d\vec{v}.\vec{v},\end{aligned}$$

并且 $\mathcal{E}ul$ C^2 给出 $\frac{\partial}{\partial t} \circ d = d \circ \frac{\partial}{\partial t}$（施瓦茨定理），因此得到 (2.23)。 ∎

练习 2.17 证明，若 $\mathcal{E}ul$ 是 C^2，对于任意向量场 $\vec{w}$，

$$\frac{D(d\mathcal{E}ul.\vec{w})}{Dt} = d\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}.\vec{w} + d\mathcal{E}ul.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + d^2\mathcal{E}ul(\vec{v},\vec{w}) + d\mathcal{E}ul.d\vec{w}.\vec{v}. \tag{2.24}$$

答案。$D(d\mathcal{E}ul.\vec{w})$ $= \partial(d\mathcal{E}ul.\vec{w})$ $+ d(d\mathcal{E}ul.\vec{w}).\vec{v} = \partial d\mathcal{E}ul .\vec{w} + d\mathcal{E}ul.\partial\vec{w} + (d(d\mathcal{E}ul).\vec{v}).\vec{w} + d\mathcal{E}ul.d\vec{w}.\vec{v}$。
施瓦茨定理给出 $d(d\mathcal{E}ul) = d(\partial\mathcal{E}ul)$，因为 $\mathcal{E}ul \in C^2$。因此得到 (2.24)。 ∎

2.6.2 备注：关于记号

- 记号 $\frac{d}{dt}$ （小写字母）表示一个单变量函数，例如 $\frac{dg_{P_{Obj}}}{dt}(t) := g_{P_{Obj}}'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{g_{P_{Obj}}(t+h))-g_{P_{Obj}}(t)}{h}$；
- 记号 $\frac{\partial}{\partial t}$ 表示一个有多个变量的函数，例如 $\frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}(t,\ p) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{E}ul\ (t+h,\ p)\ -\mathcal{E}ul\ (t,\ p)}{h}$；
- 记号 $\frac{D}{Dt}$ （大写字母）表示沿运动求导的欧拉函数，参见（2.21）。
- 其他记号通常很实用，但在考虑复合函数时可能会产生歧义：

$$\frac{d\mathcal{E}ul(t,p(t))}{dt} := \frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t,p(t)), \quad \text{and} \quad \frac{d\mathcal{E}ul(t,p(t))}{dt}_{|t=t_0} := \frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t_0,p(t_0)). \tag{2.25}$$

2.6.3 定义补充：时空定义

Co考虑一个 C^1 时空函数 f：$(t,\ p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to f(t,\ p)$，其中 $t =$ 表示时间，$p =$ 表示空间。

定义 2.18 f 的微分：将 $t,p \in \mathbb{R}^{n+1} \to f(t,p)$ 视为笛卡尔积（时间×空间） $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上的函数时，称其为“全微分”或“全导数”，记作 Df（这里时间和空间具有不同的性质）。

因此，若 $p_+ = (t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 且 $\vec{w}_+ = (w_0,\vec{w}) \in \vec{\mathbb{R}}\times\vec{\mathbb{R}}^n$ （时间×空间），那么根据微分的定义，

$$Df(p_+).\vec{w}_+ := \lim_{h\to 0}\frac{f(p_+ + h\vec{w}_+) - f(p_+)}{h}, \tag{2.26}$$

i.e.

$$Df(t,p).(w_0,\vec{w}) := \lim_{h\to 0}\frac{f(t+hw_0,p+h\vec{w}) - f(t,p)}{h}. \tag{2.27}$$

Thus

$$Df(t,p) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,p)\,dt + df(t,p). \tag{2.28}$$

~ ~**沿着轨迹** $\Phi_{P_{Obj}}:\ t \to p(t) = \Phi_{P_{Obj}}(t)$，**其中** $f = \mathcal{E}ul$ **为欧拉函数：**考虑时空轨迹

$$\widetilde{\Psi}_{P_{Obj}} : \begin{cases} [t_1,t_2] \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ \quad t \to \widetilde{\Psi}_{P_{Obj}}(t) := (t, \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t)) \quad (= (t,p(t))). \end{cases} \tag{2.29}$$

~ ~（因此 $\mathrm{Im}(\Psi_{P_{Obj}})$ = 是 $\mathrm{graph}(\Phi_{P_{Obj}})$。）曲线在 t 处的切向量为

$$\widetilde{\Psi}_{P_{Obj}}'(t) = (1, \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}'(t)) = (1,\vec{v}(t,p(t)) \in \vec{\mathbb{R}}\times\vec{\mathbb{R}}^n \tag{2.30}$$

其中，$\vec{v}(t,p(t))$ 是 $p_+ = (t,p(t))$ 处的欧拉速度。而式（2.20）为

$$g_{P_{Obj}}(t) = (\mathcal{E}ul \circ \widetilde{\Psi}_{P_{Obj}})(t) = \mathcal{E}ul(\widetilde{\Psi}_{P_{Obj}}(t)), \tag{2.31}$$

thus

$$g'_{P_{Obj}}(t) = D\mathcal{E}ul(\widetilde{\Psi}(t)).\widetilde{\Psi}_{P_{Obj}}'(t). \tag{2.32}$$

由此得到 (2.22)：$g'_{P_{Obj}}(t) =^{(2.28)} \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t}(t,\ p(t)).1 + d\mathcal{E}ul(t,\ p(t)).\vec{v}(t,\ p(t)) =$注意 $\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t,\ p(t))$：物质时间导数是沿时空轨迹 $\Psi_{P_{Obj}}$ 的“全导数” $D\mathcal{E}ul$。

2.6.4 材料时间导数是一个导数

命题 2.19 所有函数均为欧拉函数，并假设满足 C^1。

- 线性性：

$$\frac{D(\mathcal{E}ul_1+\lambda\mathcal{E}ul_2)}{Dt}=\frac{D\mathcal{E}ul_1}{Dt}+\lambda\frac{D\mathcal{E}ul_2}{Dt}. \tag{2.33}$$

- 乘积法则：若 $\mathcal{E}ul_1$、$\mathcal{E}ul_2$ 是标量值函数，则

$$\frac{D(\mathcal{E}ul_1\mathcal{E}ul_2)}{Dt}=\frac{D\mathcal{E}ul_1}{Dt}\,\mathcal{E}ul_2+\mathcal{E}ul_1\,\frac{D\mathcal{E}ul_2}{Dt}. \tag{2.34}$$

若 $\vec{w}$ 是一个向量场，T 是相容的张量（因此 $T.\vec{w}$ 有意义），则

$$\frac{D(T.\vec{w})}{Dt}=\frac{DT}{Dt}.\vec{w}+T.\frac{D\vec{w}}{Dt}. \tag{2.35}$$

证明。令 $i=1,2$，且 g_i 定义为 $g_i(t):=\mathcal{E}ul_i(t,p(t))$，其中 $p(t)=\Phi_{P_{Obj}}(t)$。

- $(g_1+\lambda g_2)'=g_1'+\lambda g_2'$ 得出（2.33）。
- 一方面，$\frac{D}{Dt}_{(T.\vec{w})}=\frac{\partial (T.\vec{w})}{\partial t}+d(T.\vec{w}).\vec{v}=\frac{\partial T}{\partial t}.\vec{w}+T.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}+(dT.\vec{v}).\vec{w}+T.(d\vec{w}.\vec{v})$；另一方面，$\frac{DT}{Dt}.\vec{w}+T.\frac{D\vec{w}}{Dt}=(\frac{\partial T}{\partial t}+dT.\vec{v}).\vec{w}+T.(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}+d\vec{w}.\vec{v})$。因此得到（2.34）—（2.35）。 ∎

2.6.5 可交换性问题

施瓦茨定理指出，当 $\mathcal{E}ul$ 是 C^2时，导数 $\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}$ 和 $d\mathcal{E}ul$ 可交换。但是

命题 2.20 材料时间导数 $\frac{D}{Dt}$ 与时间导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 或空间导数 d不可交换：一般而言，我们有 $\frac{\partial(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})}{\partial t}\neq\frac{D(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})}{Dt}$ 以及 $d(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})\neq\frac{D}{Dt}(d\mathcal{E}ul)$（因为变量 t 和 p 沿轨迹并非线性无关）。事实上：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})}{\partial t}&=\frac{D(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})}{Dt}+d\mathcal{E}ul.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\\&=\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t^2}+d\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}.\vec{v}+d\mathcal{E}ul.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\end{aligned}\right\},\quad\text{and}\quad\left\{\begin{aligned}d(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})&=\frac{D(d\mathcal{E}ul)}{Dt}+d\mathcal{E}ul.d\vec{v}\\&=\frac{\partial(d\mathcal{E}ul)}{\partial t}+d^2\mathcal{E}ul.\vec{v}+d\mathcal{E}ul.d\vec{v}\end{aligned}\right. \tag{2.36}$$

证明。$\frac{\partial\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}}{\partial t}=\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}+d\mathcal{E}ul.\vec{v})}{\partial t}=\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})}{\partial t}+\frac{\partial d\mathcal{E}ul}{\partial t}.\vec{v}+d\mathcal{E}ul.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ 施瓦茨 $=\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})}{\partial t}+d(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}).\vec{v}+d\mathcal{E}ul.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$，因此 2.36 $_1$。

$d\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}=d(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}+d\mathcal{E}ul.\vec{v})=\frac{\partial(d\mathcal{E}ul)}{\partial t}+d(d\mathcal{E}ul).\vec{v}+d\mathcal{E}ul.d\vec{v}$, thus $(2.36)_2$.

So $\frac{\partial(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})}{\partial t}\neq\frac{D(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})}{Dt}$ and $d(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt})\neq\frac{D(d\mathcal{E}ul)}{Dt}$ in general. ∎

练习 2.21 用分量证明（2.36）nts.

答案。（$\vec{e}_i$）是笛卡尔基。$\frac{\partial\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}}{\partial t}=\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial x^i}.v^i)}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t^2}+\sum_i\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t\partial x^i}.v^i+\sum_i\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial x^i}.\frac{\partial v^i}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t^2}+\sum_i\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t\partial x^i}.v^i+d\mathcal{E}ul.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$。以及$D(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t})=\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t^2}+\sum_i\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}).v^i}{Dt}=\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t^2}+\sum_i\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t\partial x^i}.v^i)$。

和 $d(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}).\vec{w}=\sum_j\frac{\partial\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}}{\partial w^j}w^j=\sum_j\frac{\partial(\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial\mathcal{E}ul}{\partial x^i}v^i)}{\partial w^j}w^j=\sum_j\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial t\partial x^j}w^j+d^2\mathcal{E}ul(\vec{v},\vec{w})+d\mathcal{E}ul.d\vec{v}.\vec{w}$。并且 $\frac{D}{Dt}_{(d\mathcal{E}ul)}.\vec{w}=\frac{\partial_{(d\mathcal{E}ul)}}{\partial t}+d(d\mathcal{E}ul).\vec{v}.\vec{w}=\frac{\partial}{\partial t}_{(d\mathcal{E}ul)}.\vec{w}+d^2\mathcal{E}ul)(\vec{v},\vec{w})=\sum_i\frac{\partial^2\mathcal{E}ul}{\partial x^i\partial t}w^i+d^2\mathcal{E}ul(\vec{v},\vec{w})$。因此 $d(\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}).\vec{w}=\frac{D}{Dt}_{(d\mathcal{E}ul)}.\vec{w}+d\mathcal{E}ul.d\vec{v}.\vec{w})$ 对所有 $\vec{w}$ 均成立。 ∎

2.7 欧拉加速度

定义 2.22 简而言之：如果 $\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}$ 是 C^2，那么位于 $\tilde{t}$ 处、在 $p_t=\Phi$时的粒子 P_{Obj} 的欧拉加速度 (t,P_{Obj}) 为

$$\vec{\gamma}(t,p_t):=\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}''(t)\overset{\text{noted}}{=}\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial t^2}(t,P_{Obj}). \tag{2.37}$$

具体而言：如式（2.3）所示，欧拉加速度（向量）域 $\vec{\gamma}$ 由式（2.37）定义为

$$\widehat{\vec{\gamma}}(t,p_t)=((t,p_t),\vec{\gamma}(t,p_t))\in\mathcal{C}\times\vec{\mathbb{R}}^n_t\quad\text{(pointed vector)}. \tag{2.38}$$

命题 2.23

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d\vec{v}.\vec{v}}. \tag{2.39}$$

并且如果 $\vec{v}$ 是 C^2，那么

$$d\vec{\gamma} = \frac{\partial(d\vec{v})}{\partial t} + d^2\vec{v}.\vec{v} + d\vec{v}.d\vec{v} = \frac{D(d\vec{v})}{Dt} + d\vec{v}.d\vec{v}. \tag{2.40}$$

证明。由 $g(t) = \vec{v}(t, p(t)) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}'(t)$以及（2.22），我们得到 $\vec{\gamma}(t, p(t)) = g'(t) = \frac{D\vec{v}}{Dt}(t, p(t))$。又因为 $\vec{v}$是 C^2，施瓦茨定理给出 $d\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(d\vec{v})$。 ∎

定义 2.24 如果观察者选择一个欧几里得点积 $(\cdot, \cdot)_g$（以英尺、米等为基准），其相应范数为 $||.||_g$，那么长度 $||\vec{\gamma}(t, p_t)||_g$就是 P_{Obj}的（标量）加速度。

2.8 $\widetilde{\Phi}$的时间泰勒展开

设 $P_{Obj} \in Obj$和 $t \in]t_1, t_2[$。假设 $\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}} \in C^2(]t_1, t_2[; \mathbb{R}^n)$。在 $t \in]t_1, t_2[$附近，$\Phi_{P_{Obj}}$的二阶（时间）泰勒展开为

$$\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(\tau) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t) + (\tau - t)\widetilde{\Phi}'_{P_{Obj}}(t) + \frac{(\tau-t)^2}{2}\widetilde{\Phi}''_{P_{Obj}}(t) + o((\tau-t)^2), \tag{2.41}$$

i.e.

$$p(\tau) = p(t) + (\tau - t)\vec{v}(t, p(t)) + \frac{(\tau-t)^2}{2}\vec{\gamma}(t, p(t)) + o((\tau-t)^2). \tag{2.42}$$

3 从初始构形出发的运动：拉格朗日描述

观察者可能更愿意使用物体 Obj的初始构形 $\Omega_{t_0} = \Phi(t_0, Obj)$，而不是直接处理 Obj（这对弹性至关重要）：这就是“拉格朗日方法”。拉格朗日方法不是客观的：两位观察者可能会选择不同的初始（时刻和）构形。

3.1 初始构形与拉格朗日“运动”

3.1.1 定义

Obj是一个材料物体，$\Phi: [t_1, t_2[\times Obj \to \mathbb{R}^n$是它的运动，$\Omega_\tau = \Phi_\tau(Obj)$是它在 τ时刻的构形，$t_0 \in]t_1, t_2[$ 是一个“初始时刻”，而 Ω_{t_0} 则是选择了 t_0的观察者所采用的初始构形。

定义 3.1 节物体Obj相对于初始构形 $\Omega_{t_0} = \Phi(t_0, Obj)$的运动是函数

$$\Phi^{t_0} : \begin{cases} [t_1, t_2] \times \Omega_{t_0} \to \mathbb{R}^n \\ \qquad (t, p_{t_0}) \mapsto p_t = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) := \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj}) \quad \text{when} \quad p_{t_0} = \widetilde{\Phi}(t_0, P_{Obj}). \end{cases} \tag{3.1}$$

因此，$p_t = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) := \Phi(t, P_{Obj})$表示粒子 P_{Obj}在 t 时的位置，该粒子在 t_0时位于 p_{t_0}。特别地，$p_{t_0} = \Phi^{t_0}(t_0, p_{t_0}) := \Phi(t_0, P_{Obj})$。

Marsden 和 Hughes 记号：观察者选定初始时刻 t_0 后，则Φ^{t_0} =记作Φ，再将 p_{t_0} =记作P（大写字母表示 t_0时的位置），将 p_t =记作p（小写字母表示 t时的位置），因此

$$p = \Phi(t, P) \in \Omega_t. \tag{3.2}$$

（当涉及客观性时，我们需要切换回记号 Φ^{t_0}、p_{t_0} 和 p_{t_0}）

注意：
- 讨论位置 p_{t_0} 的运动是荒谬的：$\mathbb{R}^n$ 中的位置不会移动。因此，若不先定义粒子的运动 Φ，Φ^{t_0} 就不存在。
- Φ^{t_0}的定义域通过 Ω_{t_0}取决于 t_0：上标 ^{t_0}表示这一点。而一位初始时刻为 $t_0' > t_0$的较晚观察者定义了 $\Phi^{t_0'}$，其定义域为 $\Omega_{t_0'}$ $[t_1, t_2] \times$；一般而言，$\Phi^{t_0'} \neq \Phi^{t_0}$，因为通常 $\Omega_{t_0'} \neq \Omega_{t_0}$。

• 还使用以下记号:

$$\Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) = \Phi(t; t_0, p_{t_0}). \tag{3.3}$$

（这一对 $(t_0,\ p_{t_0})$ 是“初始条件”，或者说，t_0 和 p_{t_0} 是初始条件，参见关于流的章节。）

• 如果观察者选定一个原点 $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$，我们也可以结合（1.6）使用,

$$\vec{x}_{t_0} = \overrightarrow{\mathcal{O}p_{t_0}} = \vec{\varphi}^{t_0}(t_0, \vec{x}_{t_0}) = \vec{X} = \overrightarrow{\mathcal{O}P} \quad \text{and} \quad \vec{x}_t = \overrightarrow{\mathcal{O}p_t} = \vec{\varphi}^{t_0}(t, \vec{x}_{t_0}) = \vec{x} = \overrightarrow{\mathcal{O}p}. \tag{3.4}$$

3.1.2 构形之间的微分同胚

利用（3.1），定义

$$\Phi_t^{t_0} : \begin{cases} \Omega_{t_0} & \to \Omega_t \\ p_{t_0} & \to p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) := \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}). \end{cases} \tag{3.5}$$

假设: 对于所有 $t_0,\ t \in]t_1,\ t_2[$，，映射 $\Phi_t^{t_0}$: $\Omega_{t_0} \to \Omega_t$ 是一个 C^k 微分同胚（一个 C^k 可逆函数，其逆函数为 C^k），其中 $k \in \mathbb{N}^*$ 取决于所要求的正则性。

因此，(3.5) 给出 $\widetilde{\Phi}_t(P_{Obj}) = \Phi_t^{t_0}(\widetilde{\Phi}_{t_0}(P_{Obj}))$，对所有 $P_{Obj} \in Obj$ 均成立，因此 $\Phi_t^{t_0} \circ \widetilde{\Phi}_{t_0} = \widetilde{\Phi}_t$，即

$$\boxed{\Phi_t^{t_0} := \widetilde{\Phi}_t \circ (\widetilde{\Phi}_{t_0})^{-1}}. \tag{3.6}$$

因此，$\Phi_{t_0}^{t_0} = I$ 和 $\Phi_{t_0}^{t} \circ \Phi_t^{t_0} = (\widetilde{\Phi}_t \circ (\widetilde{\Phi}_{t_0})^{-1}) \circ (\widetilde{\Phi}_{t_0} \circ (\widetilde{\Phi}_t)^{-1}) = I$ 给出

$$\Phi_{t_0}^{t} = (\Phi_t^{t_0})^{-1}. \tag{3.7}$$

3.1.3 轨迹

设 $(t_0, p_{t_0}) \in [t_1, t_2] \times \Omega_{t_0}$ (初始条件)，并由 (3.1) 定义

$$\Phi_{p_{t_0}}^{t_0} : \begin{cases} [t_1, t_2] & \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto p(t) = \Phi_{p_{t_0}}^{t_0}(t) := \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t) = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) \quad \text{when} \quad p_{t_0} = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t_0). \end{cases} \tag{3.8}$$

定义 3。2 $\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}$ 称为“ p_{t_0}的（参数）轨迹”，这意味着: $\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}$ 是粒子 P_{Obj}的轨迹~，该粒子在 t_0时位于 $p_{t_0} = \Phi(t, P_{Obj})$。而“ p_{t_0} 的 ”几何轨迹为

$$\mathrm{Im}(\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}) = \Phi_{p_{t_0}}^{t_0}([t_1, t_2]) = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \{\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}(t)\} \quad (= \mathrm{Im}(\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}})). \tag{3.9}$$

注意：“ p_{t_0}的轨迹”这一说法并不恰当，因为位置 p_{t_0} 不会移动：应当理解为处于 p_{t_0} 的粒子 P_{Obj} 的轨迹$\Phi_{P_{Obj}}$，该粒子在 t_0 时刻位于 p_{t_0}。

3.1.4 迹线（发射线）

取一段从 t_0 到 T（起始和结束）的影片。

定义 3.3 设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个固定点（你可以在构成影片的每张照片上看到点 Q）。经过 Q 的迹线是以下集合

$$\begin{aligned} E_{t_0,T}(Q) &= \{p \in \Omega : \exists \tau \in [t_0, T] : p = \Phi_T^{\tau}(Q) = (\Phi_{\tau}^{T})^{-1}(Q)\} \\ &= \{p \in \Omega : \exists u \in [0, T - t_0] : p = \Phi_T^{T-u}(Q) = (\Phi_{T-u}^{T})^{-1}(Q)\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

= t在 T 时刻处于 Q 的所有粒子在 $\tau \in [t_0, T$ 时刻的位置集合（ $\mathbb{R}^n$ 中的一条线）].

例 3.4 烟雾从烟囱中冒出。在附近固定一台摄像机，选择烟囱顶部的一个点 Q，给粒子染色，然后拍摄影片。在 T 停止拍摄。接着（在时间 T）将影片中的照片叠加起来：我们看到的有色曲线就是迹线。

In other words $= \bigcup_{\tau \in [t_0, T]} \{\Phi_Q^{\tau}(T)\} = \bigcup_{u \in [0, T-t_0]} \{\Phi_Q^{T-u}(T)\}$.

3.2 拉格朗日变量和函数

3.2.1 定义

~考虑一个运动 Φ，参见 (1.5)。一位观察者（主观地）选择了一个 $t_0 \in [t_1, t_2]$ （“在过去”）；因此 $\Omega_{t_0} =_{\sim} \Phi(t_0, Obj)$ 是他的初始构形。令 $m \in \mathbb{N}^*$。

~**定义 3.5** 简而言之：相对于Obj、 Φ 和 t_0的拉格朗日函数，是一个函数

$$\mathcal{L}ag^{t_0} : \begin{cases} [t_1, t_2] \times \Omega_{t_0} \ \to \vec{\mathbb{R}^m} \ \text{(or, more generally, some adequat set)} \\ \qquad (t, p_{t_0}) \ \to \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}), \end{cases} \tag{3.11}$$

而 p_{t_0} 称为相对于（主观）选择 t_0的拉格朗日变量。
（与（2.2）比较：欧拉函数不依赖于任何 t_0。）

示例 3.6 标量值： $\mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}) = \Theta^{t_0}(t, p_{t_0}) =$在 t时，位于 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) = \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})$ 的粒子的温度 P_{Obj}，该粒子曾位于 p_{t_0} 时的 t_0。（因此，继续示例 2.2， $\Theta^{t_0}(t, p_{t_0}) = \theta(t, p_t)$ 。） ▪

示例 3.7 向量值： $\mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}) = \vec{U}^{t_0}(t, p_{t_0}) =$在 t时，作用于位于 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) = \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})$ 的粒子的力 P_{Obj}，该粒子曾位于 p_{t_0}时的 t_0。（因此，继续示例 2.3， $\vec{U}^{t_0}(t, p_{t_0}) = \vec{u}(t, p_t)$ 。） ▪

如果 t 固定，或者如果 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 固定，那么我们定义

$$\mathcal{L}ag_t^{t_0} : \begin{cases} \Omega_{t_0} \ \to \vec{\mathbb{R}^m} \ \text{(or, more generally, some adequat set)} \\ p_{t_0} \ \to \mathcal{L}ag_t^{t_0}(p_{t_0}) := \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}), \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{L}ag_{p_{t_0}}^{t_0} : \begin{cases} [t_1, t_2] \ \to \vec{\mathbb{R}^m} \ \text{(or, more generally, some adequat set)} \\ \qquad t \ \to \mathcal{L}ag_{p_{t_0}}^{t_0}(t) := \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}). \end{cases} \tag{3.13}$$

备注 3.8 位置 p_{t_0} 有时也被称为“物质点”，这有悖直觉：P_{Obj} （客观的）才是物质点，而 p_{t_0} 只是它在 t_0 （主观的）下的空间位置；而欧拉变量 p_t 在 t.....时并不称为“物质点”。

顺便一提，变量 p_t 也称为“更新的拉格朗日变量”..... ▪

3.2.2 拉格朗日函数是一个双点张量

定义 3.9 具体而言：由于 $\mathcal{L}ag^{t_0}$ 由式（3.11）定义，拉格朗日函数是一个函数

$$\widetilde{\mathcal{L}ag}^{t_0} : \begin{cases} [t_1, t_2] \times \Omega_{t_0} \ \to \mathcal{C} \times \vec{\mathbb{R}^m} \\ \qquad (t, p_{t_0}) \ \to \widetilde{\mathcal{L}ag}^{t_0}(t, p_{t_0}) = ((t, p_t), \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0})) \quad \text{when} \quad p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}). \end{cases} \tag{3.14}$$

即 $\widetilde{\mathcal{L}ag}^{t_0}(t, \ p_{t_0}) = ((t, \ \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})) \ \mathcal{L}ag^{t_0}(t, \ p_{t_0}))$。（并且 $\vec{\mathbb{R}^m}$ 可以替换为某个集合。）

定义 3.10 （Marsden 和 Hughes [12]。）拉格朗日函数是一个关于点 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ （出发集合）和 $p_t \in \Omega_t$（到达集合）的“两点向量场”（或更一般地说，“双点张量”），其中考察的是值 $\mathcal{L}ag^{t_0}(t, \ p_{t_0})$。

解释： (3.14) 表明， $\mathcal{L}ag^{t_0}(t, \ p_{t_0})$ 并非表示在 $(t, \ p_{t_0})$ 处，而是表示在 $(t, \ p_t)$ 处：也就是说，已知

$$\text{graph}(\mathcal{L}ag^{t_0}) = \{((t, p_{t_0}), \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0})) \quad \text{and} \quad \text{Im}(\widetilde{\mathcal{L}ag}^{t_0}) = \{((t, p_t), \mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}))\}, \tag{3.15}$$

我们有

$$\text{Im}(\widetilde{\mathcal{L}ag}^{t_0}) \neq \text{graph}(\mathcal{L}ag^{t_0}) : \tag{3.16}$$

因此，拉格朗日函数并不以通常意义定义张量。与定义张量的欧拉⌒函数 $\mathcal{E}ul$ （特别是 $\text{Im}(\mathcal{E}ul)$ =图像 $(\mathcal{E}ul)$）相比，参见 (2.3)。

3.3 与欧拉函数相关的拉格朗日函数

3.3.1 定义

~设 Φ 为一个运动，参见 (1.5)。设 $\mathcal{E}ul$ 为一个欧拉函数，参见 (2.3)。设 $t_0 \in [t_1, t_2]$。

定义 3.11 与欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 相关的拉格朗日函数 $\mathcal{L}ag^{t_0}$ 定义如下：对所有 $(t, P_{Obj}) \in [t_1, t_2] \times Obj$,

$$\mathcal{L}ag^{t_0}(t, \widetilde{\Phi}(t_0, P_{Obj})) := \mathcal{E}ul(t, \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj})), \tag{3.17}$$

也就是说，对所有 $(t, p_{t_0}) \in [t_1, t_2] \times \Omega_{t_0}$,

$$\mathcal{L}ag^{t_0}(t, p_{t_0}) := \mathcal{E}ul(t, p_t), \quad \text{when} \quad p_t = \widetilde{\Phi}(t, P_{Obj}) = \Phi_t^{t_0}(p_t) \tag{3.18}$$

即， $\mathcal{L}ag^{t_0}(t,\ p_{t_0}) := \mathcal{E}ul(t,\ p_t)$ 当 $p_{t_0} = (\Phi_t^{t_0})^{-1}(p_t)$ 对所有 $(t,\ p_t) \in \mathcal{C}$ 成立时。换句话说：

$$\boxed{\mathcal{L}ag_t^{t_0} := \mathcal{E}ul_t \circ \Phi_t^{t_0}}. \tag{3.19}$$

3.3.2 注释

- 如果你有一个拉格朗日函数，那么可以将该函数与之关联

$$\mathcal{E}ul_t^{t_0} := \mathcal{L}ag_t^{t_0} \circ (\Phi_t^{t_0})^{-1} \tag{3.20}$$

which 因此先验地依赖于 t_0。但是，欧拉函数与任何初始时刻 t 都线性无关 $_0$.

- 对于一次测量，只有一个欧拉函数 $\mathcal{E}ul$，而与之关联的拉格朗日函数 $\mathcal{L}ag^{t_0}$ 则有多个，数量与观察者 t_0 相同（即与观察者的数量相同）：选择 $t_0{}' > t_0$ 的较晚观察者所对应的拉格朗日函数 $\mathcal{L}ag^{t_0{}'}$ 不同于 $\mathcal{L}ag^{t_0}$，因为定义域 Ω_{t_0} 和 $\Omega_{t_0{}'}$（通常）不同。

3.4 拉格朗日速度

3.4.1 定义

~**定义 3.12** 简而言之：粒子 P_{Obj} 在 $p_t = \Phi$时位于 t 处的拉格朗日速度，是函数

$$\vec{V}^{t_0} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \Omega_{t_0} & \to \vec{\mathbb{R}}^n \\ (t, p_{t_0}) & \to \vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}) := \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t) \quad \text{when} \quad p_{t_0} = \widetilde{\Phi}(t_0, P_{Obj}). \end{cases} \tag{3.21}$$

详细地说：根据 (3.21)，拉格朗日速度是由下式给出的两点向量场

$$\widehat{\vec{V}^{t_0}}(t, p_{t_0}) : \begin{cases} \mathbb{R} \times \Omega_{t_0} & \to \mathcal{C} \times \vec{\mathbb{R}}^n \\ (t, p_{t_0}) & \to \widehat{\vec{V}^{t_0}}(t, p_{t_0}) := ((t, p_t), \vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0})), \quad \text{when} \quad p_t = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}). \end{cases} \tag{3.22}$$

因此，$\vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t) = \vec{v}(t, p_t)$ 是粒子 P_{Obj} 在 $p_t = \widetilde{\Phi}$时位于 t 处的速度，而该粒子在 t_0时位于 $p_{t_0} = \widetilde{\Phi}(p_{t_0}, P_{Obj})$处；并且 $\vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0})$不与 graph($\vec{V}^{t_0}$)相切，参见 (3.16)：它与 graph($\vec{v}$)在 (t, p_t)处相切。

如果 t 固定，或者如果 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 固定，那么我们定义

$$\vec{V}_t^{t_0}(p_{t_0}) := \vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}), \quad \text{or} \quad \vec{V}_{p_{t_0}}^{t_0}(t) := \vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}). \tag{3.23}$$

Remark： 通常的定义并未明确提及粒子；它不是式（3.21 ），

$$\vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}) := \frac{\partial \Phi^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}), \quad \forall (t, p_{t_0}) \in \mathbb{R} \times \Omega_{t_0}. \tag{3.24}$$

3.4.2 拉格朗日速度与欧拉速度

~（3.21）和（2.4）给出了（替代定义），其中 $p_\tau = \Phi(\tau,\ P_{Obj})$,

$$\vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}) = \vec{v}(t, p_t) \quad (= \frac{\partial \Phi^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t) = \text{velocity at } t \text{ at } p_t \text{ of } P_{Obj}). \tag{3.25}$$

换句话说，

$$\boxed{\vec{V}_t^{t_0} = \vec{v}_t \circ \Phi_t^{t_0}}. \tag{3.26}$$

3.4.3 微分之间的关系

对于 C^2 运动，式（3.26）给出

$$d\vec{V}_t^{t_0}(p_{t_0}) = d\vec{v}_t(p_t).d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) \quad \text{when} \quad p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}). \tag{3.27}$$

也就是说，

$$F_t^{t_0} = d\Phi_t^{t_0} \overset{\text{noted}}{=} \text{the deformation gradient relative to } t_0 \text{ and } t, \tag{3.28}$$

$$\boxed{d\vec{V}_t^{t_0}(p_{t_0}) = d\vec{v}_t(p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0})} \quad \text{when} \quad p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}). \tag{3.29}$$

非严格地写作（危险记号：相对于哪些时间，在哪些点？）

$$d\vec{V} = d\vec{v}.F. \tag{3.30}$$

.3.4.4 使用拉格朗日变量计算称为 $L = F.F^{-1}$ 的 $d\vec{v}$

L 拉格朗日方法可以在欧拉方法之前引入：给定 $\vec{V}^{t_0}$，定义 e

$$\vec{v}^{t_0}(t, p_t) := \vec{V}^{t_0}(t, p_{t_0}), \quad \text{when} \quad p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}), \tag{3.31}$$

参见（3.20）。（即 $\vec{v}^{t_0}(t, p_t) := \vec{V}^{t_0}(t, {\Phi_t^{t_0}}^{-1}(p_t))$). 因此 $\vec{v}^{t_0}(t, \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})) = \frac{\partial \Phi^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0})$，因此

$$d\vec{v}^{t_0}(t, p_t).d\Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) = d(\frac{\partial \Phi^{t_0}}{\partial t})(t, p_{t_0}) = \frac{\partial (d\Phi^{t_0})}{\partial t}(t, p_{t_0}) = \frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}), \tag{3.32}$$

当 Φ^{t_0} 为 C^2 且 $F^{t_0} := d\Phi^{t_0}$ 时。因此

$$d\vec{v}^{t_0}(t, p_t) = \frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}).F^{t_0}(t, p_{t_0})^{-1}, \quad \text{written in short} \quad d\vec{v} = \dot{F}.F^{-1} \quad \text{(points? times?)}. \tag{3.33}$$

而在经典力学书籍中可以将其写作 $L_t^{t_0}$，所以你可以找到

$$L_t^{t_0}(p_t) := \dot{F}_{p_{t_0}}^{t_0}(t).F_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}, \quad \text{written in short} \quad L = \dot{F}.F^{-1} \quad \text{(at what points, what times?)}. \tag{3.34}$$

这里并不明显的是，$L_t^{t_0}(p_t)$不依赖于 t_0，但事实确实如此，参见 (3.29):

$$L_t^{t_0}(p_t) = d\vec{v}_t(p_t). \tag{3.35}$$

提醒：只要可能，就尽可能长时间使用欧拉量[1]。

3.5 拉格朗日加速度

~ ~令 $P_{Obj} \in Obj$, t_0, $t \in \mathbb{R}$, $p_{t_0} = \Phi_{P_{Obj}}(t_0)$ 和 $p_t = \Phi_{P_{Obj}}(t)$（P_{Obj}在 t_0和 t时的位置）。

定义 3.13 简言之，粒子 P_{Obj} 在时刻 p_t 位于 t 处的拉格朗日加速度为

$$\vec{\Gamma}^{t_0}(t, p_{t_0}) := \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}''(t) \quad \text{when} \quad p_{t_0} = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t_0). \tag{3.36}$$

换言之

$$\vec{\Gamma}^{t_0}(t, p_{t_0}) := \vec{\gamma}(t, p_t) \quad \text{when} \quad p_t = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}), \tag{3.37}$$

~ ~其中 $\vec{\gamma}(t,\ p_t) = \Phi_{P_{Obj}}{}''(t)$ 是欧拉加速度，即 t 在时刻 $p_t = \Phi$位于 t, P_{Obj}处的加速度，参见（2.37）。

具体而言，拉格朗日加速度是定义在 $\mathbb{R} \times \Omega_{t_0}$ 上的“两点向量场”，其定义为

$$\widetilde{\vec{\Gamma}^{t_0}}(t, p_{t_0}) = ((t, p_t), \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}''(t)), \quad \text{when} \quad p_t = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}). \tag{3.38}$$

（与（2.38）比较。）特别地，$\vec{\Gamma}^{t_0}(t,\ p_{t_0})$ 并未绘制在 $(t,\ p_{t_0})$ 处的 $\vec{\Gamma}^{t_0}$ 的图像上，而是绘制在 $(t,\ p_t)$ 处的 $\vec{\gamma}$ 的图像上。

[1]从拉格朗日计算得到欧拉结果，可能会让人很难理解李导数：要在经典力学中引入“所谓的”李导数，可以按照以下步骤进行：1- 在 t 处考虑柯西应力向量 $\vec{t}$（欧拉描述），2- 接着利用单位法向量 $\vec{n}$定义相应的柯西应力张量 σ（满足$\vec{t} = \sigma.\vec{n}$），3- 然后利用虚功率和积分中的变量替换，回到 Ω_{t_0}，以便使用拉格朗日变量，4- 接着引入第一类 Piola–Kirchhoff（双点）张量 $I\!K$，5- 然后引入第二类 Piola–Kirchhoff 张量 SK（Ω_{t_0}中的自同态），6- 接着在 Ω_{t_0} 中对 SK 求导（尽管初始变量是 Ω_t中的欧拉变量，此处使用的却是拉格朗日变量），7- 然后回到 Ω_t，以重新得到欧拉函数（在积分中进行变量替换），8- 接着便会得到一些 Jaumann、Truesdell 或其他所谓的李导数型项。由于一路上遗忘了协变客观性，在这些导数中作出恰当选择颇为晦涩.....而采用简单的欧拉考量，只需几行便能理解（真正的）李导数（欧拉概念）及其简洁性，参见 § 9，并推导出二阶协变客观结果。

若固定 t，或固定 $p_{t_0}\in\Omega_{t_0}$，则定义

$$\vec{\Gamma}_t^{\,t_0}(p_{t_0}):=\vec{\Gamma}^{\,t_0}(t,p_{t_0}),\quad \text{and}\quad \vec{\Gamma}_{p_{t_0}}^{t_0}(t):=\vec{\Gamma}^{\,t_0}(t,p_{t_0}). \tag{3.39}$$

Thus

$$\vec{\Gamma}_t^{\,t_0}=\vec{\gamma}_t\circ\Phi_t^{t_0},\quad \text{and}\quad d\vec{\Gamma}_t^{\,t_0}(p_{t_0})=d\vec{\gamma}_t(p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0}), \tag{3.40}$$

当 $p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$ 且 $F_t^{t_0}:=d\Phi_t^{t_0}$（变形梯度）时。

容易引起歧义的记号：$d\vec{\Gamma}=d\vec{\gamma}.F$（点? 还是时间?）。

3.6 Φ^{t_0}的时间泰勒展开

设 $p_{t_0}\in\Omega_{t_0}$。那么，保留到二阶，

$$\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}(\tau)=\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}(t)+(\tau-t)\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}{}'(t)+\frac{(\tau-t)^2}{2}\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}{}''(t)+o((\tau-t)^2), \tag{3.41}$$

也就是说，使用 $p(\tau)=\Phi_{P_{Obj}}(\tau)=\Phi_\tau^{t_0}(p_{t_0})$,

$$p(\tau)=p(t)+(\tau-t)\vec{V}^{t_0}(t,p_{t_0})+\frac{(\tau-t)^2}{2}\vec{\Gamma}^{\,t_0}(t,p_{t_0})+o((\tau-t)^2). \tag{3.42}$$

注意：涉及三个 时间：t_0（依赖观察者）、t 和 τ（用于泰勒展开）。与 (2.41)-(2.42) 比较：$p(\tau)=p(t)+(\tau-t)\vec{v}(t,\ p(t))+{}^{(\tau-t)}{}_2{}^2\vec{\gamma}(t,\ p(t))+o((\tau-t)^2)$，~~与 t_0 线性无关~~。

3.7 可由运动使其自身发生变形的向量场

考虑一个 C^0 欧拉向量场 $\vec{w}:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{C}&\to\mathbb{R}^n\\ (t,\ p_t)&\to\vec{w}(t,\ p_t)\end{array}\right\}$。设 $t_0\in[t_1,t_2[$，并设 $\vec{w}_{t_0}:\left\{\begin{array}{ll}\Omega_{t_0}&\to\mathbb{R}^n\\ p_{t_0}&\to\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}):=\vec{w}(t_0,\ p_{t_0})\end{array}\right\}$（$\Omega_{t_0}$ 中的向量场）。则定义（虚）向量场

$$\vec{w}_{t_0*}:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{C}&\to\mathbb{R}^n\\ (t,p_t)&\to\vec{w}_{t_0*}(t,p_t):=d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}),\quad \text{when}\quad p(t)=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}).\end{array}\right. \tag{3.43}$$

（运动对 $\vec{w}_{t_0}$ 施加变形后的推前 $=$ 结果，见图4.1。）

命题 3.14 对于 C^2 运动，我们有（沿虚拟轨迹的时间变化率）

$$\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}=d\vec{v}.\vec{w}_{t_0*}, \tag{3.44}$$

即 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_{t_0*}=\vec{0}$，其中 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u}:=\frac{D\vec{u}}{Dt}-d\vec{v}.\vec{u}\,(=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+d\vec{u}.\vec{v}-d\vec{v}.\vec{u})$ 是沿着 $\vec{v}$ 的（非定常）向量域 $\vec{u}:\mathcal{C}\to\mathbb{R}^n$ 的李导数。

解释：我们将看到，$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t_0,p_{t_0})=lim_{t\to t_0}{}^{\vec{w}(t,p(t))-\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))}{}_h$ ~~度量了“ $\vec{w}$ 对运动的阻力”~~，见 *§ 9.3.2*；因此，结果 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_{t_0*}(t_0,p_{t_0})=\vec{0}$ 是“显而易见的”（$=lim_{t\to t_0}{}^{\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))-\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))}{}_h$）：若 $\vec{w}=\vec{w}_{t_0*}$，~~则向量（“为”）~~域 $\vec{w}$ 不会对流产生任何阻力。

证明。固定 p_{t_0}，记 $d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$ 为 $=F(t)$，我们有 $\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))=^{(3.43)}F(t).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$，因此 $\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}(t,p(t))=F'(t).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})=F'(t).F(t)^{-1}.\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))=^{(3.33)}d\vec{v}(t,p(t)).\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))$，即 (3.44)。 ∎

4 变形梯度 $F:=d\Phi$

考虑一个运动 $\widetilde{\Phi}:\left\{\begin{array}{ll}\mathbb{R}\times Obj&\to\mathbb{R}^n\\ (t,\ P_{Obj})&\to p_t=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})\end{array}\right\}$，$\Omega_t:=\widetilde{\Phi}(t,Obj)$ 表示 Obj 在任意 t 时的构形，固定 $t_0,t\in\mathbb{R}$，并令 $\Phi_t^{t_0}:\left\{\begin{array}{ll}\Omega_{t_0}&\to\Omega_t\\ p_{t_0}=\widetilde{\Phi}(t_0,P_{Obj})&\to p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}):=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})\end{array}\right\}$，假设其为一个微分同胚。计算（量化）所用的记号遵循惯例：

1- Arnold、Germain 中的经典（无歧义）记号：例如，$(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$ 分别是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中的基，$\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) = \sum_i w_{t_0,i}(p_{t_0})\vec{a}_i \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$, $\vec{w}_{t,i}(p_t) = \sum_i w_{t,i}(p_t)\vec{b}_i \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$；以及

2- Marsden–Hughes 对偶记号：t_0 处用大写字母，t 处用小写字母；对偶记号，例如 $(\vec{E}_I)$ 和 $(\vec{e}_i)$，分别是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的基，$\vec{W}(P) = \sum_I W^I(P)\,\vec{E}_I \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，$\vec{w}(p) = \sum_i w^i(p)\vec{e}_i \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$。

4.1 定义

4.1.1 变形梯度 F 的定义

定义 4.1 微分 $d\Phi^{t_0}_t$ =记作 $F^{t_0}_t$: $\left\{ \Omega_{t_0} \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\, \vec{\mathbb{R}}^n_t)\ p_{t_0} \to F^{t_0}_t(p_{t_0}) := d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}) \right\}$ 称为“ t_0 与 t 之间的协变变形梯度”，或简称“变形梯度”。而“ t_0 与 t 之间在 p_{t_0} 处的协变变形梯度”，或简称“ p_{t_0} 处的变形梯度”，是线性映射 $F^{t_0}_t(p_{t_0}) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\, \vec{\mathbb{R}}^n_t)$，其定义如下：对于所有 $\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$（ p_{t_0} 处的向量），

$$\boxed{F^{t_0}_t(p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) := \lim_{h\to 0} \frac{\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}+h\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})) - \Phi^{t_0}_t(p_{t_0})}{h}} \overset{\text{noted}}{=} (\Phi^{t_0}_t)_*(\vec{w}_{t_0})(p_t) \overset{\text{noted}}{=} \vec{w}_{t_0 *}(t, p_t), \quad (4.1)$$

与 $p_t = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0})$。参见图4.1。

Marsden–Hughes 记法： $\Phi := \Phi^{t_0}_t$，$F := d\Phi$，$P := p_{t_0}$，$\vec{W}(P) := \vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$，$p = \Phi(P)$，因此

$$\boxed{F(P).\vec{W}(P) := \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(P+h\vec{W}(P)) - \Phi(P)}{h}} \overset{\text{noted}}{=} \Phi_*\vec{W}(p) \overset{\text{noted}}{=} \vec{w}_*(p). \quad (4.2)$$

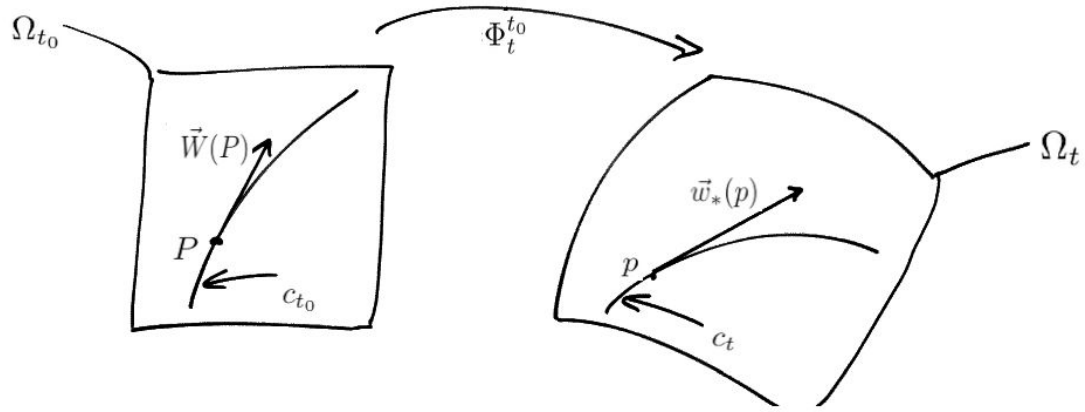


图4.1： $\vec{w}$ 是一个欧拉向量场。在 t_0 处，在 Ω_{t_0} 中定义向量场 $\vec{w}_{t_0}$，使得 $\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) := \vec{w}(t_0,p_{t_0})$。$\Omega_{t_0}$ 中的（空间）曲线 c_{t_0}： $s \to p_{t_0} = c_{t_0}(s)$ 是 $\vec{w}_{t_0}$ 的一条积分曲线，即满足 $c_{t_0}'(s) = \vec{w}_{t_0}(c_{t_0}(s))$。它经由 $\Phi^{t_0}_t$变换为 Ω_t 中的（空间）曲线 $c_t = \Phi^{t_0}_t \circ c_{t_0}$： $s \to p_t = c_t(s) = \Phi^{t_0}_t(c_{t_0}(s))$；因此，$c_t'(s) = d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}).c_{t_0}'(s) = d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$，记作 $\vec{w}_{t_0 *}(t, p_t)$，是 p_t 处的切向量（ $\vec{w}_{t_0}$ 经 $\Phi^{t_0}_t$ 推前所得）。此外，还绘出了 $\vec{w}(t, p(t))$（实际值）。

注意： “变形梯度” $F^{t_0}_t = d\Phi^{t_0}_t$ 并不是 “梯度”（其定义不 需要欧几里得点积）；当涉及协变与逆变以及客观性时，这会引起混淆。更简单的做法是沿用“ $F^{t_0}_t = \Phi^{t_0}_t$的微分”这一名称，但这并非标准用法，热力学中除外：例如，内能 dU U 的微分不 称为“ U的梯度”（不存在有意义的内积）：它就称为“ U的微分”.....

4.1.2 推前（ F的取值）

定义 4.2 设 $\vec{w}_{t_0}$： $\left\{ \begin{array}{l} t_0 \to \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \\ \Omega p_{t_0} \to \vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) \end{array} \right\}$ 是 Ω_{t_0}上的一个向量场。它在$\Phi^{t_0}_t$下的推前是 Ω_t 中的向量场 $(\Phi^{t_0}_t)_*(\vec{w}_{t_0})$，定义为

$$(\Phi^{t_0}_t)_*\vec{w}_{t_0}(p_t) = F^{t_0}_t(p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) \overset{\text{noted}}{=} \vec{w}_{t_0 *}(t, p_t) \quad \text{when} \quad p_t = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0}). \quad (4.3)$$

参见图4.1。Marsden记号： $\Phi_*\vec{W}(p) = F(P).\vec{W}(P)$ =已注明$\vec{w}_*(p)$，当 $p = \Phi^{t_0}_t(P)$.

换句话说

$$(\Phi_t^{t_0})_*\vec{w}_{t_0} := (F_t^{t_0}.\vec{w}_{t_0}) \circ (\Phi_t^{t_0})^{-1}. \tag{4.4}$$

Marsden记号： $\Phi_*\vec{W} = (F.\vec{W}) \circ \Phi^{-1} = \vec{w}_{*\circ}$

4.1.3 F 是两点张量

根据（4.1），“切映射”为

$$\widehat{F_t^{t_0}} : \begin{cases} \Omega_{t_0} & \to \Omega_t \times \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t) \\ p_{t_0} & \to \widehat{F_t^{t_0}}(p_{t_0}) = (p_t, F_t^{t_0}(p_{t_0})) \quad \text{when} \quad p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}). \end{cases} \tag{4.5}$$

定义 4.3（Marsden–Hughes [12]。）函数 $F_t^{t_0}$称为两点张量，这一名称指的是点 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$（出发集合）和 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) \in \Omega_t$（到达集合，其中绘出了 $\vec{w}_{t_0*}(t,\ p_t) = F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$）。简而言之， $F_t^{t_0}$ =记作 $F_t^{t_0}$称为两点张量。

注4.4 “两点张量”这一名称是一种简写，在处理转置时可能造成混淆和错误： $F_t^{t_0}$并非直接就是“张量”：张量是多重线性形式，因此其结果是标量（$\in \mathbb{R}$）；而 $F(P) := F_t^{t_0}(P)$ =记作 $F_P \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 的结果是向量（属于 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$）。不过，F_P可以自然且典范地与双线性形式 $\widetilde{F}_P \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t,\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \mathbb{R})$ 相关联，该形式定义如下：对所有 $\vec{u}_P \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $\ell_p \in \vec{\mathbb{R}}^{n*}_t$，令 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$,

$$\widetilde{F}_P(\ell_p, \vec{u}_P) := \ell_p.F_P.\vec{u}_P\ (\in \mathbb{R}), \tag{4.6}$$

~参见 § A.13，而正是 F_P 定义了所谓的“双点张量”。

但别忘了，线性形式的转置（F_P 此处）并非由相应双线性形式的转置~（F_P 此处）推导而来。因此，使用“转置”一词时要谨慎，因为它有两种不同的定义。事实上，双线性形式的转置 $b(\cdot,\cdot)$ 是 $b(\cdot,\cdot)$ 的内禀属性（是客观的），定义为$b^T(\vec{u},\vec{w}) = b(\vec{w},\vec{u})$；而线性函数 L 的转置并非 L 的内禀属性（是主观的），定义为 $(L^T.\vec{u},\vec{w})_g = (L.\vec{w},\vec{u})_h$ 其中 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$ 是人们选定的内积。（详见 § A.7.2 和 § A.11.1）。 ∎

注4。 **5** 更一般地，对于流形， $\Phi := \Phi_t^{t_0}$在 $P \in \Omega_{t_0}$处的微分为 $F(P) := d\Phi(P)$: $\begin{cases} T_P\Omega_{t_0} & \to T_p\Omega\vec{W}\ P \quad \to \vec{w}_*\ p() () := d\Phi(P).\vec{W}(P) \end{cases}$ 其中 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$。而切映射为

$$T\Phi : \begin{cases} T\Omega_{t_0} & \to T\Omega_t \\ (P, \vec{W}(P)) & \to T\Phi(P, \vec{W}(P)) := (p, d\Phi(P).\vec{W}(P)) = (p, \vec{w}_*(p)), \quad \text{where} \quad p = \Phi_t^{t_0}(P), \end{cases} \tag{4.7}$$

称为关联双点张量。 ∎

4.1.4 演化：迈向连续介质力学中的李导数

考虑一个欧拉向量场 $\vec{w}$: $\begin{cases} t & (\{t\} \times \Omega_t) \to \vec{\mathbb{R}}^n(t,\ p) \to \vec{w}(t,\ p) \end{cases}$，例如“力场”。然后，在 t_0 处考虑 $\vec{w}_{t_0}$: $\begin{cases} t_0 & \to \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \\ \Omega p_{t_0} & \to \vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) := \vec{w}(t_0,\ p_{t_0}) \end{cases}$。根据(4.2)， $\vec{w}_{t_0}$经$\Phi_t^{t_0}$的推前为，

$$\vec{w}_{t_0*}(t, p(t)) = F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}), \quad \text{where} \quad p(t) = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}). \tag{4.8}$$

见图4.1。然后，无需任何普适性礼物，在 t at $p(t)$ 处，我们可以将 $\vec{w}(t,\ p(t))$（ $\vec{w}$at t at $p(t)$ 的实数值）与 $\vec{w}_{t_0*}(t,\ p(t))$（沿轨迹输运的记忆）进行比较。因此，变化率

$$\frac{\vec{w}(t,p(t)) - \vec{w}_{t_0*}(t,p(t))}{t - t_0} = \frac{\text{actual}(t,p(t)) - \text{memory}(t,p(t))}{t - t_0} \quad \text{is meaningful at } (t,p(t)) \tag{4.9}$$

（无需普适性礼物）。该变化率给出 $h \to 0$，即李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ （应力变化率）；我们将在 § 9.3 看到，$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt} - d\vec{v}.\vec{w}$ （ $d\vec{v}$项表明“非均匀流”作用于应力）。

4.1.5 拉回

形式上，拉回就是带有 $(\Phi_t^{t_0})^{-1}$ 的推前：

定义 4.6 向量场 $\vec{w}_t$ 在 Ω_t 上的拉回 $(\Phi_t^{t_0})^*\vec{w}_t$ 是定义在 Ω_{t_0} 上的向量场，其定义为：当 p_{t_0} =$(\Phi_t^{t_0})^{-1}(p_t)$ 时，

$$\vec{w}_t^*(t_0,p_{t_0})=(\Phi_t^{t_0})^*\vec{w}_t(p_{t_0}):=(F_t^{t_0})^{-1}(p_t).\vec{w}_t(p_t),\quad \text{written}\quad \vec{W}^*(P)=F^{-1}(p).\vec{w}(p). \tag{4.10}$$

4.2 基底下的量化

（简单笛卡尔框架。）$(\vec{a}_i)$ 是 $\mathbb{R}^n_{t_0}$ 中的笛卡尔基，$(\vec{b}_i)$ 是 $\mathbb{R}^n_t$ 中的笛卡尔基，o_t 是 $\mathbb{R}^n$ 中位于 t 处的原点，$\Phi_t^{t_0}$ =记作 Φ 假设 C^1，$\varphi_i:\Omega_{t_0}\to\mathbb{R}$ 是其在参考系 $(o_t,(\vec{b}_i))$ 中的分量：

$$\Phi(p_{t_0})=o_t+\sum_{i=1}^n\varphi_i(p_{t_0})\vec{b}_i,\quad \text{i.e.}\quad \overrightarrow{o_t\Phi(p_{t_0})}=\sum_{i=1}^n\varphi_i(p_{t_0})\vec{b}_i. \tag{4.11}$$

因此，采用经典记号 $d\varphi_i(p_{t_0}).\vec{a}_j$ =记作 $\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}(p_{t_0})$，因为 $(\vec{a}_i)$ 是笛卡尔基，而 $(\vec{b}_i)$ 也是笛卡尔基，

$$d\Phi(p_{t_0}).\vec{a}_j=\sum_{i=1}^n(d\varphi_i(p_{t_0}).\vec{a}_j)\vec{b}_i=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}(p_{t_0})\vec{b}_i,\quad \text{thus}\quad [d\Phi(p_{t_0})]_{[\vec{a},\vec{b}]}=[\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}(p_{t_0})]=[F(p_{t_0})]_{[\vec{a},\vec{b}]},$$

$[d\Phi(p_{t_0})]_{[\vec{a}\ \vec{b}]}=[F(p_{t_0})]_{[\vec{a},\vec{b}]}$ 是相对于所选基，Φ 在 p_{t_0} 处的雅可比矩阵。在.....中 ort:

$$d\Phi.\vec{a}_j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}\vec{b}_i,\quad \text{thus}\quad [d\Phi]_{[\vec{a},\vec{b}]}=[\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_j}]=[F]_{[\vec{a},\vec{b}]}=[F_{ij}], \tag{4.12}$$

因此，若 $\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 是 p_{t_0} 处的向量，且$\vec{W}=\sum_{j=1}^nW_j\vec{a}_j$，那么根据微分的线性性，

$$d\Phi.\vec{W}=F.\vec{W}=\sum_{i=1}^nF_{ij}W_j\vec{b}_i,\quad \text{i.e.}\quad [F.\vec{W}]_{|\vec{b}}=[F]_{|\vec{a},\vec{b}}.[\vec{W}]_{|\vec{a}} \tag{4.13}$$

（更确切地说：$F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{W}(p_{t_0})=\sum_{i=1}^nF_{ij}(p_{t_0})W_j(p_{t_0})\vec{b}_i$）。

类似地，对于二阶导数 $d^2\Phi=dF$（当 Φ 为 C^2时）：取$\vec{U}=\sum_{j=1}^nU_j\vec{a}_j$ 和$\vec{W}=\sum_{k=1}^nW_k\vec{a}_k$，并取$(\vec{a}_i)$和$(\vec{b}_i)$作为笛卡尔基，可得

$$dF(\vec{U},\vec{W})=d^2\Phi(\vec{U},\vec{W})=\sum_{i=1}^nd^2\varphi_i(\vec{U},\vec{W})\vec{b}_i=\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial X_j\partial X_k}U_jW_k\vec{b}_i=\sum_{i=1}^n\left([\vec{U}]^T_{|\vec{a}}.[d^2\varphi_i]_{|\vec{a}}.[\vec{W}]_{|\vec{a}}\right)\vec{b}_i, \tag{4.14}$$

$[d^2\varphi_i(p_{t_0})]_{|\vec{a}}=[\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial X_j\partial X_k}(p_{t_0})]_{j=1,\ .....k=1\ \dots\ n}{}_{n}{}_{,\ ,}$ 表示 φ_i 在 p_{t_0} 处相对于基（$\vec{a}_i$）的海森矩阵。

使用 Marsden 对偶记号：

$$\begin{aligned}
&\bullet\ p=\Phi(P)=o_t+\sum_{i=1}^n\varphi^i(P)\vec{e}_i,\quad F^i{}_J(P)=\frac{\partial\varphi^i}{\partial X^J}(P)\quad (=d\varphi^i(P).\vec{E}_J),\\
&\bullet\ F(P).\vec{W}=\sum_{i,J=1}^nF^i{}_J(P)\,W^J\vec{e}_i,\quad [F]=[F^i{}_J]=[d\Phi],\\
&\bullet\ dF(\vec{U},\vec{W})=d^2\Phi(\vec{U},\vec{W})=\sum_{i,J,K=1}^n\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial X^J\partial X^K}U^JW^K\vec{e}_i=\sum_{i=1}^n\left([\vec{U}]^T.[d^2\varphi^i].[\vec{W}]\right)\vec{e}_i.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

注4。7 J，j在求和中使用时是哑变量：例如，$df.\vec{W}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial X^j}W^j=\sum_{J=1}^n\frac{\partial f}{\partial X^J}W^J=\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f}{\partial X^\alpha}W^\alpha=\frac{\partial f}{\partial X^1}W^1+\frac{\partial f}{\partial X^2}W^2+\dots$（1、2.....没有大写形式）。Marsden–Hughes 记法（用大写字母表示过去）并非必须；经典记号同样适用，如果拿不准，甚至更可取（因为它们不会造成误导）。参见 § A。

4.3 不恰当的记号 $d\vec{x} = F.dX$

4.3.1 问题

(4.3)，即 $\vec{w}_*(p) := F(P).\vec{W}(P)$，有时写作

$$d\vec{x} = F.d\vec{X} : \text{“a very unfortunate and misleading notation”} \tag{4.16}$$

这相当于“混淆长度和速率”.....而且你还提到“(4.16) 在$||d\vec{X}|| = 1$时仍然成立”.....然而 $d\vec{X}$ 应该很小.....

4.3.2 这种不恰当的记号从何而来?

记号 (4.16) 来源于一阶泰勒展开 $\Phi(Q) = \Phi(P) + d\Phi_t^{t_0}(P)$。$(Q-P) + o(||Q-P||)$，其中 $P,\ Q \in \Omega_{t_0}$，即，令 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$ 和 $q = \Phi_t^{t_0}(Q)$ 以及 $h = ||Q-P||$,

$$q - p = F(P).(Q-P) + o(h), \quad \text{written} \quad \delta\vec{x} = F.\delta\vec{X} + o(\delta\vec{X}), \tag{4.17}$$

或 $\vec{pq} = F(P).\overrightarrow{PQ} + o(h)$。因此，当 $Q \to P$我们得到 $0 = 0$.....相当没用，不是吗?
而

$$\frac{q-p}{h} = F(P).\frac{Q-P}{h} + o(1) \quad \text{is useful:} \tag{4.18}$$

当 $Q \to P$我们得到 $\vec{w}_* = F(P).\vec{W}$，它将切向量联系起来，见图4.1。详细信息:

4.3.3 解释：向量方法
考虑一条空间曲线 c_{t_0}: $\left\{ \begin{array}{l} [s_1, s_2] \to \Omega \\ s \to P := c_{t_0}(s) \end{array} \right\}^{t_0}$，位于 Ω_{t_0} 中，参见图4.1。它经过 $\Phi_t^{t_0}$ 变形后，成为由 c_t 定义的空间曲线: $= \Phi_t^{t_0} \circ c_{t_0}$: $\left\{ \begin{array}{l} [s_1, s_2] \to \Omega \\ s \to p := c_t(s) = \Phi_t^{t_0}(c_{t_0}(s)) \end{array} \right\}^{t}$。位于 Ω_t 中。因此，

切向量之间的关系:

$$\frac{dc_t}{ds}(s) = d\Phi_t^{t_0}(c_{t_0}(s)).\frac{dc_{t_0}}{ds}(s), , \quad \text{i.e.} \quad \vec{w}_*(p) = F(P).\vec{W}(P) \quad \text{written} \quad \boxed{\frac{d\vec{x}}{ds} = F.\frac{d\vec{X}}{ds}}, \tag{4.19}$$

但是你可以 不 通过 ds 化简，得到 $d\vec{x} = F.d\vec{X}$: 把“斜率 $\frac{d\vec{X}}{ds}(s)$”和“长度 $\delta\vec{X}$”。注意: $||\frac{dc_t}{ds}(s)|| = ||\frac{dX}{ds}(s)|| = 1$在 (4.19) 中有意义: 这意味着曲线 c_{t_0} 在 Ω_{t_0} 中的参数化使用了一个空间参数 s，使得 $||c_{t_0}'(s)|| = 1$ 对所有 s都成立，即图4.1 中的 s.t. $||\vec{W}_P|| = 1$。你 不能 通过 ds化简: $||d\vec{X}|| = 1$ 与“很小” $d\vec{X}$ 一同出现是荒谬的。

4.3.4 解释：微分方法

（4.16）是微分之间的关系.....前提是采用正确的记号；让我们来做这件事: 由（4.11）可得,

$$\vec{x} = \overrightarrow{o_t p} = \overrightarrow{o_t \Phi_t^{t_0}(P)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(P)\vec{b}_i \overset{\text{noted}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i(P)\vec{b}_i, \quad \text{where} \quad \varphi_i \overset{\text{noted}}{=} x_i \quad (\text{function of } P). \tag{4.20}$$

因此，以（π_{ai}）=（dX_i）作为（$\vec{a}_i$）的（协变）对偶基，我们得到以下 n 个方程（函数）:

$$d\Phi = F, \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\varphi_1(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_j}(P)\ dX_j \\ \vdots \\ d\varphi_n(P) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial X_j}(P)\ dX_j \end{array} \right\}, \quad \text{which is noted} \quad d\vec{x} = F.d\vec{X}, \tag{4.21}$$

这一最后的记号常常被误解[2]: 它不过是 $d\Phi = F$（无坐标记号）。

[2]Spivak [17]第 4 章: 经典微分几何学家（以及经典分析学家）毫不犹豫地谈论坐标 x^i 的“无限小”变化 dx^i，正如 Leibnitz 所做的那样。没有人愿意承认这是无意义的，因为当这些无限小量彼此相除时（前提是以正确的方式进行），确实能够得到正确的结果。最终，人们意识到，描述无限小变化所能做到的最接近的方式，是描述该变化据称发生的方向，即一个切向量。由于 df 被认为是在点发生无限小变化时 f 的无限小变化，因此 df 必须是这一变化的函数，这意味着 df 应当是定义在切向量上的函数。于是，dX_i 本身也转变成了函数，并且很明显，它们必须与切向量 $\partial/\partial X_i$ 区分开来。一旦认识到这一点，剩下的就只是制定新的定义，在保留旧记号的同时，等待所有人跟上来。

4.3.5 含糊的记号 $d\vec{x} = F.dX$

这种糟糕的记号 $d\vec{x} = F.dX$ 会导致令人遗憾且容易被误解的记号 $d\vec{x} = F.dX$，接着

$$\dot{d\vec{x}} = L.d\vec{x} \quad \text{where} \quad L = \dot{F}.F^{-1}. \tag{4.22}$$

问题：(4.22) 的含义（以及规范的记法）是什么?

答案： $d\vec{x} = L.d\vec{x}$ 表示

$$\boxed{\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt} = d\vec{v}.\vec{w}_{t_0*}} \quad = \text{evolution rate of tangent vectors along a trajectory} \tag{4.23}$$

参见图4.1。事实上， $\vec{w}_{t_0*}(t, p(t)) =^{(4.8)} F^{t_0}(t, p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$ 给出

$$\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}(t, p(t)) = \frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0}) = \frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t, p_{t_0}).(F_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}.\vec{w}_{t_0*}(t, p(t))), \tag{4.24}$$

即 $\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}(t, p(t)) = d\vec{v}(t, p(t)).\vec{w}_{t_0*}(t, p(t))$，即 (4.23)。特别地， $\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}(t_0, p_{t_0}) = d\vec{v}(t_0, p_{t_0}).\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$ 是切向量在 t_0 处、于 p_{t_0}的演化率。

4.4 张量记号、警告与注释

如前所述，参见（4.6），线性映射 $F := d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 与双点张量 $\widetilde{F} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t, \ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \ \mathbb{R})$ 自然地、典范地相关联，该张量定义如下：对所有 $(\ell, \ \vec{W}) \in \vec{\mathbb{R}}^{n*}_t \times \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$,

$$\widetilde{F}(\ell, \vec{W}) := \ell.F.\vec{W}, \tag{4.25}$$

$\widetilde{F}$的量化： $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中的基（$\vec{a}_i$）及其对偶基（π_{ai}）， $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中的基（$\vec{b}_i$）：

$$\text{if} \quad F.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial X_j}\vec{b}_j \quad \text{then} \quad \widetilde{F} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial X_j}\,\vec{b}_i \otimes \pi_{aj} = \sum_{i=1}^n \vec{b}_i \otimes d\varphi_i. \tag{4.26}$$

类似地,

$$d\widetilde{F} = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial X_j \partial X_k}\,\vec{b}_i \otimes (\pi_{aj} \otimes \pi_{ak}) = \sum_{i=1}^n \vec{b}_i \otimes d^2\varphi_i. \tag{4.27}$$

警告： 张量记号可能会造成误解，尤其是在使用转置记号时，参见备注4.4。因此，一开始应始终使用线性形式 $F \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 的标准记号，即使用 $F.\vec{a}_j = \sum_{j=1}^n F_{ij}\vec{b}_i$ 或 $F.\vec{E}_J = \sum_{i\ ,\ j=1}^n F^i{}_J \vec{e}_i$（Marsden 记号）。只有在最后进行计算时（应用恰当的定义之后），才使用张量记号。

注4.8 在一些手稿中，你会看到记号 $F = d\Phi =$记作 $\Phi \otimes \nabla_X$。它无助于理解 F 是什么（它是微分 $d\Phi$），而且就客观性而言，不应使用：

- 微分不是 张量运算，参见例 R.1，那么为什么要使用张量积记号 $\Phi \otimes \nabla_X$，而标准记号 $d\Phi \simeq \widetilde{F} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes d\varphi^i$ 既合法、明确、客观，又易于运算?
- 而且它可能会被误解，因为在力学中， ∇f 通常被理解为向量 $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i$ （逆变），其定义需要欧几里得点积（是哪一种？）；而微分 df 是协变的（在热力学中，微分不可或缺，因为你不能使用梯度）。
- 它采用了令人困惑的记号 $\Phi \otimes \nabla_X \otimes \nabla_X$，而不是明确、客观且易于运算的合理记号 $d^2\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{b}_i \otimes d^2\varphi_i$： $d^2\Phi(\vec{U}, \vec{W}) = \sum_{i=1}^n d^2\varphi_i(\vec{U}, \vec{W})\,\vec{b}_i$。 ▪

练习 4.9 对 (4.26)-(4.27) 使用 Marsden 对偶记号。

答案。笛卡尔基，其中 (dX^i) 是 $(\vec{E}_i)$ 的（协变）对偶基：由 $F^i{}_J = \frac{\partial \varphi^i}{\partial X^J}$，我们得到 $d\Phi =$记作 $\widetilde{F} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes d\varphi^i = \sum_{i\ ,\ J=1}^n F^i{}_J\,\vec{e}_i \otimes dX^J$，以及 $d^2\Phi = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes d^2\varphi^i = \sum_{i\ ,\ J,\ K=1}^n \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial X^J \partial X^K}\,\vec{e}_i \otimes (dX^J \otimes dX^K)$。 ▪

4.5 在 t 处针对 F 的坐标系变换

令 $p_{t_0}\in\Omega_{t_0}$, $p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})\in\Omega_t$, $\vec{W}(p_{t_0})\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$, $\vec{w}(p_t)=F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{W}(p_{t_0})\in\vec{\mathbb{R}}^n_t$（其推前），简写为 $\vec{w}=F.\vec{W}$。位于 t_0 的观察者在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中使用基 $(\vec{a}_i)$。在 t，于 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中，第一位观察者选取笛卡尔基 $(\vec{b}_{old,i})$，第二位观察者选取笛卡尔基 $(\vec{b}_{new,i})$。令 $P=[P_{ij}]$ 为从 $(\vec{b}_{old,i})$ 到 $(\vec{b}_{new,i})$ 的过渡矩阵，即 $\vec{b}_{new,j}=\sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{b}_{old,i}$ 对所有 j 均成立。从 $(\vec{b}_{old,i})$ 到 $(\vec{b}_{new,i})$（在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中）的向量基变换公式给出

$$[\vec{w}]_{|\vec{b}_{new}}=P^{-1}.[\vec{w}]_{|\vec{b}_{old}},\quad\text{thus}\quad [F.\vec{W}]_{|\vec{b}_{new}}=P^{-1}.[F.\vec{W}]_{|\vec{b}_{old}}. \tag{4.28}$$

Thus

$$[F]_{|\vec{a},\vec{b}_{new}}.[\vec{W}]_{|\vec{a}}=P^{-1}.[F]_{|\vec{a},\vec{b}_{old}}.[\vec{W}]_{|\vec{a}}, \tag{4.29}$$

¯对所有 W 都成立，因此

$$\boxed{[F]_{|\vec{a},\vec{b}_{new}}=P^{-1}.[F]_{|\vec{a},\vec{b}_{old}}}. \tag{4.30}$$

注意：(4.30) 并非针对自同态的基变换公式 $[L]_{|new}=P^{-1}.[L]_{|old}.P$，因为 $F:=F_t^{t_0}(p_{t_0}):\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}\to\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 不是自同态，这样的公式毫无意义；(4.30) 只是向量 $\vec{w}$ 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中通常的基变换公式，参见 (4.28)。

4.6 Φ 和 F 的空间泰勒展开

$\Phi_t^{t_0}$ =注意Φ 对所有 t_0，t 都应为 C^2。令 $P\in\Omega_{t_0}$, $d\Phi=F$，且 $\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 是 P 处的向量。那么，在 Ω_t 中，

$$\Phi(P+h\vec{W})=\Phi(P)+h\,F(P).\vec{W}+\frac{h^2}{2}\,dF(P)(\vec{W},\vec{W})+o(h). \tag{4.31}$$

4.7 F的时间泰勒展开

假设运动 $\widetilde{\Phi}$ 是 C^3。 $t_0\in\mathbb{R}$， Φ^{t_0} 为关联运动， $p(t)=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$ 和$p_{t_0}=\widetilde{\Phi}(t_0,P_{Obj})$，其中 $\vec{v}(t,p_t)=\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t,P_{Obj})$ 为欧拉速度，$\vec{V}^{t_0}(t,p_{t_0}):=\frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})=\vec{v}(t,p_t)$ 为拉格朗日速度，而 $F^{t_0}_{p_{t_0}}(t)=F^{t_0}(t,p_{t_0})=d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$ =记作$F(t)$。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})&=\frac{\partial(d\Phi^{t_0})}{\partial t}(t,p_{t_0})=d(\frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t})(t,p_{t_0})\\&=d\vec{V}^{t_0}(t,p_{t_0})=d\vec{v}(t,p(t)).F(t),\quad\text{in short}\quad\boxed{\dot{F}=d\vec{V}=d\vec{v}.F}.\end{aligned} \tag{4.32}$$

于是 $\frac{\partial^2\Phi^{t_0}}{\partial t^2}(t,\ p_{t_0})=\vec{A}^{t_0}(t,\ p_{t_0})=\vec{\gamma}(t,\ p(t))$（拉格朗日和欧拉加速度），然后 ce

$$\frac{\partial^2F^{t_0}}{\partial t^2}(t,p_{t_0})=d\vec{A}^{t_0}(t,p_{t_0})=d\vec{\gamma}(t,p_t).F(t),\quad\text{in short}\quad\ddot{F}=d\vec{A}=d\vec{\gamma}.F. \tag{4.33}$$

因此， $F^{t_0}_{p_{t_0}}$ =所记的 F 的二阶时间泰勒展开在 t附近为，

$$\begin{aligned}F(t+h)&=F(t)+h\,d\vec{V}(t)+\frac{h^2}{2}\,d\vec{A}(t)+o(h^2)\\&=\Big(I+h\,d\vec{v}+\frac{h^2}{2}\,d\vec{\gamma}\Big)(t,p(t)).F(t)+o(h^2)\quad\text{when}\quad p(t)=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}).\end{aligned} \tag{4.34}$$

注意：涉及三个 时间： t和 $t+h$（照常），以及通过 F得到的 $t_0:=F^{t_0}_{p_{t_0}}$， $\vec{V}:=\vec{V}^{t_0}_{p_{t_0}}$ 和$\vec{A}:=\vec{A}^{t_0}_{p_{t_0}}$（依赖观察者），与式（3.41）相同。

特别地， $F(p_{t_0}):=F^{t_0}_{t_0}(p_{t_0})=I$给出，在 t_0附近，

$$F(t_0+h)=\big(I+h\,d\vec{v}+\frac{h^2}{2}\,d\vec{\gamma}\big)(t_0,p_{t_0})+o(h^2). \tag{4.35}$$

注4。10 $\gamma=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+d\vec{v}.\vec{v}$ 关于 $\vec{v}$不是线性的。同上，

$$d\vec{\gamma}=d(\frac{D\vec{v}}{Dt})=d(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+d\vec{v}.\vec{v})=d\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+d^2\vec{v}.\vec{v}+d\vec{v}.d\vec{v}\quad(=\frac{D(d\vec{v})}{Dt}+d\vec{v}.d\vec{v}) \tag{4.36}$$

i在 $\vec{v}$ 中非线性，并给出 $F^{t_0}_{p_{t_0}}{}''(t)=(d\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+d^2\vec{v}.\vec{v}+d\vec{v}.d\vec{v})(t,\ p_t).F^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$，在 $\vec{v}$ 中非线性。 ∎

练习 4.11 直接验证 $F' = d\vec{v}.F$ 给出 $F'' = d\vec{\gamma}.F$。

答案。 $F'(t) = d\vec{v}(t,p(t)).F(t)$ 给出 $F''(t) = \frac{D}{Dt}(d\vec{v})(t,p(t)).F(t) + d\vec{v}(t,p(t)).F'(t)$，其中 $\frac{D(d\vec{v})}{Dt} = d\vec{\gamma} - d\vec{v}.\vec{v}$），参见 (4.36)，因此 $F''(t) = (d\vec{\gamma} - d\vec{v}.d\vec{v})(t,p(t)).F(t) + d\vec{v}(t,p(t)).d\vec{v}(t,p(t)).F(t) = d\vec{\gamma}(t,p(t)).F(t)$。 ∎

4.8 均匀各向同性材料

设 $P \in \Omega_{t_0}$，设 $F_t^{t_0}(P) := d\Phi_t^{t_0}(P)$；假设“柯西应力向量” $\vec{f}_t(p_t)$ à t 在 $p_t = \Phi_t^{t_0}(P)$ 仅取决于 P，即存在一个函数 fun，使得

$$\vec{f}_t(p_t) = \vec{\text{fun}}(P, F_t^{t_0}(P)). \tag{4.37}$$

定义 4.12 若函数 fun 不依赖于第一个变量 P，则称材料是均匀的；也就是说，对于所有 $P \in \Omega_{t_0}$，

$$\vec{\text{fun}}(P, F_t^{t_0}(P)) = \vec{\text{fun}}(F_t^{t_0}(P)). \tag{4.38}$$

（在任意点都具有相同的力学性质。）

定义 4.13 （各向同性。）考虑一个在所有时间都相同的欧几里得点积。若 $\vec{\text{fun}}$ 与所考虑的方向线性无关，则称材料在 $P \in \Omega_{t_0}$ 处是各向同性的；也就是说，对于任意旋转 $R_{t_0}(P) \vec{\text{in}}\ \mathbb{R}^n_{t_0}$，

$$\vec{\text{fun}}(P, F_t^{t_0}(P) = \vec{\text{fun}}(P, F_t^{t_0}(P).R_{t_0}(P)). \tag{4.39}$$

（先旋转材料时，机械性质保持不变。）

定义 4.14 当且仅当材料既是各向同性的又是均匀的，它才是各向同性均匀的 .

4.9 变形梯度的逆函数

$((\Phi_t^{t_0})^{-1} \circ \Phi_t^{t_0})(P) = P$ 给出，结合 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$，

$$d(\Phi_t^{t_0})^{-1}(p).d\Phi_t^{t_0}(P) = I_{t_0}, \quad \text{thus} \quad d(\Phi_t^{t_0})^{-1}(p) = d\Phi_t^{t_0}(P)^{-1} = F_t^{t_0}(P)^{-1}, \tag{4.40}$$

其中 $F_t^{t_0} = d\Phi_t^{t_0}$ 是变形梯度。因此，我们定义了双点张量

$$H_t^{t_0} := (F_t^{t_0})^{-1} : \begin{cases} \Omega_t & \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}) \\ p & \to \boxed{H_t^{t_0}(p) = (F_t^{t_0})^{-1}(p) := (F_t^{t_0}(P))^{-1}} \quad \text{when} \quad p = \Phi_t^{t_0}(P). \end{cases} \tag{4.41}$$

So

$$H_t^{t_0}(p).\vec{w}(p) = (F_t^{t_0})^{-1}(p).\vec{w}(p) := F_t^{t_0}(P)^{-1}.\vec{w}(p) \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}, \quad \text{in short} \quad H.\vec{w} = F^{-1}.\vec{w}, \tag{4.42}$$

对于所有 $\vec{w}(p) \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$ 位于 p 的向量。这定义了结合 $p_t = \Phi^{t_0}(t,P)$，

$$H^{t_0} : \begin{cases} \mathcal{C} = \bigcup_t (\{t\} \times \Omega_t) & \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}) \\ (t, p_t) & \to H^{t_0}(t, p_t) := H_t^{t_0}(p_t) = (F^{t_0}(t,P))^{-1}. \end{cases} \tag{4.43}$$

注意： H^{t_0} 看起来像欧拉映射，但实际上并不是： H^{t_0} 取决于初始时刻 t_0，并且是一个双点张量（从 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 出发，到达 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$）。不过，在这种情况下，我们仍使用物质时间导数 $\frac{D}{Dt}$ 记号，也就是说，我们沿着轨迹 $t \to p(t)$ 定义 $= \Phi^{t_0}(t, P)$，

$$\frac{DH^{t_0}}{Dt}(t,p(t)) := \frac{\partial H^{t_0}}{\partial t}(t,p(t)) + dH^{t_0}(t,p(t)).\vec{v}(t,p(t)), \quad \text{i.e.} \quad \frac{DH^{t_0}}{Dt} = \frac{\partial H^{t_0}}{\partial t} + dH^{t_0}.\vec{v}, \tag{4.44}$$

它是函数 g 的时间导数 $g'(t)$： $t \to g(t) = H^{t_0}(t, \Phi^{t_0}(t,P))$（即 $g(t) = H^{t_0}(t,p(t))$）。因此，令 $p(t) = \Phi^{t_0}(t,P)$，且 $H^{t_0}(t,p(t)).F^{t_0}(t,P) = I_{t_0}$，记作 $H.F = I$，我们得到

$$\frac{DH}{Dt}.F + H.\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \text{thus} \quad \frac{DH}{Dt} = -H.d\vec{v}, \tag{4.45}$$

因为 $\frac{\partial F}{\partial t}(t,P).F^{-1}(t,p(t)) = d\vec{v}(t,p(t))$ 参见 (4.32)。

练习 4.15 令 $\vec{w}_{t_0*}(t,p(t)) = F^{t_0}(t,P).\vec{W}(P)$，即 $H^{t_0}(t,p(t)).\vec{w}_{t_0*}(t,p(t)) = \vec{W}(P)$，当 $p(t) = \Phi^{t_0}(t,P)$ 时，证明 (4.45)。

答案. $\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt}(t,p(t)) = d\vec{v}(t,p(t)).\vec{w}_{t_0*}(t,p(t))$，参见 (4.23)；并且 $(H^{t_0}.\vec{w}_{t_0*})(t,p(t)) = \vec{W}(P)$ 得出 $\frac{DH^{t_0}}{Dt}.\vec{w}_{t_0*} + H^{t_0}.\frac{D\vec{w}_{t_0*}}{Dt} = 0$；因此 $\frac{DH^{t_0}}{Dt}.\vec{w}_{t_0*} + H^{t_0}.d\vec{v}.\vec{w}_{t_0*} = 0$，从而 $\frac{DH}{Dt} = -H.d\vec{v}$。 ∎

练习 4.16 证明：$H_t^{t_0} = H_{t_1}^{t_0} \circ H_t^{t_1}$且对于所有 t_0, t_1，当$p_{t_1} = \Phi_{t_1}^{t_0}(p_{t_0})$时，$\frac{DH^{t_0}}{Dt}(t,p(t)) = H_{t_1}^{t_0}(p_{t_1}).\frac{DH^{t_1}}{Dt}(t,p(t))$。

答案。我们有 $\Phi_t^{t_0}\ p_{t_0} = \Phi_t^{t_1}\ \Phi_{t_1}^{t_0}\ p_{t_0}$ 5 18 $F_t^{t_0}\ p_{t_0} = F_t^{t_1}\ p_{t_1}.F_{t_1}^{t_0}\ p_{t_0}$ $F_t^{t_0}\ p_{t_0}\ ^{-1} = ( )\ ( ))$, $F_{t_1}^{t_0}\ p_{t_0}\ ^{-1}.F_t^{t_1}\ p_{t_1}\ ^{-1}$ $H_t^{t_0}\ p_t = H_{t_1}^{t_0}\ p_{t_1}\ .H_t^{t_1}\ p\ t$ $H^{t_0}\ t\ p\ t = H_{t_1}^{t_0}\ p_{t_1}\ .H^{t_1}\ t\ p\ t$

参见 (.), 因此 ( ) ( ) ( ), 于是 ( ) ( ) ( ), 即 ( ) ( ) (( )), 因此, (,( )) ( ) (,( )), 因此$\frac{DH^{t_0}}{Dt}(t,p(t)) = H_{t_1}^{t_0}(p_{t_1}).\frac{DH^{t_1}}{Dt}(t,p(t))$。 ∎

5 流

5.1 引言：运动与流

• 运动：运动 $\Phi : (t, \tilde{P_{Obj}}) \to p_t = \Phi(t, \tilde{P_{Obj}})$ 在仿射空间 $\mathbb{R}^n$,~ 中定位粒子 t a P_{Obj}，参见 (1.5)；由此可推导出欧拉速度场 $\vec{v}$：$\vec{v}(t,p_t) := \frac{d\Phi_{P_{Obj}}}{dt}(t,P_{Obj})$，参见 (2.4)。

• 流：流以欧拉速度场 $\vec{v}$为起点，通过求解常微分方程（ODE）$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \vec{v}(t,\Phi(t))$，由此推导出运动。

5.2 定义

设 $\vec{v}: \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to \vec{\mathbb{R}}^n \\ t\ p & \to \vec{v}\ t \end{array} \right.(,)\ (,p) \Big\}$ 是一个非定常向量场（例如，定义域为$\mathcal{C} = \bigcup_{t\in[t_1,t_2]}(\{t\}\times\Omega_t)$的欧拉速度场）。我们寻找映射 $\Phi: \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^n \\ t & \to p = \Phi(t) \end{array} \right\}$，使其在局部（即某个 t_0附近）满足常微分方程（ODE）

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \vec{v}(t,\Phi(t)), \quad \text{also written} \quad \frac{dp}{dt}(t) = \vec{v}(t,p(t)), \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \vec{v}(t,\vec{x}(t)) \tag{5.1}$$

其中，在选定原点后，$\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}p\ t}( )$。也可写作 $\frac{dp}{dt} = \vec{v}(t,p)$或 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t,\vec{x})$。

定义 5.1 （5.1）的一个解 Φ 是 $\vec{v}$的流；由于（5.1）也可写作 $\Phi(t) = \int_{\tau=t_1}^{t} \vec{v}(\tau,\ \Phi(\tau))\ d\tau + \Phi(t_1)$，所以也称为 $\vec{v}$ 的积分曲线。

备注 5.2 （5.1）的不恰当记号：

$$\frac{dp}{dt}(t) \overset{\text{noted}}{=} \frac{dp(t)}{dt} \qquad (= \vec{v}(t,p(t))). \tag{5.2}$$

问题：如果使用记号 $\frac{dp_{(t)}}{dt}$，那么 $\frac{dp_{(f(t))}}{dt}$ 的含义是什么？

答案：它既可能表示 $\frac{dp}{dt}(f(t))$，也可能表示 $\frac{d_{(p\circ f)}}{dt}(t) = \frac{dp}{dt}(f(t))\ \frac{df}{dt}(t)$：含义不明确。因此，最好使用 $\frac{dp}{dt}(t)$，并避免使用 $\frac{dp_{(t)}}{dt}$，除非上下文很清楚（不存在复合函数）。 ∎

5.3 柯西–利普希茨定理

设 $(t_0,\ p_{t_0})$ 位于 $\vec{v}$的定义域中。我们寻找“带初始条件 $(t_0,\ p_{t_0})$ 的常微分方程”的 Φ 解，在 t_0的某个邻域内，即满足

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \vec{v}(t,\Phi(t)) \quad \text{and} \quad \Phi(t_0) = p_{t_0}. \tag{5.3}$$

(Th这对 (t_0,p_{t_0}) 是初始条件，而 t_0 和 p_{t_0} 是初始条件 .)

定义 5.3 设 $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, $t_1 < t_2$。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且 Ω 的闭包为一个正则区域。设 $||.||$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一个范数。连续映射 $\vec{v}:[t_1,t_2]\times\Omega \to \vec{\mathbb{R}}^n$ 是利普希茨连续的，当且仅当它是“关于空间利普希茨连续，且关于时间一致”，也就是说，当且仅当

$$\exists k > 0,\ \forall t\in[t_1,t_2],\ \forall p,q\in\overline{\Omega},\ ||\vec{v}(t,q) - \vec{v}(t,p)|| \le k||q-p||. \tag{5.4}$$

So, $\frac{||\vec{v}_t(q) - \vec{v}_t(\ p)||}{||q-p||} \le k$，对所有 t 以及所有 $p\neq q$ （$\vec{v}$ 的变差在空间中有界，且关于时间一致） .

定理 5.4（及定义）（柯西–利普希茨）。若 $\vec{v}:\ [t_1,t_2]\times\Omega\ \to\ \vec{\mathbb{R}}^n$ 是利普希茨连续的，且（t_0, p_{t_0}）$\in]t_1,\ t_2[\times\Omega$，则存在 $\varepsilon=\varepsilon_{t_0,\ p_{t_0}}>0$ 使得（*5.3*）有唯一的解 $\Phi:\ ]t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon[\to\mathbb{R}^n$, 记作 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$:

$$\frac{d\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}}{dt}(t)=\vec{v}(t,\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t))\quad and\quad \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0)=p_{t_0}. \tag{5.5}$$

此外，如果 $\vec{v}$ 是 C^k，那么 Φ 是 C^{k+1}。

证明。例如参见 Arnold [2], ，或任意一门常微分方程课程。特别地，$||\vec{v}||_\infty:=\sup_{t\in]t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon[,\ p\in\Omega}||\vec{v}(t,\ p)||_{\mathbb{R}^n}$（最大速度）存在，因为 $\vec{v}\in C^0$ 在紧集 $[t_1,t_2]\times\Omega$）上，参见定义 5.3，因此我们可以取$\varepsilon=\min(t_0-t_1,\ t_2-t_0,\ \frac{d(p_{t_0},\ \partial\Omega)}{||\vec{v}||_\infty})$（从 p_{t_0}到达边界 $\partial\Omega$所需的时间）。∎

因此，我们定义了这个函数，它也称为“流”，

$$\Phi:\begin{cases}]t_1,t_2[\times]t_1,t_2[\times\Omega_{t_0}\ \to\Omega\\ \qquad\qquad (t,t_0,p_{t_0})\ \to p=\Phi(t,t_0,p_{t_0}):=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)\overset{\text{noted}}{=}\Phi(t;t_0,p_{t_0}).\end{cases} \tag{5.6}$$

而（5.5）写作

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t;t_0,p_{t_0})=\vec{v}(t,\Phi(t;t_0,p_{t_0})),\quad \text{with}\quad \Phi(t_0;t_0,p_{t_0})=p_{t_0}. \tag{5.7}$$

因此，我们定义了这个函数，它也称为“流”，

$$\Phi^{t_0}:\begin{cases}[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\times\Omega_{t_0}\ \to\mathbb{R}^n\\ \qquad\qquad (t,p_{t_0})\ \to p=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}):=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t):\end{cases} \tag{5.8}$$

而（5.5）写作

$$\frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})=\vec{v}(t,\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})),\quad \text{and}\quad \Phi^{t_0}(t_0,p_{t_0})=p_{t_0}. \tag{5.9}$$

Ot其定义和记号（可能有歧义）：$\Phi_{t;t_0}=\Phi^{t_0}_t$: $\Omega_{t_0}\to\mathbb{R}^n$，而（5.7）写作

$$\frac{d\Phi_{t;t_0}(p_{t_0})}{dt}=\vec{v}(t,\Phi_{t;t_0}(p_{t_0})),\quad \text{and}\quad \Phi_{t_0;t_0}(p_{t_0})=p_{t_0}. \tag{5.10}$$

定理 5.5 设 $\vec{v}$ 为利普希茨连续，设 $t_0\in]t_1,t_2[$，，并设 Ω_{t_0} 为开集，使得 $\Omega_{t_0}\subset\subset\Omega$（即存在一个紧集 $K\in\mathbb{R}^n$，使得 $\Omega_{t_0}\subset K\subset\Omega$）。那么存在 $\varepsilon>0$，使得流 Φ^{t_0} 存在于$]t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon[\times\Omega_{t_0}$上。

证明。设 $d=d(K,\mathbb{R}^n-\Omega)$（$K$ 到 Ω 边界的距离。

令 $||\vec{v}||_\infty:=$上确界$||\vec{v}(t,p)||_{\mathbb{R}^n}$（存在，因为 $\vec{v}\in C^0$ 在紧集 $[t_1,t_2]\times\Omega$）。$\overline{t\in[t_1,t_2],p\in\Omega}$

令 $\varepsilon=\min(t_0-t_1,\ t_2-t_0,\ \frac{d}{||\vec{v}||_\infty})$（小于从 K 以最大速度 $||v||_\infty$到达边界所需的最短时间）。

令 $p_{t_0}\in K$和 $t\in]t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon[$。于是 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$存在，参见定理 5.4，并且$||\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)-\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0)||_{\mathbb{R}^n}\le[t-t_0|\sup_{\tau\in]t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon[}(||(\Phi^{t_0}_{p_{t_0}})'(\tau)||_{\mathbb{R}^n})$（由中值定理，因为 $\vec{v}$是 C^0，Φ 是 C^1）。因此 $||\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)-\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0)||_{\mathbb{R}^n}\le[t-t_0|\,||v||_\infty,$，从而 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$ 属于 Ω。因此，对所有 $p_{t_0}\in K$，$\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$在 $]t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon[$上存在。∎

注 5.6 流的定义始于欧拉速度（与任何初始时刻无关），随后由于引入初始条件，便得到拉格朗日函数 Φ^{t_0}，参见 (5.8)。再次说明，拉格朗日函数是欧拉函数的结果。∎

5.4 示例

例 1 $\mathbb{R}^2$ 设有一个原点 $\mathcal{O}$、一个欧几里得基 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$，以及 $\Omega = [0,2]\times[0,1]$（观测窗口）。设 $p \in \mathbb{R}^2$，$\overrightarrow{\mathcal{O}p}$ =记为 $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ =记为 (x,y)。设 $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, $t_0 \in]t_1, t_2[$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, 以及

$$\vec{v}(t,p) = \begin{cases} v^1(t,x,y) = ay, \\ v^2(t,x,y) = b\sin(t-t_0). \end{cases} \tag{5.11}$$

（$b = 0$ 对应于定常情形 = 剪切流。） $\vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) \quad (t) \quad) = \overrightarrow{\mathcal{O}\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}\ t}$ ( )

以及（5.9）给出

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = v^1(t, x(t), y(t)) = ay(t), \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = v^2(t, x(t), y(t)) = b\sin(t-t_0), \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Thus

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}p(t)} = \overrightarrow{\mathcal{O}\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)} = \begin{pmatrix} x(t) = x_0 + a(y_0+b)(t-t_0) - ab\sin(t-t_0) \\ y(t) = y_0 + b - b\cos(t-t_0) \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

示例 2 类似的框架。设 $\omega > 0$ 并考虑（旋转向量场）

$$\vec{v}(t,x,y) = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{noted}}{=} \vec{v}(x,y). \tag{5.14}$$

取 $\overrightarrow{\mathcal{O}p_{t_0}} = \vec{x}_{t_0} = \begin{pmatrix} x_{t_0} \\ y_{t_0} \end{pmatrix}$、$r_{t_0} = \sqrt{x^2_{t_0} + y^2_{t_0}}$ 和 θ_0，满足 $\vec{x}_{t_0} = \begin{pmatrix} x_{t_0} = r_{t_0}\cos(\omega t_0) \\ y_{t_0} = r_{t_0}\sin(\omega t_0) \end{pmatrix}$，则（5.9）的解 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$ 为

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathcal{O}p(t)} = \overrightarrow{\mathcal{O}\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)} = \begin{pmatrix} x(t) = r_{t_0}\cos(\omega t) \\ y(t) = r_{t_0}\sin(\omega t) \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

事实上，$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t}(t, \vec{x}_0) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(t, \vec{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^2(t, x(t, \vec{x}_0)\ y(t, \vec{x}_0)) \\ (t, x(t, \vec{x}_0)\ y(t, \vec{x}_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \end{pmatrix}(t, \vec{x}_0)\ (t, \vec{x}_0)$，因此 $\frac{\partial x}{\partial t}(t, \vec{x}_0) = -\omega y(t, \vec{x}_0)$ 且 $\frac{\partial y}{\partial t}(t, \vec{x}_0) = \omega x(t, \vec{x}_0)$，因此 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, \vec{x}_0) = -\omega^2 y(t, \vec{x}_0)$，故 y; x 同上。这里 $d\vec{v}(t,x,y) = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ $\sin\frac{\pi}{2}\cos$ 是 $\pi/2$ 旋转与比例为 ω 的位似变换的复合。

5.5 流的复合

设 $\vec{v}$ 是 $\mathbb{R}\times\Omega$ 上的一个向量场，且 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$ 是（5.5）的解。我们使用以下记号

$$p_t = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0}) = \Phi_{t;t_0}(p_{t_0}) := \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t) = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) = \Phi(t; t_0, p_{t_0}) = \Phi_{t_0,p_{t_0}}(t). \tag{5.16}$$

5.5.1 流的复合律（确定性）

命题 5.7 对于所有 t_0、t_1、$t_2 \in \mathbb{R}$，我们有（确定性）

$$\Phi^{t_1}_{t_2} \circ \Phi^{t_0}_{t_1} = \Phi^{t_0}_{t_2}, \quad i.e. \quad \Phi_{t_2;t_1} \circ \Phi_{t_1;t_0} = \Phi_{t_2;t_0}. \tag{5.17}$$

（“照片的复合给出影片”。）因此，

$$p_{t_2} = \Phi^{t_1}_{t_2}(p_{t_1}) = \Phi^{t_0}_{t_2}(p_{t_0}) \quad when \quad p_{t_1} = \Phi^{t_0}_{t_1}(p_{t_0}), \tag{5.18}$$

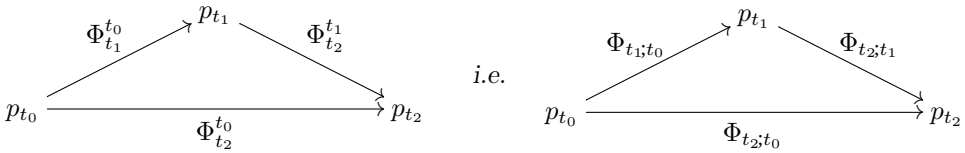
即，

$$p_{t_2} = \Phi_{t_2;t_1}(p_{t_1}) = \Phi_{t_2;t_0}(p_{t_0}) \quad when \quad p_{t_1} = \Phi_{t_1;t_0}(p_{t_0}). \tag{5.19}$$

Thus

$$d\Phi^{t_1}_{t_2}(p_{t_1}).d\Phi^{t_0}_{t_1}(p_{t_0}) = d\Phi^{t_0}_{t_2}(p_{t_0}), \quad i.e. \quad d\Phi_{t_2;t_1}(p_{t_1}).d\Phi_{t_1;t_0}(p_{t_0}) = d\Phi_{t_2;t_0}(p_{t_0}). \tag{5.20}$$

带交换图的总结：



证明。令 $p_{t_1}=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_1)$。（5.9）给出

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}}{dt}(t)=\vec{v}(t,\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)),\\ \dfrac{d\Phi^{t_1}_{p_{t_1}}}{dt}(t)=\vec{v}(t,\Phi^{t_1}_{p_{t_1}}(t)),\end{array}\right\}\quad \text{with}\quad p_{t_1}=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_1)=\Phi^{t_1}_{p_{t_1}}(t_1).$$

因此，$\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}$ 和 $\Phi^{t_1}_{p_{t_1}}$ 满足相同的常微分方程，且在 t_1处取值相同；因此它们相等（根据柯西–利普希茨定理，解具有唯一性），所以当 $p_{t_1}=\Phi^{t_0}_{t_1}(p_{t_0})$ 时，$\Phi^{t_1}_{p_{t_1}}(t)=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$；也就是说，当 $p_{t_1}=\Phi^{t_0}_{t_1}(p_{t_0})$ 时，$\Phi^{t_1}_{t}(p_{t_1})=\Phi^{t_0}_{t}(p_{t_0})$，这对任意 $t=t_2$ 都是 (5.17)。因此 (5.20) 成立。∎

推论 5.8 流与物体 *Obj* 的运动 $\widetilde{\Phi}$ 相容：*(3.6)* 给出 $\Phi^{t_1}_{t_2}\circ\Phi^{t_0}_{t_1}=(\widetilde{\Phi}_{t_2}\circ(\widetilde{\Phi}_{t_1})^{-1})\circ(\widetilde{\Phi}_{t_1}\circ(\widetilde{\Phi}_{t_0})^{-1})=\widetilde{\Phi}_{t_2}\circ(\widetilde{\Phi}_{t_0})^{-1}=\Phi^{t_0}_{t_2}$，即 *(5.17)*。

5.5.2 平稳情形

定义 5.9 $\vec{v}$ 是平稳向量场，当且仅当 $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$；于是 $\vec{v}(t,\ p)=$记作$\vec{v}(p)$。相应的流 Φ^{t_0} 满足

$$\frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})=\vec{v}(p_t)\quad\text{when}\quad p_t=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}),\tag{5.21}$$

称为定常。

命题 5.10 如果 $\vec{v}$ 是平稳向量场，那么，对于所有 t_0、t_1、h，在有意义的情况下（h 足够小。h 和 t_1 关闭 e 足够 t_0），

$$\Phi^{t_1}_{t_1+h}=\Phi^{t_0}_{t_0+h},\quad i.e.\quad \Phi_{t_1+h;t_1}=\Phi_{t_0+h;t_0},\tag{5.22}$$

即 $\Phi^{t_1}_{t_1+h}(q)=\Phi^{t_0}_{t_0+h}(q)$，即 $\Phi(t_1+h;t_1,q)=\Phi(t_0+h;t_0,q)$ 对所有 $q\in\Omega_{t_0}$ 均成立（见定理 *5.5*）。换言之，

$$\Phi^{t_0+h}_{t_1+h}=\Phi^{t_0}_{t_1},\quad i.e.\quad \Phi_{t_1+h;t_0+h}=\Phi_{t_1;t_0},\tag{5.23}$$

即 $\Phi^{t_0+h}_{t_1+h}(q)=\Phi^{t_0}_{t_1}(q)$，即 $\Phi(t_1+h;t_0+h,q)=\Phi(t_1;t_0,q)$ 对所有 $q\in\Omega_{t_0}$ 均成立。

证明。令 $q\in\Omega_{t_0}$，$\alpha(h)=\Phi^{t_0}_{t_0+h}(q)=\Phi^{t_0}_{q}(t_0+h)$ 和 $\beta(h)=\Phi^{t_1}_{t_1+h}(q)=\Phi^{t_1}_{q}(t_1+h)$。

因此 $\alpha'(h)=\frac{d\Phi^{t}_{q}(t_0+h)}{dt}=\vec{v}(t_0+h,\ \Phi^{t_0}_{q}(t_0+h))=\vec{v}(\Phi^{t_0}_{q}(t_0+h))=\vec{v}(\alpha(h))$（平稳流），以及$\beta'(h)=\frac{d\Phi^{t_1}_{q}}{dt}(t_1+h)=\vec{v}(t_1+h,\ \Phi^{t_1}_{q}(t_1+h))=\vec{v}(\Phi^{t_1}_{q}(t_1+h))=\vec{v}(\beta(h))$（平稳流）。

因此 α 和 β 满足相同的常微分方程，且初始条件相同：$\alpha(0)=\beta(0)=q$。因此 $\alpha=\beta$。由此得到（5.22）。因此，取 $h=t_1-t_0$，即取 $t_1=t_0+h$ 和 $t_0+h=t_1$，可得（5.23）。∎

推论 5.11 若 $\vec{v}$ 是平稳向量场，参见 *(5.21)*，则

$$d\Phi^{t_0}_{t}(p_{t_0}).\vec{v}(p_{t_0})=\vec{v}(p_t)\quad when\quad p_t=\Phi^{t_0}_{t}(p_{t_0}),\tag{5.24}$$

也就是说，若 $\vec{v}$ 是定常的，则 $\vec{v}$ 沿自身输运（由 $\Phi^{t_0}_{t}$推前）。

证明。由 (5.18)，$t_2=t_1+s$ 和 $t_1=t_0+s$ 给出 $\Phi^{t_0+s}_{t_1+s}(\Phi^{t_0}_{t_0+s}(p_{t_0}))=\Phi^{t_0}_{t_1+s}(p_{t_0})$，且 $\vec{v}$ 是定常的，因此 $\Phi^{t_0}_{t_1}(\Phi^{t_0}_{t_0+s}(p_{t_0}))=\Phi^{t_0}_{t_1+s}(p_{t_0})$，即 $\Phi(t_1;t_0,\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_0+s))=\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_1+s)$，因此（$s$ 导数）

$$d\Phi(t_1;t_0,\Phi(t_0+s;t_0,p_{t_0})).\Phi_{t_0,p_{t_0}}{}'(t_0+s)=\Phi_{t_0,p_{t_0}}{}'(t_1+s),$$

因此 $d\Phi^{t_0}_{t_1}(\Phi(t_0+s;t_0,p_{t_0})).\vec{v}(t_0+s,\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_0+s))=\vec{v}(t_1+s,\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_1+s))$。因此，当 $s=0$ 且 $\vec{v}$为定常时，$d\Phi^{t_0}_{t_1}(\Phi(t_0;t_0,p_{t_0})).\vec{v}(\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_0))=\vec{v}(\Phi_{t_0,p_{t_0}}(t_1))$，于是得到（5.24）。∎

5.6 沿相反方向行进的轨迹上的速度

设 $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$、$t_1 > t_0$ 和 $p_{t_0} \in \mathbb{R}^n$。考虑轨迹 $\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}: \left\{ \begin{array}{ll} [t_0,t_1] & \to \mathbb{R}^n \\ t & \to p\ t \end{array} \right\}() = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$。因此，$p_{t_0}$是轨迹的起点，$p_{t_1} = \Phi^{t_0}_{t_1}(p_{t_0})$ 是终点，$\vec{v}(t,p(t)) = \frac{d\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}}{dt}(t)$ 是速度。定义沿相反方向行进的轨迹，即定义

$$\Psi^{t_1}_{p_{t_1}}: \left\{ \begin{array}{ll} [t_0,t_1] & \to \mathbb{R}^n \\ u & \to q(u) = \Psi^{t_1}_{p_{t_1}}(u) := \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0+t_1-u) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t) = p(t) \quad \text{when} \quad t = t_0+t_1-u. \end{array} \right. \tag{5.25}$$

特别是 $q(t_0) = \Psi^{t_1}_{p_{t_1}}(t_0) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_1) = p(t_1)$ 和 $q(t_1) = \Psi^{t_1}_{p_{t_1}}(t_1) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0) = p(t_0)$.

命题 5.12 沿相反方向行进的轨迹上的速度，是初始轨迹上速度的相反数：

$$\frac{d\Psi^{t_1}_{p_{t_1}}}{du}(u) = q'(u) = -p'(t) = -\vec{v}(t,p(t)) \quad when \quad t = t_0+t_1-u, \tag{5.26}$$

证明。 $\Psi^{t_1}_{p_{t_1}}(u) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0+t_1-u)$ 给出 $\frac{d\Psi^{t_1}_{p_{t_1}}}{du}(u) = -\frac{d\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}}{dt}(t_0+t_1-u) = -\vec{v}(t_0+t_1-u,\ \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t_0+t_1-u)) = -\vec{v}(t,\ \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t))$ 当 $t = t_0+t_1-u$。 ∎

5.7 流关于初始时刻的变分

5.7.1 含糊与无歧义的记号

设 $\Phi: (t,u,p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \Phi(t,u,p) \in \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 函数。偏导数为

$$\partial_1\Phi(t,u,p) := \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(t+h,u,p)-\Phi(t,u,p)}{h}, \tag{5.27}$$

$$\partial_2\Phi(t,u,p) := \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(t,u+h,p)-\Phi(t,u,p)}{h}, \tag{5.28}$$

以及 $\partial_3\Phi(t,u,p)$，对所有 $\vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ (在 p处的向量) 定义如下：

$$\partial_3\Phi(t,u,p).\vec{w} := \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(t,u,p+h\vec{w})-\Phi(t,u,p)}{h} \overset{\text{noted}}{=} d\Phi(t,u,p).\vec{w}, \tag{5.29}$$

当第一个变量的名称始终记作 t 时，

$$\partial_1\Phi(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi(t,u,p)}{\partial t}. \tag{5.30}$$

注意：这种记号可能含糊：$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t;t,p)$ 表示什么？遇到含糊情况时，请使用记号 $\partial_1\Phi$；或者（若内部没有复合函数）使用 $\frac{\partial\Phi_{(t,u,p)}}{\partial t}\Big|_{u=t}$（因此 t 是求导变量，计算后再取 $u=t$）。

当第二个变量的名称始终记作 u 时，

$$\partial_2\Phi(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial u}(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi(t,u,p)}{\partial u}. \tag{5.31}$$

注意：同上，这种记号可能存在歧义：$\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u;u,\ p)$ 表示什么？遇到有歧义的情况时，请使用记号 $\partial_2\Phi$，或者使用 $\frac{\partial\Phi_{(t,\ u,\ p)}}{\partial u}\Big|_{t=u}$。

当第三个变量的名称系统地表示为一个空间变量 p 时，

$$\partial_3\Phi(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} d\Phi(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi}{\partial p}(t,u,p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial\Phi(t,u,p)}{\partial p}. \tag{5.32}$$

5.7.2 流关于初始时刻的变分

流的合成律给出 (5.19)，即 $\Phi(t;\ u,\ \Phi(u;\ t_0,\ p_0))\ =\Phi(t;\ t_0,\ p_0)$。因此，$u$ 中的导数为

$$\begin{aligned} &\partial_2\Phi(t;u,\Phi(u;t_0,p_0))+d\Phi(t;u,\Phi(u;t_0,p_0)).\partial_1\Phi(u;t_0,p_0)=0,\\ \text{i.e.}\quad &\partial_2\Phi(t;u,p(u))=-d\Phi(t;u,p(u)).\vec{v}(u,p(u))\quad \text{when}\quad p(u)=\Phi(u;t_0,p_0). \end{aligned} \tag{5.33}$$

特别地，$u=t_0$ 对于所有 $(t,\ t_0,\ p_0)\ \in\mathbb{R}^2\times\Omega_{t_0}$,

$$(\frac{\partial\Phi(t;t_0,p_0)}{\partial t_0}=)\quad \partial_2\Phi(t;t_0,p_0)=-d\Phi(t;t_0,p_0).\vec{v}(t_0,p_0). \tag{5.34}$$

特别是

$$(\frac{d\Phi(t;t_0,p_0)}{dt_0}_{|t=t_0}=)\quad \partial_2\Phi(t_0;t_0,p_0)=-\vec{v}(t_0,p_0). \tag{5.35}$$

第二部分

推前

6 推前

描述“输运”的一般工具是“由运动推前”（即“随身携带”算子），参见§ 4.1和图4.1。推前也提供了理解速度加法公式所需的工具：在这种情况下，推前是观察者之间的平移算子。推前也可用于书写坐标系。与往常一样，我们先给出定性结果（与观察者无关的结果）；然后推导定量结果。

6.1 定义

$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是仿射空间， E 和 F 是配备范数 $||.||_E$ 和 $||.||_F$的关联向量空间，且 $\dim\ E = \dim F = n$； $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$是仿射空间 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{F}$中的开集，或者也可能是向量空间 E 和 F中的开集，并且

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{U}_\mathcal{E} & \to \mathcal{U}_\mathcal{F} \\ p_\mathcal{E} & \to p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E}) \quad \text{is a diffeomorphism} \end{cases} \tag{6.1}$$

（一个 C^1 可逆映射，其逆函数为 C^1），称为推前，而 Ψ^{-1} 是拉回（带有 Ψ^{-1}的推前）。

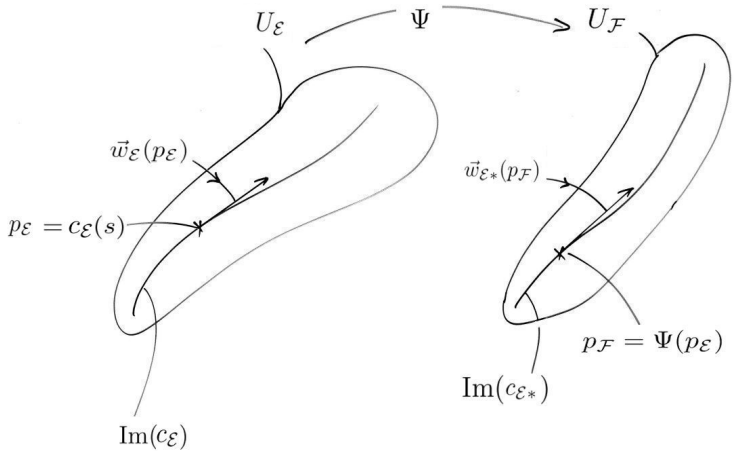


图6.1： $c_\mathcal{E}$： $s \to p_\mathcal{E} = c_\mathcal{E}(s)$ 是 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 中的一条曲线。经 Ψ 推前后，它成为 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 中的曲线 $c_{\mathcal{E}*} := \Psi \circ c_\mathcal{E}$。 $p_\mathcal{E} = c_\mathcal{E}(s)$ 处的切向量为 $\vec{w}_\mathcal{E}(p_\mathcal{E}) = c_\mathcal{E}'(s)$，而 $p_\mathcal{F} = c_\mathcal{F}(s) = \Psi(c_\mathcal{E}(s))$ 处的切向量为 $\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_\mathcal{F}) = c_\mathcal{F}'(s) = d\Psi(p_\mathcal{E}).\vec{w}_\mathcal{E}(p_\mathcal{E})$。其他示意图：见图4.1。

例： $\Psi = \Phi_t^{t_0}$: $\Omega_{t_0} \to \Omega_t$，将 Ω_{t_0} 变换为 Ω_t 的运动，参见 (3.5)。例： Ψ： $U_E \to U_F$ 一个坐标系，见例6.11。例： $\Psi = \Theta_t$： $\mathcal{R}_B \to \mathcal{R}_A$，在 t 处的参考系变换（观察者变换），见 § 10。

6.2 点的推前与拉回

定义 6.1 若 $p_\mathcal{E} \in \mathcal{U}_\mathcal{E}$ （ $\mathcal{U}_\mathcal{E}$中的一个点），则其在 Ψ 下的推前为该点

$$p_\mathcal{F} = \boxed{\Psi_* p_\mathcal{E} := \Psi(p_\mathcal{E})} = p_{\mathcal{E}*} \in \mathcal{U}_\mathcal{F}, \tag{6.2}$$

见图 6.1；若 Ψ 是隐含的，则最后一个记号如此。若 $p_\mathcal{F} \in \mathcal{U}_\mathcal{F}$，则其在 Ψ 下的拉回为该点

$$p_\mathcal{E} = \boxed{\Psi^* p_\mathcal{F} := \Psi^{-1}(p_\mathcal{F})} = p_\mathcal{F}{}^* \in \mathcal{U}_\mathcal{E}. \tag{6.3}$$

我们立即得到 $\Psi^* \circ \Psi_* = I$。

推前和拉回的记号 $_*$ 与 * 由 Spivak 提出；另请参阅 Abraham and Marsden [1] （第二版），他们采用了这一记号。

6.3 曲线的推前与拉回

我们对曲线上的点进行推前（和拉回）：

定义 6.2 设 $c_{\mathcal{E}}:\left\{\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to \mathcal{U}_{\mathcal{E}}\\ s\ \to p_{\mathcal{E}}=c_{\mathcal{E}}(s)\end{array}\right\}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 中的一条曲线。它经 Ψ 推前后所得的曲线为

$$\Psi_* c_{\mathcal{E}}:=\Psi\circ c_{\mathcal{E}}:\left\{\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to \mathcal{U}_{\mathcal{F}}\\ \qquad s\ \to p_{\mathcal{F}}=\Psi_* c_{\mathcal{E}}(s):=\Psi(c_{\mathcal{E}}(s))\overset{\text{noted}}{=}c_{\mathcal{E}*}(s)\quad(=\Psi(p_{\mathcal{E}})),\end{array}\right. \tag{6.4}$$

见图 6.1。（$\Psi_* c_{\mathcal{E}}$ =记作$c_{\mathcal{E}*}$，当 Ψ 是隐式时。）这定义了

$$\Psi_*:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{F}(]-\varepsilon,\varepsilon[;\mathcal{U}_{\mathcal{E}})\ \to \mathcal{F}(]-\varepsilon,\varepsilon[;\mathcal{U}_{\mathcal{F}})\\ \to \mathcal{U}_{\mathcal{F}}\qquad\qquad c_{\mathcal{E}}\end{array}\right\}\to \Psi_*(c_{\mathcal{E}}):=\Psi\circ c_{\mathcal{E}}\overset{\text{noted}}{=}\Psi_* c_{\mathcal{E}}=c_{\mathcal{E}*}. \tag{6.5}$$

定义 6.3 设 $c_{\mathcal{F}}:\left\{\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to \mathcal{U}_{\mathcal{F}}\\ s\ \to p_{\mathcal{F}}=c_{\mathcal{F}}(s)\end{array}\right\}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ 中的一条曲线。它经 Ψ 拉回后为

$$\Psi^* c_{\mathcal{F}}:=\Psi^{-1}\circ c_{\mathcal{E}}\left\{\begin{array}{l}]-\varepsilon,\varepsilon[\ \to \mathcal{U}_{\mathcal{E}}\\ \qquad s\ \to p_{\mathcal{E}}=\Psi^* c_{\mathcal{F}}(s):=\Psi^{-1}(c_{\mathcal{F}}(s))\overset{\text{noted}}{=}c_{\mathcal{F}}{}^*(s)\quad(=\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}})).\end{array}\right. \tag{6.6}$$

由此我们定义了

$$\Psi^*:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{F}(C^1(]-\varepsilon,\varepsilon[;\mathcal{U}_{\mathcal{F}})\ \to \mathcal{F}(C^1(]-\varepsilon,\varepsilon[;\mathcal{U}_{\mathcal{E}})\\ \qquad\qquad\qquad c_{\mathcal{F}}\ \to \Psi^*(c_{\mathcal{F}}):=\Psi^{-1}\circ c_{\mathcal{F}}\overset{\text{noted}}{=}\Psi^* c_{\mathcal{F}}=c_{\mathcal{F}}{}^*.\end{array}\right. \tag{6.7}$$

6.4 标量函数的推前与拉回

6.4.1 定义

定义 6.4 设 $f_{\mathcal{E}}:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{U}_{\mathcal{E}}\ \to \mathbb{R}\\ p_{\mathcal{E}}\ \to f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\end{array}\right\}$ (标量值函数)。由 Ψ 推前得到的（标量值）函数为

$$\Psi_* f_{\mathcal{E}}:=f_{\mathcal{E}}\circ\Psi^{-1}:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{U}_{\mathcal{F}}\ \to \mathbb{R}\\ p_{\mathcal{F}}\ \to \Psi_* f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}):=f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\overset{\text{noted}}{=}f_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{E}}=\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}),\end{array}\right. \tag{6.8}$$

（当 Ψ 是隐含的时，记为 $f_{\mathcal{E}*}$），即 $\Psi_* f_{\mathcal{E}}(\Psi_* p_{\mathcal{E}}):=f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$，或者当 $p_{\mathcal{E}*}=\Psi(p_{\mathcal{E}})$ 时，$f_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{E}*}):=f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$。因此，我们定义了

$$\Psi_*:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{E}};\mathbb{R})\ \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}};\mathbb{R})\\ \qquad f_{\mathcal{E}}\ \to f_{\mathcal{F}}:=\Psi_*(f_{\mathcal{E}})=f_{\mathcal{E}}\circ\Psi^{-1}\overset{\text{noted}}{=}\Psi_* f_{\mathcal{E}},\end{array}\right. \tag{6.9}$$

记号 $\Psi_*(f_{\mathcal{E}})=\Psi_* f_{\mathcal{E}}$，因为 Ψ_*是线性的：$((f_{\mathcal{E}}+\lambda g_{\mathcal{E}})\circ\Psi^{-1})(p_{\mathcal{F}})=(f_{\mathcal{E}}+\lambda g_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{E}})=f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})+\lambda g_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})=(f_{\mathcal{E}}\circ\Psi^{-1})(p_{\mathcal{F}})+\lambda(g_{\mathcal{E}}\circ\Psi^{-1})(p_{\mathcal{F}})$，得出 $\Psi_*(f_{\mathcal{E}}+\lambda g_{\mathcal{E}})=\Psi_*(f_{\mathcal{E}})+\lambda\Psi_*(g_{\mathcal{E}})$。

定义 6.5 设 $f_{\mathcal{F}}:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{U}_{\mathcal{F}}\ \to \mathbb{R}\\ p_{\mathcal{F}}\ \to f_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})\end{array}\right\}$。它在 Ψ 下的拉回是 Ψ^{-1}下的推前，即

$$\Psi^* f_{\mathcal{F}}:=f_{\mathcal{F}}\circ\Psi:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{U}_{\mathcal{E}}\ \to \mathbb{R}\\ p_{\mathcal{E}}\ \to \Psi^* f_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{E}}):=f_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})\overset{\text{noted}}{=}f_{\mathcal{F}}{}^*(p_{\mathcal{E}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}),\end{array}\right. \tag{6.10}$$

也就是说，$\Psi^* f_{\mathcal{F}}(\Psi^* p_{\mathcal{F}}):=f_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})$，即当 $p_{\mathcal{F}}=\Psi^*(p_{\mathcal{F}})$ 时，$f_{\mathcal{F}}{}^*(p_{\mathcal{F}}{}^*):=f_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})$。由此我们定义了

$$\Psi^*:\left\{\begin{array}{l}\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}};\mathbb{R})\ \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{E}};\mathbb{R})\\ \qquad f_{\mathcal{F}}\ \to \Psi^*(f_{\mathcal{F}})=f_{\mathcal{F}}{}^*:=f_{\mathcal{F}}\circ\Psi\overset{\text{noted}}{=}\Psi^* f_{\mathcal{F}}.\end{array}\right. \tag{6.11}$$

我们立即得到 $\Psi^*\circ\Psi_*=I$和 $\Psi_*\circ\Psi^*=I$（第一个 I是 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{E}};\mathbb{R})$ 中的恒等映射，第二个 I是 $\mathcal{F}(\mathcal{U}_{\mathcal{F}};\mathbb{R})$ 中的恒等映射）。

注意：推前和点的拉回使用了相同的记号 Ψ_* 和 Ψ^*：上下文会消除歧义。

6.4.2 解释：这有什么用?

例如：设 $\Phi:\mathbb{R}\times\text{Obj}\to\mathbb{R}^n$ 是物体 Obj 的一种运动。观察者记录所有 $t\in[t_0,T]$ 和所有 $p=\widetilde{\Phi}(t,\text{Obj})$处的温度 θ：他得到 θ: $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{C}=\bigcup_t(\{t\}\times\Omega_t)\\ \quad\to\mathbb{R}\\ (t,p)\\ \quad\to\theta(t,p)\end{array}\right\}$ 一个欧拉标量函数，参见 (2.2)。

然后他选择一个初始时刻 t_0，并考虑关联运动 Φ^{t_0}，参见 (3.1)，再考虑 θ_{t_0}: $\left\{\begin{array}{l}\Omega_{t_0}\\ \quad\to\mathbb{R}\\ p_{t_0}\\ \quad\to\theta_{t_0}(p_{t_0}):=\theta(t_0,p_{t_0})\end{array}\right\}$（$t_0$ 时刻 Ω_{t_0}中的温度瞬时快照）。θ_{t_0} 通过 $\Phi_t^{t_0}$的推前为 $(\Phi_t^{t_0})_*\theta_{t_0}:=\theta_{t_0}\circ(\Phi_t^{t_0})^{-1}$，这定义了“记忆函数”

$$(\Phi_t^{t_0})_*\theta_{t_0}:\left\{\begin{array}{l}\Omega_t\\ \quad\to\mathbb{R}\\ p_t\\ \quad\to(\Phi_t^{t_0})_*\theta_{t_0}(p_t):=\theta_{t_0}(p_{t_0})\quad\text{when}\quad p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}),\end{array}\right. \tag{6.12}$$

他写下 $(\Phi_t^{t_0})_*\theta_{t_0}(p_t)$ =记下了 $\theta_{t_0*}(t,\ p_t)$，因此，传递的记忆位于 t 在 p_t （沿着一条轨迹）处，由

$$\theta_{t_0*}(t,p(t))=\theta_{t_0}(p_{t_0}). \tag{6.13}$$

问题： 既然我们有 θ_{t_0}，为什么还要引入 θ_{t_0*}？

答案： 观察者并不具备时间和／或空间上无处不在的能力；他只能处理自己身处的实际时间 t 和位置 p_t 处的值（牛顿和爱因斯坦的观点）。因此，当他在 t_0 于 p_{t_0} 时，观察者把值 $\theta_{t_0}(p_{t_0})$ 写在一张纸上（以便记忆），将纸放进口袋；之后，当他到达 t 于 p（t）时 $=\Phi^{t_0}(t,\ p_{t_0})$，他从口袋里拿出纸，并将读到的值重新记为 $\theta_{t_0*}(t,\ p_t)$，因为他现在位于 t 于 p_t。而现在，在 t 于 p_t，他可以比较过去和现在的值。特别是，变化率

$$\frac{\theta(t,p(t))-\theta_{t_0*}(t,p(t))}{t-t_0}=\frac{\text{actual}(t,p(t))-\text{memory}_*(t,p(t))}{t-t_0} \tag{6.14}$$

对观察者而言在物理上有意义 t 在 p_t （不需要普适性礼物）。对于实值函数，我们得到通常的变化率 $\frac{\theta(t,\ p(t))-\theta(t_0,\ p(t_0))}{t-t_0}$，但对于向量值函数，事情并没有那么简单。

而且，式（6.14）中的极限 $t\to t_0$ 定义了实值函数的李导数。

6.5 向量场的推前与拉回

这是机械工程师最重要的概念之一。

6.5.1 通过近似给出的定义

初步介绍。设 $p_{\mathcal{E}}$ 和 $q_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$中的点，且 $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ 中的 $p_{\mathcal{F}}=p_{\mathcal{E}*}=\Psi(p_{\mathcal{E}})$ 和 $q_{\mathcal{F}}=q_{\mathcal{E}*}=\Psi(q_{\mathcal{E}})$ 是由 Ψ 推前得到的，参见式 (6.1)。一阶泰勒展开给出

$$(\Psi(q_{\mathcal{E}})-\Psi(p_{\mathcal{E}})=)\quad q_{\mathcal{F}}-p_{\mathcal{F}}=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).(q_{\mathcal{E}}-p_{\mathcal{E}})+o(||q_{\mathcal{E}}-p_{\mathcal{E}}||_E), \tag{6.15}$$

因此，

$$\frac{\overrightarrow{p_{\mathcal{F}}q_{\mathcal{F}}}}{||\overrightarrow{p_{\mathcal{E}}q_{\mathcal{E}}}||_E}=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\frac{\overrightarrow{p_{\mathcal{E}}q_{\mathcal{E}}}}{||\overrightarrow{p_{\mathcal{E}}q_{\mathcal{E}}}||_E}+o(1). \tag{6.16}$$

而推前的定义可通过“忽略” $o(1)$（当 $q_{\mathcal{E}}\to p_{\mathcal{E}}$ 时的极限）得到:

定义 6.6 若 $\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\in E$ 是位于 $p_{\mathcal{E}}\in U$ 处的一个向量，那么它经 Ψ 推前后得到的向量$\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})$ =记作 $\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})$ =记作 $\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}})\in F$定义在 $p_{\mathcal{F}}=p_{\mathcal{E}*}=\Psi(p_{\mathcal{E}})\in\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$处，其定义为

$$\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})=\boxed{\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}):=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})}\overset{\text{noted}}{=}\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}). \tag{6.17}$$

6.5.2 向量场推前的定义

为充分理解定义，并避免出现第 4.3 节中那样的解释错误（不恰当的记号 $d\vec{x}=F.d\vec{X}$），我们采用以下“向量”的定义：它是“曲线的切向量”（曲面和流形所需）。详情如下:

• 设 $c_{\mathcal{E}}:\begin{cases}]-\varepsilon,\ \varepsilon[& \to \mathcal{U}_{\mathcal{E}}\\ s & \to p_{\mathcal{E}}=c_{\mathcal{E}}(s)\end{cases}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 中的一条曲线。其在 $p_{\mathcal{E}}=c_{\mathcal{E}}(s)$ 处的切向量为

$$\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}):=c_{\mathcal{E}}{}'(s)\in E(=\lim_{h\to 0}\frac{c_{\mathcal{E}}(s+h)-c_{\mathcal{E}}(s)}{h}),\tag{6.18}$$

见图 6.1。这定义了函数 $\vec{w}_{\mathcal{E}}:\begin{cases}\mathrm{Im}(c_{\mathcal{E}}) & \to E\\ p_{\mathcal{E}} & \to \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\end{cases}$，称为沿 $\mathrm{Im}(c_{\mathcal{E}})\subset\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 的向量场。

• 由 Ψ 推前 $c_{\mathcal{E}}$ 得到的像曲线 $c_{\mathcal{E}*}=\Psi\circ c_{\mathcal{E}}$（即经 Ψ 变换后的曲线），参见 (6.4)，其在 $p_{\mathcal{F}}=c_{\mathcal{E}*}(s)$ 处的切向量为

$$\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}):=c_{\mathcal{E}*}{}'(s)\quad\text{thus}\quad=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).c_{\mathcal{E}}{}'(s)=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\tag{6.19}$$

因此，我们定义了沿 $\mathrm{Im}(c_{\mathcal{E}*})$ 的向量场 $\vec{w}_{\mathcal{E}*}$，称为 $\vec{w}_{\mathcal{E}}$ 经 Ψ 的推前。

定义了 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 中向量场的所有积分曲线后，我们得到：

定义 6.7 C^0 向量场 $\vec{w}_{\mathcal{E}}:\begin{cases}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to E\\ p_{\mathcal{E}} & \to \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\end{cases}$ 经 Ψ 推前后得到的向量场为

$$\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}=\vec{w}_{\mathcal{E}*}:\begin{cases}\mathcal{U}_{\mathcal{F}} & \to F\\ p_{\mathcal{F}} & \to \boxed{\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}):=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})}\overset{\text{noted}}{=}\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}),\end{cases}\tag{6.20}$$

见图 6.1。（如果 Ψ 是隐式的，则已注明 $\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}=\vec{w}_{\mathcal{E}*}$。）换言之，

$$\text{这定义了映射 }\Psi_*:\begin{cases}C^\infty(\mathcal{U}_{\mathcal{E}};E) & \to C^\infty(\mathcal{U}_{\mathcal{F}};F)\\ \vec{w}_{\mathcal{E}} & \to \Psi_*(\vec{w}_{\mathcal{E}}):=\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{E}}=\vec{w}_{\mathcal{E}*}\end{cases}\text{。（我们对实值函数}\tag{6.21}$$

采用与定义 6.4 相同的记号 Ψ_*：上下文足以消除歧义。）

备注 6.8 与标量函数不同，参见 § 6.4.2：在 t_0 处的 p_{t_0}，你不能只是把向量 $\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})$ 画在一张纸上，把纸放进口袋，然后任由流 $\Psi=\Phi_t^{t_0}$携带自己（推前），等到达 t 处的 p_t后，再从口袋里拿出纸来读出推前结果：向量 $\vec{w}_{t_0*}(t,\ p_t)$ 的方向和长度会被流改变（向量并非只是标量分量的集合）。

练习 6.9 证明：

$$\vec{c_{\mathcal{E}}}{}''(s)=d\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}),\tag{6.22}$$

and

$$d\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).d\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})+d^2\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}),\tag{6.23}$$

and

$$c_{\mathcal{E}*}{}''(s)=d\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})\quad(=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}''(s)+d^2\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)).\tag{6.24}$$

答案。 $\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)=\vec{w}_{\mathcal{E}}(c_{\mathcal{E}}(s))$ 得出 $\vec{c_{\mathcal{E}}}{}''(s)=d\vec{w}_{\mathcal{E}}(c_{\mathcal{E}}(s)).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)$，因此得到 (6.22)。

根据 $\vec{w}_{\mathcal{E}*}$的定义，$\vec{w}_{\mathcal{E}*}(\Psi(p_{\mathcal{E}}))=d\Phi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$，因此得到 (6.23)。

$c_{\mathcal{F}}(s)=\Psi(c_{\mathcal{E}}(s))$ 得出 $\vec{c_{\mathcal{F}}}{}'(s)=d\Psi(c_{\mathcal{E}}(s)).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)=d\Psi(c_{\mathcal{E}}(s)).\vec{w}_{\mathcal{E}}(c_{\mathcal{E}}(s))=\vec{w}_{\mathcal{E}*}(c_{\mathcal{F}}(s))$。因此，$\vec{c_{\mathcal{F}}}{}''(s)=(d^2\Psi(c_{\mathcal{E}}(s)).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}'(s)+d\Psi(c_{\mathcal{E}}(s)).\vec{c_{\mathcal{E}}}{}''(s)=d\vec{w}_{\mathcal{E}*}(c_{\mathcal{F}}(s)).\vec{c_{\mathcal{F}}}{}'(s)$，因此得到 (6.24)。

6.5.3 向量场的拉回

定义 6.10 若 $\vec{w}_{\mathcal{F}}:\begin{cases}\mathcal{U}_{\mathcal{F}} & \to F\\ p_{\mathcal{F}} & \to \vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})\end{cases}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$上的向量场，则其经 Ψ的拉回就是经 Ψ^{-1}的推前，即为

定义在 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 上的向量场，其定义为

$$\Psi^*\vec{w}_{\mathcal{F}}:\begin{cases}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to E\\ p_{\mathcal{E}} & \to \boxed{\Psi^*\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{E}}):=d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})}\overset{\text{noted}}{=}\vec{w}_{\mathcal{F}}{}^*(p_{\mathcal{E}}),\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}).\end{cases}\tag{6.25}$$

换句话说，

$$\Psi^*\vec{w}_{\mathcal{F}}:=(d\Psi^{-1}.\vec{w}_{\mathcal{F}})\circ\Psi\overset{\text{noted}}{=}\vec{w}_{\mathcal{F}}{}^*.\tag{6.26}$$

于是我们得到

$$\Psi^* \circ \Psi_* = I \quad \text{and} \quad \Psi_* \circ \Psi^* = I. \tag{6.27}$$

确实，对于所有 $p_{\mathcal{E}}$， $\Psi^*(\Psi_* \vec{w}_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{E}}) = d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}).\Psi_* \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}) = d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}) = \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$。第二个等式同上。 ∎

6.6 基底下的量化

6.6.1 通常结果

$\vec{}(\vec{a}_i)$ 是 E 中的一个笛卡尔基， $O_{\mathcal{F}}$ 和 (b_i) 是 $\mathcal{F}$ 中的一个原点和 F 中的一个笛卡尔基， $p_{\mathcal{E}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}}$

$$p_{\mathcal{F}} = \Psi(p_{\mathcal{E}}) = O_{\mathcal{F}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(p_{\mathcal{E}})\, \vec{b}_i, \quad \text{i.e.} \quad [\overrightarrow{O_{\mathcal{F}} p_{\mathcal{F}}}]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} \psi_1(p_{\mathcal{E}}) \\ \vdots \\ \psi_n(p_{\mathcal{E}}) \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

那么，若 $\vec{w}_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 和 $\vec{w}_{\mathcal{E}} = \sum_i w_j \vec{a}_i$ 中的一个向量场，我们得到 $\Psi_* \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}) = d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}) = \sum_{i=1}^{n} (d\psi_i(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}))\vec{b}_i = \sum_{i,\ j=1}^{n} w_j(p_{\mathcal{E}})(d\psi_i(p_{\mathcal{E}}).\vec{a}_j)\vec{b}_i = \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(p_{\mathcal{E}}) w_j(p_{\mathcal{E}})\, \vec{b}_i$，因此

$$[\Psi_* \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}})]_{|\vec{b}} = [d\Psi(p_{\mathcal{E}})]_{|\vec{a},\vec{b}} . [\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})]_{|\vec{a}}, \tag{6.29}$$

其中 $[d\Psi(p_{\mathcal{E}})]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = [d\psi_i(p_{\mathcal{E}}).\vec{a}_j] =$记作$[\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(p_{\mathcal{E}})]$是雅可比矩阵。

6.6.2 示例：极坐标系

示例 6.11 将坐标系变换解释为推前：极坐标系的典型示例（将模型推广至任意流形的参数化）。

参数化笛卡尔向量空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =$记作$\vec{\mathbb{R}}^2_p = \{\vec{q} = (r,\ \theta)\}$，其典范基为 $(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2)$，并且 $\vec{q} = r\vec{a}_1 + \theta \vec{a}_2 =$记作$(r,\ \theta)$，因此 $[\vec{q}]_{|\vec{a}} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$。几何仿射空间 $\mathbb{R}^2$（位置的空间）， $p \in \mathbb{R}^2$，关联向量空间 $\vec{\mathbb{R}}^2$， $O \in \mathbb{R}^2$（原点）， $\vec{x} = \overrightarrow{Op}$，以及 $\vec{\mathbb{R}}^2$ 中的欧几里得基 $(\vec{b}_1,\ \vec{b}_2)$。“极坐标系”是相关映射 $\Psi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2_p \ \to \mathbb{R}^2 \\ \qquad (,\ ) \ \to \vec{x} = \Psi(\vec{q}) = \Psi(r,\ \theta) \\ \qquad \vec{q} = \ r \ \theta \end{array} \right\}$，定义如下

$$\vec{x} = \Psi(\vec{q}) := r\cos\theta\, \vec{b}_1 + r\sin\theta\, \vec{b}_2, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{x}]_{|\vec{b}} = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right\}. \tag{6.30}$$

$\vec{\mathbb{R}}^2_p$（参数空间）中位于 $\vec{q}$ 处的第 i 条坐标线是直线 $\vec{c}_{\vec{q},i}$： $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \ \to \mathbb{R}^2_p \\ s \ \to \vec{c}_{\vec{q}\, i} \end{array} \right\}$， $(s) = \vec{q} + s\vec{a}_i$ $\Big\}$，其在$\vec{c}_{\vec{q},i}$ (s) 处的切向量为 $\vec{c}_{\vec{q},i}{}'(s) = \vec{a}_i$，对所有 s 均成立。这条直线经由 Ψ 变换为曲线$\Psi_*(c_{q,i}) = \Psi \circ \vec{c}_{\vec{q},i} =$，记作 $c_{\vec{x},i}$： $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \ \to \mathbb{R}^2 \\ s \ \to c_{\vec{x}} \end{array} \right\}$ $_{,i}(s) = \Psi(\vec{q} + s\vec{a}_i)$ （特别是 $c_{\vec{x},i}(0) = \vec{x}$）。因此

$$[\overrightarrow{Oc_{\vec{x},1}(s)}]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} (r+s)\cos\theta \\ (r+s)\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{(straight line)}, \quad \text{and} \quad [\overrightarrow{Oc_{\vec{x},2}(s)}]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+s) \\ r\sin(\theta+s) \end{pmatrix} \quad \text{(circle)}. \tag{6.31}$$

在 $c_{\vec{x},i}(s)$ 处的切向量为 $c_{\vec{x},i}{}'(s) =$记为$\vec{a}_{i*}(\vec{x})$（由 Ψ 推前），因此

$$\begin{aligned} \vec{a}_{1*}(\vec{x}) := \Psi_* \vec{a}_1(\vec{x}) = d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_1 = \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(\vec{q}+h\vec{a}_1) - \Psi(\vec{q})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(r+h,\theta) - \Psi(r,\theta)}{h} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}(\vec{q}), \\ \vec{a}_{2*}(\vec{x}) := \Psi_* \vec{a}_2(\vec{x}) = d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_2 = \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(\vec{q}+h\vec{a}_2) - \Psi(\vec{q})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Psi(r,\theta+h) - \Psi(r,\theta)}{h} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\vec{q}), \end{aligned} \tag{6.32}$$

Thus

$$\vec{a}_{1*}(\vec{x}) = \cos\theta \vec{b}_1 + \sin\theta \vec{b}_2 \quad \text{and} \quad \vec{a}_{2*}(\vec{x}) = -r\sin\theta \vec{b}_1 + r\cos\theta \vec{b}_2, \tag{6.33}$$

i.e.

$$[\vec{a}_{1*}(\vec{x})]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad [\vec{a}_{2*}(\vec{x})]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{6.34}$$

基 $(\vec{a}_{1*}(\vec{x})\ \vec{a}_{2*}(\vec{x}))$ 称为 $\vec{x}$ 处极坐标系的基（它是正交的，但不是标准正交的，因为通常 $||\vec{a}_{2*}(\vec{x})|| = r \neq 1$）；并且 $[d\Psi(\vec{q})]_{|\vec{a},\vec{b}} = \begin{pmatrix} [\frac{\partial \Psi}{\partial r}(\vec{q})]_{|\vec{b}} & [\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\vec{q})]_{|\vec{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix} = [\frac{\partial \Psi^i}{\partial q^j}]$ $\begin{pmatrix} [\vec{a}_{1*}(\vec{x})]_{|\vec{b}} & [\vec{a}_{2*}(\vec{x})]_{|\vec{b}} \end{pmatrix}$ $\sin\theta \quad r\cos(\vec{q})]$ 是 Ψ 在 $\vec{q}$ 处的雅可比矩阵。

而极坐标系基底 $(\vec{a}_{1*}(\vec{x})\ \vec{a}_{2*}(\vec{x}))$ 的对偶基称为 $(dq_1(\vec{x})\ dq_2(\vec{x}))$（定义为$dq_i(\vec{x}).\vec{a}_{j*}(\vec{x}) = \delta_{ij}$），因此

$$dq_1(\vec{x}) = \cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_2 \quad \text{and} \quad dq_2(\vec{x}) = -\frac{1}{r}\sin\theta\, dx_1 + \frac{1}{r}\cos\theta\, dx_2, \tag{6.35}$$

即，当 $\vec{x} = \Psi(\vec{q})$ 时，$[dq_1(\vec{x})]_{|\vec{b}} = (\cos\theta \sin\theta)$ 和 $[dq_2(\vec{x})]_{|\vec{b}} = -\frac{1}{r}(\sin\theta \cos\theta)$（行矩阵）。 ∎

备注 6.12 向量 $d\vec{a}_{j*}(\vec{x}).\vec{a}_{i*}(\vec{x}) \in \vec{\mathbb{R}^2}$ 在基 $(\vec{a}_{i*}(\vec{x}))$ 下的分量 $\gamma_{ij}^k(\vec{x})$ 是极坐标系的克里斯托费尔符号（采用通常给出的对偶记号）：

$$d\vec{a}_{j*}(\vec{x}).\vec{a}_{i*}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^k(\vec{x})\vec{a}_{k*}(\vec{x}). \tag{6.36}$$

在 $\vec{x} = \Psi(\vec{q})$ 处，取 $\vec{a}_{j*}(\vec{x}) = d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j$，即 $(\vec{a}_{j*}\circ\Psi)(\vec{q}) = \frac{\partial\Psi}{\partial q^j}$，我们得到

$$d\vec{a}_{j*}(\vec{x}).\vec{a}_{i*}(\vec{x}) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial q^i\partial q^j}(\vec{q}) = d\vec{a}_{i*}(\vec{x}).\vec{a}_{j*}(\vec{x}), \quad \text{so} \quad \gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k \tag{6.37}$$

对所有 $i,\ j$（当 Ψ 为 C^2 时，下指标具有对称性）。

对于极坐标，$\frac{\partial\Psi}{\partial r}(\vec{q}) = \cos\theta\vec{b}_1 + \sin\theta\vec{b}_2$ 给出 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}(\vec{q}) = \vec{0}$，因此 $\gamma_{11}^1 = \gamma_{11}^2 = 0$；而 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial r}(\vec{q}) = -\sin\theta\vec{b}_1 + \cos\theta\vec{b}_2 = \frac{1}{r}\vec{a}_{2*}(\vec{x})$，因此 $\gamma_{12}^1 = 0 = \gamma_{21}^1$ 和 $\gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} = \gamma_{21}^2$。并且 $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(\vec{q}) = -r\sin\theta\vec{b}_1 + r\cos\theta\vec{b}_2$ 给出 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}(\vec{q}) = -r\cos\theta\vec{b}_1 - r\sin\theta\vec{b}_2 = -r\vec{a}_{1*}(\vec{x})$，因此 $\gamma_{22}^1 = -r$ 和 $\gamma_{22}^2 = 0$。 ∎

备注 6.13 （广泛使用的）归一化极坐标基底 $(\vec{n}_1(\vec{x})\ \vec{n}_2(\vec{x})) = (\vec{a}_{1*}(\vec{x})\ \frac{1}{r}\vec{a}_{2*}(\vec{x}))$ 不是完整的，即不是某个坐标系的基（使用它会使高阶求导公式变得复杂）。事实上

$$\vec{n}_2(\vec{x}) = \frac{1}{r}\vec{a}_{2*}(\vec{x}) \quad d\vec{n}_2(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x}) = d\left(\frac{1}{r}\right)(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x})\,\vec{a}_{2*}(\vec{x}) + \frac{1}{r}d\vec{a}_{2*}(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x})$$

$$\vec{n}_1(\vec{x}) = \vec{a}_{1*}(\vec{x}) \quad d\vec{n}_1(\vec{x}).\vec{n}_2(\vec{x}) = d\vec{a}_{1*}(\vec{x}).\frac{1}{r}\vec{a}_{2*}(\vec{x}) \quad d\vec{n}_2(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x}) = 0$$

而 $d\vec{n}_1(\vec{x}).\vec{n}_2(\vec{x}) = (d(\frac{1}{r})(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x}))\vec{a}_{2*}(\vec{x}) \neq \vec{0}$，因为 $\frac{1}{r} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ 给出 $d(\frac{1}{r})(\vec{x}).\vec{n}_1(\vec{x}) = (-x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \quad -y(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}).\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \frac{-1}{r^3}(-r\cos^2\theta - r\sin^2\theta) = \frac{-1}{r^2} \neq 0$。 ∎

注释 6.14 （请注意这些记号。）令 $f\colon \vec{q}\in\vec{\mathbb{R}^2_p} \to f(\vec{q}) \in \mathbb{R}$ 为 C^2。将 g 在 Ψ 下的推前称为其推前，即 $g\colon \vec{x}\in\mathbb{R}^2 \to g(\vec{x}) = f(\vec{q}) \in \mathbb{R}$ 当 $\vec{x} = \Psi(\vec{q})$ 时。因此 $f(\vec{q}) = (g\circ\Psi)(\vec{q})$ 并且

$$df(\vec{q}).\vec{a}_j = dg(\Psi(\vec{q})).d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j = dg(\vec{x}).\vec{a}_{j*}(\vec{x}). \tag{6.38}$$

根据已注明的 $df(\vec{q}).\vec{a}_j = \text{记号}\ \frac{\partial f}{\partial q^j}(\vec{q})$ 和已注明的 $dg(\vec{x}).\vec{b}_j = \text{记号}\ \frac{\partial g}{\partial x^j}(\vec{x})$ 以及 $\vec{a}_{j*}(\vec{x}) = d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j = \sum_i \frac{\partial\Psi^i}{\partial q^j}(\vec{q})\vec{a}_j$，我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial q^j}(\vec{q}) = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x^i}(\vec{x})\frac{\partial\Psi^i}{\partial q^j}(\vec{q}) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial g}{\partial q^j}(\vec{x}) \ \ldots\ (!!) \tag{6.39}$$

请注意这个记号！！ g 是 $\vec{x}$的函数，而不是 $\vec{q}$的函数，所以 $\frac{\partial g}{\partial q^i}(\vec{x}) \text{表示}= \frac{\partial f}{\partial q^i}(\vec{q})$，也就是说，$\frac{\partial g}{\partial q^i}(\vec{x}) \text{表示}= \partial(g\circ\Psi)\,\partial q^i(\vec{q})$.....也就是 $[df(\vec{q})] = [dg(\vec{x})].[d\Psi(\vec{q})$.....

那么（取 f 和 Ψ C^2）

$$\begin{aligned}\frac{\partial\frac{\partial g}{\partial q^i}}{\partial q^j}(\vec{x}) &\overset{\text{means}}{=} \frac{\partial\frac{\partial(g\circ\Psi)}{\partial q^i}}{\partial q^j}(\vec{q}) = d(dg.\vec{a}_{i*})(\vec{x}).d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j = d(dg.\vec{a}_{i*})(\vec{x}).\vec{a}_{j^*}(\vec{x})\\ &= d((dg(\vec{x}).\vec{a}_{j^*}(\vec{x})).\vec{a}_{i*}(\vec{x}) + dg(\vec{x}).(d\vec{a}_{i*}(\vec{x}).\vec{a}_j(\vec{x})) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial q^j}(\vec{x}).\end{aligned} \tag{6.40}$$

So

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q^i\partial q^j}(\vec{x}) \overset{\text{means}}{=} d^2g(\vec{x})(\vec{a}_{i*}(\vec{x}),\vec{a}_{j*}(\vec{x})) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x^k}(\vec{x})\gamma_{ij}^k(\vec{x})\vec{a}_k(\vec{x}), \tag{6.41}$$

而 $\frac{\partial^2 g}{\partial\vec{q}^i\partial q^j}(\vec{x})$不会化简为 $d^2g(\vec{x})(\vec{a}_{i*}(\vec{x})\ \vec{a}_{j*}(\vec{x}))$（此时克里斯托费尔符号已经出现）：一阶导数 $\frac{\partial g}{\partial x^k}$ 仍然存在。（与 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^i\partial x^j}(\vec{x}) = d^2g(\vec{x})(\vec{b}_i,\ \vec{b}_j)$的情形相反，后者使用笛卡尔基（$\vec{b}_i$）。）

注意：自变量 r 和 θ 的维数不同（一个是长度，一个是角度）：在参数空间 $\vec{\mathbb{R}^2_p} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(r,\theta)\}$ 中，内积没有物理意义，但这个空间非常有用.....（正如热力学中：在 (T,P) 空间中，内积没有意义。） ∎

7 微分形式的推前和拉回

7.1 定义

§ 6.1 的设定。考虑微分形式 $\alpha_{\mathcal{E}}$: $\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to E^*=\mathcal{L}(E;\mathbb{R})\,(\,)\\ p_{\mathcal{E}} & \to \alpha_{\mathcal{E}}\ p_{\mathcal{E}}\end{array}\right\}$ 在 $\mathcal{U}_{\mathcal{E}}$ 上（一个线性形式域），以及向量场 $\vec{w}_{\mathcal{E}}$: $\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to E\\ p_{\mathcal{E}} & \to \vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\end{array}\right\}$。因此

$$f_{\mathcal{E}}=\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{w}_{\mathcal{E}}:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to \mathbb{R}\\ p_{\mathcal{E}} & \to f_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})=(\alpha.\vec{w}_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{E}})=\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\end{array}\right.$$

是一个标量值 函数（ $\vec{w}_{\mathcal{E}}$的值由 $\alpha_{\mathcal{E}}$给出）。由（6.8）可得（ $f_{\mathcal{E}}=\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{w}_{\mathcal{E}}$经 Ψ推前）

$$\Psi_*(\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{w}_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{F}})=(\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{w}_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{E}})=\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}).\tag{7.1}$$

根据 $\vec{w}_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})=d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$（参见（6.20），$\vec{w}_{\mathcal{E}}$的推前），我们得到

$$\Psi_*(\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{w}_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{F}})=\underbrace{\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-1}}_{=^{\text{noted}}\ \alpha_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})}.\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}})\ :\tag{7.2}$$

定义 7.1 微分形式 $\alpha_{\mathcal{E}}\in\Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$ 的推前是由下式给出的微分形式 $\in\Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$

$$\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{U}_{\mathcal{F}} & \to F^*=\mathcal{L}(F;\mathbb{R})\\ p_{\mathcal{F}} & \to \boxed{\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}):=\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-1}}\overset{\text{noted}}{=}\alpha_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}),\end{array}\right.\tag{7.3}$$

t当 Ψ 是隐含的时，采用最后一种记号。换句话说，$\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}})=\alpha_{\mathcal{E}}(\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}})).d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}})$，i .e.

$$\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}:=(\alpha_{\mathcal{E}}\circ\Psi^{-1}).d\Psi^{-1}.\tag{7.4}$$

（再一次，我们对向量场和函数的推前也采用了相同的记号 Ψ_*：上下文会消除任何歧义。）

备注 7.2 我们并不总能看到向量场（例如，我们看不到内力场）：要了解它，就需要用定义明确的工具进行测量，这里的工具是微分形式；定义 7.1 是一个相容性定义，使我们能够恢复向量场的推前。 ∎

定义 7.3 微分形式 $\alpha_{\mathcal{F}}\in\Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$ 的前推是微分形式

$$\Psi^*\alpha_{\mathcal{F}}:\left\{\begin{array}{ll}\mathcal{U}_{\mathcal{E}} & \to \mathcal{L}(E;\mathbb{R})\\ p_{\mathcal{E}} & \to \Psi^*\alpha_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{E}}):=\alpha_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})\overset{\text{noted}}{=}\alpha_{\mathcal{F}}{}^*(p_{\mathcal{E}})\quad\text{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}),\end{array}\right.\tag{7.5}$$

换言之，

$$\Psi^*\alpha_{\mathcal{F}}:=(\alpha_{\mathcal{F}}\circ\Psi).d\Psi.\tag{7.6}$$

（有关替代定义，请参见注释 7.5。）

命题 7.4 对于所有 $\alpha_{\mathcal{E}}\in\Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$ 和 $\alpha_{\mathcal{F}}\in\Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$（微分形式），以及 $\vec{w}_{\mathcal{E}}\in\Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$ 和 $\vec{w}_{\mathcal{F}}\in\Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$（向量场），有（客观性结果）

$$(\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})=\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).(\Psi_*\vec{w}_{\mathcal{F}})(p_{\mathcal{E}})\quad\textit{when}\quad p_{\mathcal{F}}=\Psi(p_{\mathcal{E}}),\tag{7.7}$$

即 $\alpha_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})=\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}{}^*(p_{\mathcal{E}})$。特别地，对于 $\alpha_{\mathcal{E}}=df$（恰当微分形式），其中$f\in C^1(\mathcal{U}_{\mathcal{E}};\ \mathbb{R})$，

$$d(\Psi_*f)=\Psi_*(df).\tag{7.8}$$

（这种可交换性结果仅适用于 $\alpha=df$ 的情形：一般而言，对于 ≥ 2 阶张量，$d(\Psi_*T)\neq\Psi_*(dT)$，参见例如（*8.19*）。）

证明。 $\alpha_{\mathcal{E}*}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}) = (\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}})).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}) = \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})。(d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})) = \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{w}^*_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{E}})$，对所有 $p_{\mathcal{F}} = \Psi(p_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ 均成立。

并且 $\Psi_* f(p_{\mathcal{F}}) := f(p_{\mathcal{E}}) = f(\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}))$，因此 $d(\Psi_* f)(p_{\mathcal{F}}) = df(p_{\mathcal{E}}).d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}) = \Psi_*(df)(p_{\mathcal{F}})$. ∎

并且我们有

$$\Psi^* \circ \Psi_* = I \quad \text{and} \quad \Psi_* \circ \Psi^* = I. \tag{7.9}$$

事实上 $\Psi(\Psi_*\alpha_{\mathcal{E}})(p_{\mathcal{E}}) = \Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}}) = \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).d\Psi^{-1}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}}) = \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}})$。对 $\Psi_* \circ \Psi^* = I$ 也是如此 .

注释 7.5 借助自然典范同构 $\left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{L}(E;\, F) & \to \mathcal{L}\ F^*\ E^* \\ L & \to L^* \end{array} \right\}(\,;\,)$（由 $L^*(\ell_F).\vec{u}_E = \ell_F.(L.\vec{u}_E)$ 给出），对所有 $(\vec{u}_E, \ell_F) \in E \times F^*$，也可以定义拉回 $\alpha_{\mathcal{F}^*}$，而 $L^*(\ell_F) = \ell_F.L$称为 ℓ_F 关于 L 的拉回。特别地，取 $\ell_F = \alpha_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})$ 和 $L = d\Psi(p_{\mathcal{E}})$，得到$d\Psi(p_{\mathcal{E}})^*(\alpha_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}})) = \alpha_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})$，即 (7.5)。 ∎

7.2 不相容性：黎斯表示与推前

推前不依赖于任何内积：它是客观的。

但在这里，我们引入内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$于 E中，以及 $(\cdot,\ \cdot)_h$于 F中，例如 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中的欧几里得点积（依赖观察者，因此是主观的），因为有些机械工程师无法不从他们钟爱的欧几里得点积入手。

令 $\alpha_{\mathcal{E}} \in \Omega^1(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$，并将其经 Ψ 的推前记作 $\beta_{\mathcal{F}} := \Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}$，即

$$\beta_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}) := \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-1} \quad \text{when} \quad p_{\mathcal{F}} = \Psi(p_{\mathcal{E}}). \tag{7.10}$$

于是将 $\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}}) \in E$ 和 $b_h(p_{\mathcal{F}}) \in F$称为 $\alpha_{\mathcal{E}}$ 和 $\beta_{\mathcal{F}}$的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示向量和 $(\cdot,\ \cdot)_h$-里斯表示向量；因此，对所有 $\vec{u}_{\mathcal{E}} \in \Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$ 以及所有 $\vec{w}_{\mathcal{F}} \in \Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$，简言之，

$$\alpha_{\mathcal{E}}.\vec{u}_{\mathcal{E}} = (\vec{a}_g, \vec{u}_{\mathcal{E}})_g, \quad \text{and} \quad \beta_{\mathcal{F}}.\vec{w}_{\mathcal{F}} = (\vec{b}_h, \vec{w}_{\mathcal{F}})_h, \tag{7.11}$$

这意味着 $\alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{u}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}) = (\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}})\ \vec{u}_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}))_g$ 以及 $\beta_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}).\vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}) = (b_h(p_{\mathcal{F}})\ \vec{w}_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}))_h$，对所有 $p_{\mathcal{E}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}}$和 $p_{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$均成立。这定义了向量场 $\vec{a}_g \in \Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{E}})$ 和 $\vec{b}_h \in \Gamma(\mathcal{U}_{\mathcal{F}})$。

命题 7。6 $b_h \neq \Psi_*\vec{a}_g$ 通常情况下（尽管 $\beta_{\mathcal{F}} = \Psi_*\alpha_{\mathcal{E}}$），因为

$$\begin{aligned} \vec{b}_h(p_{\mathcal{F}}) &= d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-T}.\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}}) \\ &\neq d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}}) \ \textit{in general} \end{aligned} \tag{7.12}$$

（除非 $d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-T} = d\Psi(p_{\mathcal{E}})$，即 $d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T.d\Psi(p_{\mathcal{E}})^{-1} = I$，作为刚体运动）。$S$

或 R 推前线性形式的里斯表示向量，并不是推前表示向量 的线性形式的推前。

这并不意外：推前与任何内积都线性无关，而里斯表示向量则取决于所选的内积（例如，欧几里得英尺？米？）。

因此，只要条件允许（不要在需要量化之前就这么做），就应尽可能避免使用里斯表示向量；也就是说，应尽可能使用原始对象（定性的微分形式），并尽可能推迟使用代表元（用哪个点积进行量化？）。

证明。 回顾：相对于 $(\cdot,\ \cdot)_g$和 $(\cdot,\ \cdot)_h$的线性映射 $d\Psi(p_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{L}(E;\, F)$ 的转置是线性映射 $d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T_{gh} =$记作 $d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T \in \mathcal{L}(F;\, E)$，其定义为：对于位于 $p_{\mathcal{E}}$ 和 $p_{\mathcal{F}}$ 的所有 $\vec{u}_{\mathcal{E}} \in E$ 和 $\vec{w}_{\mathcal{F}} \in F$ 向量，参见（A.68），

$$(d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T.\vec{w}_{\mathcal{F}}, \vec{u}_{\mathcal{E}})_g = (\vec{w}_{\mathcal{F}}, d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{u}_{\mathcal{E}})_h. \tag{7.13}$$

（7.11）给出，取 $p_{\mathcal{F}} = \Psi(p_{\mathcal{E}})$ 时，

$$\begin{aligned} (\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}}), \vec{u}_{\mathcal{E}})_g &= \alpha_{\mathcal{E}}(p_{\mathcal{E}}).\vec{u}_{\mathcal{E}} = \big(\beta_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}).d\Psi(p_{\mathcal{E}})\big).\vec{u}_{\mathcal{E}} = \beta_{\mathcal{F}}(p_{\mathcal{F}}).\big(d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{u}_{\mathcal{E}}\big) \\ &= (\vec{b}_h(p_{\mathcal{F}}), d\Psi(p_{\mathcal{E}}).\vec{u}_{\mathcal{E}})_h = (d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T.\vec{b}_h(p_{\mathcal{F}}), \vec{u}_{\mathcal{E}})_g, \end{aligned} \tag{7.14}$$

对所有 $\vec{u}_{\mathcal{E}}$ 均成立，因此 $\vec{a}_g(p_{\mathcal{E}}) = d\Psi(p_{\mathcal{E}})^T.\vec{b}_h(p_{\mathcal{F}})$，从而得到（7.12）。 ∎

8 张量的推前与拉回

点亮 在本节的介绍中，我们只讨论一阶和二阶张量。任何张量都可采用类似的方法 r.

8.1 一阶张量的推前与拉回

命题 8.1 若 T 是向量场或微分形式，则其推前满足：对于 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$中的任意 ξ 向量场或微分形式（视情况而定），

$$\textit{in short:}\quad (\Psi_*T)(\xi)=T(\Psi^*\xi),\quad \textit{written}\quad \Psi_*T(.)=T(\Psi^*.), \tag{8.1}$$

即 $(\Psi_*T)(p_\mathcal{F}).\xi(p_\mathcal{F})=T(p_\mathcal{E}).\Psi^*\xi(p_\mathcal{E})$ 当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$时。同理：

$$\textit{in short:}\quad (\Psi^*T)(\xi)=T(\Psi_*\xi),\quad \textit{written}\quad \Psi^*T(.)=T(\Psi_*.), \tag{8.2}$$

即 $(\Psi^*T)(p_\mathcal{E}).\xi(p_\mathcal{E})=T(p_\mathcal{F}).\Psi_*\xi(p_\mathcal{F})$ 当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$。

证明。 •当 $T=\alpha_\mathcal{E}\in\Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$（微分形式 $=$一个 $\binom{0}{1}$ 张量）时，这里 $\xi=\vec{w}_\mathcal{F}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，我们需要验证：$(\Psi_*\alpha_\mathcal{E})(p_\mathcal{F}).\vec{w}_\mathcal{F}(p_\mathcal{F})=\alpha_\mathcal{E}(p_\mathcal{E}).\Psi^*\vec{w}_\mathcal{F}(p_\mathcal{E})$，即 $(\alpha_\mathcal{E}(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{E})).\vec{w}_\mathcal{F}(p_\mathcal{F})=\alpha_\mathcal{E}(p_\mathcal{E})$。$(d\Psi^{-1}(p_\mathcal{E}).\vec{w}_\mathcal{F}(p_\mathcal{F}))$：成立。

•当 $T=\vec{w}_\mathcal{E}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$（向量场 $\simeq$一个 $\binom{1}{0}$ 张量）时，这里 $\xi=\alpha_\mathcal{F}\in\Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，我们需要验证：$(\Psi_*\vec{w}_\mathcal{E})(p_\mathcal{F}).\alpha_\mathcal{F}(p_\mathcal{F})=\vec{w}_\mathcal{E}(p_\mathcal{E}).\Psi^*(\alpha_\mathcal{F})(p_\mathcal{E})$，其中我们隐式地使用了自然典范同构$\mathcal{J}$：$\left\{\begin{array}{ll} E & \to E^{**} \\ \vec{w} & \to w \end{array}\right\}$ 记作 $=\ \vec{w}$，定义为 $w(\ell)=\ell.\vec{w}$对所有 $\ell\in E^*$。因此我们需要验证：$\alpha_\mathcal{F}(p_\mathcal{F})$。$(\Psi_*\vec{w}_\mathcal{E})(p_\mathcal{F})=\Psi^*(\alpha_\mathcal{F})(p_\mathcal{E}).\vec{w}_\mathcal{E}(p_\mathcal{E})$，即 $\alpha_\mathcal{F}(p_\mathcal{F})$。$(d\Psi(p_\mathcal{E}).\vec{w}_\mathcal{E}(p_\mathcal{E}))=(\alpha_\mathcal{F}(p_\mathcal{F}).d\Psi(p_\mathcal{E})^{-1}).\vec{w}_\mathcal{E})(p_\mathcal{E})$：成立。

对于（8.2），使用 Ψ^{-1} 而不是 Ψ。 ∎

8.2 二阶张量的推前与拉回

定义 8.2 设 T 是 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$中的一个二阶张量。它在 Ψ 下的推前是 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$中的二阶张量 Ψ_*T，定义如下：对于所有 ξ_1，$\mathcal{U}_\mathcal{F}$中的向量场或微分形式（视需要而定），

$$\text{in short:}\quad \Psi_*T(\xi_1,\xi_2):=T(\Psi^*\xi_1,\Psi^*\xi_2)\quad \text{written}\quad \Psi_*T(\cdot,\cdot):=T(\Psi^*\cdot,\Psi^*\cdot), \tag{8.3}$$

即，当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$时，$\Psi_*T(p_\mathcal{F})(\xi_1(p_\mathcal{F})\ \xi_2(p_\mathcal{F})):=T(p_\mathcal{E})(\Psi^*\xi_1(p_\mathcal{E})\ \Psi^*\xi_2(p_\mathcal{E}))$。

设 T 为 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$中的一个二阶张量。它在 Ψ 下的拉回是 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 中的二阶张量 Ψ^*T，定义如下，对于所有 ξ_1，ξ_2 向量或域或微分形式（如有需要）在 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$，

$$\text{in short:}\quad \Psi^*T(\xi_1,\xi_2):=T(\Psi_*\xi_1,\Psi_*\xi_2)\quad \text{written}\quad \Psi^*T(\cdot,\cdot):=T(\Psi_*\cdot,\Psi_*\cdot), \tag{8.4}$$

即，$\Psi^*T(p_\mathcal{E})(\xi_1(p_\mathcal{E})\ \xi_2(p_\mathcal{E})):=T(p_\mathcal{F})(\Psi_*\xi_1(p_\mathcal{F})\ \Psi_*\xi_2(p_\mathcal{F}))$ 当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$ 时。

例 8.3 如果 $T\in T_2^0(\mathcal{U}_\mathcal{E})$（例如度量），那么，对于 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 中的所有向量场 $\vec{w}_1$，$\vec{w}_2$

$$T_*(\vec{w}_1,\vec{w}_2)\overset{(8.3)}{=}T(\vec{w_1}^*,\vec{w_2}^*)=T(d\Psi^{-1}.\vec{w}_1,d\Psi^{-1}.\vec{w}_2), \tag{8.5}$$

i。即，$T_*(p_\mathcal{F})(\vec{w}_1(p_\mathcal{F})\ \vec{w}_2(p_\mathcal{F}))=T(p_\mathcal{E})(d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})\ d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_2(p_\mathcal{F}))$ 当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$ 时。

$(T_*)_{ij}=T_*(b_i,\ b_j)=T(b_i^*,\ b_j^*)=[\vec{b}_i^*]_{|\vec{a}}^T.[T]_{|\vec{a}}.[\vec{b}_j^*]_{|\vec{a}}=([\vec{b}_i]_{|\vec{b}}^T.[d\Psi]_{|\vec{a}}^{-T}\ ,\ \vec{b}).[T]_{|\vec{a}}.([d\Psi]_{|\vec{a}}^{-1}\ ,\ \vec{b}.[\vec{b}_j]_{|\vec{b}})=([d\Psi]_{|\vec{a}}^{-T}\ ,\ \vec{b}.[T]_{|\vec{a}}.[d\Psi]_{|\vec{a}}^{-1}\ ,\ \vec{b})_{ij}$，因此 关于基下的表达式（$\vec{a}_i$）在 E 以及（b_i）在 F：简而言之，我们有

$$[T_*]_{|\vec{b}}=[d\Psi]_{|\vec{a},\vec{b}}^{-T}.[T]_{|\vec{a}}.[d\Psi]_{|\vec{a},\vec{b}}^{-1}, \tag{8.6}$$

这意味着 $[(\Psi_*T)(p_\mathcal{F})]_{|\vec{b}}=([d\Psi(p_\mathcal{E})]_{|\vec{a},\vec{b}})^{-T}.[T(p_\mathcal{E})]_{|\vec{a}}.([d\Psi(p_\mathcal{E})]_{|\vec{a},\vec{b}})^{-1}$ 当 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$.

初等张量 $T=\alpha_1\otimes\alpha_2\in T_2^0(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 的特殊情形，其中 $\alpha_1,\alpha_2\in\Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$，因此 $T(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=(\alpha_1\otimes\alpha_2)(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=(\alpha_1.\vec{u}_1)(\alpha_2.\vec{u}_2)$：对于所有 $\vec{w}_1,\vec{w}_2\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，

$$(\alpha_1\otimes\alpha_2)_*(\vec{w}_1,\vec{w}_2)\overset{(8.3)}{=}(\alpha_1\otimes\alpha_2)(\vec{w}_1^*,\vec{w}_2^*)=(\alpha_1.\vec{w}_1^*)(\alpha_2.\vec{w}_2^*)\overset{(7.7)}{=}(\alpha_{1*}.\vec{w}_1)(\alpha_{2*}.\vec{w}_2), \tag{8.7}$$

thus

$$(\alpha_1\otimes\alpha_2)_*=\alpha_{1*}\otimes\alpha_{2*}. \tag{8.8}$$

（而任意张量都是有限个初等张量之和。）

对于拉回：对于 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 中的所有向量场 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$，

$$T^*(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \overset{(8.3)}{=} T(\vec{u}_{1*}, \vec{u}_{2*}) = T(d\Psi.\vec{u}_1, d\Psi.\vec{u}_2). \tag{8.9}$$

▪

Exam例 8.4 若 $T \in T^1_1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$，则对所有向量场 $\vec{w} \in \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$ 和微分形式 $\beta \in \Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{F}$ ），

$$T_*(\beta, \vec{w}) = T(\beta^*, \vec{w}^*) = T(\beta.d\Psi, d\Psi^{-1}.\vec{w}), \tag{8.10}$$

即，$T_*(p_\mathcal{F})(\beta(p_\mathcal{F})\ \vec{w}(p_\mathcal{F})) = T(p_\mathcal{E})(\beta(p_\mathcal{F}).d\Psi(p_\mathcal{E})\ d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}(p_\mathcal{F}))$，当 $p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E})$ 时。

对于由向量场 $\vec{u} \in \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 和微分形式 $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 构成的初等张量 $T = \vec{u} \otimes \alpha \in T^1_1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$：对所有 $\beta,\ \vec{w} \in \Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{F}) \times \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，简言之，

$$(\vec{u} \otimes \alpha)_*(\beta, \vec{w}) \overset{(8.3)}{=} (\vec{u} \otimes \alpha)(\beta^*, \vec{w}^*) = (\vec{u}.\beta^*)(\alpha.\vec{w}^*) \overset{(7.7)}{=} (\vec{u}_*.\beta)(\alpha_*.\vec{w}) = (\vec{u}_* \otimes \alpha_*)(\beta, \vec{w}), \tag{8.11}$$

thus

$$(\vec{u} \otimes \alpha)_* = \vec{u}_* \otimes \alpha_*. \tag{8.12}$$

在 E 中取基 $(\vec{a}_i)$，在 F 中取基 $(\vec{b}_i)$：简言之，我们有 $(T_*)_{ij} = T_*(b^i,\ \vec{b}_j) = T(\Psi^*(b^i)\ \Psi^*(\vec{b}_j)) = [\Psi^*(b^i)].[T].[\Psi^*(\vec{b}_j)] = [b^i].[d\Psi].[T].[d\Psi^{-1}].[\vec{b}_j] = ([d\Psi].[T].[d\Psi^{-1}])^{ij}$，因此

$$[T_*]_{|\vec{b}} = [d\Psi]_{|\vec{a},\vec{b}}.[T]_{|\vec{a}}.[d\Psi]^{-1}_{|\vec{a},\vec{b}}, \tag{8.13}$$

这意味着 $[(\Psi_*T)(p_\mathcal{F})]_{|\vec{b}} = [d\Psi(p_\mathcal{E})]_{|\vec{a},\ \vec{b}}.[T(p_\mathcal{E})]_{|\vec{a}}.[d\Psi(p_\mathcal{E})]^{-1}_{|\vec{a}\ ,\ \vec{b}}$ 当 $p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E})$。 ▪

8.3 自同态的推前与拉回

我们有自然典范同构

$$\mathcal{J}_2 : \begin{cases} \mathcal{L}(E;E) \to \mathcal{L}(E^*, E; \mathbb{R}) \\ \qquad L \to T_L = \mathcal{J}_2(L) \quad \text{where} \quad T_L(\alpha, \vec{u}) := \alpha.L.\vec{u}, \quad \forall (\alpha, \vec{u}) \in E^* \times E. \end{cases} \tag{8.14}$$

因此 $\Psi_*T_L(m,\ \vec{w}) = T_L(\Psi^*m,\ \Psi^*\vec{w}) = (\Psi^*m).L.(\Psi^*\vec{w}) = m.d\Psi.L.d\Psi^{-1}.\vec{w}$，因此：

定义 8.5 由 Ψ 将 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 上的端同态场 L 推前，得到 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 上的端同态场$\Psi_*L = L_*$，其定义为

$$\text{in short:} \quad \Psi_*L = \boxed{L_* = d\Psi.L.d\Psi^{-1}}, \tag{8.15}$$

即，当 $p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E})$ 时，$L_*(p_\mathcal{F}) = d\Psi(p_\mathcal{E}).L(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})$。

Thus with bases we get $[L_*]_{|\vec{b}} = [d\Psi]_{|\vec{a},\vec{b}}.[L]_{|\vec{a}}.[d\Psi]^{-1}_{|\vec{a},\vec{b}}$, “as in (8.13)”.

例 8.6 自同态的初等域 $L = (\mathcal{J}_2)^{-1}(\vec{u} \otimes \alpha)$，其中 $\vec{u} \in \Gamma(E)$ 且 $\alpha \in \Omega^1(E)$：因此 $T_L = \vec{u} \otimes \alpha$，并且对于所有 $\vec{u}_2 \in \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$，$L.\vec{u}_2 = (\alpha.\vec{u}_2)\vec{u}$。于是，对于所有 $\vec{w}_2 \in \Gamma(E)$，$L_*.\vec{w}_2 = d\Psi.L.d\Psi^{-1}.\vec{w}_2 = d\Psi.L.\vec{w}_2{}^* = (\alpha.\vec{w}_2{}^*)d\Psi.\vec{u} = (\alpha_*.\vec{w}_2)\vec{u}_*$，因此 $(T_L)_* = \vec{u}_* \otimes \alpha_*$。 ▪

定义 8.7 设 L 是 $\mathcal{U}_\mathcal{F}$ 上的端同态场。它在 Ψ 下的拉回是 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 上的端同态场$\Psi^*L = L^*$，定义为

$$\text{in short:} \quad \Psi^*L = \boxed{L^* = d\Psi^{-1}.L.d\Psi}, \tag{8.16}$$

即，当 $p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E})$ 时，$L^*(p_\mathcal{E}) = d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).L(p_\mathcal{F}).d\Psi(p_\mathcal{E})$。

8.4 向量场的导数的应用

$\vec{u} \in \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 是 $\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 中的一个 C^1向量场，$p_\mathcal{E} \in \mathcal{U}_\mathcal{E}$，因此 $d\vec{u}$：$\mathcal{U}_\mathcal{E} \to \mathcal{L}(E;\ E)$（由 $d\vec{u}(p_\mathcal{E}).\vec{w}(p_\mathcal{E}) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{u}(p_\mathcal{E} + h\vec{w}(p_\mathcal{E})) - \vec{u}(p_\mathcal{E})}{h}$ 对所有 $\vec{w} \in \Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 给出）。因此，其推前：

$$((d\vec{u})_* =) \quad \Psi_*(d\vec{u}) = d\Psi.d\vec{u}.d\Psi^{-1} \tag{8.17}$$

即 $(d\vec{u})_*(p_\mathcal{F}) = d\Psi(p_\mathcal{E}).d\vec{u}(p_\mathcal{E}).d\Psi(p_\mathcal{E})^{-1}$ 当 $p_\mathcal{F} = \Psi(p_\mathcal{E})$时。

8.5 $\Psi_*(d\vec{u})$ 与 $d(\Psi_*\vec{u})$：不满足交换律

这里 Ψ 是 C^2, $\vec{u}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$, $p_\mathcal{E}\in\mathcal{U}_\mathcal{E}$, $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$, 因此 $\Psi_*\vec{u}(p_\mathcal{F})=d\Psi(p_\mathcal{E}).\vec{u}(p_\mathcal{E})=(d\Psi(\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})).(\vec{u}(\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}))$, 且对于所有 $\vec{w}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$,

$$d(\Psi_*\vec{u})(p_\mathcal{F}).\vec{w}(p_\mathcal{F})=(d^2\Psi(p_\mathcal{E}).(d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}(p_\mathcal{F}))).\vec{u}(p_\mathcal{E})+d\Psi(p_\mathcal{E}).d\vec{u}(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}(p_\mathcal{F}),\tag{8.18}$$

对于 $\Psi_*(d\vec{u})(p_\mathcal{F})=d\Psi(p_\mathcal{E}).d\vec{u}(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})$，因此，简言之，

$$d(\Psi_*\vec{u}).\vec{w}=\Psi_*(d\vec{u}).\vec{w}+d^2\Psi(\Psi^*\vec{w},\vec{u})\neq\Psi_*(d\vec{u})\quad\text{in general.}\tag{8.19}$$

所以 微分 d 与推前 $_*$ 不满足交换律（$d(\Psi_*\vec{u})=\Psi_*(d\vec{u})$ 当且仅当 Ψ 是仿射的） .

8.6 微分形式导数的应用

设 $\alpha\in\Omega^1(\mathcal{U}_\mathcal{E})$（$\mathcal{U}_\mathcal{E}$上的一个微分形式）。其导数 $d\alpha\colon\mathcal{U}_\mathcal{E}\to\mathcal{L}(E;E^*)$ 定义为 $d\alpha(p_\mathcal{E}).\vec{u}(p_\mathcal{E})=\lim_{h\to0}{}^{\alpha(}{}_{p_\mathcal{E}+h\vec{u}(p_\mathcal{E}))-\alpha(p_\mathcal{E})}{}_{h}\in E^*$，对所有 $\vec{u}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 都成立，即对所有 $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$ 都成立,

$$(d\alpha(p_\mathcal{E}).\vec{u}_1(p_\mathcal{E})).\vec{u}_2(p_\mathcal{E})=\lim_{h\to0}\frac{\alpha(p_\mathcal{E}+h\vec{u}_1(p_\mathcal{E})).\vec{u}_2(p_\mathcal{E})-(\alpha(p_\mathcal{E}).\vec{u}_1(p_\mathcal{E})).\vec{u}_2(p_\mathcal{E})}{h}\quad\in\mathbb{R}.\tag{8.20}$$

借助自然典范同构 $\mathcal{L}(E;E^*)\simeq\mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})$，参见取 $E^{**}\simeq E$ 时的 (T.16)，我们可以写成$d\alpha(p_\mathcal{E})(\vec{u}_1(p_\mathcal{E})).\vec{u}_2(p_\mathcal{E})=d\alpha(p_\mathcal{E})(\vec{u}_1(p_\mathcal{E})\ \vec{u}_2(p_\mathcal{E}))$，即

$$d\alpha(\vec{u}_1).\vec{u}_2=d\alpha(\vec{u}_1,\vec{u}_2).\tag{8.21}$$

因此， $\Psi_*(d\alpha)=$记作$(d\alpha)_*$ 的推前 $d\alpha$，对于所有 $\vec{w}_1$， $\vec{w}_2\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，可表示为，简言之，

$$(d\alpha)_*(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=d\alpha(\vec{w}_1^*,\vec{w}_2^*),\tag{8.22}$$

即，对于 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$，$(d\alpha)_*(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})).\vec{w}_2(p_\mathcal{F})=(d\alpha(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_2(p_\mathcal{F})$。特别地，$(d^2f)_*(\vec{w}_1,\ \vec{w}_2)=d^2f(d\Psi^{-1}.\vec{w}_1,\ d\Psi^{-1}.\vec{w}_2)\ (=d^2f(\vec{w}_1^*,\ \vec{w}_2^*))$。

8.7 $\Psi_*(d\alpha)$ 与 $d(\Psi_*\alpha)$：不满足交换律

这里 Ψ 是 C^2， $\vec{u}\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{E})$，且 $p_\mathcal{E}\in\mathcal{U}_\mathcal{E}$和 $p_\mathcal{F}=\Psi(p_\mathcal{E})$。我们有 $\Psi_*\alpha(p_\mathcal{F})=\alpha(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})=\alpha(\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})$，因此，对所有 $\vec{w}_1\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$,

$$d(\psi_*\alpha)(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})=(d\alpha(p_\mathcal{E}).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})).d\Psi^{-1}(p_\mathcal{F})+\alpha(p_\mathcal{E}).d^2\Psi^{-1}(p_\mathcal{F}).\vec{w}_1(p_\mathcal{F})\quad\in F^*,\tag{8.23}$$

因此，对所有 $\vec{w}_1$， $\vec{w}_2\in\Gamma(\mathcal{U}_\mathcal{F})$，简言之

$$d(\psi_*\alpha)(\vec{w}_1,\vec{w}_2)=d\alpha(d\Psi^{-1}.\vec{w}_1,d\Psi^{-1}.\vec{w}_2)+\alpha.d^2\Psi^{-1}(\vec{w}_1,\vec{w}_2)\neq d\alpha(\vec{w}_1^*,\vec{w}_2^*)\quad\text{in general.}\tag{8.24}$$

因此，微分 d 与推前 $_*$ 不可交换（$d(\Psi_*\alpha)=\Psi_*(d\alpha)$ 当且仅当 Ψ 是仿射的） .

第二部分李导数

9 李导数

9.0 目的与初步结果

9.0.1 目的?

柯西方法可能不足以应对，例如：
1. - 柯西方法旨在借助欧几里得点积和变形梯度 F，比较运动变形后的两个向量，并使用由 $(C.\vec{W}_1)\bullet\vec{W}_2$:=$(F.\vec{W}_1)\bullet(F.\vec{W}_2)$ 定义的变形张量 C。这是一种定量方法（需要选定欧几里得点积：英尺？米？）。

- 柯西方法是一种一阶方法（适用于线性材料）：只使用运动的一阶泰勒展开，即只使用 $d\Phi = F$ （“斜率”），而不使用 $d^2\Phi = dF$ （“曲率”）或高阶导数。

2. - 李方法旨在构建定性的“协变客观本构定律”（其中一些后来会被否定，原因在于不变性或热力学要求）。

- 李方法“自然地”适用于非线性材料，因为李导数的二阶形式用到了运动的二阶泰勒展开。

- 在非平面曲面 S 上，如果要沿轨迹求导，就需要李导数。- 在伽利略欧几里得框架（量化）中，一阶李导数方法给出 the
与柯西方法相同的结果。
（柯西于 1857 年去世，李于 1842 年出生：遗憾的是，柯西无法使用李导数。）

9.0.2 基本结果

该运动的欧拉速度为 $\vec{v}$。物质导数为 $\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt} := \frac{\partial \mathcal{E}ul}{\partial t} + d\mathcal{E}ul.\vec{v}$: 1. 欧拉标量函数 f 的李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}f$ 是物质导数

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}f = \frac{Df}{Dt}. \tag{9.1}$$

2. 李 群导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ 作用于一个（欧拉）向量场 $\vec{w}$ 时，不仅仅是物质导数 $\frac{D\vec{w}}{Dt}$ —:

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt} - d\vec{v}.\vec{w}. \tag{9.2}$$

$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ 给出了流作用于 $\vec{w}$ 所产生的应力变化率，特别是， $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ 中的 $-d\vec{v}.\vec{w}$ 项表明， $\vec{v}$ 的空间变化（流的变化）会作用于应力的演化（预期如此）。
3. (9.1)-(9.2) 使我们能够定义任意阶张量的李导数。

9.1 定义

9.1.1 问题（普适性礼物）...

$\widetilde{\Phi}$ 假设为正则。 $\vec{v}(t,p(t)) = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t,P_{Obj})$ 是 t 在 $p(t) = \widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$ 处的欧拉速度。回顾：若 $\mathcal{E}ul$ 是欧拉函数，则其物质时间导数为

$$\frac{D\mathcal{E}ul}{Dt}(t,p(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{E}ul(t+h,p(t+h)) - \mathcal{E}ul(t,p(t))}{h}. \tag{9.3}$$

问题：变化率 $\frac{\mathcal{E}ul}{(t+h,p(t+h))-\mathcal{E}ul(t,p(t))\ h}$ 引发了以下问题：

1- 差值 $\mathcal{E}ul(t+h,p(t+h)) - \mathcal{E}ul(t,p(t))$ 要求由观察者计算时间和空间的普适性礼物，因为它混合了两个不同的时间 t 和 $t+h$，以及两个不同的位置 $p(t)$ 和 $p(t+h)$。

2- 差值 $\mathcal{E}ul(t+h,p(t+h)) - \mathcal{E}ul(t,p(t))$ 可能没有意义：例如，若 $\mathcal{E}ul = \vec{w}$ 是“自身视为非平面曲面”（流形）上的向量场，那么 $\mathcal{E}ul(t+h,p(t+h))$ 和 $\mathcal{E}ul(t,p(t))$ 不属于同一个（切）向量空间（因此，差值 $\vec{w}(t+h,p(t+h)) - \vec{w}(t,p(t))$ 毫无意义）。

9.1.2 .....趋向一个解（不借助无处不在的礼物）.....

要比较 $\mathcal{E}ul(t+h, p(t+h))$ 和 $\mathcal{E}ul(t, p(t))$（以求得 $\mathcal{E}ul$ 沿轨迹的演化），你需要知道从 t 到 $t+h$ 所需的时长 h，以及从 $p(t)$ 移动到 $p(t+h)$ 所需的时长。因此，你必须：

- 将值 $\mathcal{E}ul(t,\ p_t)$ 随身带走（作为记忆），
- 沿着所考虑的轨迹移动，在此过程中，值 $\mathcal{E}ul(t,\ p_t)$ 可能已经变为（其中 $\tau = t+h$），

$$((\Phi_\tau^t)_*\mathcal{E}ul_t)(p_\tau) \overset{\text{noted}}{=} \mathcal{E}ul_{t*}(\tau, p_\tau) \quad \text{(push-forward)}; \tag{9.4}$$

- 现在，在你所在的 $(\tau,\ p_\tau)$ 处，你可以将实际值 $\mathcal{E}ul(\tau,\ p_\tau)$ 与你带来的值$\mathcal{E}ul_{t*}(\tau,\ p_\tau)$（即输运记忆）进行比较，于是差值

$$\mathcal{E}ul(\tau, p_\tau) - \mathcal{E}ul_{t*}(\tau, p_\tau) \tag{9.5}$$

对人类而言是有意义的，因为它是在唯一的时间 τ 和唯一的点 p_τ 处计算的（无需无处不在的礼物）。

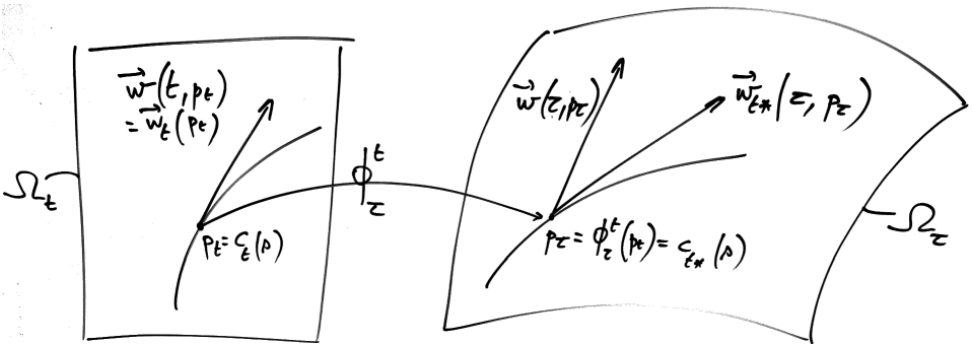


图 9.1：使用 $\mathcal{E}ul = \vec{w}$ a（欧拉）向量场计算 (9.5)：在 t 处，通过 $\vec{w}_t(p_t) := \vec{w}(t, p_t)$ 在 Ω_t中定义向量场 $\vec{w}_t$。Ω_t 中的（空间）曲线 c_t： $s \to p_t = c_t(s)$ 是 $\vec{w}_t$的积分曲线，即满足 $c_t'(s) = \vec{w}_t(c_t(s))$。$c_t$经由 Φ_τ^t变换为 Ω_τ中的（空间）曲线 $c_\tau = \Phi_\tau^t \circ c_t$： $s \to p_\tau = c_\tau(s) = \Phi_\tau^t(c_t(s))$；因此 $c_\tau'(s) = d\Phi_\tau^t(p_t).c'(s) = d\Phi_\tau^t(p_t).\vec{w}_t(p_t)$ =指出，$\tau(p_\tau)$ 是 c_τ处、 p_τ处的切向量（推前）。因此，差值 $\vec{w}(\tau, p_\tau) - \vec{w}_{t*}(\tau, p_\tau)$ 可以由人来计算，即无需普适性礼物。

9.1.3 .....李导数，第一种定义

定义 9.1 欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 沿 $\vec{v}$ $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$ 的李导数是欧拉函数 $\sim\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$，其定义为在 t处、于 $p_t = \Phi(t, P_{Obj})$,

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t, p_t) := \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{E}ul(t+h, p(t+h)) - (\Phi_{t+h}^t)_*\mathcal{E}ul_t(p(t+h))}{h}. \tag{9.6}$$

解释： $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$ 度量了 $\mathcal{E}ul$ 沿轨迹的变化率：

- $\mathcal{E}ul(t+h, p(t+h))$ 是 $\mathcal{E}ul$ 在 $t+h$ 处、于 $p(t+h)$ 的值，见图 9.1。
- $\mathcal{E}ul_{t*}(t+h, p(t+h)) = ((\Phi_{t+h}^t)_*\mathcal{E}ul_t)(t+h, p(t+h))$ 完全与应变相关：它是沿流输运的记忆，也就是说，是被流扭曲后的值 $\mathcal{E}ul(t, p_t)$。

因此，令 g由 $g(\tau) = ((\Phi_\tau^t)_*\mathcal{E}ul_t)(p_\tau)$ 定义（特别是 $g(t) = \mathcal{E}ul_t(p_t)$）：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t, p_t) := g'(t) = \lim_{\tau\to t} \frac{g(\tau) - g(t)}{\tau - t} \overset{\text{also written}}{=} \frac{d((\Phi_{t+h}^t)_*\mathcal{E}ul_t)(p(t+h))}{dt}_{|\tau=t}. \tag{9.7}$$

9.1.4 更一般的定义

式（9.6）中的变化率需要稍作修改，才能适用于所有情况： $\mathcal{E}ul(t+h,\ p(t+h)) - \mathcal{E}ul_*(t+h,\ p(t+h))$ 是在 $(t+h,\ p(t+h))$ 处计算的，该点随 $h \to 0$ 移动；而在“非平面流形”上，这会带来问题。“自然”的定义是连同记忆一起到达：

定义 9.2 欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 沿 $\vec{v}$ 的李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$ 是由下式定义的欧拉函数 $\sim\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$：在 t 处，于 $p_t=\Phi_{Obj}(t)$,

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t):=\lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{E}ul(t,p_t)-(\Phi_t^{t-h})_*\mathcal{E}ul_{t-h}(p_t)}{h}. \tag{9.8}$$

即，若 $\widetilde{g}$由 $\widetilde{g}(\tau)=((\Phi_t^\tau)_*\mathcal{E}ul_\tau)(p_t)$ 定义（特别是 $\widetilde{g}(t)=\mathcal{E}ul(t,p_t)$）：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t):=\widetilde{g}'(t)=\lim_{\tau\to t}\frac{\widetilde{g}(t)-\widetilde{g}(\tau)}{t-\tau}=\lim_{\tau\to t}\frac{\widetilde{g}(\tau)-\widetilde{g}(t)}{\tau-t}\overset{\text{also written}}{=}\frac{d((\Phi_t^\tau)_*\mathcal{E}ul_\tau)(p_t)}{d\tau}_{|\tau=t}. \tag{9.9}$$

此处观察者必须:
- 在 $t-h$处，取 $p(t-h\widetilde{)}=\Phi_{Obj}(t-h)$ 时的值 $\mathcal{E}ul(t-h,p(t-h)),\sim$
- 沿轨迹 Φ_{Obj}行进，$\sim$
- 到达 t 处，即 $p_t=\Phi_{Obj}(t)$ 时，这个值已变为 $((\Phi_{t-h}^t)_*\mathcal{E}ul_{t-h})(p_t)$（输运记忆），
- 然后可以在 Ω_t 中与 $\mathcal{E}ul(t,p_t)$ 进行比较（无需普适性礼物）。

练习 9.3 证明：(9.6) 和 (9.8) 等价。

Answer. With $(\Phi_{t+h}^t)^*.(\Phi_{t+h}^t)_*=I$, (9.6) gives $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t)=\lim_{h\to0}\frac{(\Phi_{t+h}^t)^*\mathcal{E}ul(t,p_t)-\mathcal{E}ul_t(t,p_t)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(\Phi_{t-h}^t)^*\mathcal{E}ul_{t-h})(p_t)-\mathcal{E}ul_t(p_t)}{-h}=\lim_{h\to0}\frac{\mathcal{E}ul_t(p_t)-((\Phi_{t-h}^t)^*\mathcal{E}ul_{t-h})(p_t)}{h}$, and $(\Phi_{t-h}^t)^*=(\Phi_t^{t-h})_*$. ∎

9.1.5 等价定义（微分几何）

定义 9.4 沿欧拉速度 $\vec{v}$ 的流的欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 的李导数是欧拉函数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$，其在 (t,p_t) 处定义为

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t):=\lim_{h\to0}\frac{((\Phi_{t+h}^t)^*\mathcal{E}ul_{t+h})(p_t)-\mathcal{E}ul(t,p_t)}{h},\quad\text{rate in }\Omega_t. \tag{9.10}$$

换句话说，如果 $\hat{}g$ 由 $\hat{}g(\tau)=((\Phi_\tau^t)^*\mathcal{E}ul_\tau)(p_t)$ 定义（特别是 $\hat{}g(t)=\mathcal{E}ul(t,p_t)$），那么

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t):=\hat{g}'(t)=\lim_{\tau\to t}\frac{\hat{g}(\tau)-\hat{g}(t)}{\tau-t}\overset{\text{also written}}{=}\frac{d((\Phi_\tau^t)^*\mathcal{E}ul_\tau)(p_t)}{d\tau}_{|\tau=t}. \tag{9.11}$$

练习 9.5 证明：(9.8) 和 (9.10) 等价。

答案。(9.10) 也可写作 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,\ p_t)=\lim_{h\to0}\frac{((\Phi_{t-h}^t)^*\mathcal{E}ul_{t-h})(p_t)-\mathcal{E}ul_t(p_t)}{-h}$，以及 $(\Phi_{t-h}^t)^*.(\Phi_t^{t-h})_*=I$。 ∎

备注 9.6 更精确的定义见 (2.3)：例如，根据 (9.10)，沿欧拉速度的流的欧拉函数 $\mathcal{E}ul$ 的李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul$ 是由下式定义的欧拉函数，在 t处的 $p_t=\Phi(t,\ P_{Obj})$,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t):=((t,p_t),\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,p_t)\quad\text{(pointed function at }(t,p_t)), \tag{9.12}$$

并且，为了简化记号，$\widetilde{\mathcal{L}}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,\ p_t)=$记作 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,\ p_t)$（$\widetilde{\mathcal{L}}_{\vec{v}}\mathcal{E}ul(t,\ p_t)$ 的第二个分量）。 ∎

9.2 标量函数的李导数

设 f 为一个 C^1 欧拉标量函数。由（Φ_t^{t-h}）$_*f_{t-h}$（p_t）$=f_{t-h}$（p（$t-h$））, 参见（6.10）, 可得

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}f(t,p_t)\overset{(9.8)}{=}\lim_{h\to0}\frac{f(t,p_t)-f(t-h,p(t-h))}{h},\quad\text{i.e.}\quad\boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}f=\frac{Df}{Dt}}=\frac{\partial f}{\partial t}+df.\vec{v}. \tag{9.13}$$

因此，对于标量函数，李导数就是物质导数。

解释： $\mathcal{L}_{\vec{v}}f$ 表示 f 沿轨迹的变化率。

命题 9.7 $\mathcal{L}_{\vec{v}}f=0$ 当且仅当 f 沿任意轨迹恒定时成立（实数值即为记忆值）：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}f=0\iff\forall t,\tau\in[t_0,T],\ (\Phi_{\tau*}^t)f_t(p_\tau)=f(t,p(t))\ \ when\ \ p_\tau=\Phi_\tau^t(p_t), \tag{9.14}$$

即当 $f(t,p(t))=f(t_0,p_{t_0})$满足 $p(t)=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$时，即 f本身由流携带（不变）。

~ ~**证明**。设对所有 t，$p(t)=\Phi(t,P_{Obj})=p_t$ 成立，则 $p(\tau)=\Phi(\tau,P_{Obj})=p_\tau=\Phi^t_{t+h}(p_t)=\Phi^t(\tau,p_t)$。

$\Leftarrow$: 如果 $f_\tau=(\Phi^t_{t+h})_*f_t$，那么 $f_\tau(p_\tau)=f_t(p_t)$，因此 $\lim_{\tau\to t}\frac{f(\tau,\,p(\tau))-f(t,\,p(t))}{\tau-t}=0$，即 $\frac{Df}{Dt}=0$.

$\Rightarrow$: 如果 $\frac{Df}{Dt}\equiv 0$，那么 $f(t,p(t))$ 是轨迹 $t\to$ ~上的常函数 $\Phi(t,\,P_{Obj})$，对于任意粒子 P_{Obj}，因此当 $p(\tau)=\Phi^t_{t+h}(p_t)$ 时，$f(\tau,\,p(\tau))=f(t,\,p_t)$，即 $f(\tau,\,p_\tau)=(\Phi^t_{t+h})_*f_t(p_\tau)$。 ∎

练习 9.8 证明：$\mathcal{L}_{\vec v}(\mathcal{L}_{\vec v}f)=\frac{D^2f}{Dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2d(\frac{\partial f}{\partial t})\cdot\vec v+d^2f(\vec v,\,\vec v)+df.(\frac{\partial\vec v}{\partial t}+d\vec v)$。

答案。参见 (2.23)。 ∎

9.3 向量场的李导数

9.3.1 公式

设 $\vec w$ 是一个 C^1（欧拉）向量场（下文将其解释为“内力场”）.

命题 9.9

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec v}\vec w=\frac{D\vec w}{Dt}-d\vec v.\vec w}=\frac{\partial\vec w}{\partial t}+d\vec w.\vec v-d\vec v.\vec w. \tag{9.15}$$

因此，李导数并不等同于物质导数 $\frac{D\vec w}{Dt}$（除非 $d\vec v=0$，也就是说，除非 $\vec v$ 是均匀的）：$\vec v$ 的空间变化 $d\vec v$ 会影响应力变化率：$\vec v$ 试图使 $\vec w$ 弯曲（这是意料之中的）。

证明。设 $\vec g:\tau\to\vec g(\tau)=(\Phi^{t*}_\tau\vec w)(t,p(t))=d\Phi^t_\tau(p_t)^{-1}.\vec w(\tau,p(\tau))$，当 $p(\tau)=\Phi^t(\tau,p_t)$ 时，因此 (9.10) 可写为 $\mathcal{L}_{\vec v}\vec w(t,p_t)=\vec g'(t)$。令 $\vec z(\tau):=\vec w(\tau,p(\tau))=d\Phi^t(\tau,p_t).\vec g(\tau)$,

$$\begin{aligned}\vec z'(\tau)=\frac{D\vec w}{D\tau}(\tau,p(\tau))&=\frac{\partial(d\Phi^t)}{\partial\tau}(\tau,p_t).\vec g(\tau)+d\Phi^t(\tau,p_t).\vec g\,'(\tau)\\&=(d\vec v(\tau,p(\tau)).F^t(\tau,p_t)).(F^t(\tau,p_t)^{-1}.\vec w(\tau,p(\tau)))+F^t_\tau(p_t).\vec g\,'(\tau)\\&=d\vec v(\tau,p(\tau)).\vec w(\tau,p(\tau))+F^t_\tau(p_t).\vec g\,'(\tau).\end{aligned} \tag{9.16}$$

因此 $\frac{D\vec w}{Dt}(t,p_t)=d\vec v(t,p_t).\,{}^{\vec w(t}\,,p_t)+I.\,{}^{\vec g'(t)}$，因此 $\vec g'(t)=\frac{D\vec w}{Dt}(t,p_t)-d\vec v(t,p_t).\,{}^{\vec w(t}\,,p_t)$ ∎

.**量化：**基（$\vec e_i$），$\vec v=\sum_i v_i\vec e_i$，$\vec w=\sum_i w_i\vec e_i$，$d\vec v.\vec e_j=\sum_{ij}v_{i|j}\vec e_i$，$d\vec w.\vec e_j=\sum_{ij}w_{i|j}\vec e_i$；然后

$$\mathcal{L}_{\vec v}\vec w=\sum_{i=1}^n\frac{\partial w_i}{\partial t}\vec e_i+\sum_{i,j=1}^n w_{i|j}v_j\vec e_i-\sum_{i,j=1}^n v_{i|j}w_j\vec e_i. \tag{9.17}$$

因此（列矩阵），其中 $[\cdot]:=[\cdot]_{|\vec e}$，

$$\boxed{[\mathcal{L}_{\vec v}\vec w]=[\frac{D\vec w}{Dt}]-[d\vec v].[\vec w]}\quad(=[\frac{\partial\vec w}{\partial t}]+[d\vec w.\vec v]-[d\vec v].[\vec w]). \tag{9.18}$$

（并且 $[d\vec w.\vec v]=[d\vec w].[\vec v]$。）对偶记号：$\mathcal{L}_{\vec v}\vec w=\sum_i\frac{\partial w^i}{\partial t}\vec e_i+\sum_{ij}w^i_{|j}v^j\vec e_i-\sum_{ij}v^i_{|j}w^j\vec e_i$。

9.3.2 解释：流阻力测量

命题 9.10 Φ^{t_0} 应为一种 C^2 运动和空间中的 C^1 微分同胚，而 $\vec w$ 是一个向量场。

$$\mathcal{L}_{\vec v}\vec w=0\quad\Longleftrightarrow\quad\forall t\in[t_0,T],\ \vec w_t=(\Phi^{t_0}_t)_*\vec w_{t_0}. \tag{9.19}$$

也就是说，$\frac{D\vec w}{Dt}=d\vec v.\vec w\Leftrightarrow$实际向量 $\vec w(t,p(t))$ 等于流所产生的变形向量 $F^{t_0}_t(p_{t_0}).\vec w_{t_0}(p_{t_0})=\vec w_{t_0*}(t,p(t))$，见图 *9.1*。因此：李导数 $\mathcal{L}_{\vec v}\vec w$ 为零，当且仅当 $\vec w$ 不抵抗该流（即让自身随流变形），也就是说，当且仅当 $\vec w(t,p_t)=\vec w_{t_0*}(t,p_t)$。

证明。我们有 $\mathcal{L}_{\vec v}\vec w=\frac{D\vec w}{Dt}=d\vec v.\vec w$ 和 $\frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})=d\vec v(t,\,p(t)).F^{t_0}_t(p_{t_0})$，参见 (3.33)。

$\Leftarrow$(导数)：假设当 $p(t)=\Phi^{t_0}_t(p_{t_0})$ 时，$\vec w(t,p(t))=F^{t_0}(t,p_{t_0}).\vec w(t_0,p_{t_0})$。那么 $\frac{D\vec w}{Dt}(t,p(t))=\frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0}).\vec w(t_0,p_{t_0})=(d\vec v(t,p(t)).F^{t_0}_t(p_{t_0}))\cdot(F^{t_0}_t(p_{t_0})^{-1}.\vec w(t,p(t)))=d\vec v(t,p(t)).\vec w(t,p(t))$，因此 $\frac{D\vec w}{Dt}-d\vec v.\vec w=0$。（见命题 3.14。）

$\Rightarrow$(积分)：假设 $\frac{D\vec w}{Dt}=d\vec v.\vec w$。令 $\vec f(t)=(F^{t_0}_t(p_{t_0}))^{-1}.\vec w(t,p(t))$（=拉回 $(\Phi^{t_0}_t)^*\vec w(t_0,p_{t_0})$），当 $p(t)=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$ 时；因此 $\vec w(t,p(t))=F^{t_0}(t,p_{t_0}).\vec f(t)$，且 $\frac{D\vec w}{Dt}(t,p(t))=\frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}\,t\,p_{t_0}.\vec f\,t+F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,'\,t=d\vec v\,t\,p\,t.F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,t+F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,'\,t=d\vec v\,t\,p\,t.\vec w\,t\,p\,t+(,)()()()(,())()()()F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,'\,t=^{hyp.}\frac{D\vec w}{Dt}\,t\,p\,t+F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,'\,t\qquad t\qquad F^{t_0}_t\,p_{t_0}.\vec f\,'\,t=\vec 0\qquad\vec f\,'\,t=\vec 0$
$()(,())(,())()()(,())()()$ 对所有 都成立；因此 $()()$，于是 $()$（因为 $\Phi^{t_0}_t$ 是一个微分同胚），于是 $\vec f(t)=\vec f(t_0)$，即 $\vec w_t=(\Phi^{t_0}_t)_*\vec w_{t_0}$，对所有 t 均成立。 ∎

9.3.3 自主李导数与李括号

两个向量场 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的李括号是

$$[\vec{v},\vec{w}] := d\vec{w}.\vec{v} - d\vec{v}.\vec{w} \overset{\text{noted}}{=} \mathcal{L}^0_{\vec{v}}\vec{w}. \tag{9.20}$$

并且，$\mathcal{L}^0_{\vec{v}}\vec{w} = [\vec{v},\vec{w}]$ 被称为沿 $\vec{v}$的 $\vec{w}$ 自主李导数。因此

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + [\vec{v},\vec{w}] = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \mathcal{L}^0_{\vec{v}}\vec{w}. \tag{9.21}$$

注意：当 $\vec{v}$和 $\vec{w}$ 是定常向量场时使用 $\mathcal{L}^0_{\vec{v}}\vec{w}$，因此这与客观性无关：参考系中的定常向量场在另一个（运动的）参考系中不一定仍然是定常的。

9.4 示例

9.4.1 沿向量场自身的李导数

（9.15）其中 $\vec{w} = \vec{v}$给出 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. 特别地，如果 $\vec{v}$是平稳向量场，则 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{v} = \vec{0}$ （$= [\vec{v},\vec{v}]$）。

9.4.2 沿均匀流的李导数

这里 $d\vec{v} = 0$，因此

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + d\vec{w}.\vec{v} \quad (\text{when } d\vec{v} = 0). \tag{9.22}$$

这里的流是直线流（$d\vec{v} = 0$）：不存在（流的）曲率来影响 $\vec{w}$上的应力。

此外，如果 $\vec{w}$是定常的，即 $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = 0$，那么 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = d\vec{w}.\vec{v} =$向量场 $\vec{w}$ 沿 $\vec{v}$方向的方向导数 $\frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{v}}$。

9.4.3 均匀向量域的李导数

这里 $d\vec{w}(t,p) = 0$，因此

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - d\vec{v}.\vec{w} \quad (\text{when } d\vec{w} = 0), \tag{9.23}$$

因此，拉伸 应变 $\vec{w}$ 是由 $\vec{v}$ 的空间变化引起的。此外，若 $\vec{w}$ 是定常的，则 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = -d\vec{v}.\vec{w}$.

9.4.4 弹性材料的单轴拉伸

- 应变。对于 $[\overrightarrow{OP}]_{|\vec{e}} = [X]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，对于 $\xi > 0$，$t \geq t_0$，$p(t) = \Phi^{t_0}(t,P)$ 和 $[\vec{x}]_{|\vec{e}} = [\overrightarrow{Op\ t}()]_{|\vec{e}}$:

$$[\vec{x}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \xi(t-t_0)\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(1+\xi(t-t_0)) \\ Y \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

- 欧拉速度 $\vec{v}(t,p) = \begin{pmatrix} \xi X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\xi\frac{t-t_0}{t-t_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d\vec{v}(t,p) = \begin{pmatrix} \frac{1+\xi(t-t_0)}{1+\xi(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（与 p 无关）。

- 变形梯度（与 P 无关），其中 $\kappa_t = \xi(t-t_0)$:

$$F_t = d\Phi^{t_0}_t(P) = \begin{pmatrix} 1+\kappa_t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \kappa_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.25}$$

无穷小应变张量，其中 $F_t^T = F_t$：

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{t_0}_t(P) = F_t - I = \kappa_t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\varepsilon}}_t. \tag{9.26}$$

- 应力。本构定律 =线性各向同性弹性:

$$\underline{\underline{\sigma}}_t(p_t) = \lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t) I + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}_t = \kappa_t \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}}_t. \tag{9.27}$$

作用于 p 处、法向量为 $\vec{n}_t(p) = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix} = \vec{n}$ 的曲面上的柯西应力向量 $\vec{T}$:

$$\vec{T}_t(p_t) = \underline{\underline{\sigma}}_t.\vec{n} = \kappa_t \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)n_1 \\ \lambda n_2 \end{pmatrix} = \xi(t-t_0)\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)n_1 \\ \lambda n_2 \end{pmatrix} = \vec{T}_t. \tag{9.28}$$

- 推前：$\vec{T}_{t_0}(p_{t_0}) = 0$，因此 $F^{t_0}_{t_0+h}(p_{t_0}).\vec{T}_{t_0}(p_{t_0}) = \vec{0}$。

- 李导数:

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}(t_0,p_{t_0})=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{T}_t(p_t)-F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{T}_{t_0}(p_{t_0})}{t-t_0}=\xi\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)n_1\\ \lambda n_2\end{pmatrix}\quad\text{(rate of stress at }(t_0,p_{t_0})\text{)}. \tag{9.29}$$

- 使用 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}=\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}+d\vec{T}.\vec{v}-d\vec{v}.\vec{T}$进行一般计算：(9.28) 给出 $\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}=\xi\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)\\ \lambda\end{pmatrix}n^1 n^2$ 和 $d\vec{T}=0$以及 $d\vec{v}_t.\vec{T}_t=\begin{pmatrix}1+\xi(t-t_0) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\xi\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)\\ \lambda\end{pmatrix}n^1 n^2=\xi^2(t-t_0)\begin{pmatrix}1+\xi(t-t_0)(\lambda+2\mu)\\ 0\end{pmatrix}n^1$。特别是，$d\vec{v}(t_0,p_{t_0}).\vec{T}(t_0,p_{t_0})=\vec{0}$。因此，$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}(t_0,p_{t_0})=\xi\begin{pmatrix}(\lambda+2\mu)\\ \lambda\end{pmatrix}n^1 n^2=$在初始 (t_0,p_{t_0}) 时的应力变化率。

9.4.5 弹性材料的简单剪切

欧几里得基（$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$）在 $\mathbb{R}^2$中，任意时刻都是同一基。初始构形 $\Omega_{t_0}=[0,L_1]\otimes[0,L_2]$。初始位置 $[\overrightarrow{OP}]_{\vec{e}}=[\overrightarrow{Op_{t_0}}]_{\vec{e}}=[\vec{X}]_{\vec{e}}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$。令 $\xi\in\mathbb{R}^*$, $p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$，$[\vec{x}]_{|\vec{e}}=[\overrightarrow{Op\ t}(\ )]_{|\vec{e}}$，并且

$$[\vec{x}]_{\vec{e}}=\begin{pmatrix}x=\varphi^1(t,X,Y)=X\\ y=\varphi^2(t,X,Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X+\xi(t-t_0)Y\\ Y\end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

- 欧拉速度 $\vec{v}_t(p_t)=\begin{pmatrix}\xi Y\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi y\\ 0\end{pmatrix}$，因此 $d\vec{v}_t(p_t)=\begin{pmatrix}0 & \xi\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。

- 应变。取 $\kappa_t=\xi(t-t_0)$，变形梯度（与 P 无关）：

$$d\Phi_t^{t_0}(P)=\begin{pmatrix}1 & \kappa_t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=F_t^{t_0},\quad\text{thus}\quad F_t^{t_0}-I=\kappa_t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{9.31}$$

- 无穷小应变张量:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^{t_0}(P)=\frac{F_t^{t_0}(P)-I+(F_t^{t_0}(P)-I)^T}{2}=\frac{\kappa_t}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\varepsilon}}_t. \tag{9.32}$$

- 应力。本构定律：通常的线性各向同性弹性（需要欧几里得点积 t):

$$\underline{\underline{\sigma}}(t,p_t)=\lambda\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}_t)I+2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}_t=\mu\kappa_t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\sigma}}_t. \tag{9.33}$$

曲面上的柯西应力向量 $\vec{T}(t,\ p_t)$（在 t处，p_t）于 p处，法向量为 $\vec{n}_t(p)=\begin{pmatrix}n^1\\ n^2\end{pmatrix}=\vec{n}$:

$$\vec{T}_t=\underline{\underline{\sigma}}_t.\vec{n}=\mu\kappa_t\begin{pmatrix}n^2\\ n^1\end{pmatrix}=\mu\xi(t-t_0)\begin{pmatrix}n^2\\ n^1\end{pmatrix}=\vec{T}(t)\quad\text{(stress independent of }p_t\text{)}. \tag{9.34}$$

- 李导数，其中 $\vec{T}_{t_0}=\vec{0}$:

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}(t_0,p_{t_0})=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{T}_t(p_t)-F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{T}_{t_0}(p_{t_0})}{t-t_0}=\mu\xi\begin{pmatrix}n^2\\ n^1\end{pmatrix}\quad\text{(rate of stress at }(t_0,p_{t_0})\text{)}. \tag{9.35}$$

- 一般计算：$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}=\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}+d\vec{T}.\vec{v}-d\vec{v}.\vec{T}$。（9.34）给出 $\frac{\partial\vec{T}}{\partial t}(t,\ p)=\mu\xi\begin{pmatrix}n^2\\ n^1\end{pmatrix}$以及 $d\vec{T}=0$。取 $d\vec{v}_{t_0}.\vec{T}_{t_0}=\vec{0}$。因此 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{T}(t_0,\ p_{t_0})=\mu\xi\begin{pmatrix}n^2\\ n^1\end{pmatrix}$。

9.4.6 剪切流

定常剪切场，见式（5.11），其中 $\alpha=0$ 和 $t_0=0$:

$$\vec{v}(x,y)=\begin{cases}v^1(x,y)=\lambda y,\\ v^2(x,y)=0,\end{cases}\qquad d\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{9.36}$$

令 $\vec{w}(t,p)=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}=\vec{w}(t_0,p_{t_0})$（在时间上为常量，在空间上均匀）。那么 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}=-d\vec{v}.\vec{w}=\begin{pmatrix}-\lambda b\\ 0\end{pmatrix}$度量“流所导致的抗变形能力”。见图 9.2，虚向量 $\vec{w}_*(t,p)=d\Phi(t_0,p_{t_0}).\vec{w}(t_0,p_{t_0})$ 是本可随流运动的向量（推前）。

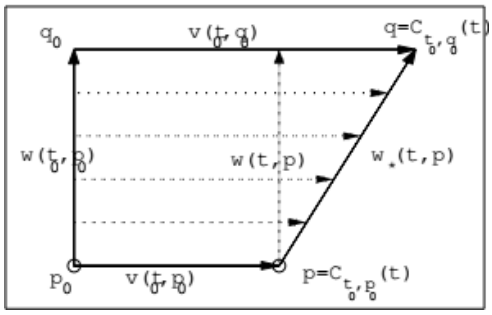


图 9.2：剪切流，参见 (9.36)，其中 $\vec{w}$ 保持恒定且均匀。 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$ 衡量变形所受到的阻力。

9.4.7 自旋

旋转流：继续推导式（5.14）：

$$\vec{v}(x,y)=\omega\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad d\vec{v}(x,y)=\omega\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\omega\,Rot(\pi/2). \tag{9.37}$$

特别是 $d^2\vec{v}=0$。当 $\vec{w}=\vec{w}_0$ 保持恒定且均匀时，我们得到

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_0=-d\vec{v}(p).\vec{w}_0=-\omega\,Rot(\pi/2).\vec{w}_0\qquad(\perp\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\vec{w}_0). \tag{9.38}$$

表示“ $\vec{w}$ 拒绝随流转动时所受到的力”。

9.4.8 二阶李导数

练习 9.11 设 $\vec{v},\vec{w}$ 是 C^2。证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})&=\frac{D^2\vec{w}}{Dt^2}-2d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt}-\frac{D(d\vec{v})}{Dt}.\vec{w}+d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w},\\&=\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}+2d\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}.\vec{v}-2d\vec{v}.\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+d\vec{w}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}-d\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}.\vec{w}\\&\quad+(d^2\vec{w}.\vec{v}).\vec{v}+d\vec{w}.d\vec{v}.\vec{v}-2d\vec{v}.d\vec{w}.\vec{v}-(d^2\vec{v}.\vec{v}).\vec{w}+d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w}.\end{aligned} \tag{9.39}$$

答案。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})&=\frac{D(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})}{Dt}-d\vec{v}.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})=\frac{D(\frac{D\vec{w}}{Dt}-d\vec{v}.\vec{w})}{Dt}-d\vec{v}.(\frac{D\vec{w}}{Dt}-d\vec{v}.\vec{w})\\&=\frac{D^2\vec{w}}{Dt^2}-\frac{D(d\vec{v})}{Dt}.\vec{w}-d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt}-d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt}+d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w},\end{aligned}$$

因此 $(9.39)_1$, 因此 $(9\ 39)_2$. ∎

9.5 微分形式的李导数

当无法通过直接测量获得向量场 $\vec{w}$ 的李导数时，就需要使用一种“测量装置”（Germain：要知道手提箱的重量，就得把它提起来：你可以通过做功来测量）。

这里我们考虑一种测量装置，它是一个微分形式 α。因此，若 $\vec{w}$是一个向量场，则 $f=\alpha.\vec{v}$是一个标量函数，而 (9.13) 给出 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w})=^{D}{}_{(\alpha.\vec{w})\,Dt}=\frac{D\alpha}{Dt}.\vec{w}+\alpha.\frac{D\vec{w}}{Dt}$，因此

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w})=\underbrace{\frac{D\alpha}{Dt}.\vec{w}+\alpha.d\vec{v}.\vec{w}}_{\to(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w}}+\underbrace{\alpha.\frac{D\vec{w}}{Dt}-\alpha.d\vec{v}.\vec{w}}_{=\alpha.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}}: \tag{9.40}$$

定义 **n 9.12** 设 α 是一个微分形式。 α 沿着 $\vec{v}$ 的李导数是微分形式

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha:=\frac{D\alpha}{Dt}+\alpha.d\vec{v}}=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+d\alpha.\vec{v}+\alpha.d\vec{v}. \tag{9.41}$$

（等价的定义见（9.47）。）也就是说，对于所有向量场 $\vec{w}$,

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha.\vec{w}:=\frac{D\alpha}{Dt}.\vec{w}+\alpha.d\vec{v}.\vec{w}\quad(=\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\vec{w}+(d\alpha.\vec{v}).\vec{w}+\alpha.d\vec{v}.\vec{w}). \tag{9.42}$$

$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha$ 的定义（参见（9.41））立即给出"导子性质"

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} + \alpha.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}) \quad \text{(i.e. } \mathcal{L}_{\vec{v}} \text{ is a derivation)}. \tag{9.43}$$

量化： 相对于基 $(\vec{e}_i)$，且有 $[\cdot] := [\cdot]_{|\vec{e}}$，

$$\boxed{[\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha] = [\frac{D\alpha}{Dt}] + [\alpha].[d\vec{v}]} \quad \text{(row matrix)} \quad = [\frac{\partial\alpha}{\partial t}] + [d\alpha.\vec{v}] + [\alpha].[d\vec{v}]. \tag{9.44}$$

Thus

$$[\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha.\vec{w}] = [\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha].[\vec{w}] = [\frac{\partial\alpha}{\partial t}].[\vec{w}] + [d\alpha.\vec{v}].[\vec{w}] + [\alpha].[d\vec{v}].[\vec{w}]. \tag{9.45}$$

练习 9.13 用分量证明 (9.44)。并证明 $[d\alpha.\vec{v}] = [\vec{v}]^T.[d\alpha]^T$ (行矩阵)，因此 $[d\alpha.\vec{v}].[\vec{w}] = [\vec{v}]^T.[d\alpha]^T.[\vec{w}] = [\vec{w}]^T.[d\alpha].[\vec{v}]$。

答案。 基 $(\vec{e}_i)$、对偶基 (π_{ei})，因此 (9.41) 给出 $[\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha] = [\frac{D\alpha}{Dt}] + [\alpha.d\vec{v}]$。令 $\alpha = \sum_i \alpha_i\pi_{ei}$，$\vec{v} = \sum_i v_i\vec{e}_i$ $d\vec{v} = \sum_{ij} v_{i|j}\vec{e}_i \otimes \pi_{ej}$ $[d\vec{v}]_{|\vec{e}} = [v_{i|j}]$ （张量写法便于计算），即，因此 $\alpha.d\vec{v} = \sum_{ij}\alpha_i v_{i|j}\pi_{ej}$，因此 $[\alpha.d\vec{v}]_{|\pi_e} = [\alpha]_{|\pi_e}.[d\vec{v}]_{|\vec{e}}$(行矩阵)。并且 $d\alpha = \sum_{ij}\alpha_{i|j}\pi_{ei}\otimes\pi_{ej}$，即 $[d\alpha]_{|\pi_e} = [\alpha_{i|j}]$，给出 $d\alpha.\vec{v} = \sum_{ij}\alpha_{i|j}v_j\pi_{ei} = \sum_{ij} v_i\alpha_{j|i}\pi_{ej}$，而 $[d\alpha.\vec{v}]_{|\pi_e}$是一个行矩阵（$d\alpha.\vec{v}$是一个微分形式），因此 $[d\alpha.\vec{v}]_{|\pi_e} = [\vec{v}]^T_{|\vec{e}}.[d\alpha]^T_{|\pi_e}$。（或者计算 $(d\alpha.\vec{v}).\vec{w} = \sum_{ij}\alpha_{i|j}v_jw_i = [\vec{w}]^T_{|\vec{e}}.[d\alpha]_{|\vec{e}}.[\vec{v}]_{|\vec{e}} = [\vec{v}]^T_{|\vec{e}}.[d\alpha]^T_{|\pi_e}.[\vec{w}]_{|\vec{e}}$。）

练习 9.14 设 α 为一个微分形式，且 $\alpha_t(p) := \alpha(t,\ p)$。证明，当 $\Phi_t^{t_0}$是微分同胚时，

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall t\in[t_0,T],\ \alpha_t = (\Phi_t^{t_0})_*\alpha_{t_0}. \tag{9.46}$$

即：对所有 t，当 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$ 时，$\frac{D\alpha}{Dt} = -\alpha.d\vec{v} \Longleftrightarrow \alpha_t(p_t) = \alpha_{t_0}(p_{t_0}).F_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}$。

答案。$\Leftarrow$: 若 $\alpha_t(p(t)) = \alpha_{t_0}(p_{t_0}).F_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}$，则 $\alpha(t,p(t)).F^{t_0}(t,p_{t_0}) = \alpha_{t_0}(p_{t_0})$，因此 $\frac{D\alpha}{Dt}(t,p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0}) + \alpha_t(p_t).\frac{\partial F^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0}) = 0$，因此 $\frac{D\alpha}{Dt}(t,p(t)).F_t^{t_0}(p_{t_0}) + \alpha_t(p_t).d\vec{v}(t,p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0}) = 0$，因此 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha = 0$，因为 $\Phi_t^{t_0}$是微分同胚。

$\Rightarrow$: 如果 $\beta(t) := (\Phi_t^{t_0})_*\alpha_{t_0}(p_{t_0}) = \alpha_t(p(t)).F_t^{t_0}(p_{t_0})$（在 (t_0,p_{t_0}) 处拉回），那么 $\beta(t) = \alpha(t,p(t)).F^{t_0}(t,p_{t_0})$，因此 $\beta'(t) = \frac{D\alpha}{Dt}(t,p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0}) + \alpha(t,p_t).d\vec{v}(t,p_t).F_t^{t_0}(p_{t_0}) = 0$（假设 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha = 0$），因此 $\beta(t) = \beta(t_0) = \alpha_{t_0}(p_{t_0})$。

备注 9.15 一个等价于 (9.41) 的定义是（参见 (9.10)）：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha(t,p_t) &:= \lim_{\tau\to t}\frac{(\Phi_\tau^t)^*\alpha_\tau(p_t) - \alpha_t(p_t)}{\tau - t} \quad (= \lim_{\tau\to t}\frac{\alpha_\tau(p_\tau).d\Phi_\tau^t(p_t) - \alpha_t(p_t)}{\tau - t})\\ &\overset{\text{noted}}{=} \frac{D(\Phi_\tau^{t*}\alpha_\tau(p_t))}{D\tau}_{|\tau=t} \overset{\text{noted}}{=} \frac{D(\alpha_\tau^*(p_t))}{D\tau}_{|\tau=t} \quad (= \frac{D(\alpha_\tau(p_\tau).d\Phi_\tau^t(p_t))}{D\tau}_{|\tau=t}).\end{aligned} \tag{9.47}$$

事实上，如果 $\beta(\tau) = (\Phi_\tau^t)^*\alpha_\tau(p_t) = \alpha_\tau(p_\tau).d\Phi_\tau^t(p_t)$，那么 $\beta'(\tau)$，进而 $\tau = t$ 得出 (9.41)。

练习 9。16 $\vec{v}$ 且 α 为 C^2，证明：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) = &\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 2d\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\vec{v} + 2\frac{\partial\alpha}{\partial t}.d\vec{v} + d\alpha.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \alpha.\frac{\partial d\vec{v}}{\partial t}\\ &+ (d^2\alpha.\vec{v}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{v}) + 2(d\alpha.\vec{v}).d\vec{v} + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{v}) + (\alpha.d\vec{v}).d\vec{v}.\end{aligned} \tag{9.48}$$

答案。 (9.41) 给出

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) &= \mathcal{L}_{\vec{v}}(\frac{\partial\alpha}{\partial t}) + \mathcal{L}_{\vec{v}}(d\alpha.\vec{v}) + \mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.d\vec{v})\\ &= \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + d\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\vec{v} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.d\vec{v} + \frac{\partial(d\alpha.\vec{v})}{\partial t} + d(d\alpha.\vec{v}).\vec{v} + (d\alpha.\vec{v}).d\vec{v} + \frac{\partial(\alpha.d\vec{v})}{\partial t} + d(\alpha.d\vec{v}).\vec{v} + (\alpha.d\vec{v}).d\vec{v}\\ &= \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + d\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\vec{v} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.d\vec{v} + \frac{\partial d\alpha}{\partial t}.\vec{v} + d\alpha.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (d^2\alpha.\vec{v}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{v}) + (d\alpha.\vec{v}).d\vec{v}\\ &\quad + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.d\vec{v} + \alpha.\frac{\partial d\vec{v}}{\partial t} + (d\alpha.\vec{v}).d\vec{v} + \alpha.d^2\vec{v}.\vec{v} + (\alpha.d\vec{v}).d\vec{v}\\ &= \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + 2d\frac{\partial\alpha}{\partial t}.\vec{v} + 2\frac{\partial\alpha}{\partial t}.d\vec{v} + d\alpha.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (d^2\alpha.\vec{v}).\vec{v} + d\alpha.(d\vec{v}.\vec{v}) + 2(d\alpha.\vec{v}).d\vec{v} + \alpha.\frac{\partial d\vec{v}}{\partial t}\\ &\quad + \alpha.(d^2\vec{v}.\vec{v}) + (\alpha.d\vec{v}).d\vec{v}.\end{aligned}$$

9.6 与里斯表示向量的不相容性

李导数与任何内积都无关（李导数并不比较两个向量，这与柯西型方法相反）。

这里我们引入一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$，并说明线性形式 α的李导数不能由 α 的里斯表示向量的李导数平凡地推导出来（究竟是哪一个？）。（与第 § 7.2 节中的问题相同。）

设 α 为一个欧拉微分形式；再令 $\vec{a}_g(t,\ p) \in \vec{\mathbb{R}}^n$ 为线性形式 $\alpha(t,\ p) \in \mathbb{R}^{n*}$的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示向量：于是，对于任意欧拉向量场 $\vec{w}$,

$$\alpha.\vec{w} = (\vec{a}_g, \vec{w})_g \qquad (= \vec{a}_g \bullet_g \vec{w}), \tag{9.49}$$

这意味着 $\alpha(t,\ p).\vec{w}(t,\ p) = (\vec{a}_g(t,\ p)\ \vec{w}(t,\ p))_g$ 对于所有可容许的（$t,\ p$）均成立。这定义了欧拉向量场 $\vec{a}_g$（不是 α的内禀对象：$\vec{a}_g$ 取决于 $(\cdot,\ \cdot)_g$的选择，参见（F.12））。

命题 9.17 对于所有 $\vec{v},\ \vec{w} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}.\vec{w} = (\frac{\partial \vec{a}_g}{\partial t}, \vec{w})_g, \quad (d\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (d\vec{a}_g.\vec{v}, \vec{w})_g, \quad \frac{D\alpha}{Dt}.\vec{w} = (\frac{D\vec{a}_g}{Dt}, \vec{w})_g. \tag{9.50}$$

Thus

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha.\vec{w} = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{a}_g, \vec{w})_g + (\vec{a}_g, (d\vec{v}+d\vec{v}^T).\vec{w})_g, \quad \textit{and} \quad \boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha.\vec{w} \neq (\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{a}_g, \vec{w})_g} \quad \textit{in general.} \tag{9.51}$$

因此，$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{a}_g$ 不是 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha$ 的里斯表示向量（但对刚体运动而言是）。*(预期结果：李导数是协变客观的，见 § 11.4，而使用内积会破坏这种客观性。)*

证明。 欧几里得点积 $g(\cdot,\ \cdot)$ 是双线性、常数且均匀的，因此：
$\alpha.\vec{w} = (\vec{a}_g,\ \vec{w})_g$给出$\frac{\partial \alpha}{\partial t}.\vec{w} + \alpha.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = (\frac{\partial \vec{a}_g}{\partial t},\ \vec{w})_g + (\vec{a}_g,\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial t})_g$，其中$\alpha.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = (\vec{a}_g,\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial t})_g$，因此剩下$\frac{\partial \alpha}{\partial t}.\vec{w} = (\frac{\partial \vec{a}_g}{\partial t},\ \vec{w})_g$，对所有 $\vec{w}$ 均成立。
$\alpha.\vec{w} = (\vec{a}_g,\ \vec{w})_g$对所有 $\vec{v},\ \vec{w}$，均有 $d(\alpha.\vec{w}).\vec{v} = d(\vec{a}_g,\ \vec{w})_g.\vec{v}$，因此 $(d\alpha.\vec{v}).\vec{w} + \alpha.(d\vec{w}.\vec{v}) = (d\vec{a}_g.\vec{v},\ \vec{w})_g + (\vec{a}_g,\ d\vec{w}.\vec{v})_g$，且 $\alpha.(d\vec{w}.\vec{v}) = (\vec{a}_g,\ d\vec{w}.\vec{v})_g$，因此我们只剩下 $(d\alpha.\vec{v}).\vec{w} = (d\vec{a}_g.\vec{v},\ \vec{w})_g$。
因此 $\frac{D\alpha}{Dt}\vec{w} = (\frac{D\vec{a}_g}{Dt}\ \vec{w})_g$。
Thus $(\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} = \frac{D\alpha}{Dt}.\vec{w} + \alpha.d\vec{v}.\vec{w} = (\frac{D\vec{a}_g}{Dt}, \vec{w})_g + (\vec{a}_g, d\vec{v}.\vec{w})_g = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{a}_g + d\vec{v}.\vec{a}_g, \vec{w})_g + (d\vec{v}_g^T.\vec{a}_g, \vec{w})$ ∎

注9.18 合唱：不应将“微分形式”（测量工具，协变）与“向量场”（被测物体，逆变）混淆；因此，点积（哪一种？）和里斯表示定理的使用应限于计算目的，并且须在建立客观方程之后。另见注F.13。

∎

9.7 张量的李导数

任意 ≥ 2 阶张量的李导数定义如下

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}(T \otimes S) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_{\vec{v}}S) \quad \text{(derivation formula)}. \tag{9.52}$$

（或直接定义：$\mathcal{L}_{\vec{v}}T(t_0,\ p_{t_0}) = {}^{D}{}_{((\Phi_t^{t_0})^*T_t)(p_{t_0})\,Dt}\ \ |t=t_0)$。

9.7.1 混合张量的李导数

令 $T_m \in T_1^1(\Omega),\ T_m$ 称为混合张量；其李导数（称为雅曼导数）为

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}T_m = \frac{DT_m}{Dt} - d\vec{v}.T_m + T_m.d\vec{v}} = \frac{\partial T_m}{\partial t} + dT_m.\vec{v} - d\vec{v}.T_m + T_m.d\vec{v}. \tag{9.53}$$

可用一个初等张量 $T = \vec{w} \otimes \alpha$ 检验：我们有 $d(\vec{w} \otimes \alpha).\vec{v} = (d\vec{w}.\vec{v}) \otimes \alpha + \vec{w} \otimes (d\alpha.\vec{v})$ 和 $(d\vec{v}.\vec{w}) \otimes \alpha = d\vec{v}.(\vec{w} \otimes \alpha)$，且 $\vec{w} \otimes (\alpha.d\vec{v}) = (\vec{w} \otimes \alpha).d\vec{v}$，因此 (9.52) 给出 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\vec{w} \otimes \alpha) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}) \otimes \alpha + \vec{w} \otimes (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \otimes \alpha + (d\vec{w}.\vec{v}) \otimes \alpha - (d\vec{v}.\vec{w}) \otimes \alpha + \vec{w} \otimes \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{w} \otimes (d\alpha.\vec{v}) + \vec{w} \otimes (\alpha.d\vec{v}) = \frac{\partial \vec{w} \otimes \alpha}{\partial t} + d(\vec{w} \otimes \alpha).\vec{v} - d\vec{v}.(\vec{w} \otimes \alpha) + (\vec{w} \otimes \alpha).d\vec{v}$。

量化。 相对于基 $(\vec{e}_i)$:

$$[\mathcal{L}_{\vec{v}}T_m]=[\frac{DT_m}{Dt}]-[d\vec{v}].[T_m]+[T_m].[d\vec{v}] \tag{9.54}$$

（符号 $\mp$ 是混合的）。“混合”也指指标的位置（上下排列，采用对偶记号）：$T_m=\sum_i^n{}_{,\ j=1}T^i{}_j\vec{e}_i\otimes e^j$ 与对偶基（e^i），即 $[T_m]_{|\vec{e}}=[T^i{}_j]$。

练习 9.19 用分量证明（9.54）。

答案。 $\underline{\frac{\partial T_m}{\partial t}}=\sum_{ij}\underline{\frac{\partial T^i{}_j}{\partial t}\vec{e}_i}\otimes e^j$、 $dT_m=\sum_{ijk}T^i{}_{j|k}\vec{e}_i\otimes e^j\otimes e^k$、 $\vec{v}=\sum_i v^i\vec{e}_i$、 $d\vec{v}=\sum_{ij}v^i_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$，因此 $dT_m.\vec{v}=\sum_{ijk}T^i{}_{j|k}v^k\vec{e}_i\otimes e^j$、 $d\vec{v}.T_m=\sum_{ijk}v^i_{|k}T^k{}_j\vec{e}_i\otimes e^j$、 $T_m.d\vec{v}=\sum_{ijk}T^i{}_kv^k_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$。 ∎

9.7.2 逆变张量的李导数

Rec对所有：若 $L\in\mathcal{L}(E;F)$（一个线性映射），则其伴随 $L^*\in\mathcal{L}(F^*;E^*)$ 定义为，参见 § A.12,

$$\forall m\in F^*,\quad \boxed{L^*.m:=m.L},\quad \text{i.e.,}\quad \forall m,\vec{u}\in(F^*\times E),\quad (L^*.m).\vec{u}=m.L.\vec{u}. \tag{9.55}$$

（这里不涉及内积。）特别地，对所有 $m\in\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t$， $d\vec{v}^*.m:=m.d\vec{v}$，即对所有 $m\in\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t$ 和所有 $\vec{u}\in\vec{\mathbb{R}}^n_t$，$(d\vec{v}^*.m).\vec{u}=(m.d\vec{v}).\vec{u}=m.(d\vec{v}.\vec{u})$。

设 $T_u\in T^2_0(\Omega)$，且 T_u 称为逆变张量；其李导数称为上对流（麦克斯韦）导数或奥尔德罗伊德导数，定义为

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}T_u=\frac{DT_u}{Dt}-d\vec{v}.T_u-T_u.d\vec{v}^*}=\frac{\partial T_u}{\partial t}+dT_u.\vec{v}-d\vec{v}.T_u-T_u.d\vec{v}^*. \tag{9.56}$$

可用初等张量 $T=\vec{u}\otimes\vec{w}$ 和 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\vec{u}\otimes\vec{w})=(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{u})\otimes\vec{w}+\vec{u}\otimes(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})$ 验证。

量化。 相对于基 $(\vec{e}_i)$:

$$[\mathcal{L}_{\vec{v}}T_u]=[\frac{DT_u}{Dt}]-[d\vec{v}].[T_u]-[T_u].[d\vec{v}]^T. \tag{9.57}$$

“上”也指指标的位置（采用对偶记号）：$T_u=\sum_i^n{}_{,\ j=1}T^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ 以及对偶基 (e^i)，即 $[T_u]_{|\vec{e}}=[T^{ij}]$。

练习 9.20 用分量证明 (9.56)。

答案。 $\underline{\frac{\partial T_u}{\partial t}}=\sum_{ij}\underline{\frac{\partial T^{ij}}{\partial t}\vec{e}_i}\otimes\vec{e}_j$， $dT_u=\sum_{ijk}T^{ij}_{|k}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes e^k$， $\vec{v}=\sum_i v^i\vec{e}_i$， $d\vec{v}=\sum_{ij}v^i_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$， $d\vec{v}^*=\sum_{ij}v^j_{|i}e^i\otimes\vec{e}_j$，因此 $dT_u.\vec{v}=\sum_{ijk}T^{ij}_{|k}v^k\vec{e}_i\otimes e^j$， $d\vec{v}.T_u=\sum_{ijk}v^i_{|k}T^{kj}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$， $T_u.d\vec{v}^*=\sum_{ijk}T^{ik}v^j_{|k}e^i\otimes\vec{e}_j$。 ∎

9.7.3 协变张量的李导数

设 $T_d\in T^0_2(\Omega)$， T_d 称为协变张量；李导数称为下随体麦克斯韦导数，其表达式为

$$\boxed{\mathcal{L}_{\vec{v}}T_d=\frac{DT_d}{Dt}+T_d.d\vec{v}+d\vec{v}^*.T_d}=\frac{\partial T_d}{\partial t}+dT_d.\vec{v}+T_d.d\vec{v}+d\vec{v}^*.T_d. \tag{9.58}$$

Ca可用初等张量 $T=\ell\otimes m$ 和 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\ell\otimes m)=(\mathcal{L}_{\vec{v}}\ell)\otimes m+\ell\otimes(\mathcal{L}_{\vec{v}}m)$ 验证 .

量化。 相对于基 $(\vec{e}_i)$:

$$[\mathcal{L}_{\vec{v}}T_d]=[\frac{DT_d}{Dt}]+[T_d].[d\vec{v}]+[d\vec{v}]^T.[T_d]. \tag{9.59}$$

“协变”也指指标的位置（采用对偶记号）：$T_d=\sum_i^n{}_{,\ j=1}T_{ij}e^i\otimes e^j$ 其中对偶基为 (e^i)，即 $[T_d]_{|\vec{e}}=[T_{ij}]$。

练习 9.21 利用分量证明（9.59）。

答案。 $\underline{\frac{\partial T_d}{\partial t}}=\sum_{ij}\underline{\frac{\partial T_{ij}}{\partial t}e^i}\otimes e^j$, $dT_d=\sum_{ijk}T_{ij|k}e^i\otimes e^j\otimes e^k$, $\vec{v}=\sum_i v^i\vec{e}_i$, $d\vec{v}=\sum_{ij}v^i_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$, $d\vec{v}^*=\sum_{ij}v^j_{|i}e^i\otimes\vec{e}_j$，因此 $dT_d.\vec{v}=\sum_{ijk}T_{ij|k}v^ke^i\otimes e^j$, $T_d.d\vec{v}=\sum_{ijk}T_{ik}v^k_{|j}e^i\otimes\vec{e}_j$, $d\vec{v}^*.T_d=\sum_{ijk}v^k_{|i}T_{kj}e^i\otimes\vec{e}_j$。 ∎

例9.22 设 $g=(\cdot,\cdot)_g\in T^0_2(\Omega)$ 是一个恒定且均匀的度量（对所有 t,p 都是唯一的内积，例如，在所有 t 上的欧几里得点积）。那么 $\frac{Dg}{Dt}=0$，因此 $\mathcal{L}_{\vec{v}}g=0+g.d\vec{v}+d\vec{v}^*.g$，因此 $[\mathcal{L}_{\vec{v}}g]=[g].[d\vec{v}]+[d\vec{v}]^T.[g]$。 ∎

第四部分
速度叠加公式

10 参考系变换与速度叠加公式

10.0 问题与结果（总结）

速度叠加公式为（在经典力学中）

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_D, \tag{10.1}$$

其中，$\vec{v}_A$、$\vec{v}_B$ 和 $\vec{v}_D$ 分别是绝对速度、相对速度和驱动速度；$\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_D$ 是观察者 A 在其参考系 $\mathcal{R}_A = (O_A, (\vec{A}_i))$ 中描述的速度，而 $\vec{v}_B$ 是观察者 B 在其参考系 $\mathcal{R}_B = (O_B, (\vec{B}_i))$ 中描述的速度。但是，(10.1) 存在问题（不一致）：

- 速度 $\vec{v}_A$ 和 $\vec{v}_D$ 是在 $\mathcal{R}_A$中量化的，例如由绝对观察者以英尺/秒表示 er,
- 速度 $\vec{v}_B$ 是在 $\mathcal{R}_B$中量化的，例如，相对观察者将其表示为米/秒，

因此，带有 $\vec{v}_B + \vec{v}_D$ 的 (10.1) 表明你要把米/秒和英尺/秒相加.....这很荒谬。所以：

问题：我们遗漏了什么（而且 (10.1) 真正的含义是什么）？

答案：我们遗漏了一个函数关系：A 与 B 之间的平移算子。总结：

将 $\tilde{\Phi}$ 被观察物体 Obj 的运动称为；$\tilde{\Phi}$ 由 A 在其参考系 $\mathcal{R}_A = (O_A, (\vec{A}_i))$ 中量化为“运动” $\vec{\varphi}_A = [\overrightarrow{O_A\tilde{\Phi}}]_{|\vec{A}}$，

由 B 在其参考系 $\mathcal{R}_B = (O_B, (\vec{B}_i))$ 中量化为“运动”$\vec{\varphi}_B = [O_B\Phi]_{|\vec{B}}$。在 t处，平移算子 Θ 将这些数值联系起来：$\vec{\varphi}_A(t, P_{Obj}) = \Theta(t, \vec{\varphi}_B(t, P_{Obj}))$。因此 $\frac{\partial \vec{\varphi}_A}{\partial t}(t, P_{Obj}) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, \vec{x}_{Bt}) + d\Theta(t, \vec{x}_{Bt}).\frac{\partial \vec{\varphi}_B}{\partial t}(t, P_{Obj})$，即 $\vec{v}_A(t, \vec{x}_{At}) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, \vec{x}_{Bt}) + d\Theta(t, \vec{x}_{Bt}).\vec{v}_B(t, \vec{x}_{Bt})$，其中 $\vec{x}_{At} = \vec{\varphi}_A(t, P_{Obj})$且 $\vec{x}_{Bt} = \vec{\varphi}_B(t, P_{Obj})$。接着称

$$d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) = \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = \text{“the translated relative velocity at } t \text{ from B to A”}, \tag{10.2}$$

因此，$\frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, \vec{x}_{Bt}) = \vec{v}_D(t, \vec{x}_{At})$为驱动速度，由此得到 $\vec{v}_A(t, \vec{x}_{At}) = \vec{v}_{B*}(t, \vec{x}_{At}) + \vec{v}_D(t, \vec{x}_{At})$：所以

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{B*} + \vec{v}_D \quad = \quad \text{the velocity addition formula in } \mathcal{R}_A, \tag{10.3}$$

即：（绝对速度）=（平移后的相对速度）+（驱动速度）。

换句话说 ~等，$\vec{v}$为Obj的速度，$\vec{v}_{\mathcal{R}_B}$为 $\mathcal{R}_B$ 在 $\mathcal{R}_A$中的速度：对于所有 $p_t = \Phi(t, P_{Obj})$ ，

$$[\vec{v}_t(p_t)]_{|\vec{A}} = d\Theta_t.[\vec{v}_t(p_t)]_{\vec{B}} + [\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}(p_t)]_{|\vec{A}}, \tag{10.4}$$

A 和 B 所记录的速度数值之间的关系。

例10.1 $\mathcal{R}_B$ 在 $\mathcal{R}_A$中的平移运动，因此$[\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}(p_t)]_{|\vec{A}} = [\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}]_{|\vec{A}}$ 与 p_t线性无关；并且，例如，取（$\vec{B}_{it}$）$= \lambda$（$\vec{A}_{it}$）（例如，$\vec{A}_i$ 以英尺为单位、$\vec{B}_i$ 以米为单位时，得到 $\lambda \simeq 3.28$），$d\Theta_t = \lambda I$，因此 $[\vec{v}_t(p_t)]_{|\vec{A}} = \lambda[\vec{v}_t(p_t)]_{\vec{B}} + [\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}]_{|\vec{A}}$，这正是预期的关系（“单位正确时速度相加”）。 ∎

例10.2 地球绕太阳运动：参见 § 10.11。 ∎

10.1 参考系与“矩阵运动”

10.1.1 绝对参考系与相对参照系

经典力学框架：时间与空间相互独立，所有观察者使用相同的时间单位（例如秒），并处于由 $\mathbb{R}^3$（仿射空间）及其通常的关联向量空间 $\vec{\mathbb{R}}^3$建模的“我们的”宇宙中。下文中，仿射空间 $\mathbb{R}^n$ 与向量空间 $\vec{\mathbb{R}}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$相关联。

观察者 A（我们称之为绝对观察者）在宇宙中选取一个（刚体）物体$Obj\mathcal{R}_A$，在$Obj\mathcal{R}_A$中选取一个粒子，将其在 t时的位置称为 O_{At}，并在$Obj\mathcal{R}_A$中再选取三个粒子，将它们在 t 时（在宇宙中）的位置称为 P_{Ati}，使双点向量 $\vec{A}_{it} := \overrightarrow{O_{At}P_{Ati}}$在 $\vec{\mathbb{R}}^n$中构成一个基。由此，他建立了自己的（笛卡尔）参考系 $\mathcal{R}_{At} = (O_{At}, (\vec{A}_{it}))$，称为绝对参考系；由 A 使用时，记作 $\mathcal{R}_A = (O_A, (\vec{A}_i))$。例如，$Obj\mathcal{R}_A$ 是“延伸至无穷远的太阳”，而在 t时，O_{At} 是太阳中心在宇宙中的位置，$(\vec{A}_{it})$是一个相对于恒星固定、以英尺为单位的欧几里得基。

观察者 B（我们称之为相对观察者）采取类似的做法：他在宇宙中选取一个（刚体）物体$Obj\mathcal{R}_B$，建立自己的笛卡尔参考系 $\mathcal{R}_{Bt}=(O_{Bt},(\vec{B}_{it}))$，称为相对参照系；由 B 使用时，记作 $\mathcal{R}_B=(O_B,(\vec{B}_i))$。例如，$Obj\mathcal{R}_B$是“延伸至无穷远的地球”，而在 t时，O_{Bt} 是地心的位置，$(\vec{B}_{it})$是一个相对于地球固定、以米为单位的欧几里得基。

$\mathcal{M}_{n1}$是由 $n*1$ 矩阵（列矩阵）构成的向量空间。A 和 B 将由“矩阵位置” $[\overrightarrow{O_{At}p_t}]_{|\vec{A}}$ 和 $[\overrightarrow{O_{Bt}p_t}]_{|\vec{B}}$ 构成的 $n*1$ 矩阵仿射空间分别记作 $\mathcal{M}_{n1}$(A) 和 $\mathcal{M}_{n1}$(B)，其中 p_t 是宇宙中某个粒子在 t 时刻的位置。

若给定函数 φ，使得 $\varphi(t,\ x)$，则 $\varphi_t(x):=\varphi(t,\ x)$，反之亦然。

10.1.2 材料物体的运动 Obj

所有观察者都考虑一个物体 Obj。它在宇宙中的运动为

$$\widetilde{\Phi}:\begin{cases}[t_1,t_2]\times Obj\ \to\mathbb{R}^n\\ \qquad (t,P_{Obj})\ \to p_t=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})=\text{position of the particle } P_{Obj} \text{ at t in the Universe.}\end{cases}\tag{10.5}$$

~在 t 时，于 $p_t=\Phi(t,\ P_{Obj})$ 处，P_{Obj} 的欧拉速度和加速度为

$$\vec{v}(t,p_t)=\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t,P_{Obj})\quad\text{and}\quad\vec{\gamma}(t,p_t)=\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial^2 t}(t,P_{Obj})\quad(\in\vec{\mathbb{R}}^n).\tag{10.6}$$

10.1.3 量化：Obj 的绝对与相对“运动”

~在 t处，粒子 $P_{Obj}\in Obj$的位置 $p_t=\Phi(t,P_{Obj})$ 由 A 和 B 分别通过 $\vec{\mathbb{R}}^n$中的双点向量 $\overrightarrow{O_{At}p_t}$和 $\overrightarrow{O_{Bt}p_t}$来确定，其分量分别由 A 和 B 存储在各自的参考系中：

$$\overrightarrow{O_{At}p_t}=\sum_{i=1}^n x_{Ati}\vec{A}_{it}\quad\text{and}\quad\overrightarrow{O_{Bt}p_t}=\sum_{i=1}^n x_{Bti}\vec{B}_{it},\tag{10.7}$$

并且，$(\vec{E}_i)$ 是 $\mathcal{M}_{n1}$中的典范基，矩阵 $n*1$

$$\vec{x}_{At}:=[\overrightarrow{O_Ap_t}]_{|\vec{A}}=\begin{pmatrix}x_{At1}\\ \vdots\\ x_{Atn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_{Ati}\vec{E}_i,\quad\text{and}\quad\vec{x}_{Bt}:=[\overrightarrow{O_Bp_t}]_{|\vec{B}}=\begin{pmatrix}x_{Bt1}\\ \vdots\\ x_{Btn}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n x_{Bti}\vec{E}_i,\tag{10.8}$$

由 A 和 B 存储。（初始记号：$\vec{x}_{At}:=[\overrightarrow{O_{At}p_t}]_{|(\vec{A}_{it})}$，但此处 O_{At}和 $(\vec{A}_{it})$ 固定在 $\mathcal{R}_A$中，B 也同上。）

注意这些记号：p_t 是一个点，$\overrightarrow{O_{At}p_t}$ 是一个向量，$\vec{x}_{At}$ 是一个列矩阵（分量 ）.
这定义了Obj（矩阵值）的“绝对运动” $\vec{\varphi}_A$ 和“相对运动” $\vec{\varphi}_B$：

$$\vec{\varphi}_A:\begin{cases}[t_1,t_2]\times Obj\ \to\mathcal{M}_{n1}(\text{A})\\ \qquad (t,P_{Obj})\ \to\boxed{\vec{\varphi}_A(t,P_{Obj}):=[\overrightarrow{O_A\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})}]_{|\vec{A}}}=\sum_{i=1}^n x_{Ai}(t)\vec{E}_i\overset{\text{noted}}{=}\vec{x}_A(t)=[\overrightarrow{O_Ap(t)}]_{|\vec{A}},\end{cases}\tag{10.9}$$

$$\vec{\varphi}_B:\begin{cases}[t_1,t_2]\times Obj\ \to\mathcal{M}_{n1}(\text{B})\\ \qquad (t,P_{Obj})\ \to\boxed{\vec{\varphi}_B(t,P_{Obj}):=[\overrightarrow{O_B\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})}]_{|\vec{B}}}=\sum_{i=1}^n x_{Bi}(t)\vec{E}_i\overset{\text{noted}}{=}\vec{x}_B(t)=[\overrightarrow{O_Bp(t)}]_{|\vec{B}}.\end{cases}\tag{10.10}$$

P_{Obj} 的“绝对”和“相对”速度与加速度为（取值于 $\mathcal{M}_{n1}$ 的矩阵）：

$$\boxed{\vec{v}_A(t,\vec{x}_{At}):=[\vec{v}(t,p_t)]_{|\vec{A}}}\quad\text{and}\quad\vec{\gamma}_A(t,\vec{x}_{At}):=[\vec{\gamma}(t,p_t)]_{|\vec{A}},\quad\text{when}\quad\vec{x}_{At}:=[\overrightarrow{O_Ap_t}]_{|\vec{A}},\tag{10.11}$$

$$\boxed{\vec{v}_B(t,\vec{x}_{Bt}):=[\vec{v}(t,p_t)]_{|\vec{B}}}\quad\text{and}\quad\vec{\gamma}_B(t,\vec{x}_{Bt}):=[\vec{\gamma}(t,p_t)]_{|\vec{B}},\quad\text{when}\quad\vec{x}_{Bt}:=[\overrightarrow{O_Bp_t}]_{|\vec{B}}.\tag{10.12}$$

练习 10.3 证明：$\vec{v}_A(t,\ \vec{x}_{At}) = \frac{\partial \vec{\varphi}_A}{\partial t}(t,P_{Obj})$。
答案。$\overrightarrow{O_{At}\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}\ t}(\ ) = \sum_i x_{Ai}(t)\ \vec{A}_i(t)$ 给出 $\vec{v}(t,p_t) = \sum_i x_{Ai}'(t)\ \vec{A}_i(t) + x_{Ai}(t)\ \vec{A}_i'(t)$，因此 $[\vec{v}(t,p_t)]_{|\vec{A}} = \sum_i x_{Ai}'(t)[\vec{A}_i(t)]_{|\vec{A}} + x_{Ai}(t)[\vec{A}_i'(t)]_{|\vec{A}}$(因为 $\mathcal{M}_{n1}$ 是一个向量空间) $= \sum_i x_{Ai}'(t)\ \vec{E}_i + [\vec{0}]$（ $\vec{A}_i(t)$ 在 $\mathcal{R}_A$中是静止的: $[\vec{A}_i'(t)]_{|\vec{A}} = [\lim_{h\to 0}\frac{\vec{A}_i(t+h)-\vec{A}_i(t)}{h}]_{|\vec{A}} = \lim_{h\to 0}\frac{[\vec{A}_i(t+h)]_{|\vec{A}}-[\vec{A}_i(t)]_{|\vec{A}}}{h} \lim_{h\to 0}\frac{\vec{E}_i-\vec{E}_i}{h} = 0$）。而 $\vec{\varphi}_{AP_{Obj}}(t) = [\overrightarrow{O_A\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}\ t}(\ )]_{|\vec{A}} = \sum_i x_{Ai}(t)[\vec{A}_i(t)]_{|\vec{A}} = \sum_i x_{Ai}(t)\ \vec{E}_i$，因此 $\vec{\varphi}'_{AP_{Obj}}(t) = \sum_i x_{Ai}'(t)\ \vec{E}_i$。 ∎

练习 10。4 $\vec{u}$ 是一个 C^1 向量场，p 是一个点，$\vec{x}_A := [\overrightarrow{O_Ap}]_{|\vec{A}}$ 且 $\vec{u}_A(\vec{x}_A) := [\vec{u}(p)]_{|\vec{A}}$ (矩阵)。证明: $d\vec{u}_A(\vec{x}_A) = [d\vec{u}(p)]_{|\vec{A}}$（ $\mathcal{M}_{n1}$中的自同态），即 $d\vec{u}_A(\vec{x}_A).[\vec{w}]_{|\vec{A}} = [d\vec{u}(p).\vec{w}]_{|\vec{A}}$对所有 $\vec{w}\in\vec{\mathbb{R}}^n$成立。

答案。点 $p+h\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ 被 A 记作 $[\overrightarrow{O_Ap}+h\vec{w}]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_Ap}]_{|\vec{A}} + h[\vec{w}]_{|\vec{A}} = \vec{x}_A + h[\vec{w}]_{|\vec{A}}$。因此 $d\vec{u}_A(\vec{x}_A).[\vec{w}]_{|\vec{A}} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}_A(\vec{x}_A+h[\vec{w}]_{|\vec{A}})-\vec{u}_A(\vec{x}_A)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[\vec{u}(p+h\vec{w})]_{|\vec{A}}-[\vec{u}\_p\,]_{|\vec{A}}}{h}(\ )\lim_{h\to 0}\frac{[\vec{u}(p+h\vec{w})-\vec{w}\_p\,]_{|\vec{A}}}{h}(\ ) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}(p+h\vec{w})-\vec{u}(p)}{h}]_{|\vec{A}} = [d\vec{u}(p).\vec{w}]_{|\vec{A}} = [d\vec{u}(p)]_{|\vec{A}}.[\vec{w}]_{|\vec{A}}$，对所有 $\vec{w}$均成立。 ∎

练习 10.5 称 Q_t 为从($\vec{A}_{it}$) 到($\vec{B}_{it}$) 在 t处的过渡矩阵。证明 $\vec{x}_{At} = [\overrightarrow{O_AO_{Bt}}]_{|\vec{A}} + Q_t.\vec{x}_{Bt}$。**答案**。
$\vec{x}_{At} = [\overrightarrow{O_Ap_t}]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_AO_{Bt}} + \overrightarrow{O_{Bt}p_t}]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_AO_{Bt}}]_{|\vec{A}} + [\overrightarrow{O_{Bt}p_t}]_{|\vec{A}}$，基变换公式给出 $[\overrightarrow{O_{Bt}p_t}]_{|\vec{B}} = Q_t^{-1}.[\overrightarrow{O_{Bt}p_t}]_{|\vec{A}}$。 ∎

10.1.4 $\mathcal{R}_B$的运动

特殊情况 $Obj = Obj\mathcal{R}_B$: 其在宇宙中的运动，也称为 $\mathcal{R}_B$ 的运动，记作

$$\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}:\begin{cases}[t_1,t_2]\times Obj\mathcal{R}_B & \to\mathbb{R}^n\\ (t,Q_{\mathcal{R}_B}) & \to q_t=\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B}).\end{cases}\tag{10.13}$$

$\widetilde{}$在 t处，在 $q_t=\Phi_{\mathcal{R}_B}(t,\ Q_{\mathcal{R}_B})$ 处，$Q_{\mathcal{R}_B}$ 的欧拉速度和加速度为

$$\vec{v}_{\mathcal{R}_B}(t,q_t)=\frac{\partial\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}}{\partial t}(t,Q_{\mathcal{R}_B})\quad\text{and}\quad\vec{\gamma}_{\mathcal{R}_B}(t,q_t)=\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}}{\partial^2 t}(t,Q_{\mathcal{R}_B}).\tag{10.14}$$

10.1.5 量化： $\mathcal{R}_B$ 的驱动力和静态“运动”

“驱动运动” $\vec{\varphi}_D$，也称为 $\mathcal{R}_B$ 在 $\mathcal{R}_A$ 中的运动，以及“静态运动” $\vec{\varphi}_S$，是由 A 和 B 对 $\Phi_{\mathcal{R}_B}$ 进行的量化 $\widetilde{}$:

$$\vec{\varphi}_D:\begin{cases}[t_1,t_2]\times Obj\mathcal{R}_B & \to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})\\ (t,Q_{\mathcal{R}_B}) & \to\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B}):=[\overrightarrow{O_A\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})}]_{|\vec{A}}\overset{\text{noted}}{=}\vec{y}_D(t)=[\overrightarrow{O_Aq(t)}]_{|\vec{A}},\end{cases}\tag{10.15}$$

$$\vec{\varphi}_S:\begin{cases}Obj\mathcal{R}_B & \to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})\\ Q_{\mathcal{R}_B} & \to\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}):=[\overrightarrow{O_B\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})}]_{|\vec{B}}\overset{\text{noted}}{=}\vec{y}_S=[\overrightarrow{O_Bq(t)}]_{|\vec{B}}.\end{cases}\tag{10.16}$$

($\vec{\varphi}_S$ 与 t 线性无关，因为 $Obj\mathcal{R}_B$ 在 $\mathcal{R}_B$ 中固定。)
$\mathcal{R}_B$ 在 $\mathcal{R}_A$ 中的速度（也称为驱动速度），以及 $Q_{\mathcal{R}_B}$ 的静止速度为

$$\vec{v}_D(t,\vec{y}_{Dt}):=[\vec{v}_{\mathcal{R}_B}(t,q_t)]_{|\vec{A}}\quad\text{when}\quad\vec{y}_{Dt}:=[\overrightarrow{O_Aq_t}]_{|\vec{A}},\tag{10.17}$$

$$\vec{v}_S(t,\vec{y}_S):=[\vec{v}_{\mathcal{R}_B}(t,q_t)]_{|\vec{B}}=[\vec{0}]\overset{\text{noted}}{=}\vec{0}\ (\text{null matrix}).\tag{10.18}$$

驱动力和静止加速度分别为 $\vec{\gamma}_D(t,\vec{y}_{Dt})=[\vec{\gamma}_{\mathcal{R}_B}(t,q_t)]_{|\vec{A}}$以及 $\vec{\gamma}_S(t,\vec{y}_S)=\vec{0}$。

练习10.6 为什么要引入 $\vec{\varphi}_S$ (静止)?

答案。不能把粒子 $Q_{\mathcal{R}_B}$ 与其存储位置 $\vec{y}_S$ 或 $\vec{y}_{Dt}$ 在 t处混淆。另见（10.19） . ∎

10.2 平移算子 Θ_t

10.2.1 定义 Θ_t

D定义 10.7 在 t处，平移算子 Θ_t：$\mathcal{M}_{n1}$(B) $\to \mathcal{M}_{n1}$(A) 按照（10.15）–（10.16）定义 by:

$$\left.\begin{array}{l} [\overrightarrow{O_B q(t)}]_{|\vec{B}} = \vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}) = \vec{y}_S \text{ position of } Q_{\mathcal{R}_B} \text{ in } \mathcal{R}_B \text{ (static), and} \\ [\overrightarrow{O_A q(t)}]_{|\vec{A}} = \vec{\varphi}_{Dt}(Q_{\mathcal{R}_B}) = \vec{y}_{Dt} \text{ position of } Q_{\mathcal{R}_B} \text{ at } t \text{ in } \mathcal{R}_A \text{ (moving)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{y}_{Dt} = \Theta_t(\vec{y}_S), \tag{10.19}$$

即， Θ_t 是“在 t处的互指函数”，它将“矩阵位置” $\vec{y}_S = \vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B})$ $\overrightarrow{\sim}$ $Q_{\mathcal{R}_B}$的位置）映射为“矩阵位置” $\vec{y}_{Dt} = \vec{\varphi}_D(t,\ Q_{\mathcal{R}_B})$ $\overrightarrow{\sim}$ 的位置）。因此， Θ_t定义为

$= [O_B \Phi_{\mathcal{R}_B}(t,\ Q_{\mathcal{R}_B})]_{|\vec{B}} \in \mathcal{M}_{n1}$(B)（B 所存储的

$= [O_A \Phi_{\mathcal{R}_B}(t,\ Q_{\mathcal{R}_B})]_{|\vec{A}} \in \mathcal{M}_{n1}$(A)（A 所存储的 $Q_{\mathcal{R}_B}$

$$\boxed{\vec{\varphi}_{Dt} = \Theta_t \circ \vec{\varphi}_S} : \left\{\begin{array}{ll} Obj\mathcal{R}_B & \to \mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A}) \\ Q_{\mathcal{R}_B} & \to \vec{\varphi}_{Dt}(Q_{\mathcal{R}_B}) := \Theta_t(\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B})), \end{array}\right. \tag{10.20}$$

即，定义为

$$\Theta_t := \vec{\varphi}_{Dt} \circ \vec{\varphi}_S^{-1} : \left\{\begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B}) & \to \mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A}) \\ \vec{y}_S & \to \vec{y}_{Dt} = \Theta_t(\vec{y}_S) := \vec{\varphi}_{Dt}(\vec{\varphi}_S^{-1}(\vec{y}_S)) \end{array}\right. \tag{10.21}$$

（从 B 所存储的位置到 A 所存储的位置）。

例如，对于在$Obj\mathcal{R}_B$ 中位于 t 处、于 O_{Bt} 处的Q_{O_B} 粒子（由 B 选定以确定其原点），(10.20) 给出，其中 $\vec{0}$ 是 $\mathcal{M}_{n1}$中的零矩阵，

$$[\overrightarrow{O_A O_{Bt}}]_{|\vec{A}} = \Theta_t(\vec{0}). \tag{10.22}$$

因此， Θ_t 的定义使得下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} & & \vec{y}_S = \vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}) = \text{localization of } Q_{\mathcal{R}_B} \text{ by B} \\ & \overset{\vec{\varphi}_S}{\nearrow} & \\ Q_{\mathcal{R}_B} \in Obj\mathcal{R}_B & & \Big\downarrow \Theta_t \\ & \underset{\vec{\varphi}_{Dt}}{\searrow} & \\ & & \vec{y}_{Dt} = \vec{\varphi}_{Dt}(Q_{\mathcal{R}_B}) = \Theta_t(\vec{y}_S) = \text{在 } t \text{ 处对 } Q_{\mathcal{R}} \text{的定位}_B \text{ 由 A.} \end{array} \tag{10.23}$$

$\overset{\sim}{}$10.2.2 在 t 时对运动 Φ进行平移

$\overset{\sim}{}$ $\sim t$固定时，粒子 $P_{Obj} \in Obj$的位置 $p_t = \Phi(t, P_{Obj})$ 也是粒子 $Q_{\mathcal{R}_B} \in \mathcal{R}_B$ $\vec{\varphi}_{At}\ P_{Obj} = [\overrightarrow{O_A p_t}]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_A q_t}]_{|\vec{A}} = \vec{\varphi}_{Dt}\ Q_{\mathcal{R}_B}$ $\vec{\varphi}_{Bt}\ P_{Obj} = [\overrightarrow{O_B p_t}]_{|\vec{B}} = Obj$的位置 $q_t = \Phi_{\mathcal{R}_B}(t, [\overrightarrow{O_B q_t}]_{|\vec{B}} = \vec{\varphi}_S\ Q_{\mathcal{R}_B}$ 10 20 $Q_{\mathcal{R}_B}$)，因此 ( ) ( )，且 ( ) ( )，于是 (.) 得出

$$\boxed{\vec{\varphi}_{At} = \Theta_t \circ \vec{\varphi}_{Bt}}. \tag{10.24}$$

10.3 $d\Theta_t$

10.3.1 推前

若 $\vec{y}_S \in \mathcal{M}_{n1}$(B)、 $\vec{w}_S \in \mathcal{M}_{n1}$ 和 $\vec{y}_{Dt} = \Theta_t(\vec{y}_S)$，则

$$\vec{w}_{St*}(\vec{y}_{Dt}) := d\Theta_t(\vec{y}_S).\vec{w}_S \quad (= \lim_{h \to 0} \frac{\Theta_t(\vec{y}_S + h\vec{w}_B) - \Theta_t(\vec{y}_S)}{h}) \tag{10.25}$$

是矩阵 $\vec{w}_S \in \mathcal{M}_{n1}$ 经过 Θ_t 推前得到的。

因此，对于所有 $q_t \in \mathbb{R}^n$ 和所有 $\vec{w}_t$： $\mathbb{R}^n \to \vec{\mathbb{R}}^n$（向量场）。

10.3.2 Θ_t 在经典力学中是仿射的

命题 10.8 在 $\mathbb{R}^3$（经典力学中），Θ_t 是仿射的：对于所有 Q_{B0}、$Q_{B1} \in Obj\mathcal{R}_B$，以及所有满足 $q_{t_i} = \Phi_{\mathcal{R}_B}(t、\ Q_{Bi})$ 的 t、$u \in \mathbb{R}$、$\tilde{}$（我们宇宙中 t 处的位置），

$$\Theta_t([\overrightarrow{O_B q_{t_0}}]_{|\vec{B}} + u\,[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{B}}) = [\overrightarrow{O_A q_{t_0}}]_{|\vec{A}} + u\,[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{A}}, \quad and \quad [\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{A}} = d\Theta_t.[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{B}} \tag{10.26}$$

微分 $d\Theta_t(\vec{y}_{S0})$ =所记的 $d\Theta_t$ 与 $\vec{y}_{S0}$ 线性无关。特别地，$[\vec{B}_{it}]_{\vec{A}} = d\Theta_t.[\vec{B}_i]_{|\vec{B}}$。换言之，对于所有的 $\vec{y}_{S0}$、$\vec{y}_{S1} \in \mathcal{M}_{n1}(B)$ 以及所有的 t、$u \in \mathbb{R}$，

$$\Theta_t((1-u)\vec{y}_{S0} + u\,\vec{y}_{S1}) = (1-u)\Theta_t(\vec{y}_{S0}) + u\,\Theta_t(\vec{y}_{S1}), \quad and \quad \Theta_t(\vec{y}_{S1}) = \Theta_t(\vec{y}_{S0}) + d\Theta_t.(\vec{y}_{S1} - \vec{y}_{S0}). \tag{10.27}$$

证明。考虑直线（在 $\mathbb{R}^3$ q_t $u \to q_t$ u $= q_{t_0} + u\,\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}} \in$ 中的经典力 $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{R}_B$ q_t 0 $= q_{t_0}$ q_t 1 $= q_{t_1}$ $\vec{y}_S$ u $= [\overrightarrow{O_B q_t\ u}]_{|\vec{B}}$
学里是可能的）：（）（在 中固定），特别是，（）和（）。令（）（）（由 B 存储的位置），于是 $\vec{y}_S(u) = [\overrightarrow{O_B q_{t_0}} + u\,\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{B}} = [$ $(1-u)\overrightarrow{O_B q_{t_0}} + u\,\overrightarrow{O_B q_{t_1}}]_{|\vec{B}} =$ $(1-u)[\overrightarrow{O_B q_{t_0}}]_{|\vec{B}} + u\,[\overrightarrow{O_B q_{t_1}}]_{|\vec{B}} =$ $(1-u)\vec{y}_{S0} + u\,\vec{y}_{S1}$，其中 $\vec{y}_{S0} = [\overrightarrow{O_B q_{t_0}}]_{|\vec{B}} = \vec{y}_S(0)$ 和 $\vec{y}_{S1} = [\overrightarrow{O_B q_{t_1}}]_{|\vec{B}} = \vec{y}_S(1)$。A 的情形同上：$\vec{y}_{Dt}([\overrightarrow{O_A q_t\ u}]_{|\vec{A}} =$ $1-u$ $\vec{y}_{Dt_0} + u\vec{y}_{Dt1}$ ）（）（）

（由 A 存储的位置）。因此

$$(1-u)\Theta_t(\vec{y}_{S0}) + u\Theta_t(\vec{y}_{S1}) \overset{(10.19)}{=} (1-u)\vec{y}_{Dt_0} + u\vec{y}_{Dt1} = \vec{y}_{Dt}(u) \overset{(10.19)}{=} \Theta_t(\vec{y}_S(u)) = \Theta_t((1-u)\vec{y}_{S0} + u\vec{y}_{S1}),$$

因此 $(10.27)_1$, 因此 $(10.26)_1$。于是（u 中的导数）：$-\Theta_t(\vec{y}_{S0}) + \Theta_t(\vec{y}_{S1}) = d\Theta_t(\vec{y}_S(u))$。$(-\vec{y}_{S0} + \vec{y}_{S1})$，对所有 u 均成立，因此 $d\Theta_t(\vec{y}_S(u))$ 与 u 线性无关，$d\Theta_t(\vec{y}_S(u)) = d\Theta_t(\vec{y}_{S0})$，对所有 $\vec{y}_{S0}$ 均成立，所以 $d\Theta_t(\vec{y}_{S0})$ =已注意到$d\Theta_t$，因此 $(10.27)_2$, 因此 $(10.26)_2$。于是 $[\overrightarrow{O_{Bt} P_{Bti}}]_{|\vec{A}} = d\Theta_t.[\overrightarrow{O_{Bt} P_{Bti}}]_{|\vec{B}}$，其中 P_{Bti} 满足 $\vec{B}_{it} = \overrightarrow{O_{Bt} P_{Bti}}$，因此 $[\vec{B}_{it}]_{\vec{A}} = d\Theta_t.[\vec{B}_i]_{|\vec{B}}$。 ∎

练习 10.9 设 $Q_t = [Q_{t,ij}]$ 为 $\vec{\mathbb{R}}^n$中从（$\vec{A}_{it}$）到（$\vec{B}_{it}$）的过渡矩阵，且（$\vec{E}_i$）为 $\mathcal{M}_{n1}$中的典范基。证明

$$[d\Theta_t]_{|\vec{E}} = Q_t, \quad \text{i.e.} \quad d\Theta_t.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{t,ij}\vec{E}_i, \ \forall j. \tag{10.28}$$

答案。$\vec{B}_{jt} = \sum_{i=1}^n Q_{t,\ ij}\vec{A}_{it}$给出$[\vec{B}_{jt}]_{|\vec{A}} = \sum_{i=1}^n Q_{t,\ ij}\vec{E}_i$，以及 $[\vec{B}_{jt}]_{|\vec{A}} =^{(10.26)} d\Theta_t.[\vec{B}_{jt}]_{|\vec{B}} = d\Theta_t.\quad \vec{E}_j.$ ∎

10.4 平移速度

t固定，$\vec{v}_t(p_t) = \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}$（$t$, P_{Obj}）是粒子 $P_{Obj} \in Obj$在 t处、于 p_t时的速度，$\vec{x}_{At} := [\overrightarrow{O_{At} p_t}]_{|\vec{A}}$，
$\vec{x}_{Bt}$ Θ_t $:= [\overrightarrow{O_{Bt} p_t}]_{|\vec{B}}$，且为仿射。

定义 **10.10** 从 B 到 A 的平移后的相对速度和加速度在 t at p_t 处为矩阵

$$\boxed{\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) := d\Theta_t.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})} \quad \text{and} \quad \boxed{\vec{\gamma}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t.\vec{\gamma}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})}. \tag{10.29}$$

即，$\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t.[\vec{v}_t(p_t)]_{\vec{B}}$以及 $\vec{\gamma}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t.[\vec{\gamma}_t(p_t)]_{\vec{B}}$。

解释： 设 q_{t_0}和 q_{t_1}是 $Obj\mathcal{R}_B$中的粒子，满足 $\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) = [\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{B}}$，其中 $\vec{x}_{Bt} = [\overrightarrow{O_B q_{t_0}}]_{|\vec{B}}$（此处 $\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}$是曲线 q_t在 q_{t_0}处的切向量：$u \to q_t(u) = q_{t_0} + u\,\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}$，见命题 10.8 的证明）；则 $[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{A}} =^{(10.26)} d\Theta_t.[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{B}}$给出 $[\overrightarrow{q_{t_0} q_{t_1}}]_{|\vec{A}} = d\Theta_t.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) = \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At})$。$\vec{\gamma}_{Bt*}(\vec{x}_{At})$ 也同理。

练习 10.11 $(\vec{A}_i)$ 和 $(\vec{B}_i)$ 是欧几里得基（例如，单位分别为英尺和米），$(\cdot,\cdot)_A$ 和 $(\cdot,\cdot)_B$ 是相应的欧几里得点积，$\lambda = ||\vec{B}_i||_A$（例如 $\simeq 3.28$），$(\vec{E}_i)$ 是 $\mathcal{M}_{n1}$ 中的典范基，而 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{M}}$ 是 $\mathcal{M}_{n1}$ 中的典范内积。令 $\vec{E}_{it*} := d\Theta_t.\vec{E}_i$，并证明：

$$\forall i,j, \ (\vec{E}_{it*}, \vec{E}_{jt*})_{\mathcal{M}} = \lambda^2\delta_{ij}, \quad \text{and} \quad d\Theta_t{}^T.d\Theta_t = \lambda^2 I. \tag{10.30}$$

答案。（$\vec{B}_{it}$）是 B 的欧几里得基，因此对于所有观察者而言，它也是欧几里得正交基，尤其对 A 而言，且对所有 i，都有 $||\vec{B}_{it}||_A = \lambda$。并且 $\vec{E}_{it*} = d\Theta_t.[\vec{B}_{jt}]_{|\vec{B}} =^{(10.26)} [\vec{B}_{it}]_{|\vec{A}}$。因此（$\vec{E}_{it*}$，$\vec{E}_{jt*}$）$_{\mathcal{M}} = [\vec{E}_{it*}]^T.[\vec{E}_{jt*}] = [\vec{B}_{it}]^T_{|\vec{A}}.[\vec{B}_{jt}]_{|\vec{A}} =$（$\vec{B}_{it}$，$\vec{B}_{jt}$）$_A = \lambda^2$（$\vec{B}_{it}$，$\vec{B}_{jt}$）$_B = \lambda^2\delta_{ij}$，因此（10.30）$_1$；然后 $\lambda^2\delta_{ij} =$（$d\Theta_t.\vec{E}_i$，$d\Theta_t.\vec{E}_j$）$_{\mathcal{M}} =$（$d\Theta_t{}^T.d\Theta_t.\vec{E}_i$，$\vec{E}_j$）$_{\mathcal{M}}$，对所有 i，j 都成立，因此 $d\Theta_t{}^T.d\Theta_t = \lambda^2 I$，从而（10.30）$_2$。 ∎

10.5 Θ的定义

定义 10.12 从 B 到 A 的平移算子是由 (10.20) 定义的函数 Θ，其定义如下

$$\Theta:\begin{cases}\bigcup\limits_{t\in[t_1,t_2]}(\{t\}\times\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B}))\ \to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})\\ (t,\vec{y}_S)\ \to\boxed{\Theta(t,\vec{y}_S):=\Theta_t(\vec{y}_S)}\end{cases},\tag{10.31}$$

也就是说，对于所有 $Q_{\mathcal{R}_B}\in Obj\mathcal{R}_B$ 以及所有 t,

$$\Theta(t,[\overrightarrow{O_B\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})}]_{|\vec{B}})=[\overrightarrow{O_A\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})}]_{|\vec{A}},\quad\text{i.e.}\quad\Theta(t,\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}))=\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B}).\tag{10.32}$$

例如，(10.22) 给出 $\Theta(t,\vec{0})=[\overrightarrow{O_AO_B\ t}()]_{|\vec{A}}$。

备注 10.13 平移算子 Θ 看起来像一种运动，但它并不是：“通常的”运动由一个观察者定义，并将一个粒子与其位置联系起来；而 Θ 则将一个粒子相对于两个参考系的两个“矩阵位置”联系起来：Θ 是一个“参考系间”函数。

10.6 “Θ-速度”就是驱动速度

定义 10.14 “Θ-速度”和“Θ-加速度”定义如下（欧拉型定义）

$$\text{with}\quad\vec{y}_{Dt}=\Theta(t,\vec{y}_S),\quad\begin{cases}\vec{v}_\Theta(t,\vec{y}_{Dt}):=\dfrac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{y}_S)\ \ (\in\mathcal{M}_{n1}),\\ \vec{\gamma}_\Theta(t,\vec{y}_{Dt})=\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}(t,\vec{y}_S)\ \ (\in\mathcal{M}_{n1}).\end{cases}\tag{10.33}$$

命题 10.15

$$\boxed{\vec{v}_\Theta=\vec{v}_D}\quad and\quad\boxed{\vec{\gamma}_\Theta=\vec{\gamma}_D},\tag{10.34}$$

即 $\vec{v}_\Theta(t,\vec{y})=\vec{v}_D(t,\vec{y})$ 以及 $\vec{\gamma}_\Theta(t,\vec{y})=\vec{\gamma}_D(t,\vec{y})$ 在 $\mathcal{M}_{n1}$ 中，对所有 t 以及所有 $\vec{y}\in\mathcal{M}_{n1}(A)$。

证明。 $\Theta(t,\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}))=\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B})$ 得出

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}))=\frac{\partial\vec{\varphi}_D}{\partial t}(t,Q_{\mathcal{R}_B}),\quad\text{i.e.}\quad\vec{v}_\Theta(t,\Theta(t,\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B})))=\vec{v}_D(t,\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B})),\tag{10.35}$$

因此 $\vec{v}_\Theta(t,\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B}))=\vec{v}_D(t,\vec{\varphi}_D(t,Q_{\mathcal{R}_B}))$，因此对于所有 $\vec{y}\in\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})$，$\vec{v}_\Theta(t,\vec{y})=\vec{v}_D(t,\vec{y})$。同上，$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

10.7 速度叠加公式

(10.24) 给出

$$\vec{\varphi}_A(t,P_{Obj})=\Theta(t,\vec{\varphi}_B(t,P_{Obj})),\tag{10.36}$$

thus

$$\frac{\partial\vec{\varphi}_A}{\partial t}(t,P_{Obj})=\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{\varphi}_B(t,P_{Obj}))+d\Theta(t,\vec{\varphi}_B(t,P_{Obj})).\frac{\partial\vec{\varphi}_B}{\partial t}(t,P_{Obj}).\tag{10.37}$$

Thus

$$\vec{v}_A(t,\vec{x}_{At})=\vec{v}_\Theta(t,\vec{x}_{At})+d\Theta(t,\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_B(t,\vec{x}_{Bt}),\tag{10.38}$$

其中 $\vec{x}_{Bt}=\vec{\varphi}_B(t,P_{Obj})$ 和 $\vec{x}_{At}=\vec{\varphi}_A(t,P_{Obj})=\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$。因此，取 $\vec{v}_\Theta=^{(10.34)}\vec{v}_D$,

$$\boxed{\vec{v}_{At}=\vec{v}_{Bt*}+\vec{v}_{Dt}}\quad\text{where}\quad\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}):=d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}),\tag{10.39}$$

这就是 $\mathcal{R}_A$ 中的速度叠加公式:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{At}\text{ 绝对速度}=\vec{v}_{Bt*}&\text{ 从 B 到 A 的平移后的相对速度}\\&+\vec{v}_{Dt}\text{ the drive velocity.}\end{aligned}\tag{10.40}$$

I换言之（A 和 B 存储的速度数值之间的关系），

$$[\vec{v}_t(p_t)]_{|\vec{A}}=d\Theta_t.[\vec{v}_t(p_t)]_{\vec{B}}+[\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}(p_t)]_{|\vec{A}}.\tag{10.41}$$

10.8 科里奥利加速度，以及加速度叠加公式

(10.37) 得出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{\varphi}_A}{\partial t^2}\ (t,P_{Obj}) &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2}(t,\vec{x}_{Bt}) + d\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{x}_{Bt}).\frac{\partial\vec{\varphi}_B}{\partial t}(t,P_{Obj})\\ &+\big(\frac{\partial(d\Theta)}{\partial t}(t,\vec{x}_{Bt}) + d^2\Theta(t,\vec{x}_{Bt}).\frac{\partial\vec{\varphi}_B}{\partial t}(t,P_{Obj})\big).\frac{\partial\vec{\varphi}_B}{\partial t}(t,P_{Obj}) + d\Theta(t,\vec{x}_{Bt}).\frac{\partial^2\vec{\varphi}_B}{\partial t^2}(t,P_{Obj}).\end{aligned} \tag{10.42}$$

并且 $d^2\Theta_t=0$ 在我们的经典框架中（Θ_t 是仿射的）；并且 $\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{y}_S)=\vec{v}_{\Theta t}(\Theta_t(\vec{y}_S))$ 给出 $\frac{\partial_{(d\Theta)}}{\partial t}(t,\ \vec{y}_S)=d(\frac{\partial\Theta}{\partial t})(t,\ \vec{y}_S)=d\vec{v}_{\Theta t}(\Theta_t(\vec{y}_S)).d\Theta_t(\vec{y}_S)$;并且 $\frac{\partial\vec{\varphi}_B}{\partial t}(t,\ P_{Obj})=\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$，其中 $\vec{x}_{Bt}=\vec{\varphi}_B(t,\ P_{Obj})$；因此

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{At}(\vec{x}_{At}) &= \vec{\gamma}_{\Theta t}(\vec{x}_{At}) + 2d\vec{v}_{\Theta t}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{\gamma}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})\\ &= \vec{\gamma}_{Dt}(\vec{x}_{At}) + 2d\vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) + \vec{\gamma}_{Bt*}(\vec{x}_{At}).\end{aligned} \tag{10.43}$$

定义10.16 在 t，位于 $\vec{x}_{At}$ 的科里奥利加速度 $\vec{\gamma}_{Ct}$ 为

$$\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At}) = 2d\vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}),\quad \text{i.e.}\quad \boxed{\vec{\gamma}_{Ct}=2d\vec{v}_{Dt}.\vec{v}_{Bt*}}. \tag{10.44}$$

位于 $\vec{x}_{At}$、t 的科里奥利加速度 $\vec{\gamma}_C$ 为 $\vec{\gamma}_C(t,\ \vec{x}_{At}):=\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At})$。

因此，(10.43) 给出了 $\mathcal{R}_A$ 中的加速度叠加公式:

$$\boxed{\vec{\gamma}_{At}=\vec{\gamma}_{Bt*}+\vec{\gamma}_{Dt}+\vec{\gamma}_{Ct}},\quad \text{i.e.} \tag{10.45}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{At}\text{ 绝对加速度} &= \vec{\gamma}_{Bt*}\text{ 从 B 到 A 的平移相对加速度}\\ &+\vec{\gamma}_{Dt}\text{ the drive acceleration} + \vec{\gamma}_{Ct}\text{ the Coriolis acceleration.}\end{aligned} \tag{10.46}$$

换言之（A 和 B 所存储的加速度数值之间的关系），

$$[\vec{\gamma}_t(p_t)]_{|\vec{A}} = d\Theta_t.[\vec{\gamma}_t(p_t)]_{\vec{B}} + [\vec{\gamma}_{\mathcal{R}_{Bt}}(p_t)]_{|\vec{A}} + 2[d\vec{v}_{\mathcal{R}_{Bt}}]_{|\vec{A}}.d\Theta_t.[\vec{v}_t(p_t)]_{|\vec{B}}. \tag{10.47}$$

10.9 带初始时间

令 t_0，$t\in\mathbb{R}$。考虑与运动 $\widetilde{\Phi}$ 相关的拉格朗日关联函数 $\Phi_t^{t_0}$，其中 $\widetilde{\Phi}$ 是Obj的运动 :

$$\Phi_t^{t_0}:\begin{cases}\Omega_{t_0} \to \Omega_t\\ p_{t_0}=\widetilde{\Phi}(t_0,P_{Obj}) \to p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}):=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj}).\end{cases} \tag{10.48}$$

并且，令 $\vec{x}_{At}=\vec{\varphi}_A(t,\ P_{Obj})=[\overrightarrow{O_Ap_t}]_{|\vec{A}}$和 $\vec{x}_{Bt}=\vec{\varphi}_B(t,\ P_{Obj})=[\overrightarrow{O_Bp_t}]_{|\vec{B}}$，定义“矩阵运动”$\vec{\varphi}_{At}^{t_0}$：$\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})$ 和 $\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}:\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})$，如下

$$\begin{cases}\vec{\varphi}_{At}^{t_0}(\vec{x}_{At_0}):=\vec{x}_{At} \quad (=[\overrightarrow{O_A\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})}]_{|\vec{A}}=[\overrightarrow{O_A\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})}]_{|\vec{A}}=\vec{\varphi}_{At}(P_{Obj})),\\ \vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}(\vec{x}_{Bt_0}):=\vec{x}_{Bt} \quad (=[\overrightarrow{O_B\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})}]_{|\vec{B}}=[\overrightarrow{O_B\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})}]_{|\vec{B}}=\vec{\varphi}_{Bt}(P_{Obj})).\end{cases} \tag{10.49}$$

并且 $\Theta_t(\vec{x}_{Bt})=\vec{x}_{At}$，即 $\Theta_t(\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}(\vec{x}_{Bt_0}))=\vec{\varphi}_{At}^{t_0}(\vec{x}_{At_0})$，其中 $\vec{x}_{At_0}=\Theta_{t_0}(\vec{x}_{Bt_0})$，因此

$$\boxed{\Theta_t\circ\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}=\vec{\varphi}_{At}^{t_0}\circ\Theta_{t_0}}:\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A}). \tag{10.50}$$

换句话说，以下图表是交换的:

$$\begin{array}{ccc}\vec{x}_{Bt_0}=\vec{\varphi}_B(t_0,P_{Obj}) & \xrightarrow{\quad\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}\quad} & \vec{x}_{Bt}=\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}(\vec{x}_{Bt_0})\\ \uparrow{\scriptstyle\vec{\varphi}_{Bt_0}} & & \downarrow{\scriptstyle\Theta_t}\\ P_{Obj}\in Obj & & \\ \downarrow{\scriptstyle\vec{\varphi}_{At_0}} & & \\ \vec{x}_{At_0}=\vec{\varphi}_A(t_0,P_{Obj})=\Theta_{t_0}(\vec{x}_{Bt_0}) & \xrightarrow{\vec{\varphi}_{At}^{t_0}} & \vec{x}_{At}=\vec{\varphi}_{At}^{t_0}(\vec{x}_{At_0})=\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\end{array} \tag{10.51}$$

因此，对于 $\mathcal{R}_B$ 中的任意向量场 $\vec{u}_{Bt_0}$，

$$\underbrace{d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})}_{\text{(translation at t)}}.\underbrace{d\vec{\varphi}_{Bt}^{t_0}(\vec{x}_{Bt_0}).\vec{u}_{Bt_0}(\vec{x}_{Bt_0})}_{\text{(deformation from } t_0 \text{ to t)}} = \underbrace{d\vec{\varphi}_{At}^{t_0}(\vec{x}_{At_0})}_{\text{(deformation from } t_0 \text{ to t)}}.\underbrace{d\Theta_{t_0}(\vec{x}_{Bt_0}).\vec{u}_{Bt_0}(\vec{x}_{Bt_0})}_{\text{(translation at } t_0)}. \tag{10.52}$$

练习 10.17 用 $Obj\mathcal{R}_B$ 代替 Obj，重新进行上述步骤。

答案。考虑运动 $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}$ 的拉格朗日关联函数 $\Phi^{t_0}_{RBt}$，其中 $Obj\mathcal{R}_B$:

$$\Phi^{t_0}_{RBt}:\left\{\begin{array}{rl} \Omega_{RBt_0}=\mathbb{R}^n & \to \Omega_{RBt}=\mathbb{R}^n \\ q_{t_0}=\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t_0,Q_{\mathcal{R}_B}) & \to q_t=\Phi^{t_0}_{RBt}(q_{t_0}):=\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B}), \end{array}\right\} \tag{10.53}$$

然后定义"矩阵运动"$\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}:\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A})$ 和 $\vec{\varphi}^{t_0}_{St}:\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})$:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}(\vec{y}_{Dt_0}):=\vec{y}_{Dt}\quad (=\overrightarrow{[O_A\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})]}_{|\vec{A}}=\overrightarrow{[O_A\Phi^{t_0}_{RBt}(p_{t_0})]}_{|\vec{A}}=\vec{\varphi}_{Dt}(Q_{\mathcal{R}_B})), \\ \vec{\varphi}^{t_0}_{St}(\vec{y}_S):=\vec{y}_S\quad (=\overrightarrow{[O_B\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,Q_{\mathcal{R}_B})]}_{|\vec{B}}=\overrightarrow{[O_B\Phi^{t_0}_{RBt}(q_{t_0})]}_{|\vec{B}}=\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B})), \end{array}\right. \tag{10.54}$$

因此，$\vec{\varphi}_S$ 是时间平移，也可不严格地记作 $\vec{\varphi}^{t_0}_{St}=I$（代数恒等式）。于是，由 $\Theta_t(\vec{y}_S)=\vec{y}_{Dt}$，可得 $\Theta_t(\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}(\vec{y}_S))=\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}(\vec{y}_{Dt_0})$，其中 $\vec{y}_{Dt_0}=\Theta_{t_0}(\vec{y}_S)$，因此

$$\boxed{\Theta_t\circ\vec{\varphi}^{t_0}_{St}=\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}\circ\Theta_{t_0}}:\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{B})\to\mathcal{M}_{n1}(\mathrm{A}) \tag{10.55}$$

（也可不严格地写作 $\Theta_t=\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}\circ\Theta_{t_0}$）。换句话说，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccccc} & & \vec{y}_S=\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}) & \xrightarrow[\vec{\varphi}^{t_0}_{St}=\text{time shift}]{} & \vec{y}_S=\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}) \\ & \overset{\vec{\varphi}_S}{\nearrow} & \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta_{t_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta_t} \\ Q_{\mathcal{R}_B}\in Obj\mathcal{R}_B & & & & \\ & \underset{\vec{\varphi}^{t_0}_D}{\searrow} & & & \\ & & \vec{y}_{Dt_0}=\vec{\varphi}_{Dt_0}(Q_{\mathcal{R}_B})=\Theta_{t_0}(\vec{y}_S) & \xrightarrow{\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}} & \vec{y}_{Dt}=\vec{\varphi}_{Dt}(Q_{\mathcal{R}_B})=\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}(\vec{y}_{Dt_0})=\Theta_t(\vec{y}_S). \end{array} \tag{10.56}$$

并且，对于任意 $\vec{y}_S=\vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B})$ 以及所有在 $\mathcal{R}_B$ 中静止的向量场 $\vec{u}_S$，当 $\vec{y}_{Dt_0}=\Theta_{t_0}(\vec{y}_S)$ 时，(10.55) 给出:

$$\underbrace{d\Theta_t(\vec{y}_S)}_{\text{（在 t 时刻的平移）}}\cdot\underbrace{d\vec{\varphi}^{t_0}_{St}(\vec{y}_S).\vec{u}_S(\vec{y}_S)}_{\text{（从 } t_0 \text{ 到 t 的时间平移）}}=\underbrace{d\vec{\varphi}^{t_0}_{Dt}(\vec{y}_{Dt_0})}_{\text{（从 } t_0 \text{ 到 t 的驱动运动）}}\cdot\underbrace{d\Theta_{t_0}(\vec{y}_S).\vec{u}_S(\vec{y}_S)}_{\text{（在 } t_0 \text{ 时平移）}}. \tag{10.57}$$

∎

10.10 驱动力和科里奥利力

10.10.1 动力学基本原理：需要伽利略参考系

牛顿第二运动定律（动力学基本原理）：在伽利略参考系中，物体所受外力的合力$\vec{}$等于其质量 f 乘以加速度:

$$\sum\text{external}\vec{f}=m\vec{\gamma}\quad(\text{in a Galilean referential}). \tag{10.58}$$

问题：那么在非伽利略参考系中呢?

答案：那么就必须加入"依赖观察者的力"，也就是说，必须加入由非伽利略观察者的运动所导致的"表观力"。事实上，宇宙中物体的运动并不受观察者运动（其加速度和速度）的影响。

例如，请参阅 https://www.youtube.com/watch?v=_36MiCUS1ro，了解旋转木马（旋转式游乐设施）。
例如，请参阅 https://www.youtube.com/watch?v=aeY9tY9vKgs，了解龙卷风。

10.10.2 驱动力 + 科里奥利力 = 惯性力

$\vec{}$ $\tilde{}$考虑 $f(t,\ p_t)=$作用于 P_{Obj} 在 t 处的外力之和，在 $p_t=\Phi(t,\ P_{Obj})$处。在伽利略参考系 $\mathcal{R}_A$中，牛顿定律 (10.58) 意味着

$$[\vec{f}_t(p_t)]_{|\vec{A}}=m\,[\vec{\gamma}_t(p_t)]_{|\vec{A}},\quad\text{written}\quad\boxed{\vec{f}_{At}(\vec{x}_{At})=m\,\vec{\gamma}_{At}(\vec{x}_{At})}\in\mathcal{M}_{n1}, \tag{10.59}$$

其中 $\vec{x}_{At}:=[\overrightarrow{O_Ap_t}]_{|\vec{A}}$, $\vec{f}_{At}(\vec{x}_{At}):=[\vec{f}_t(p_t)]_{|\vec{A}}$和 $\vec{\gamma}_{At}(\vec{x}_{At})=[\vec{\gamma}_t(p_t)]_{|\vec{A}}$。由 $\vec{x}_{At}=\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$，加速度叠加公式给出 $f_{At}(\vec{x}_{At})=m(d\Theta_t.\vec{\gamma}_B(\vec{x}_{Bt})+\vec{\gamma}_{Dt}(\vec{x}_{At})+\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At}))\in\mathcal{R}_A$，因此，在 $\mathcal{R}_B$ 中，

$$\underbrace{d\Theta_t{}^{-1}.\vec{f}_{At}(\vec{x}_{At})}_{\vec{f}_{At}{}^*(\vec{x}_{Bt})=\vec{f}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})}=m\,\vec{\gamma}_B(\vec{x}_{Bt})+\underbrace{m\,d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Dt}(\vec{x}_{At})}_{m\,\vec{\gamma}_{Dt}{}^*(\vec{x}_{Bt})}+\underbrace{m\,d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At})}_{m\,\vec{\gamma}_{Ct}{}^*(\vec{x}_{Bt})}, \tag{10.60}$$

并且，$d\Theta_t{}^{-1}.[\vec{f}_t(p_t)]_{|\vec{A}}=d\Theta_t{}^{-1}.\vec{f}_{At}(\vec{x}_{At})=^{(10.26)}[\vec{f}_t(p_t)]_{|\vec{B}}=$表示 $\vec{f}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$ 是由 B 在 t 处量化的外力，参见（10.26）（其中假设 Θ_t 为仿射）。采用拉回记号时，参见（10.26）:

定义 10.18 在 t 上 p_t，定义

- 驱动力 $\vec{f}_{BDt}(\vec{x}_{Bt}) := -m\, d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Dt}(\vec{x}_{At})$ $(= -m\,\vec{\gamma}_{Dt}{}^{*}(\vec{x}_{Bt}))$.
- 科里奥利力 $\vec{f}_{BCt}(\vec{x}_{Bt}) := -m\, d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At})$ $(= -m\,\vec{\gamma}_{Ct}{}^{*}(\vec{x}_{Bt}))$. (10.61)
- (惯性力或虚拟力 $:= \vec{f}_{BDt}(\vec{x}_{Bt}) + \vec{f}_{BCt}(\vec{x}_{Bt}) = -m\, d\Theta_t{}^{-1}.(\vec{\gamma}_{Dt}+\vec{\gamma}_{Ct})(\vec{x}_{At})$.)

因此，(10.60) 给出了在 $\mathcal{R}_B$ （非伽利略参考系）中量化的基本原理:

$$\boxed{\vec{f}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + \vec{f}_{BDt}(\vec{x}_{Bt}) + \vec{f}_{BCt}(\vec{x}_{Bt}) = m\,\vec{\gamma}_B(\vec{x}_{Bt})}, \tag{10.62}$$

即，在 t，于 $\mathcal{R}_B$: 外力 $+$ 驱动力和科里奥利力 $= m$ 乘以加速度 .

10.11 “太阳和地球”总结

用简化的（圆周）运动说明地球绕太阳运行。

10.11.1 地球上的科里奥利力

1. **参考系**。

1.1. 由固定在地球上的观察者 B 选定的相对参考系 $\mathcal{R}_B = (O_B, (\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3))$，其中 $O_{Bt} = \sim\Phi_{\mathcal{R}_B}(t, Q_{O_B})$ 是粒子 Q_{O_B} 相对于地心的位置，由 B 表示为 O_B （对 B 固定）；而 $(\vec{B}_{1t}, \vec{B}_{2t}, \vec{B}_{3t})$ 是固定在地球上的欧几里得基（例如以米为单位构建），由 B 表示为 $(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3)$（对 B 固定），其中 $\vec{B}_3$ 选为沿地球自转轴并从南极指向北极的方向；并且 $(\cdot,\cdot)_B$ 是相应的欧几里得点积。因此，地球上经度为 $\theta_{Q_{\mathcal{R}_B}} \in]-\pi, \pi]$，纬度为 $\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的固定粒子 $Q_{\mathcal{R}_B}$，由观察者 B 表示为矩阵 $\vec{y}_S = \vec{\varphi}_S(Q_{\mathcal{R}_B}) = [\overrightarrow{O_B \widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}\ t\ Q_{\mathcal{R}_B}}(\,,\,)]_{|\vec{B}} = R_B \begin{pmatrix} \cos(\theta_{Q_{\mathcal{R}_B}})\cos(\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}}) \\ \sin(\theta_{Q_{\mathcal{R}_B}})\cos(\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}}) \\ \sin(\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}}) \end{pmatrix}$，其中

$R_B = ||\overrightarrow{O_B \widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}\ t\ Q_{\mathcal{R}_B}}(\,,\,)||_B$ 是 Q_{O_B} 与 $Q_{\mathcal{R}_B}$ 之间的距离（例如，如果 $Q_{\mathcal{R}_B}$ 位于地球表面，则 $R_B \simeq 6371$ 千米）。

1.2. 初始伽利略参考系 $\mathcal{R}_{A0} = (O_{A0}, (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3))$: O_{A0} 位于太阳中心，且 $(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3)$ 是一个相对于恒星固定的欧几里得基（例如，用英尺构建），使得 $\vec{A}_3 = \mu\vec{B}_3$ 且 $\mu > 0$（例如 $\mu = 0.3048$ 和 $\lambda = \frac{1}{\mu} \simeq 3.28$）；而 $(\cdot,\ \cdot)_A$ 是相应的欧几里得点积。

1.3. 观察者 A（固定在地球上）选取的推导出的绝对伽利略参考系 $\mathcal{R}_A = (O_{At}, (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3))$，其中 $O_{At} = O_{Bt}$，由 A 记为 O_A （对 A 而言固定）。由于 Q_{O_B} 绕太阳旋转一周需要 365 天以上，因此在足以“充分准确”地计算科里奥利加速度的“一小段时间内”（这样可以简化计算），将Q_{O_B} 的运动视为匀速直线运动。

（如果 A 更愿意使用初始伽利略参考系 $\mathcal{R}_{A0}$，那么绝对矩阵运动 $\vec{\varphi}_A(t, P_{Obj}) = [\overrightarrow{O_A \widetilde{\Phi}\ t\ P_{Obj}}(,)]_{|\vec{A}}$ 必须替换为 $\vec{\varphi}_A(t, P_{Obj}) = [\overrightarrow{O_{A0} O_B\ t}(\,)]_{|\vec{A}} + [\overrightarrow{O_B\ t\ \widetilde{\Phi}\ t\ P_{Obj}}(\,)(,)]_{|\vec{A}}$，驱动运动 $\vec{\varphi}_D$也同理。）

2. **驱动运动**。

~2.1. 粒子 $Q_{\mathcal{R}_B}$在地球中的运动 $t \to q_t = \Phi_{\mathcal{R}_B}(t, Q_{\mathcal{R}_B})$由 A 记录为驱动运动 $\vec{\varphi}_D$，其定义为（矩阵值），其中 ω 是地球在 $\mathcal{R}_A$中的角速度,

$$\vec{y}_D(t) = \vec{\varphi}_D(t, Q_{\mathcal{R}_B}) = R_A(Q_{\mathcal{R}_B}) \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\cos\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \\ \sin(\omega t)\cos\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \\ \sin\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \end{pmatrix} = [\overrightarrow{O_A q(t)}]_{|\vec{A}} = \begin{pmatrix} y_{D1}(t) \\ y_{D2}(t) \\ y_{D3} \end{pmatrix}, \tag{10.63}$$

其中，$R_A(Q_{\mathcal{R}_B}) = ||\overrightarrow{Q_{O_B} Q_{\mathcal{R}_B}}||_{|\vec{A}}$是 A 的 Q_{O_B}与 $Q_{\mathcal{R}_B}$之间的距离（例如，如果$Q_{\mathcal{R}_B}$ 位于地球表面，则为 $R_A \simeq 20902231$ 英尺）。（并将（ωt）替换为（$\alpha_0 + \omega(t - t_0)$），以使其更具一般性。）

~2.2. 驱动速度：当 $\vec{\omega}_D := \omega A_3$ 时,

$$\vec{v}_D(t, \vec{y}_D(t)) = \vec{y}_D{}'(t) = \omega R_A \begin{pmatrix} -\sin(\omega t)\cos\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \\ \cos(\omega t)\cos\varphi_{Q_{\mathcal{R}_B}} \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\vec{y}_D(t) = \vec{\omega}_D \wedge \vec{y}_D(t). \tag{10.64}$$

2.3. 驱动加速度:

$$\vec{\gamma}_D(t,\vec{y}_{Dt}) = \vec{y}_D{}''(t) = \vec{\omega}_D \wedge \vec{y}_D{}'(t) = \vec{\omega}_D \wedge \vec{v}_D(t,\vec{y}_{Dt}) = \vec{\omega}_D \wedge (\vec{\omega}_D \wedge \vec{y}_D(t)) = -\omega^2 \begin{pmatrix} y_{D1}(t) \\ y_{D2}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.65}$$

$=$ 通常的离心加速度（位于平行于赤道平面的平面内，图示） .

2.4. 驱动速度的微分（此处与时间和空间无关）：由 (10.64) 得

$$d\vec{v}_D(t,\vec{y}_{Dt}) = d\vec{v}_D = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_D \wedge . \tag{10.66}$$

3. **平移算子**。

3.1. 此处 $O_{At} = O_{Bt}$，因此 $\Theta_t(\vec{0}) = \vec{0}$（其中 $[\vec{0}] =$记为$\vec{0} =$ 零矩阵），参见 (10.22)。

3.2. $d\Theta_t$的计算。由于 Θ_t是仿射的，$d\Theta_t.[\vec{B}_{it}]_{|\vec{B}} = [\vec{B}_{it}]_{|\vec{A}}$。因此 $\vec{B}_3 = \lambda\vec{A}_3$（假设）且 $d\Theta_t.[\vec{B}_3]_{|\vec{B}} = [\vec{B}_{3t}]_{|\vec{A}}$得到 $d\Theta_t.\vec{E}_3 = \lambda\vec{E}_3$，其中 ($\vec{E}_i$) 是 $\mathcal{M}_{n1}$中的典范基。然后令 $Q_{Bi} \in Obj\mathcal{R}_B$为地球粒子，其位置 $q_{ti} = \widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}(t,\ Q_{Bi})$ 满足 $\vec{B}_{it} := \overrightarrow{O_{Bt}q_{ti}}$。所以，由于 $\vec{B}_1$和 $\vec{B}_2$位于赤道平面内，(10.63) 得到 $d\Theta_t.\vec{E}_1 = d\Theta_t.[\vec{B}_1]_{|\vec{B}} = [\vec{B}_1]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_Aq_{t1}}]_{|\vec{A}} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\omega t \\ \omega t \\ 0 \end{pmatrix}) \sin(\ )$，以及 $d\Theta_t.\vec{E}_2 =$ $d\Theta_t.[\vec{B}_2]_{|\vec{B}} = [\vec{B}_2]_{|\vec{A}} = [\overrightarrow{O_Aq_{t2}}]_{|\vec{A}} = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(\ \omega t \\ \omega t \\ 0 \end{pmatrix}) \cos(\ )$。因此 $[d\Theta_t]_{|\vec{E}} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\omega t & - & \omega t & 0 \\ \omega t & & \omega t & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\sin(\ ) \sin(\ ) \cos(\ )$，即通过 λ（测量单位变换）展开的预期旋转矩阵。

3.3. Θ_t（仿射）的计算：$\Theta_t(\vec{y}_S) = \Theta_t(\vec{0}) + d\Theta_t.\vec{y}_S$，因此，此处 $O_{At} = O_{Bt}$

$$\vec{y}_{Dt} := \Theta_t(\vec{y}_S) = d\Theta_t.\vec{y}_S \tag{10.67}$$

4. Obj**的运动**。

4.1. B 量化 t $\widetilde{}$运动 $\Phi\, Obj$，即存储Obj的相对运动 $\vec{\varphi}_B$，以及相对速度和加速度 $\vec{v}_{Bt}$ 和 $\vec{\gamma}_B$（矩阵），参见（10.10）—（10.12）。

4.2. A 的平移：使用 $\vec{x}_{At} = \Theta_t(\vec{x}_{Bt})$,

$$\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) \quad \text{and} \quad \vec{\gamma}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{\gamma}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}). \tag{10.68}$$

5. **驱动力**（由于 B 的运动而产生的 $\mathcal{R}_B$ 中的表观力）：

$$\vec{f}_{BDt}(\vec{x}_{Bt}) = -m\, d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Dt}(\vec{x}_{At}) \overset{(10.65)}{=} \lambda m\omega^2 d\Theta_t{}^{-1}. \begin{pmatrix} x_{A1}(t) \\ x_{A2}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(10.67)}{=} \lambda m\omega^2 \begin{pmatrix} x_{B1}(t) \\ x_{B2}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{10.69}$$

离心力（位于纬度为 P_{Obj} 的“平行平面”中）。

6. **科里奥利加速度**（由于 B 的运动而产生的表观加速度）：

$$\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At}) = 2\, d\vec{v}_{Dt}.(d\Theta_t.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})) = 2\, d\Theta_t.d\vec{v}_{Dt}.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) \tag{10.70}$$

因为 $d\Theta_t$ 与 $d\vec{v}_{Dt}$ 交换（“沿同一南北轴旋转”的复合，其形式为 $e^{i\omega t}.e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\omega t} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\omega t)}$在赤道平面中）。

7. **科里奥利力**（由 B 的运动引起的表观力）：

$$\vec{f}_{BCt}(\vec{x}_{Bt}) = -m\, d\Theta_t{}^{-1}.\vec{\gamma}_{Ct}(\vec{x}_{At}) = -2m\, d\vec{v}_{Dt}.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}). \tag{10.71}$$

11 客观性

目标：给出力学定律的客观表达；正如麦克斯韦 [13] 所说：“我们得出的公式必须做到：任何国家的人，只要将不同符号替换为按本国计量单位测得的各个量的数值，就能得到正确的结果”。

一般记号：若给定函数 z 为 $z(t,x)$，则 $z_t(x) := z(t,x)$，反之亦然。

11.1 “等距客观性”和“参考系不变原理”

本手稿无意描述“等距客观性”：

“等距客观性”是确立“物质参考系无差别原理”（“参考系不变原理”）的框架。该原理指出：“刚体运动不应影响材料的应力本构定律。”例如，Truesdell–Noll [19]第41页：

> « 本构方程在参考系变换下必须保持不变。 »

或者参见 Germain [9]：

> « 内力功率公理。对于给定的虚运动，作用于系统 S 的“内力”的虚功率是一个客观量；也就是说，无论在哪个参考系中观察该运动，其数值都相同。 »

注意： 这两种表述都仅限于“等距参考系变换”（所有参考系的度量相同），正如 Truesdell–Noll [19]第42–43页所解释的：“等距客观性”关注的是这样一位观察者：他定义了自己的欧几里得点积，并且只考虑标准正交基变换，以验证本构定律。

如果要在“协变客观性”框架下解释“等距客观性”，那么“等距客观性”就对应于一种独裁式管理：一位使用欧几里得参考系的观察者（例如以英尺为基础），将自己的长度单位强加给所有其他使用者（等距假设）。（注：直到 1875 年之后，米才被科学界采用。）

此外，由于不加控制地使用黎斯表示定理，等距客观性会导致人们忽视协变性与逆变性之间的差异。

备注 11.1 Marsden 和 Hughes [12] 第 8 页一开始便采用这一等距框架。然而，在第 22 页和第 163 页，他们写道，良好的建模一开始就必须是“协变客观的”（与观察者无关）；他们还在 § 3.3 提出了一个用于弹性的协变模型。

11.2 协变客观性的定义和刻画

11.2.1 经典力学的框架

为简化经典力学的框架。考虑两位观察者 A 和 B，以及他们的参考系 $\mathcal{R}_A = (O_A, (\vec{A}_i))$ 和 $\mathcal{R}_B = (O_B, (\vec{B}_i))$。例如，$(\vec{A}_i)$ 和 $(\vec{B}_i)$ 是以英尺和米为单位的欧几里得基，$(\cdot,\cdot)_A$和 $(\cdot,\cdot)_B$ 是它们关联的欧几里得点积。并且 Θ 是平移算子，参见（10.19）。

考虑物体 Obj 的正则运动 Φ，$p_t = \Phi(t, P_{Obj}) \in \mathbb{R}^n$ 是宇宙 Ω 中粒子在 t 处的位置，$\Omega_t = \widetilde{\Phi}(t, Obj)$ 是 t 处的构形，而 $\mathcal{C} = \bigcup_{t\in[a,b]}(\{t\}\times\Omega_t)$ 是构形集合。并且 $\vec{x}_{At} := [\overrightarrow{O_A p_t}]_{|\vec{A}} \in \mathcal{M}_{n1}$(A) 和 $\vec{x}_{Bt} := [\overrightarrow{O_B p_t}]_{|\vec{B}} \in \mathcal{M}_{n1}$(B) 是 p_t 相对于所选参考系的存储分量，其中 $\mathcal{M}_{n1}$(A) 和 $\mathcal{M}_{n1}$(B) 是分别由 A 和 B 所指的矩阵空间。

11.2.2 标量函数的协变客观性

设 f：$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{C} & \to \mathbb{R} \\ (t,p_t) & \to f(t,p_t) \end{array}\right\}$ 是一个欧拉标量函数（例如，温度场）。f 由 A 和 B 通过函数 f_A：$\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1}\text{(A)} & \to \mathbb{R} & \to f_A(t,\vec{x}_{At}) := f(t,p_t) \\ (t, & , &) \end{array}\right\}$ 和 f_B：$\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1}\text{(B)} & \to \mathbb{R} & \to f_B(t,\vec{x}_{Bt}) := f(t,p_t) \\ (t, & , &) \end{array}\right\}$ 量化。

定义 11。2 f 是客观协变的，当且仅当对于所有参考系 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$ 以及所有 t，

$$f_{At}(\vec{x}_{At}) = f_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) \quad \text{when} \quad \vec{x}_{At} = \Theta_t(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.1}$$

即，$f_{At} = f_{Bt*}$ 是 Θ_t 对 f_{Bt} 的推前，参见（6.8）。

11.2.3 向量场的协变客观性

设 $\vec{w}$: $\left\{\begin{matrix} \mathcal{C} & \to \mathbb{R}^n & (\ ,\ )\ (t,p_t) \\ t\ p_t & \to \vec{w} & \end{matrix}\right\}$ 是一个欧拉向量场（例如，力场）。$\vec{w}$ 由 A 和 B 通过函数 $\vec{w}_A$: $\left\{\begin{matrix} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1} & & & \\ t & \text{(A)} & \to \mathcal{M}_{n1}\text{(A)}\ (\ ,\vec{x}_{At}) & \to \vec{w}_A(t,\vec{x}_{At}) := [\vec{w}(t,p_t)]_{\vec{A}} \end{matrix}\right\}$ 和 $\vec{w}_B$: $\left\{\begin{matrix} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1} & & & \\ t & \text{(B)} & \to \mathcal{M}_{n1}\text{(B)}\ (\ ,\vec{x}_{Bt}) & \\ & \to \vec{w}_B(t,\vec{x}_{Bt}) := [\vec{w}(t,p_t)]_{\vec{B}} & & \end{matrix}\right\}$ 来量化。因此，$\vec{w}_A(t,\vec{x}_{At})$和 $\vec{w}_B(t,\vec{x}_{Bt})$分别是 $\vec{w}(t,p_t)$在 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$中的分量列矩阵。

定义 11.3 $\vec{w}$ 是客观协变的，当且仅当对于所有参考系 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$，以及所有 t,

$$\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) \quad \text{when} \quad \vec{x}_{At} = \Theta_t(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.2}$$

即 $\vec{w}_{At} = \vec{w}_{Bt*}$ 是 $\vec{w}_{Bt}$ 的推前，参见 (6.20)。

示例 11.4 基本反例：欧拉速度场不是客观的，参见 (10.39)，因为通常存在驱动速度 $\vec{v}_D \neq \vec{0}$。欧拉加速度场也不是客观的，参见 (10.45)。 ∎

示例 11.5 引力场（外力）是客观协变的。 ∎

11.2.4 微分形式的协变客观性

设 α: $\left\{\begin{matrix} \mathcal{C} & \to \mathbb{R}^{n*} & (\ ,\ )\ (\ ,p_t) \\ t\ p_t & \to \alpha\ t & \end{matrix}\right\}$ 是一个欧拉微分形式（例如，用于测量内功率的测量装置）。 α 由 A 和 B 通过函数 α_A: $\left\{\begin{matrix} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1} & & & \\ t & \text{(A)} & \to \mathcal{M}_{n1}\text{(A)}\ (\ ,\vec{x}_{At}) & \to \alpha_A(t,\vec{x}_{At}) := [\alpha(t,p_t)]_{\vec{A}} \end{matrix}\right\}$ 和 α_B: $\left\{\begin{matrix} \mathbb{R}\times\mathcal{M}_{n1} & & & \\ t & \text{(B)} & \to \mathcal{M}_{n1}\text{(B)}\ (\ ,\vec{x}_{Bt}) & \\ & \to \alpha_B(t,\vec{x}_{Bt}) := [\alpha(t,p_t)]_{\vec{B}} & & \end{matrix}\right\}$ 来量化。因此，$\alpha_A(t,\vec{x}_{At})$ 和 $\alpha_B(t,\vec{x}_{Bt})$ 是 $\alpha(t,p_t)$ 在 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$中的分量行矩阵。

定义 11。6 α 是客观协变的，当且仅当对于所有参考系 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$，以及所有 t,

$$\alpha_{At}(\vec{x}_{At}) = \alpha_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1} \quad \text{when} \quad \vec{x}_{At} = \Theta_t(\vec{x}_{Bt}). \tag{11.3}$$

也就是说，$\alpha_{At} = \alpha_{Bt*}$ 是 Θ_t 对 α_{Bt} 的推前，参见（7.3）。

注意：（11.3）和（11.2）是相容的：若 $\vec{w}$ 是客观向量场，且 α 是客观微分形式，则标量函数 $\alpha.\vec{w}$ 是客观的：

$$\alpha_{At}(\vec{x}_{At}).\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = \alpha_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) \quad (= (\alpha(t,p_t).\vec{w}(t,p_t)), \tag{11.4}$$

因为 $\alpha_{At}(\vec{x}_{At}).\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = (\alpha_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1})。(d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})) = \alpha_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$。

11.2.5 张量的协变客观性

张量作用于向量场和微分形式，其客观性可由上一节推得。因此，设 T 是一个对应于“物理量”的（欧拉）张量。观察者 A 和 B 将 T 描述为函数 T_A 和 T_B。

定义 11。7 T 是客观协变的，当且仅当对于所有参考系 $\mathcal{R}_A$ 和 $\mathcal{R}_B$ 以及所有 t,

$$T_{At}(\vec{x}_{At}) = T_{Bt*}(\vec{x}_{At}) \tag{11.5}$$

即 T_{At} 是 T_{Bt} 经 Θ_t 推前所得。

（回忆：$T_{Bt*}(\vec{x}_{At})(\alpha_1(\vec{x}_{At}.....,\ \vec{w}_1(\vec{x}_{At})) := T_{Bt}(\vec{x}_{Bt})(\alpha_1{}^*(\vec{x}_{Bt}.....,\ \vec{w}_1{}^*(\vec{x}_{Bt}))$。）

例 11.8（微分的非协变客观性 $d\vec{w}$） 设 $\vec{w}$ 是一个客观向量场，A 将其视为 $\vec{w}_A$，B 将其视为 $\vec{w}_B$；因此，当 $\vec{x}_{At}=\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$ 时，$\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) =^{(11.2)} d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$，于是

$$d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + (d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})), \tag{11.6}$$

因此

$$\begin{aligned} d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) &= d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1} + (d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1} \\ &\neq d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1} \quad \text{when} \quad d^2\Theta_t \neq 0. \end{aligned} \tag{11.7}$$

因此，通常 $d\vec{w}$ 不是协变客观的。然而，在经典力学中，对于“笛卡尔参考系的变换”，Θ_t 是仿射的，因此 $d^2\Theta_t=0$，尤其是当 $\vec{w}$ 具有客观性时，$d\vec{w}$ 也具有客观性。而且

$$\begin{aligned} &(d^2\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) + d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) \\ &= d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d^2\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + 2\,d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d^3\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}). \end{aligned} \tag{11.8}$$

Th因此，通常 $d^2\vec{w}$ 不是协变客观的（但如果 Θ_t 是仿射的，那么当 $\vec{w}$ 具有客观性时，$d^2\vec{w}$ 也具有客观性）. ▪

11.3 速度不具客观性

11.3.1 欧拉速度 $\vec{v}$：非协变（也非等距）客观

速度加法公式：当 $\vec{x}_{At}=\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$ 时，$\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}(\vec{x}_{Bt})$，参见 (10.39)，

$$\begin{aligned} \vec{v}_{At}(\vec{x}_{At}) &= \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) + \vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At}) \\ &\neq \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) \quad \text{when} \quad \vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At}) \neq \vec{0}, \end{aligned} \tag{11.9}$$

因此，欧拉速度场既不是协变客观的（也不是等距客观的）。

11.3.2 $d\vec{v}$ 不是客观的

速度加法公式 $(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}) = \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$ 在 $\vec{x}_{At}=\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$ 时给出

$$d(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.10}$$

因此，由于 $d\vec{v}_D$，$d\vec{v}$ 既不是协变客观的，也不是等距客观的：

$$d\vec{v}_{At}(\vec{x}_{At}) = d\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) + d\vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At}) + d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})^{-1} \neq d\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At}) \quad \text{in general.} \tag{11.11}$$

备注 11.9 回顾：“等距客观”意味着

- 在 $\mathcal{R}_B$ 和 $\mathcal{R}_A$ 中使用相同的欧几里得度量，即 $(\cdot,\ \cdot)_A=(\cdot,\ \cdot)_B$,~
- $\Phi_{\mathcal{R}_B}$（$\mathcal{R}_B$ 的运动）是刚体运动，并且
- Θ_t 是仿射的（因此对所有 t，$d^2\Theta_t=0$）。 ▪

练习 11.10 证明，其中 Q_t 是从 $(\vec{A}_i)$ 到 $(\vec{B}_i)$ 的（标准正交）过渡矩阵：

$$[d\vec{v}_t]_{|\vec{B}} = Q_t.[d\vec{v}_t]_{|\vec{A}}.Q_t^{-1} + Q'(t).Q_t^{-1}, \quad \text{written} \quad [L]_{|\vec{B}} = Q.[L]_{|\vec{A}}.Q^T + \dot{Q}.Q^T. \tag{11.12}$$

- （在经典力学课程中使用，用于证明由于 $Q.Q^T$，$d\vec{v}$ 并非“等距客观”。）

答案。 $t_0,t\in\mathbb{R}$, $p_{t_0}=\widetilde{\Phi}(t_0,P_{Obj})$, $p_t=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$, $\vec{v}(t,p_t)=\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t,P_{Obj})$, 以及 $F_t^{t_0}(p_{t_0})=d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$。因此 $\vec{v}(t,\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}))=\frac{\partial\Phi_{p_{t_0}}^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})$, 于是 $d\vec{v}(t,p_t).F_{p_{t_0}}^{t_0}(t)=\frac{\partial F_{p_{t_0}}^{t_0}}{\partial t}(t)$。并且，由 (4.30) 及已知的 $F_{p_{t_0}}^{t_0}=F$ 可得

$$[F\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{B}}=Q\ t\ .[F\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}\ \overline{[F'\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{B}}=Q'\ t\ .[F\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}+Q\ t\ .[F'\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}}\quad [d\vec{v}\ t\ p_t\ ]_{|\vec{B}}=(),(),(),,\text{因此}(),(),(),(),(),。\text{因此}(,)()$$

$$[F_{p_{t_0}}^{t_0}{}'\ t\ .F_{p_{t_0}}^{t_0}\ t\ ]_{|\vec{B}}=[F_{p_{t_0}}^{t_0}{}'\ t\ ]_{|\vec{B}}.[F_{p_{t_0}}^{t_0}\ t\ ]_{|\vec{B}}=Q'\ t\ .[F\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}+Q\ t\ .[F'\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}.[F\ t\ ]^{-1}_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}.Q\ t\ ^{-1}=$$

$$()()()(()(),()(),)(),()Q'\ t\ .Q\ t\ ^{-1}+Q\ t\ .[F'\ t\ ]_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}.[F\ t\ ]^{-1}_{|\vec{a}_{t_0}\ \vec{A}}.Q\ t\ ^{-1}=Q'\ t\ .Q\ t\ ^{-1}+Q\ t\ .[d\vec{v}\ t\ p_t\ ]_{|\vec{A}}.Q\ t\ ^{-1}\qquad 3\,34\ \ ()()()(),(),()$$

$$()()()(,)()。\text{另参见}(.)\text{-}(3.35)。$$

▪

练习 11.11 证明当 $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}$ 为刚体运动时，$d^2\vec{v}$ 是“等距客观”的 .

答案。 将 (11.8) 中的 $\vec{w}_A$ 替换为 $\vec{v}_A-\vec{v}_D$，并将 $\vec{w}_B$ 替换为 $\vec{v}_B$，在“等距客观”框架下得到：

$$d^2(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}).(\vec{u}_{Bt*},\vec{w}_{Bt*}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d^2\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})(\vec{u}_B,\vec{w}_B). \tag{11.13}$$

这里 $d^2\vec{v}_{Dt}=0$（刚体运动），因此 $d^2\vec{v}$ 是“等距客观的”。 ▪

11.3.3 $d\vec{v}+d\vec{v}^T$ 是“等距客观的”

命题 11.12 如果 $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}$ 是刚体运动，那么 $d\vec{v}_t+d\vec{v}_t^T$ 是“等距客观的”

$$d\vec{v}_{At}+d\vec{v}_{At}^T=(d\vec{v}_{Bt}+d\vec{v}_{Bt}^T)_*. \tag{11.14}$$

（等距框架：添加刚体运动不会改变变形率张量。）

- **.证明。** $Q.Q^T=I$ 给出 $Q.Q^T+(Q.Q^T)^T=0$，然后应用 (11.12)。 ∎

练习 11.13 证明 $\Omega=\frac{d\vec{v}-d\vec{v}^T}{2}$ 不是等距客观的。

答案。 (11.11) 给出 $d\vec{v}_{At}^T=d\vec{v}_{Bt*}^T+d\vec{v}_{Dt}^T$，因此 $\frac{d\vec{v}_{At}-d\vec{v}_{At}^T}{2}=\frac{d\vec{v}_{Bt*}-d\vec{v}_{Bt*}^T}{2}+\frac{d\vec{v}_{Dt}-d\vec{v}_{Dt}^T}{2}\neq\frac{d\vec{v}_{Bt*}-d\vec{v}_{Bt*}^T}{2}$，即使 $\widetilde{\Phi}_{\mathcal{R}_B}$ 是刚体运动（此时 $\frac{d\vec{v}_{Dt}-d\vec{v}_{Dt}^T}{2}=\vec{\omega}\wedge$ 是旋转乘以膨胀）。 ∎

11.3.4 拉格朗日速度

拉格朗日速度不定义向量场，参见 § 3.2.2。因此，讨论拉格朗日速度的客观性毫无意义。

11.4 李导数是协变客观的

§ 10 中的框架。特别地，我们有速度叠加公式 $\vec{v}_{At}=\vec{v}_{Bt*}+\vec{v}_{Dt}$ in $\mathcal{R}_A$ where$\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At})=d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$ and $\vec{x}_{Bt}=\Theta_t(\vec{x}_{At})$，参见 (10.39)。

这里讨论的是协变客观性（无需内积或基）。李导数也称为“客观率”，因为它们是协变客观量。证明很简单。

11.4.1 标量函数

命题 11.14 若 f 是协变客观函数，参见 *(11.1)*，则其李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}f$ 是协变客观的：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}_A}f_A=\Theta_*(\mathcal{L}_{\vec{v}_B}f_B),\quad i.e.\quad \mathcal{L}_{\vec{v}_A}f_A(t,\vec{x}_{At})=\mathcal{L}_{\vec{v}_B}f_B(t,\vec{x}_{Bt})\quad when\quad \vec{x}_{At}=\Theta_t(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.15}$$

即，$\frac{Df_A}{Dt}(t,\ \vec{x}_{At})=\frac{Df_B}{Dt}(t,\ \vec{x}_{Bt})$，也就是说$(\frac{\partial f_A}{\partial t}+df_A.\vec{v}_A)(t,\ \vec{x}_{At})=(\frac{\partial f_B}{\partial t}+df_B.\vec{v}_B)(t,\ \vec{x}_{Bt})$。

证明。 考虑粒子 P_{Obj} 的运动 $t\to p(t)=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$，以及 $\vec{x}_A(t)=[\overrightarrow{O_Ap}\ t]_{|\vec{A}}$ 和 $\vec{x}_B(t)=[\overrightarrow{O_Bp}\ t]_{|\vec{B}}$。由客观性，$f(\ .\ )$ 得到 $f(\ ,\ (\ ))$ $(\ ,\ (\ ,\ (\ )))$ $(\ ,\ (\ ,\ (\ )))$，因此

$$\begin{aligned}\frac{Df_B}{Dt}(t,\vec{x}_B(t))&=\frac{\partial f_A}{\partial t}(t,\vec{x}_A(t))+df_{At}(\vec{x}_A(t)).(\underbrace{\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{x}_B(t))}_{\vec{v}_{Dt}(\vec{x}_{At})}+\underbrace{d\Theta_t(\vec{x}_B(t)).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_B(t))}_{\vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At})})\\&=\frac{\partial f_A}{\partial t}(t,\vec{x}_{At})+df_{At}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_{At}(\vec{x}_{At})=\frac{Df_A}{Dt}(t,\vec{x}_{At}),\end{aligned} \tag{11.16}$$

得益于速度相加公式 $\vec{v}_{At}=\vec{v}_{Bt*}+\vec{v}_{Dt}$。 ∎

11.4.2 向量场

命题 11.15 设 $\vec{w}$ 是一个协变客观向量场，参见（*11.2*）。则其李导数 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}$是协变客观的：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}_A}\vec{w}_A=\Theta_*(\mathcal{L}_{\vec{v}_B}\vec{w}_B), \tag{11.17}$$

即，当 $\vec{x}_{At}=\Theta_t\ (\vec{x}_{Bt})$ 时，

$$\mathcal{L}_{\vec{v}_A}\vec{w}_A(t,\vec{x}_{At})=d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\mathcal{L}_{\vec{v}_B}\vec{w}_B(t,\vec{x}_{Bt}), \tag{11.18}$$

即，

$$(\frac{D\vec{w}_A}{Dt}-d\vec{v}_A.\vec{w}_A)(t,\vec{x}_{At})=d\Theta(t,\vec{x}_{Bt}).(\frac{D\vec{w}_B}{Dt}-d\vec{v}_B.\vec{w}_B)(t,\vec{x}_{Bt}), \tag{11.19}$$

即，

$$(\frac{\partial\vec{w}_A}{\partial t}+d\vec{w}_A.\vec{v}_A-d\vec{v}_A.\vec{w}_A)(t,\vec{x}_{At})=d\Theta(t,\vec{x}_{Bt}).(\frac{\partial\vec{w}_B}{\partial t}+d\vec{w}_B.\vec{v}_B-d\vec{v}_B.\vec{w}_B)(t,\vec{x}_{Bt}). \tag{11.20}$$

但是 偏导数、对流导数、材料导数和李群自主导数都不是协变客观的（并非

甚至也不是等距客观的，因为存在驱动速度 $\vec{v}_D$）：我们有

$$(d\vec{w}_{At}.(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt}))(\vec{x}_{At}) = (d\Theta_t.(d\vec{w}_{Bt}.\vec{v}_{Bt}) + (d^2\Theta_t.\vec{w}_{Bt}).\vec{v}_{Bt})(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.21}$$

$$(d(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt}).\vec{w}_{At})(\vec{x}_{At}) = (d\Theta_t.(d\vec{v}_{Bt}.\vec{w}_{Bt}) + (d^2\Theta_t.\vec{v}_{Bt}).\vec{w}_{Bt})(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.22}$$

$$(d(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt}).(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt}))(\vec{x}_{At}) = (d\Theta_t.(d\vec{v}_{Bt}.\vec{v}_{Bt}) + d^2\Theta_t(\vec{v}_{Bt},\vec{v}_{Bt}))(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.23}$$

$$\mathcal{L}^0_{(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})}\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\mathcal{L}^0_{\vec{v}_{Bt}}\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.24}$$

$$\frac{\partial \vec{w}_A}{\partial t}(t,\vec{x}_{At}) + \mathcal{L}^0_{\vec{v}_D}\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\frac{\partial \vec{w}_B}{\partial t}(t,\vec{x}_{Bt}), \tag{11.25}$$

$$\frac{D\vec{w}_A}{Dt}(t,\vec{x}_{At}) - d\vec{v}_{Dt}.\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}) = d\Theta_t.(\vec{x}_{Bt}).\frac{D\vec{w}_B}{Dt}(t,\vec{x}_{Bt}) + d^2\Theta_t(\vec{v}_{Bt},\vec{w}_{Bt})(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.26}$$

$$\frac{\partial(\vec{v}_A-\vec{v}_D)}{\partial t}(t,\vec{x}_{At}) + \mathcal{L}^0_{\vec{v}_D}(\vec{v}_A-\vec{v}_D)(t,\vec{x}_{At}) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\frac{\partial \vec{v}_B}{\partial t}(t,\vec{x}_{Bt}). \tag{11.27}$$

证明。 • $\vec{w}_{At}(\Theta_t(\vec{x}_{Bt})) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$ 给出

$$d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) = d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_B(\vec{x}_{Bt}), \tag{11.28}$$

因此，根据 $d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) = (\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}) = \vec{v}_{Bt*}(\vec{x}_{At})$（速度叠加公式），

$$d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}) = (d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}),$$

从而得到（11.21）。特别地，$d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_{At}(\vec{x}_{At}) \neq d\Theta_t(\vec{x}_{Bt})$。$(d\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}))$（向量场 $d\vec{w}.\vec{v}$不是客观的）。

• $(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\Theta_t(\vec{x}_{Bt})) = d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt})$ 得到

$$d(\vec{v}_{At}-\vec{v}_{Dt})(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}) = d^2\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}) + d\Theta_t(\vec{x}_{Bt}).d\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_{Bt}),$$

因此，将其应用于 $\vec{w}_{Bt}$（分别应用于 $\vec{v}_{Bt}$），得到（11.22）（分别得到（11.23））。于是得到（11.24）。

• 若 $\vec{x}_{At} = \Theta_t(\vec{x}_B)$，则 $\vec{w}_A(t,\Theta(t,\vec{x}_B)) = d\Theta(t,\vec{x}_B).\vec{w}_B(t,\vec{x}_B)$，因此，结合 $\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{x}_B) = \vec{v}_{\Theta t}(\vec{x}_{At})$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{w}_A}{\partial t}(t,\vec{x}_{At}) + d\vec{w}_{At}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_{\Theta t}(\vec{x}_{At}) &= d\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\vec{x}_B).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_B) + d\Theta_t(\vec{x}_B).\frac{\partial \vec{w}_B}{\partial t}(t,\vec{x}_B)\\ &= (d\vec{v}_{\Theta t}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_B)).\vec{w}_{Bt}(\vec{x}_B) + d\Theta_t(\vec{x}_B).\frac{\partial \vec{w}_B}{\partial t}(t,\vec{x}_B),\end{aligned}$$

因此，由于 $\vec{v}_\Theta = \vec{v}_D$，有（11.25）；再由（11.21）得到（11.26）。

• $\vec{v}_{B*}(t,\ \Theta(t,\ \vec{x}_B)) = d\Theta(t,\ \vec{x}_B).\vec{v}_B(t,\ \vec{x}_B)$ 得出

$$\frac{\partial \vec{v}_{B*}}{\partial t}(t,\vec{x}_{At}) + d\vec{v}_{B*}(\vec{x}_{At}).\vec{v}_\Theta(t,\vec{x}_{At}) = \underbrace{\frac{\partial d\Theta}{\partial t}(t,\vec{x}_B)}_{d\vec{v}_{\Theta t}(\vec{x}_{At}).d\Theta_t(\vec{x}_B)}.\vec{v}_{Bt}(\vec{x}_B) + d\Theta(t,\vec{x}_B).\frac{\partial \vec{v}_B}{\partial t}(t,\vec{x}_B,)$$

因为 $\frac{\partial d\Theta}{\partial t}(t,\ \vec{x}_B) = d(\frac{\partial\Theta}{\partial t})(t,\ \vec{x}_B)$ 且 $\frac{\partial\Theta}{\partial t}(t,\ \vec{x}_B) = \vec{v}_\Theta(t,\ \vec{x}_{At}) = \vec{v}_{\Theta_t}(\Theta_t(\vec{x}_B))$；因此得到 (11.27)。 ∎

11.4.3 张量

命题 11.16 它是一个协变客观张量，那么它的李导数是协变客观量：

$$\mathcal{L}_{\vec{v}_A}T_A = \Theta_*(\mathcal{L}_{\vec{v}_B}T_B). \tag{11.29}$$

证明。 由 (11.15) 和 (11.18) 可得 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\alpha.\vec{w}) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}\alpha).\vec{w} + \alpha.(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})$；再使用 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(t_1\otimes t_2) = (\mathcal{L}_{\vec{v}}t_1)\otimes t_2 + t_1\otimes(\mathcal{L}_{\vec{v}}t_2)$。 ∎

11.5 泰勒展开与普适性礼物

11.5.1 在 $\mathbb{R}^n$ 中，无处不在

通用公式：

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)\, f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\, f'(t_0)^2 + o((t-t_0)^2). \tag{11.30}$$

特别是，$f(t) = \vec{w}(t, p(t))$ 给出

$$\vec{w}(t,p(t)) = \vec{w}(t_0,p(t_0)) + (t-t_0)\,\frac{D\vec{w}}{Dt}(t_0,p(t_0)) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\frac{D\vec{w}}{Dt}(t_0,p(t_0))^2 + o((t-t_0)^2). \tag{11.31}$$

问题： $\vec{w}(t, p(t))$ 是 t 在 $p(t)$ 处的一个向量，而 $\vec{w}(t_0, p(t_0))$ 是 t_0 在 $p(t_0)$ 处的一个向量，因此不能写成 (11.31)

$$\vec{w}(t,p(t)) - \big(\vec{w}(t_0,p(t_0)) + (t-t_0)\,\frac{D\vec{w}}{Dt}(t_0,p(t_0)) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\,\frac{D\vec{w}}{Dt}(t_0,p(t_0))^2\big) = o((t-t_0)^2), \tag{11.32}$$

因为等式左边假定了普适性礼物。

例如，在非平面流形中（例如，单独考察的 $\mathbb{R}^3$ 中的一个曲面），$\vec{w}(t, p_t) \in T_{p_t}(\Omega_t)$ 是 $p(t) = p_t$ 处的线性切空间，而 $\vec{w}(t_0, p_{t_0}) \in T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0})$ 是 $p(t_0) = p_{t_0}$ 处的线性切空间。一般而言，在两个不同的点处，切空间 $T_{p_t}(\Omega_t)$ 和 $T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0})$ 各不相同；因此，(11.32) 的左边没有意义。

在我们的仿射空间（我们的宇宙）中，$T_{p_t}(\Omega_t)$ 和 $T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0})$ 都与 $\vec{\mathbb{R}^3}$ 等同，因此 (11.31) 定义良好，而且非常有用！

11.5.2 一般情形

根据定义，参见 (9.10)，对于 $p(t) = \Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$，

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t_0,p_{t_0}) = \frac{d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}.\vec{w}(t,p(t)) - \vec{w}(t_0,p_{t_0})}{t-t_0} + o(1). \tag{11.33}$$

因此，

$$d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}.\vec{w}(t,p(t)) = \vec{w}(t_0,p_{t_0}) + (t-t_0)\,\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t_0,p_{t_0}) + o(t-t_0). \tag{11.34}$$

因此，我们得到了不借助普适性礼物的一阶泰勒展开：

$$\vec{w}(t,p(t)) = d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}).\Big(\vec{w} + (t-t_0)\,\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}\Big)(t_0,p_{t_0}) + o(t-t_0), \tag{11.35}$$

等式两边都属于 $T_{p_t}(\Omega_t)$（在任意流形上都有意义）。

命题 11.17 在 $\mathbb{R}^n$ 中，借助普适性礼物，*(11.35)* 给出 *(11.31)*。

证明。 $d\Phi^{t_0}(t_0+h, p_{t_0})).\vec{w}(t_0,p_{t_0}) =^{(4.35)} \vec{w}(t_0,p_{t_0}) + h\, d\vec{v}(t_0,p_{t_0}).\vec{w}(t_0,p_{t_0}) + o(h)$，因此

$$\begin{aligned}\vec{w}(t,p_t) &\overset{(11.35)}{=} (I + h\, d\vec{v}(t_0,p_{t_0}) + o(h)).\Big((\vec{w} + h\,\frac{D\vec{w}}{Dt} - h\, d\vec{v}.\vec{w})(t_0,p_{t_0}) + o(h)\Big)\\ &= (\vec{w} + h\, d\vec{v}.\vec{w} + h\,\frac{D\vec{w}}{Dt} - h\, d\vec{v}.\vec{w})(t_0,p_{t_0}) + o(h) = (\vec{w} + h\,\frac{D\vec{w}}{Dt})(t_0,p_{t_0}) + o(h),\end{aligned}$$

这就是 (11.31)。 ∎

命题 11.18 在 $\mathbb{R}^n$ 中，二阶时，

$$\vec{w}(t,p(t)) = d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}).\big((\vec{w} + h\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}))(t_0,p_{t_0}) + o(h^2)\big). \tag{11.36}$$

因此，若已知值 $\vec{w}(t_0, p_{t_0})$、$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t_0, p_{t_0})$ 和 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}((t_0, p_{t_0})$，则借助 $\Phi_t^{t_0}$ 对 $(\vec{w} + h\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + {}^{h^2}_{2}\,\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}))(t_0, p_{t_0})$ 的推前，可对 $\vec{w}(t, p(t))$ 进行二阶估计。 —

证明。设 $d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}) = F^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$。设 $\vec{g}(t) = d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})^{-1}.\vec{w}(t,p(t))$，其中 $p(t) = \Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$。因此，$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t_0,p_{t_0}) = \vec{g}'(t_0)$，参见（9.11）。并且 $\frac{D\vec{w}}{Du}(u,p(u)) = d\vec{v}(u,p(u)).\vec{w}(u,p(u)) + F^t_u(p_t).\vec{g}'(u)$，参见（9.16）。因此，$\frac{D^2\vec{w}}{Du^2}(u,p(u)) = \frac{D(d\vec{v})}{Du}(u,p(u)).\vec{w}(u,p(u)) + d\vec{v}(u,p(u)).\frac{D\vec{w}}{Du}(u,p(u)) + d\vec{v}(u,p(u)).F^t_u(p_t).\vec{g}'(u) + F^t_u(p_t).\vec{g}''(u)$。因此，$\frac{D^2\vec{w}}{Dt^2}(t,p(t)) = (\frac{D(d\vec{v})}{Dt}.\vec{w} + d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt} + d\vec{v}.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})(t,p(t)) + \vec{g}''(t)$。结合（9.39），得到 $\vec{g}''(t) = \mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w})(t,p(t))$，参见（9.39）。

替代证明（计算）：(4.34) 给出 $F^{t_0}_{p_{t_0}}(t) = I_{t_0} + h\,d\vec{v}(t_0,p_{t_0}) + \frac{h^2}{2}\,d\vec{\gamma}(t_0,p_{t_0}) + o(h^2)$。因此，为使表达简洁，省略对 (t_0,p_{t_0}) 的引用，

$$\begin{aligned} & d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}).(\vec{w} + h\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + o(h^2)) \\ &= \Big(I + h\,d\vec{v} + \frac{h^2}{2}\,d(\frac{D\vec{v}}{Dt}) + o(h^2)\Big).\Big(\vec{w} + h\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + \frac{h^2}{2}\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + o(h^2)\Big) \end{aligned} \tag{11.37}$$

h^0 项为 $I.\vec{w} = \vec{w}$。h 项为 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} + d\vec{v}.\vec{w} = \frac{D\vec{w}}{Dt}$。$h^2$ 项是以下各项之和

- $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{1}{2}(\frac{D^2\vec{w}}{Dt^2} - 2\,d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt} - \frac{D(d\vec{v})}{Dt}.\vec{w} + d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w})$, cf.(9.39),
- $d\vec{v}.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w} = d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt} - d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w} = \frac{1}{2}(2d\vec{v}.\frac{D\vec{w}}{Dt} - 2d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w})$,
- $\frac{1}{2}d(\frac{D\vec{v}}{Dt}).\vec{w} = \frac{1}{2}(\frac{D(d\vec{v})}{Dt}.\vec{w} + d\vec{v}.d\vec{v}.\vec{w})$, cf.(2.36).

总和为 $\frac{D^2\vec{w}}{Dt^2}$。 —— ∎

第五部分

附录

在本附录中，我们尝试列出一些对力学有用的标准结果。这些结果散见于现有文献中，有时除了数学书籍（微分几何）之外很难找到。

这里详细阐述定义、记号和结果，以避免产生歧义（有些记号若未理解或误用，可能会令人头疼，或像瓷器店里的公牛一样横冲直撞）。所呈现的所有结果都适用于固体、流体、热力学、广义相对论、电磁学、量子力学、化学.....（同样的数学适用于所有领域.....甚至也适用于机械工程师.....）。

A 经典与对偶记号

A.1 逆变向量与基

A.1.1 逆变向量

令 $(E,\ +,\ .)$ =记作 E 为一个实向量空间（= 即定义在域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间）。

定义 A.1 元素 $\vec{x} \in E$ 称为向量，或称“逆变向量”。

向量 是向量.....那么为什么称为逆变向量呢？历史上的答案是：因为基变换公式
基变换公式 为 $[\vec{x}]_{|new} = P^{-1}.[\vec{x}]_{|old}$，见式 (A.28)，其中用到了 P^{-1}。

那么，什么是协变向量？答案：从向量空间 E，可以构造出向量空间（一个覆盖） $\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ =所记为 $E^* =$ 在 E 上的线性形式空间（线性形式是一种测量工具，可以为向量赋值）。那么，元素 $\ell \in E^*$ 将称为协变向量，这是因为基变换公式 $[\ell]_{|new} = [\ell]_{|old}.P$。详情请见 § A.5。

A.1.2 基

定义： • n 向量 $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \in E$ 线性无关，当且仅当对于所有 $\lambda, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$，等式 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}$ 蕴含对于所有 $i = 1, ..., n$ 都有 $\lambda_i = 0$。

• n 向量 $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \in E$ 张成 E，当且仅当对于所有满足 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ 的 $\vec{x} \in E$, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$。

• E 中的一组基是由 n 线性无关向量组成的集合 $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \subset E$，这些向量张成 E；在这种情况下， E 的维数为 n。

A.1.3 典范基

考虑 $\vec{}$ 实数域 $\mathbb{R}$ 以及笛卡尔积 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$、 n 次。典范基为

$$\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0),\ ...,\ \vec{e}_n = (0, ..., 0, 1), \tag{A.1}$$

$0 =$ 加法恒等元使用 $n-1$ 次，乘法恒等元 $1 =$ 使用一次。

备注 A.2 我们所处的三维几何空间没有典范基：恒等元 1 意味着什么？1 米？1 英尺？而且不存在“内禀”的优选方向来定义 $\vec{e}_1$。因此，$\vec{}$ 笛卡尔积 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ 及其典范基构成一个抽象数学模型。 ∴

A.1.4 笛卡尔基

（勒内·笛卡尔，1596—1650。）令 $n = 1, 2, 3$，令 $\mathbb{R}^n$ 为通常的仿射空间（点的空间），并令 $\vec{\mathbb{R}}^n =$ $(\vec{\mathbb{R}}^n, +, .)$ 为具有通常代数运算的双点向量所构成的通常实向量空间。

令 $p \in \mathbb{R}^n$，并令 $(\vec{e}_i(p))$ 为 p 处的一组基。

$\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的笛卡尔基是一组与 p 无关的基（在所有 p 处都相同），于是 $(\vec{e}_i(p)) =$记作 $(\vec{e}_i)$。非笛卡尔基的例子：极坐标基，见例 6.11（极坐标系）。

而欧几里得基是 § B.1 中描述的一种特殊笛卡尔基。

更一般地，笛卡尔基指的是 $E^n = E \times ... \times E$（$n$ 次），其中 E 是一个维数为 1 的向量空间。

A.2 向量相对于基的表示

我们给出:

- 经典记号（无歧义），例如 Arnold [3] 和 Germain [8], 所使用的记号
- 对偶记号（可能因误用而产生歧义），例如 Marsden 和 Hughes [12]所使用的记号。经典记号和对偶记号同样好，但如果有任何疑问，请使用经典记号。

定义 A.3 设 $\vec{x} \in E$。设 $(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基。$\vec{x}$ 相对于基 $(\vec{e}_i)$ 的分量是实数 $x_1, ..., x_n$（经典记号），也称为 $x^1, ..., x^n$（对偶记号），满足

$$\vec{x} = \underbrace{x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n}_{\text{clas.}} = \underbrace{x^1\vec{e}_1 + ... + x^n\vec{e}_n}_{\text{dual}}, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{x}]_{|\vec{e}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{clas.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}}_{\text{dual}}, \tag{A.2}$$

$[\vec{x}]_{|\vec{e}}$ 这是表示 $\vec{x}$ 相对于基 $(\vec{e}_i)$ 的列矩阵。（当然，对于所有 i，$x_i = x^i$。）如果对所有对象都指定同一组选定的基，则列矩阵 $[\vec{x}]_{|\vec{e}}$ 就简称为 $[\vec{x}]$。用求和符号表示:

$$\vec{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i}_{\text{clas.}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i}_{\text{dual}} \quad (= \sum_{J=1}^{n} x_J\vec{e}_J = \sum_{\alpha=1}^{n} x^\alpha\vec{e}_\alpha). \tag{A.3}$$

（求和中的指标是哑指标，即使像爱因斯坦求和约定那样不写求和符号 $\sum$ $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j\vec{e}_j$ =所述 $x^j\vec{e}_j = x^i\vec{e}_i = x^J\vec{e}_J = x^\alpha\vec{e}_\alpha$。）

例 A.4 在 $\vec{\mathbb{R}^2}$ 中，取 $\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \sum_{i=1}^{2} x_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{2} x^i\vec{e}_i$: 有 x_1=x^1=3 和 x_2=x^2=4。并且 $[\vec{x}]_{|\vec{e}} = 3[\vec{e}_1]_{|\vec{e}} + 4[\vec{e}_2]_{|\vec{e}} = \sum_{i=1}^{2} x_i[\vec{e}_i]_{|\vec{e}} = \sum_{i=1}^{2} x^i[\vec{e}_i]_{|\vec{e}}$。特别地，取 $\delta^i_j = \delta_{ij}$: 若 $= 0$ ，则 $= \left\{ \begin{array}{l} = 1 \text{; 若 } i \neq j \end{array} \right\}$

克罗内克符号,

$$\vec{e}_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\vec{e}_i}_{\text{clas.}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \delta^i_j\vec{e}_i}_{\text{dual}}, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{e}_1]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ ..., \ [\vec{e}_n]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

也就是说，$\vec{e}_j$ 的分量用经典记号表示为 δ_{ij}，用对偶记号表示为 δ^i_j。而矩阵 $[\vec{e}_j]_{|\vec{e}}$ 仿照了理论笛卡尔空间 $\vec{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ 及其典范基的用法。 ∎

备注 A.5 列矩阵 $[\vec{x}]_{|\vec{e}}$ 也称为“列向量”。注意: “列向量”并不是向量，而只是一个矩阵（实数的集合）。参见基变换公式（A.28），其中同一个向量由两个“列向量”（两个列矩阵）表示。 ∎

A.3 对偶基

回顾: 设 E 和 F 为向量空间，$(\mathcal{F}(E;\ F)\ +,\ .)$ =记为$\mathcal{F}(E;\ F)$，这是由函数构成的通常实向量空间，其内部加法$(f,\ g) \to f+g$ 定义为$(f+g)(x)$: $= f(x)+g(x)$; 外部乘法$(\lambda,\ f) \to \lambda.f$ 定义为$(\lambda.f)(x)$: $= \lambda(f(x))$, 对于所有 f、$g \in \mathcal{F}(E;\ F)$、$x \in E$、$\lambda \in \mathbb{R}$。并且$\lambda.f$ =记为λf，对于所有 $f \in \mathcal{F}(E;\ F)$和 $\lambda \in \mathbb{R}$。

A.3.1 线性形式 =“协变向量”

De定义 A.6 线性标量值函数的集合 $E^* := \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ 称为 E 的对偶空间 :

$$E^* := \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = \text{the dual of } E. \tag{A.5}$$

而线性标量值函数 $\ell \in E^*$ 称为线性形式。

更准确地说，E^* 如（A.5）中所定义，是 E的代数对偶空间; 要定义在力学中通常用于 L^2 函数的拓扑对偶空间，E 必须是巴拿赫空间（即赋有范数且在该范数下完备的向量空间），而 E^* 则是连续线性形式的集合。（如果 E 是有限维的，那么相对于任意范数，任何线性形式都是连续的，因为有限维空间上的所有范数都等价。）

E^* 是一个向量空间：$(\mathcal{F}(R;\mathbb{R})\ +,\ \circ)$的子空间（显然）。

解释： 它回答了这样一个问题：函数 $E \to \mathbb{R}$ 做什么？答案：与任何函数一样，它为向量给出值： $\ell(\vec{u}) =$ 通过 ℓ 给出 $\vec{u}$ 的值。也就是说， $\ell \in E^*$ 是用于测量向量的工具：如果 $\vec{u} \in E$，那么 $\ell(\vec{u}) =$ 由 ℓ给出的实数值。

记号：如果 $\ell \in E^*$ 那么

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \ell(\vec{u}) \overset{\text{noted}}{=} \ell.\vec{u}, \tag{A.6}$$

也写作 $\langle \ell, \vec{u} \rangle_{E^*,\ E}$ 其中 $\langle .,. \rangle_{E^*,\ E}$ 是对偶配对： $\ell.\vec{u}$ 中的点号是“分配律点号”
由于线性 y $\ell(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \ell(\vec{u}) + \lambda\ell(\vec{v}) =$ 分配律 $\ell.(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \ell.\vec{u} + \lambda\ell.\vec{v}$。
注意： $\ell.\vec{u}$ 中的点不是内积（因为 $\ell \notin E$ 而 $\vec{u} \in E$）。

定义 A.7 线性形式 ℓ 在 E^* 中也称为“协变向量”；协变指的是：1- 函数对向量的作用，参见 (A.6)（协变计算）；以及 2- 坐标变换公式 $[\ell]_{new} = [\ell]_{|old}.P$，参见 (A.28)（协变公式）。

注意： E^* 是一个向量空间，因此元素 $\ell \in E^*$ 确实是一个向量。但如果没有先指定 E， E^* 便无从存在，因为 $E^* := \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$。而且 $\ell \in E^*$ 不能与向量 $\vec{u} \in E$ 混为一谈，因为 E 与 E^* 之间不存在自然典范同构（没有“内禀表示”），参见 § T.2。

备注 A.8 Misner–Thorne–Wheeler 在 [14], 框 2.1 中强调：“没有它 [协变与逆变之间的区别], ，就无法知道所指的是向量，还是那个截然不同的物体——线性形式。”

A.3.2 协变对偶基（= 给出向量分量的函数)

记号：若 $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$ 是 E中的向量，则 Vect$\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k\}$:= 为由 $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_k$张成的向量空间。设 E 是一个有限维向量空间，且$(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$ 是 E中的一组基

定义 A.9 令 $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$。沿平行于 Vect$\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_{i+1}, ..., \vec{e}_n\}$ 的方向在 Vect$\{\vec{e}_i\}$ 上的标量投影，是名为 $\pi_{ei} \in E^*$ 的线性形式；用经典记号记作 $e^i \in E^*$，用对偶记号记作 $e^i \in E^*$，定义如下：对所有 $i,\ j$,

$$\begin{cases} \text{clas. not.}: & \pi_{ei}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad \text{i.e.} \quad \pi_{ei}.\vec{e}_j = \delta_{ij}, \\ \text{dual not.}: & e^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j, \quad \text{i.e.} \quad e^i.\vec{e}_j = \delta^i_j. \end{cases} \tag{A.7}$$

因此，由于 $\pi_{ei} = e^i$ 是线性的，若 $\vec{x} =$经典记号 $\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i =$对偶空间 $\sum_{i=1}^n x^i\vec{e}_i$（经典或对偶记号），则由 (A.7) 得

$$\pi_{ei}.\vec{x} \overset{\text{clas.}}{=} x_i \quad = \quad x^i \overset{\text{dual}}{=} e^i.\vec{x}, \tag{A.8}$$

也就是说， $\pi_{ei} = e^i$ 给出向量 $\vec{x}$ 相对于基 $(\vec{e}_i)$ 的第 i 个分量，见图 A.1。

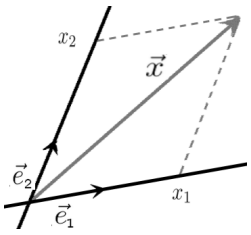


图 A. 1：平行投影： $\pi_{e1}(\vec{x}) = x_1$ 和 $\pi_{e2}(\vec{x}) = x_2$（对偶记法： $e^1(\vec{x}) = x^1$ 和 $e^2(\vec{x}) = x$ ^{2}).

注意：对偶基（π_{ei}）是（$\vec{e}_i$）的内禀属性；而且这里的 E 无法定义正交性，因为我们不能使用内积：函数 $\pi_{ei} = e^i$ 和向量 $\vec{x}$ 不属于同一个向量空间。

命题 A.10 和对偶基的定义。 $(\pi_{ei})_{i=1,...,n} = (e^i)_{i=1,...,n}$ 是 E^* 中的一个基，称为（certain）基的对偶基 $(\vec{e}_i)$。

证明。若 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_{ei} = 0$，则 $0 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_{ei})(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_{ei}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$ 对所有 j都成立，因此 $(\pi_{ei})_{i=1,...,n}$ 是 E^*中的一组线性无关向量。令 $\ell \in E^*$，且 $m = \sum_i (\ell.\vec{e}_i)\pi_{ei}$。因此 $m \in E^*$（因为 E^* 是一个向量空间），并且 $m(\vec{e}_j) = \sum_i (\ell.\vec{e}_i)(\pi_{ei}.\vec{e}_j) = \sum_i (\ell.\vec{e}_i)\delta_{ij} = (\ell.\vec{e}_j)$，因此$m = \ell$，所以 $\ell = \sum_i (\ell.\vec{e}_i)\pi_{ei}$，因此 Vect$\{(\pi_{ei})_{i=1,...,n}\}$ 张成 E^*；因此 $(\pi_{ei})_{i=1,...,n}$ 是 E^*中的一组基；因此 $\dim E^* = n$。（如果你愿意，也可以使用对偶记号。）

例 A.11 接续示例 1.1。儿童的身高用墙上的一个双点向量表示 $\vec{u}$。英国观察者选择英尺作为长度单位，并用一个竖直双点向量表示；他将其命名为 $\vec{e}$。然后定义线性形式 π_e： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 由 $\pi_e.\vec{e} = 1$给出。因此 π_e 是一个测量工具，用来给出 $s = \pi_e.\vec{u} =$ 儿童以英尺为单位的身高，即 $\vec{u} = s\vec{e}$。

练习 A.12 设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 是基，且 (π_{ai}) 和 (π_{bi}) 是对偶基。设 $\lambda \neq 0$。证明：

$$\text{If } \forall i = 1, ..., n,\ \vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i, \quad \text{then} \quad \forall i = 1, ..., n,\ \pi_{bi} = \frac{1}{\lambda}\pi_{ai}. \tag{A.9}$$

（用对偶记号， $b^i = \frac{1}{\lambda} a^i$。）–

答案。 $\pi_{bi}.\ \vec{b}_j = \delta_{ij} = \pi_{ai}.\vec{a}_j = \pi_{ai}.\frac{\vec{b}_j}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda}\pi_{ai}.\vec{b}_j$ 对所有 j（因为 π_{ai} 是线性的），因此 $\pi_{bi} = \frac{1}{\lambda}\pi_{ai}$，对所有 i均成立。

A.3.3 示例：航空单位

示例 A.13 国际航空单位：水平长度 = 海里（NM），高度 =英尺（ft）。应用：空中交通管制员选取点 $O =$ 作为控制塔的位置，而飞机 p 的位置则通过双点向量 $\vec{x} = \overrightarrow{Op}$确定。空中交通管制员还选取 $\vec{e}_1 =$一个长度为 1 NM、朝南的向量（第一条跑道）， $\vec{e}_2 =$一个长度为 1 NM、朝西南的向量（第二条跑道），以及 $\vec{e}_3 =$一个长度为 1 ft 的竖直向量。因此，他的参考系为 $\mathcal{R} = (\mathcal{O},\ (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3))$，其对偶基 $(\pi_{e1},\ \pi_{e2},\ \pi_{e3})$ 由 $\pi_{ei}(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$对所有 $i,\ j$定义，参见 (A.7)。他写作 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \in \vec{\mathbb{R}}^n$，因此 $x_1 = \pi_{e1}(\vec{x}) =$ 表示向南的距离（单位为 NM）， $x_2 = \pi_{e2}(\vec{x}) =$ 表示向西南的距离（单位为 NM）， $x_3 = \pi_{e3}(\vec{x}) =$ 表示高度（单位为 ft）。

这里，基 $(\vec{e}_i)$ 不是欧几里得基。不过，如果你考虑一架飞机，这个非欧几里得基 $(\vec{e}_i)$ 就至关重要。（欧几里得基并非生活必需品.....）。请参阅下一个备注 A.14。

备注 A.14 米是 NASA 使用的国际单位；NASA 发射了火星气候轨道器探测器。英尺则是航空领域使用的国际垂直单位；而在火星气候轨道器的着陆程序中，NASA（使用米）要求洛克希德·马丁（使用英尺）进行计算。结果呢？火星气候轨道器太空探测器在火星大气层中烧毁了，因为着陆程序中的速率高了 $\lambda \sim 3$ 倍：一米等于 $\lambda \sim 3$ 英尺，而有人把这点忘了.....尽管 NASA 和洛克希德·马丁使用了欧几里得点积.....但并非同一个点积（一个以米为基准，另一个以英尺为基准）。客观性和协变性可能会派上用场.....

A.3.4 线性形式的矩阵表示

设 $\ell \in E^*$，令 $(\vec{e}_i)$ 为一组基： ℓ 的分量是 n 个实数

$$\ell_i := \ell(\vec{e}_i) = \ell.\vec{e}_i, \quad \text{and} \quad [\ell]_{|\vec{e}} = (\ \ell_1 \quad ... \quad \ell_n\ ) \tag{A.10}$$

是 ℓ 的行矩阵，称为 ℓ 相对于 $(\vec{e}_i)$ 的矩阵。因此，若 $\vec{x} \in E$ 且 $\vec{x} =$经典。$\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i =$对偶空间 $\sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i$，则

$$\ell.\vec{x} \overset{\text{clas.}}{=} \sum_{i=1}^n \ell_i x_i \overset{\text{dual}}{=} \sum_{i=1}^n \ell_i x^i = [\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}} \tag{A.11}$$

按照通常的矩阵运算规则（ $1 * n$ 矩阵乘以 $n * 1$ 矩阵）。

特别地，对于对偶基 $(\pi_{ei}) = (e^i)$（经典记号和对偶记号），

$$[\pi_{ej}]_{|\vec{e}} = [e^j]_{|\vec{e}} = (0\ \ ...\ \ 0\ \ \underbrace{1}_{j\text{th position}}\ \ 0\ \ ...\ \ 0) \quad (= \text{row matrix } = [\vec{e}_j]^T_{|\vec{e}}). \tag{A.12}$$

因此，采用经典记号和对偶记号，我们有：

$$\ell \overset{\text{clas.}}{=} \sum_{i=1}^n \ell_i\, \pi_{ei} \overset{\text{dual}}{=} \sum_{i=1}^n \ell_i\, e^i. \tag{A.13}$$

备注 A.15 相对于一个基，向量用列矩阵表示，参见 (A.2)；线性形式用行矩阵表示，参见 (A.10)。由此可得：

- 使用矩阵计算来计算 $\ell.\vec{x} = [\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}}$，参见 (A.11)；不要将其与相对于 E 中的内积所进行的内积计算 $\vec{x} \bullet \vec{y}$ 混淆，该内积适用于 $\vec{x}, \vec{y} \in E$。
- 不要混淆“物体的性质”：相对于一个基，(逆变)向量是由列矩阵表示的数学对象，而线性形式（协变向量）是由行矩阵表示的数学对象。参见备注 A.8。

∎

A.3.5 示例：热力学

考虑笛卡尔空间 $\mathbb{R}^2 = \{(T, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} = \{$(温度，压力)$\}$。这个空间 $\vec{\mathbb{R}^2}$中没有有意义的内积：$\sqrt{T^2 + P^2}$ 意味着什么（毕达哥拉斯：你能把开尔文度数和 $\mathrm{kg}/(\mathrm{m} \cdot s^2)$相加吗？因此，在热力学中，(协变)对偶基是计算的主要要素。

例如，在笛卡尔积 $\vec{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中，考虑基 $(\vec{E}_1 =$(1，0) $\vec{E}_2 =$(0，1)$)$（在选定温度和压力单位后）；记 $\vec{X} \in \vec{\mathbb{R}^2}$, $\vec{X} = T\vec{E}_1 + P\vec{E}_2 =$为 $(T,\ P)$，并令 $(\pi_{E1},\ \pi_{E2}) = (E^1,\ E^2) =$为 $(dT,\ dP)$，它们构成（协变）对偶基。热力学第一定律表明，内能密度 α 是恰当微分形式：$\exists U \in C^1(\vec{\mathbb{R}^2}; \mathbb{R})$ s.t. $\alpha = dU$。因此，在任意$\vec{X}_0 =$ $(T_0,\ P_0)$，

$$\alpha(\vec{X}_0) = dU(\vec{X}_0) = \frac{\partial U}{\partial T}(\vec{X}_0)\, dT + \frac{\partial U}{\partial P}(\vec{X}_0)\, dP \quad \text{and} \quad [dU(\vec{X}_0)]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial T}(\vec{X}_0) & \frac{\partial U}{\partial P}(\vec{X}_0) \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

（行矩阵）。并且在 $\vec{X}_0$ 附近，我们有一阶泰勒展开，

$$\begin{aligned} U(\vec{X}_0 + \delta\vec{X}) &= U(\vec{X}_0) + dU(\vec{X}_0).\delta\vec{X} + o(\delta\vec{X}) \\ &= U(T_0, P_0) + \delta T \frac{\partial U}{\partial T}(T_0, P_0) + \delta P \frac{\partial U}{\partial T}(T_0, P_0) + o((\delta T, \delta P)). \end{aligned} \tag{A.15}$$

矩阵计算：向量用列矩阵表示，线性形式用行矩阵表示：

$$[\vec{E}_1]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\vec{E}_2]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\vec{X}_0]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} T_0 \\ P_0 \end{pmatrix}, \quad [\delta\vec{X}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta P \end{pmatrix}, \tag{A.16}$$

$$[E^1]_{|\vec{E}} = [dT]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E^2]_{|\vec{E}} = [dP]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [dU]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial T} & \frac{\partial U}{\partial P} \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

give

$$dU(\vec{X}_0).\delta\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial T}(\vec{X}_0) & \frac{\partial U}{\partial P}(\vec{X}_0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \delta T \\ \delta P \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial T}(\vec{X}_0)\delta T + \frac{\partial U}{\partial P}(\vec{X}_0)\delta P. \tag{A.18}$$

这是一种“协变计算”（特别是没有使用内积）。

A.4 爱因斯坦求和约定

A.4.1 定义

使用分量（选定一组基之后）时，目标是从视觉上区分线性形式与向量（从视觉上区分协变性与逆变性）。框架：有限维向量空间 E，维数为 $E = n$，以及对偶记号。

爱因斯坦求和约定：
1. E 中的（逆变）基用下标表示：例如，$(\vec{e}_i)$ 是 E中的一个基。 2. 向量 $\vec{x} \in E$（逆变）相对于 $(\vec{e}_i)$ 的分量（量化）用上标表示：$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i$，并表示为列矩阵 $[\vec{x}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$。（经典记号：

$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$，以及 x_i的列矩阵。）3. $E^* = \mathcal{L}$中的基（E；$\mathbb{R}$）（协变）用上标表示：例如，$(e^i) \in E^{*n}$ 是基 $(\vec{e}_i)$ 的对偶基。（经典记号：(π_{ei})。）4. 线性形式 $\ell \in E^*$（协变）相对于 (e^i) 的分量（量化）用下标表示：$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$，其矩阵表示为行矩阵 $[\ell]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$。

5. 当不同位置出现重复指标时，也可以省略求和符号 $\sum$ ；例如，$\sum_{i=1}^n x^i\vec{e}_i$ =注意到 $x^i\vec{e}_i$，以及 $\sum_{i=1}^n L^i{}_j\vec{e}_i$ =注意到 $L^i_j\vec{e}_i$。事实上，在计算机和文字处理器出现之前，打印 $\sum_{i=1}^n$ 并不容易。但有了 LaTEX，这就不再是问题，因此本手稿中不省略求和符号 $\sum$ （这样也能避免一些混淆）。

备注 A.16 爱因斯坦求和约定并非强制使用。例如，Arnold 在不需要时、使用会让阅读变得困难时，或可能引起误解时，就不会使用它。在经典力学中，爱因斯坦求和约定可能造成的困惑多于理解，而且可能被误用.....因此，最好不 要使用它。黄金法则：有疑问时，使用经典记号。 ▞

A.4.2 不要弄错

1. 爱因斯坦求和约定的目的，只是避免把线性函数与向量混淆。
2. 它只涉及相对于某个基的量化。
3. 即使有人告诉你，经典记号无法发现分量运算中的明显错误.....经典记号也和对偶记号一样好用。不过，对偶记号可能在经典力学中被误用（参见 § F.7 中向量对偶基的典型示例，该示例得到了正确处理）；因此，它只会让原有的困惑更加严重。
4. 这种约定不允许走捷径；例如，对于度量： $g(\vec{u},\ \vec{v}) = \sum_{i,\ j=1}^n g_{ij}u^iv^j$ 显示了由于采用了 g_{ij}而产生的对基的选择的观察者依赖性；即使 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 你可以不写成 $g(\vec{u},\ \vec{v}) = \sum_{i,\ j=1}^n u^iv^j$，也必须写成 $g(\vec{u},\ \vec{v}) = \sum_{i,\ j=1}^n g_{ij}u^iv^j$：在物理学中，这一点不容忽视，因为必须看清所用的度量和基。
5. 黄金法则：如有疑问，就回归经典记号。（爱因斯坦求和约定可能带来混淆、错误、误解、荒谬和误用.....）

A.5 换基公式

E 是一个有限维向量空间，维数为 $\dim E = n$。设$(\vec{e}_{old,\ i})$和$(\vec{e}_{new,\ i})$是 E中的两组基，并设$(\pi_{old,\ i})$和$(\pi_{new,\ i})$是 E^*中的两组对偶基，采用对偶记号分别记作(e^i_{old})和(e^i_{new})。

A.5.1 换基自同态与过渡矩阵

定义 A.17 从 $(\vec{e}_{old,i})$ 到 $(\vec{e}_{new,i})$ 的换基自同态 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;E)$ 是由下式定义的自同态（= 线性映射 $E \to E$）：对所有 $j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$,

$$\boxed{\mathcal{P}.\vec{e}_{old,j} = \vec{e}_{new,j}}. \tag{A.19}$$

定义 A.18 从 $(\vec{e}_{old,i})$ 到 $(\vec{e}_{new,i})$ 的过渡矩阵是自同态 $\mathcal{P}$ 关于基 $(\vec{e}_{old,i})$ 的矩阵 $P := [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{old}} = [P_{ij}]$ ，即由下式定义：对所有 j,

$$\vec{e}_{new,j} = \mathcal{P}.\vec{e}_{old,j} = \sum_{i=1}^n P_{ij}\,\vec{e}_{old,i}, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{e}_{new,j}]_{|\vec{e}_{old}} = P.[\vec{e}_{old,j}]_{|\vec{e}_{old}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \tag{A.20}$$

即， $[\vec{e}_{new,j}]_{|\vec{e}_{old}}$ 是 $P = [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{old}}$的第 j列。对偶记号：$\vec{e}_{new,j} = \sum_{i=1}^n P^i{}_j\,\vec{e}_{old,i}$ 和 $P := [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{old}} = [P^i{}_j]$。

除了经典记号之外，你还可能会遇到其他“分量型”记号：

$$\vec{e}_{new,j} = \sum_{i=1}^n P_{ij}\,\vec{e}_{old,i} = \sum_{i=1}^n (P_j)_i\,\vec{e}_{old,i} = \sum_{i=1}^n P^i{}_j\,\vec{e}_{old,i} = \sum_{i=1}^n (P_j)^i\,\vec{e}_{old,i}, \tag{A.21}$$

也就是说， $P_{ij} = (P_j)_i = P^i{}_j = (P_j)^i$ 是 $\vec{e}_j$ 的第 i 个分量的四种记号，也就是说，

$$[\vec{e}_{new,j}]_{|\vec{e}_{old}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_j)_1 \\ \vdots \\ (P_j)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^1{}_j \\ \vdots \\ P^n{}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_j)^1 \\ \vdots \\ (P_j)^n \end{pmatrix} \quad (= \text{the } j\text{-th column of } P). \tag{A.22}$$

A.5.2 过渡矩阵的逆函数

逆自同态 $\mathcal{Q} := \mathcal{P}^{-1} \in \mathcal{L}(E;E)$（参见 (A.19)）对所有 $j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$ 均由下式给出 ，

$$\vec{e}_{old,j} = \mathcal{Q}.\vec{e}_{new,j} \quad (= \mathcal{P}^{-1}.\vec{e}_{new,j}), \tag{A.23}$$

即， $\mathcal{Q}$ 是从 $(\vec{e}_{new,i})$ 到 $(\vec{e}_{old,i})$ 的换基自同态。而 $Q := [\mathcal{Q}]_{|\vec{e}_{new}} = [Q_{ij}]$ 是从 $(\vec{e}_{new,i})$ 到 $(\vec{e}_{old,i})$ 的过渡矩阵：

$$\vec{e}_{old,j} = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\vec{e}_{new,i}, \quad [\vec{e}_{old,j}]_{|\vec{e}_{new}} = \begin{pmatrix} Q_{1j} \\ \vdots \\ Q_{nj} \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

即， $\mathcal{Q}$ 是从 $(\vec{e}_{new,i})$ 到 $(\vec{e}_{old,i})$ 的换基自同态。

如果你更喜欢，也可以使用其他记号： $Q_{ij} = (Q_j)_i = Q^i{}_j = (Q_j)^i$

命题 A.19

$$Q = P^{-1}. \tag{A.25}$$

证明。 $\vec{e}_{new,\,j} = \mathcal{P}.\vec{e}_{old,\,j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\vec{e}_{old,\,i} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(\sum_{k=1}^{n} Q_{ki}\vec{e}_{new,\,k}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} Q_{ki}P_{ij})\vec{e}_{new,\,k} = \sum_{k=1}^{n}(Q.P)_{kj}\vec{e}_{new,\,k}$ 对所有 j 均成立，因此 $(Q.P)_{kj} = \delta_{kj}$ 对所有 j， k 均成立。因此 $Q.P = I$，即 (A.25)。∎

练习 A.20 证明 $\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{old}} = [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{new}} = P \\ [\mathcal{Q}]_{|\vec{e}_{new}} = [\mathcal{Q}]_{|\vec{e}_{old}} = Q \end{array} ,, \right\}$，即

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}.\vec{e}_{new,j} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}\vec{e}_{new,i} \quad (= \sum_{i,j=1}^{n} P^i{}_j\vec{e}_{new,i} = \sum_{i,j=1}^{n}(P_j)^i\vec{e}_{new,i}), \\ \mathcal{Q}.\vec{e}_{old,j} = \sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}\vec{e}_{old,i} \quad (= \sum_{i,j=1}^{n} Q^i{}_j\vec{e}_{old,i} = \sum_{i,j=1}^{n}(Q_j)^i\vec{e}_{old,i}). \end{array} \right. \tag{A.26}$$

答案. $Z = [Z_{ij}] = [\mathcal{P}]_{|\vec{e}_{new}}$ 表示 $\mathcal{P}.\vec{e}_{new,j} = \sum_i Z_{ij}\vec{e}_{new,\,i}$ ，即 $\vec{e}_{new,j} = \mathcal{Q}.(\sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\vec{e}_{new,\,i}) = \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\,\mathcal{Q}.\vec{e}_{new\,i} = \sum_{i=1}^{n} Z_{ij}\sum_{k=1}^{n} Q_{ki}\vec{e}_{new\,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Q_{ki}Z_{ij}\,\vec{e}_{new\,k} = \sum_{k=1}^{n} Q.Z_{\,kj}\vec{e}_{new\,k}$ ，因此 $(Q.Z)_{kj} = \delta_{kj}$ 对所有 j,k，因此 $Q.Z = I$，因此 $Z = P$。对 Q 同理，因此 (A.26)。∎

备注 A.21 $P^T \neq P^{-1}$ 通常如此。例如，$(\vec{e}_{old,\,i}) = (\vec{a}_i)$ 是以英尺为单位构建的欧几里得基，而 $(\vec{e}_{new,\,i}) = (\vec{b}_i)$ 是以米为单位构建的欧几里得基，并且 $\vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i$ 对于所有 i （这些基是“对齐的”），因此 $P = \lambda I$；于是 $P^T = \lambda I$ 且 $P^{-1} = \frac{1}{\lambda}I \neq P^T$，因为 $\lambda = \frac{1}{0.3048} \neq 1$。因此，切勿混淆 P^T 和 P^{-1}（不要混淆协变性与逆变性），参见例如火星气候轨道器坠毁事故（备注 A.14）。∎

A.5.3 对偶基的变换

命题 A.22 $(\pi_{new,\,i})$ 和 $(\pi_{old,\,i})$ 是 $(\vec{e}_{new,\,i})$ 和 $(\vec{e}_{old,\,i})$ 的对偶基，对于所有 $i \in [1,n]_{\mathbb{N}}$，

$$\pi_{new,i} = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}\pi_{old,i}, \quad \textit{and} \quad [\pi_{new,i}]_{|\vec{e}_{old}} = (\, Q_{i1} \quad \ldots \quad Q_{in}\,) \quad \textit{(i-th row of } Q), \tag{A.27}$$

与（*A.20*）比较（线性形式矩阵是行矩阵）。

对偶记号： $e^i_{new} = \sum_{j=1}^{n} Q^i{}_j e^j_{old}$ 和 $[e^i_{new}]_{|\vec{e}_{old}} = (\, Q^i{}_1 \quad \ldots \quad Q^i{}_n\,)$ 。

证明。 $\pi_{new,\,i}(\vec{e}_{old,\,k}) =^{(A.24)} \pi_{new,\,i}(\sum_j Q_{jk}\vec{e}_{new,\,j}) = \sum_j Q_{jk}\,\pi_{new,\,i}(\vec{e}_{new,\,j}) = \sum_j Q_{jk}\,\delta_{ij} = Q_{ik}$，且 $\sum_j Q_{ij}\pi_{old,\,j}(\vec{e}_{old,\,k}) = \sum_j Q_{ij}\delta_{jk} = Q_{ik}$，对所有 i， k 均成立，因此 $\pi_{new,\,i} = \sum_j Q_{ij}$，即（A.27）。∎

A.5.4 向量和线性形式的坐标系变换

命题 A.23 设 $\vec{x} \in E$ 和 $\ell \in E^*$。那么

$$\begin{array}{l} \bullet\ [\vec{x}]_{|\vec{e}_{new}} = P^{-1}.[\vec{x}]_{|\vec{e}_{old}} \quad \textit{(contravariance formula for vectors: between column matrices)}, \\ \bullet\ [\ell]_{|\vec{e}_{new}} = [\ell]_{|\vec{e}_{old}}.P \qquad \textit{(covariance formula for linear forms: between row matrices)}. \end{array} \tag{A.28}$$

*An*且标量值 $\ell.\vec{x}$ 使用任一基计算，结果均相同（客观结果） ：

$$\ell.\vec{x} = [\ell]_{|\vec{e}_{old}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}_{old}} = [\ell]_{|\vec{e}_{new}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}_{new}}. \tag{A.29}$$

证明。 设 $\vec{x} = \sum_j x_j \vec{e}_{old,j} = \sum_i y_i \vec{e}_{new,\ i}$ $\sum_{ij} Q_{ij} x_j \vec{e}_{new\ i}$ $y_i = \sum_j Q_{ij} x_j$ i 28_1 $_i$ =。
我们有 $\vec{x} = \sum_j x_j \vec{e}_{old,j} = \sum_j x_j (\sum_{i=1}^n Q_{ij} \vec{e}_{new,i})$，因此对于所有，因此 (A.)。

并且 $\ell = \sum_j m_j \pi_{new,\ j} = \sum_i \ell_i \pi_{old,\ i} =^{(A.27)} \sum_{ij} \ell_i P_{ij} \pi_{new,\ j}$ 对所有 j给出 $m_j = \sum_i \ell_i P_{ij}$，因此（A.28）$_2$。（如果你愿意，也可以使用对偶记号。）

因此 $[\ell]_{|\vec{e}_{new}} . [\vec{x}]_{|\vec{e}_{new}} = ([\ell]_{|\vec{e}_{old}} . P)$。$(P^{-1} . [\vec{x}]_{|\vec{e}_{old}}) = [\ell]_{|\vec{e}_{old}} . [\vec{x}]_{|\vec{e}_{old}}$，于是得到（A.29）。 ∎

记号：（A.28）以及 $\vec{x} = \sum_j x_j \vec{e}_{old,\ j} = \sum_i y_i \vec{e}_{new,\ i}$ 给出 $y_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_j$，这意味着： y_i 是由 $y_i (x_1, \ldots\ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_j$定义的函数，因此 $Q_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} (\underline{x_1,} \ldots\ldots, x_n)$； P_{ij}同理；记作

$$Q_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad \text{and} \quad P_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}. \tag{A.30}$$

（如果你更喜欢，也可以使用对偶记号，例如 $Q^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$。）

A.6 双对偶基（及逆变性）

定义 A.24 E^* 的对偶空间是 $E^{**} := (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{R})$，称为 E的双对偶。E^{**} 也称为逆变向量空间 = 方向导数空间。

定义 A.25 设 $(\vec{e}_i)$ 是 E中的一组基，(π_{ei}) 是它的对偶基（ E^*中的基）。(∂_i) 的对偶基 (π_{ei}) 称为 $(\vec{e}_i)$ 的双对偶基。（对偶记号：$(\pi_{ei}) = (e^i)$。）

（记号 ∂_i 表示沿方向 $\vec{e}_i$的导数： $\partial_i (df(\vec{x})) = df(\vec{x}) . \vec{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} (\vec{x})$，参见 § S.1。） —

因此，线性形式 $\partial_i \in E^{**} = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{R})$ 的特征是，对所有 j,

$$\partial_i . \pi_{ej} = \delta_{ij} = \pi_{ej} . \vec{e}_i, \quad \text{so} \quad \ell = \sum_{i=1}^n \ell_i \pi_{ei} \quad \text{iff} \quad \ell_i = \partial_i . \ell \ (= \ell . \vec{e}_i). \tag{A.31}$$

事实上， $\partial_i (\ell) = \partial_i (\sum_{j=1}^n \ell_j \pi_{ej}) = \sum_{j=1}^n \ell_j \partial_i (\pi_{ej}) = \sum_{j=1}^n \ell_j \delta_{ij} = \ell_i$。（对偶记号： $\partial_i . e^j = \delta_i^j = e^j . \vec{e}_i$和 $\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$。）

备注： 借助自然典范同构 $\mathcal{J}$: $\left\{ \begin{array}{l} E \ \to E^{**} = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{R}) \text{ ( )}, \text{ 其中 } \mathcal{J}(\vec{u}) . \ell := \ell . \vec{u}, \quad \forall \ell \in E^* \\ \vec{u} \ \to \mathcal{J} \ \vec{u} \ , \end{array} \right\}$见（T.9），我们可以将 $\vec{u}$和 $\mathcal{J}(\vec{u})$ 视为相同（与观察者无关的识别），于是 $\partial_i = \mathcal{J}(\vec{e}_i)$ =记作 $\vec{e}_i$，而（A.31）写作（微分几何中的通常记号） $\vec{e}_i . \pi_{ej} = \delta_{ij}$ 和 $\ell_i = \vec{e}_i . \ell$。

A.7 双线性形式

A.7.1 定义

设 E 和 F 为向量空间。

定义 A.26 • 双线性形式是二重多重线性形式 $\beta(\cdot, \cdot)$: $\left\{ \begin{array}{l} E \times F \ \to \mathbb{R} \\ \vec{u} \ \vec{w} \ \to \beta \end{array} (,) \ (\vec{u}, \vec{w}) \right\}$。

因此，对于所有 $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in E$,$\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$， $\beta(\vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2, \vec{w}) = \beta(\vec{u}_1, \vec{w}) + \lambda \beta(\vec{u}_2, \vec{w})$ 且 $\beta(\vec{u}, \vec{w}_1 + \lambda \vec{w}_2) = \beta(\vec{u}, \vec{w}_1) + \lambda \beta(\vec{u}, \vec{w}_2)$。

- $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{R})$ 是双线性形式的集合 $E \times F \to \mathbb{R}$。
- 如果（ℓ， m） $\in E^* \times F^*$，那么双线性形式 $\ell \otimes m \in \mathcal{L}(E,\ F;\ \mathbb{R})$ 定义为

$$(\ell \otimes m)(\vec{u}, \vec{w}) = \ell(\vec{u}) m(\vec{w}) \quad (= (\ell . \vec{u})(m . \vec{w})) \tag{A.32}$$

对所有（$\vec{u}$， $\vec{w}$） $\in E \times F$均成立，并称为初等双线性形式。

A.7.2 双线性形式的转置

（警告：不要将其与线性映射转置的主观定义混淆，后者要求内积有定义，参见例如（A.54）。）

定义 A.27 如果 $\beta \in \mathcal{L}(E,\ F;\ \mathbb{R})$，那么其转置是双线性形式 $\beta^T \in \mathcal{L}(F,\ E;\ \mathbb{R})$，对所有（$\vec{w}$， $\vec{u}$） $\in F \times E$，定义为

$$\beta^T (\vec{w}, \vec{u}) = \beta(\vec{u}, \vec{w}). \tag{A.33}$$

（此定义 义是与观察者无关的：此定义不需要基或内积。）

A.7.3 对称与正定双线性形式

定义 A.28 此处 $F = E$（无需选择），且 $\beta \in \mathcal{L}(E,\ E;\ \mathbb{R})$。

- β 是半正的，当且仅当对所有的 $\vec{u} \in E$,

$$\beta(\vec{u},\vec{u}) \geq 0. \tag{A.34}$$

- β 是正定的，当且仅当对所有的 $\vec{u} \neq \vec{0}$,

$$\beta(\vec{u},\vec{u}) > 0. \tag{A.35}$$

- β 是对称的，当且仅当 $\beta^T = \beta$，即对所有的 $\vec{u},\ \vec{v} \in E$,

$$\beta(\vec{u},\vec{v}) = \beta(\vec{v},\vec{u}). \tag{A.36}$$

A.7.4 内积与度量

定义 A.29 • 向量空间 E 中的“内积”（或“标量内点积”、“内标量积”或“内积”）是一种双线性形式 $\beta =$ 记作 $g =$记作 $g(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(E,E;\ \mathbb{R})$，它是对称且正定的。于是（对于内积）

$$g(\cdot,\cdot) \overset{\text{noted}}{=} (\cdot,\cdot)_g \overset{\text{noted}}{=} \cdot \bullet_g \cdot, \quad \text{i.e.} \quad g(\vec{u},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})_g \overset{\text{noted}}{=} \vec{u} \bullet_g \vec{w}, \ \ \forall \vec{u},\vec{w} \in E. \tag{A.37}$$

- 那么，两个向量 $\vec{u},\vec{w} \in E$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-正交的，当且仅当 $(\vec{u},\vec{w})_g = 0$。
- 而与 $(\cdot,\cdot)_g$ 相应的范数是函数 $||.||_g :\ E \to \mathbb{R}_+$，其定义为对所有 $\vec{u} \in E$,

$$||\vec{u}||_g = \sqrt{(\vec{u},\vec{u})_g}. \tag{A.38}$$

（要证明它是一个范数，可使用柯西–施瓦茨不等式（A.39）。）

• 向量空间 E 中的“半内点积”$(\cdot,\cdot)_g$（或“半标量内点积”）是一种双线性形式 $\beta =$记作 $g(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}(E,E;\ \mathbb{R})$，它是对称且半正的。相应的半范数由（A.38）给出。

命题 A.30（柯西–施瓦茨不等式。）$(\cdot,\cdot)_g$ 是.....上的内积 E,

$$\forall \vec{u},\vec{w} \in E, \quad |(\vec{u},\vec{w})_g| \leq ||\vec{u}||_g ||\vec{w}||_g. \tag{A.39}$$

并且 $|(\vec{u},\vec{w})_g| = ||\vec{u}||_g ||\vec{w}||_g$ 当且仅当 $\vec{u}$ 和 $\vec{w}$ 平行时成立。

证明。令 $p(\lambda) = ||\vec{u}+\lambda\vec{w}||_g^2 = (\vec{u}+\lambda\vec{w},\vec{u}+\lambda\vec{w})_g$，于是 $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$，其中 $a = ||\vec{w}||_g^2$, $b = 2(\vec{u},\vec{w})_g$ 且 $c = ||\vec{u}||_g^2$。由 $p(\lambda) \geq 0$（因为 $(\cdot,\cdot)_g$ 是正定的），可得 $b^2 - 4ac \geq 0$，从而得到 (A.39)，并且 $p(\lambda) = 0$ 当且仅当 $\vec{u}+\lambda\vec{w} = 0$。

∎

定义 A.31（度量。）设 $\mathbb{R}^n$ 为通常的仿射几何空间，$n = 1$取 2 或 3，$\vec{\mathbb{R}}^n =$ 为由双点向量构成的通常的相关向量空间。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$中的开集。Ω 上的度量是一个 C^∞函数 g: $\left\{ \begin{array}{rl} \Omega & \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n,\vec{\mathbb{R}}^n;\ \ \mathbb{R}) \\ & = \ \ g_p \end{array} \right\}$

$p \ \to g(p)$ 记作，满足 g_p 在 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的每个 $p \in \Omega$ 处都是一个内积。

特殊情形：当 g_p 与 p 无关时（连续介质力学中的一般情形），度量就简称为内积（例如，欧几里得度量称为欧几里得点积）。

（在可微流形 Ω 上，度量是一个 C^∞ $\binom{0}{2}$ 张量 g，使得 $g(p)$在$p \in \Omega$ 的每一点处都是内积。黎曼度量是满足以下条件的度量：$g(p)$在 $p \in \Omega$ 的每一点处都是欧几里得点积。）

A.7.5 量化：矩阵 $[\beta_{ij}]$ 与张量表示

维数 $E = n$，维数 $F = m$，$\beta \in \mathcal{L}(E,\ F;\ \mathbb{R})$，$(\vec{a}_i)$ 是 E 中的一组基，其对偶基为 (π_{ai})；(b_i) 是 F 中的一组基，其对偶基为 (π_{bi})。（用对偶记号，$(\pi_{ai}) = (a^i)$ 且 $(\pi_{bi}) = (b^i)$。）

定义 A.32 $\beta \in \mathcal{L}(E,\ F;\ \mathbb{R})$ 相对于基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 的分量是这些实数 nm

$$\beta_{ij} := \beta(\vec{a}_i,\vec{b}_j), \quad \text{and} \quad [\beta]_{|\vec{a},\vec{b}} = [\beta_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \tag{A.40}$$

是 β 相对于基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 的矩阵；若基未明确给出，则简写为 $[\beta_{ij}]$。

并且如果 $F = E$ 和 $(\vec{b}_i) = (\vec{a}_i)$，那么 $[\beta]_{|\vec{a},\ \vec{b}} =$已注明 $[\beta]_{|\vec{a}}$。

命题 A.33 只要已知 $\beta \in \mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R})$ 的标量 nm *scalars* $\beta_{ij} = \beta(\vec{a}_i, b_j)$，双线性形式就已确定；并且对于所有 $(\vec{u},\vec{w}) \in E \times F$,

$$\beta(\vec{u},\vec{w}) = [\vec{u}]_{|\vec{a}}{}^T.[\beta]_{|\vec{a},\vec{b}}.[\vec{w}]_{|\vec{b}}, \quad \textit{written} \quad \boxed{\beta(\vec{u},\vec{w}) = [\vec{u}]^T.[\beta].[\vec{w}]}, \tag{A.41}$$

so

$$\beta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}, \tag{A.42}$$

而 $\mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R})$ 中的一组基由 nm 函数 $\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}$构成，并且 维数 $\mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R}) = nm$。（对偶记号：$\beta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}a^i\otimes b^j$。）

证明。 β 是双线性的，因此 $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n}u_i\vec{a}_i$ 和 $\vec{w} = \sum_{j=1}^{n}w_j\vec{b}_j$ 给出 $\beta(\vec{u},\vec{w}) = \sum_{i\ ,j=1}^{n}u_iw_j\beta(\vec{a}_i,\vec{b}_j) = \sum_{i\ ,j=1}^{n}u_i\beta_{ij}w_j = ([\vec{u}]_{|\vec{a}})^T.[\beta]_{|\vec{a},\vec{b}}.[\vec{w}]_{|\vec{b}}$，故得（A.41）。特别地，若已知 β_{ij}，则 b 也已知。并且 $(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj})(\vec{a}_k,\vec{b}_\ell) =^{(A.32)} (\pi_{ai}.\vec{a}_k)(\pi_{bj}.\vec{b}_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$（矩阵$[\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}]_{|\vec{a},\vec{b}}$的所有元素均为零，除了第 i 行与第 j 列的交点处的元素，其值等于 1）。又 $\beta\ \vec{u}\ \vec{w} = \sum_{i\ j=1}^{n}\beta_{ij}u_iw_j = \sum_{i\ j=1}^{n}\beta_{ij}\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}\ \vec{u}\ \vec{w} =^{(A.32)} \pi_{ai}.\vec{u}\ \ \pi_{bj}.\vec{w} = u_iw_j$，因此 $\beta := \sum_{i\ ,j=1}^{n}\beta_{ij}(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj})$，故 $\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}$ 张成 $\mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R})$。并且 $\sum_{ij}\lambda_{ij}(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}) = 0$ 意味着 $0 = (\sum_{ij}\lambda_{ij}(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}))(\vec{a}_k,\vec{b}_\ell) = \sum_{ij}\lambda_{ij}(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj})(\vec{a}_k,\vec{b}_\ell) = \lambda_{k\ell} = 0$对所有 k,ℓ均成立；因此 $\pi_{ai}\otimes\pi_{bj}$线性无关。故 $(\pi_{ai}\otimes\pi_{bj})$ 是 $\mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R})$ 的一组基，且 $\dim(\mathcal{L}(E,F;\ \mathbb{R})) = nm$。（对偶记号：$\beta(\vec{u},\vec{w}) = \sum_{i\ ,j=1}^{n}\beta_{ij}u^iw^j$ 以及 $\beta := \sum_{i\ ,j=1}^{n}\beta_{ij}\ a^i\otimes b^j$。） ▪

例 A.34 维数 $E =$维数 $F = 2$。$[\beta]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 表示 $\beta(\vec{a}_1,\ \vec{b}_1) = \beta_{11} = 1$，$\beta(\vec{a}_1,\ \vec{b}_2) = \beta_{12} = 2$，$\beta(\vec{a}_2,\ \vec{b}_1) = \beta_{21} = 0$，$\beta(\vec{a}_2,\ \vec{b}_2) = \beta_{22} = 3$。以及 $\beta_{12} = [\vec{a}_1]^T_{|\vec{a}}.[\beta]_{|\vec{a},\ \vec{b}}.[\vec{b}_2]_{|\vec{b}} = (1\ 0)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 2$。 ▪

练习 A.35 设 $\beta \in \mathcal{L}(E,E;\ \mathbb{R})$，设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 是 A 中的两个基，且 $\lambda \in \mathbb{R}^*$。证明：

$$\text{if, } \forall i \in [1,n]_{\mathbb{N}},\ \vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i, \quad \text{then} \quad [\beta]_{|\vec{b}} = \lambda^2[\beta]_{|\vec{a}}. \tag{A.43}$$

（例如，从英尺变换为米这样的单位变换，会对矩阵产生很大的影响。）

答案。 $\vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i$ 给出 $\beta(\vec{b}_i,\vec{b}_j) = \beta(\lambda\vec{a}_i,\lambda\vec{a}_j) = \lambda^2\beta(\vec{a}_i,\vec{a}_j)$（双线性），因此 $[\beta]_{|\vec{b}} = \lambda^2[\beta]_{|\vec{a}}$。 ▪

练习 A.36 证明

$$[\beta^T]_{\vec{b},\vec{a}} = ([\beta]_{\vec{a},\vec{b}})^T, \quad \text{written} \quad [\beta^T] = [\beta]^T. \tag{A.44}$$

答案。设$[\beta]_{\vec{a},\vec{b}} = [\beta_{ij}]_{\ i=1,\dots,j=1\ \dots\ m}^{\ n\ ,}$以及$[\beta^T]_{\vec{b},\vec{a}} = [\gamma_{ij}]_{\ i=1,\dots,j=1\ \dots\ n}^{\ m\ ,}$。我们有 $\gamma_{ij} = \beta^T(\vec{b}_i,\vec{a}_j) = \beta(\vec{a}_j,\vec{b}_i) = \beta_{ji}$，证毕。 ▪

A.8 线性映射

A.8.1 定义

设 E 和 F 为向量空间。

定义 A.37 • 函数 $L:\ E \to F$是线性的，当且仅当 $L(\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2) = L(\vec{u}_1) + \lambda L(\vec{u}_2)$ 对所有 $\vec{u}_1,\vec{u}_2 \in E$以及所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都成立（分配律型关系）。并且（分配律记号）：

$$L(\vec{u}) \overset{\text{noted}}{=} L.\vec{u}, \quad \text{so} \quad L(\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2) = L.(\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2) = L.\vec{u}_1 + \lambda L.\vec{u}_2. \tag{A.45}$$

注意：这种点记号 $L.\vec{u}$ 是线性记号（分配律型记号）；它是（线性）函数与向量之间的“外”点积；它不是“内”点积，因为 L 和 $\vec{u}$ 不属于同一个空间。它不是矩阵乘积，因为尚未引入任何基（尚未进行量化）。

- $\mathcal{L}(E;\ F)$ 是线性映射的集合 $E \to F$（向量空间，是（$\mathcal{F}(E;\ F)$ +的子空间。））。
- 如果 $F = E$，那么线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;E)$ 在 E 中称为自同态。（如果 $F = \mathbb{R}$，那么线性映射 $E \to \mathbb{R}$ 称为线性形式，而 $E^* := \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ 是 E 的对偶空间。）

术语： 令 $L_i(E;E)$ 为可逆线性映射的空间。如果 E 是有限维向量空间，维数为 $\dim E = n$，那么在代数中，配备复合规则的线性映射集合 $(L_i(E;\ E)\ \circ)$ 称为 $GL_n(E)$ = "线性群"（显然它确实是一个群，很容易验证）。而由 $n*n$ 可逆矩阵构成的"线性群"为 $GL_n(\mathcal{M}_n) := (L_i(\mathcal{M}_n;\ \mathcal{M}_n)$。），即配备矩阵乘法规则的 $L_i(\mathcal{M}_n;\mathcal{M}_n)$。

练习 A.38 （数学练习。）设 $E = (E,\ ||.||_E)$ 和 $F = (F,\ ||.||_F)$ 是巴拿赫空间，并设$L_{ic}(E;\ F)$ 为可逆连续线性映射 $E \to F$ 构成的空间，其通常范数为 $||L|| = \sup_{||\vec{x}||_E=1} ||L.\vec{x}||_F$。设 Z: $\left\{ \begin{array}{r} L_{ic}(E;\ F) \to L_{ic}\ E\ F \\ L \to L^{-1} \end{array} \right\}$(;)。证明对于所有 $M \in L_{ic}(E;\ F)$，有 $dZ(L).M = -L^{-1} \circ M \circ L^{-1}$。（回顾：在有限维空间中，线性映射总是连续的。）

答案。考虑 $\lim_{h\to 0} \frac{Z(L+hM)-Z(L)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(L+hM)^{-1}-L^{-1}}{h}$ (（若极限存在，则记为 $dZ(L).M$）。由 $N = L^{-1}.M$ 可得 $L + hM = L(I + hN)$，并且只要 $||hN|| < 1$，即 $h < \frac{1}{||N||} = \frac{1}{||L^{-1}.M||}$，$(I + hN)$ 就是可逆的，~~其逆函~~数为 $I - hN + h^2N - ...$（诺伊曼级数）；因此 $I + hN = I - hN + o(h)$，并且 $(L + hM)^{-1} = (I + hN)^{-1}.L^{-1} = (I - hN + o(h)).L^{-1} = L^{-1} - hN.L^{-1} + o(h)$。于是 $\frac{(L+hM)^{-1}-L^{-1}}{h} = \frac{L^{-1}-hN.L^{-1}+o}{h}$ $(\frac{h.-L^{-1}}{h} = -N.L^{-1} + o)$（1）$\longrightarrow_{h\to 0} -N.L^{-1}$。 ∎

A.8.2 量化：矩阵 $[L_{ij}] = [L^i{}_j]$

$\dim E = n, \dim F = m, L \in \mathcal{L}(E;\ F), (\vec{a}_i)$ 是 E中的一组基，其对偶基为 (π_{ai})，(b_i) 是 F中的一组基，其对偶基为 (π_{bi})。（使用对偶记号，$(\pi_{ai}) = (a^i)$ 且 $(\pi_{bi}) = (b^i)$。）

定义 A.39 线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$ 相对于基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 的分量是 nm 实数，记作 L_{ij} （经典记号）$= L^i{}_j$ （对偶记号）；这些分量是向量 $L.\vec{a}_j$ 相对于基 $(\vec{b}_i)$ 的分量。即：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{clas. not.} : L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} L_{ij}\vec{b}_i, \\ \\ \text{dual not.} \quad L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^{m} L^i{}_j\vec{b}_i, \end{array} \right\}, \quad \text{i.e.} \quad [L.\vec{a}_j]_{|\vec{b}} \overset{\text{clas.}}{=} \begin{pmatrix} L_{1j} \\ \vdots \\ L_{mj} \end{pmatrix} \overset{\text{dual}}{=} \begin{pmatrix} L^1{}_j \\ \vdots \\ L^m{}_j \end{pmatrix}. \tag{A.46}$$

And

$$[L]_{|\vec{a},\vec{b}} \overset{\text{clas.}}{=} [L_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \overset{\text{dual}}{=} [L^i{}_j]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \tag{A.47}$$

is $\vec{}$相对于基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 的 L 矩阵（因此 $[L.\vec{a}_j]_{|\vec{b}}$ 是$[L]_{|\vec{a},\vec{b}}$的第 j 列 ）.

特殊情况：如果 $E = F$（因此 L 是$\vec{}$个自同态），并且如果 $(\vec{b}_i) = (\vec{a}_i)$，那么 $[L]_{|\vec{a},\ \vec{a}} =$记作$[L]_{|\vec{a}}$。

例 A。40 $n = m = 2$。$[L]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 表示 $L.\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ 和 $L.\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$（按列读取）。这里

L_{11}=1、 L_{12}=2、 L_{21}=0、 L_{22}=3（对偶记号： $L^1{}_1$=1、 $L^1{}_2$=2、 $L^2{}_1$=0、 $L^2{}_2$=3）。 ∎

又由于 L 是线性的，对于所有 $\vec{u} \in E$、 $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j\vec{a}_j = \sum_{j=1}^{n} u^j\vec{a}_j$，根据线性性，我们得到：

$$L.\vec{u} \overset{\text{clas.}}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}u_j\vec{b}_i \overset{\text{dual}}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} L^i{}_j u^j\vec{b}_i, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{[L.\vec{u}]_{|\vec{b}} = [L]_{|\vec{a},\vec{b}}.[\vec{u}]_{|\vec{a}}}. \tag{A.48}$$

简写记法： $[L.\vec{u}] = [L].[\vec{u}]$ 当基是隐含的。

命题 *A.41* 线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$ 一旦已知向量 n $L.\vec{a}_j$，便可确定$j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$。由 $\mathcal{L}_{ij}.\vec{a}_\ell = \delta_{j\ell}\vec{b}_i$ （矩阵$[\mathcal{L}_{ij}]_{|\vec{a}}$中除第 i 行与第 j 列交点处的元素等于 *1* 外，其余所有元素均为零）定义的线性映射 $\mathcal{L}_{ij} \in \mathcal{L}(E;\ F)$，其中 i、 $\ell = 1$、.....、 n 以及 $j = 1$、.....、 m，构成基 $\in \mathcal{L}(E;\ F)$。（对偶记号： $\mathcal{L}_{ij}$ =记作 $\mathcal{L}_i{}^j$，以及$\mathcal{L}_i{}^j.\vec{a}_\ell = \delta^j_\ell\vec{b}_i$。）因此，$dim(\mathcal{L}(E;\ F)) = nm$。

证明。 $\vec{u} \in E$ 和 $\vec{u} = \sum_k u_j\vec{a}_j$ 给出 $L.\vec{u} = \sum_j u_j L.\vec{a}_j$，因为 L 是线性的。因此，当且仅当对所有 $j = 1, ..., n$，已知 n 向量$L.\vec{a}_j$时， L 才是已知的；而对所有 k， $L.\vec{a}_k = \sum_i L_{ik}\vec{b}_i$与 $\sum_{ij} L_{ij}\mathcal{L}_{ij}.\vec{a}_k = \sum_{ij} L_{ij}\delta_{jk}\vec{b}_i = \sum_i L_{ik}\vec{b}_i$一起，因此 $L = \sum_{ij} L_{ij}\mathcal{L}_{ij}$，于是 $\mathcal{L}_{ij}$张成 $\mathcal{L}(E;\ F)$。而 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathcal{L}_{ij} = 0$意味着，对所有 ℓ，$\vec{0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathcal{L}_{ij}.\vec{a}_\ell = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\delta_{j\ell}\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{m}\lambda_{i\ell}\vec{b}_i$，因此 $\lambda_{i\ell} = 0$，对所有 i和 ℓ都成立。因此这些 $\mathcal{L}_{ij}$线性无关。因此 $(\mathcal{L}_{ij})_{\ i=1,\dots,j=1\ \dots\ m,,}^{\ n}$是 $\mathcal{L}(E;\ F)$中的一个基。 ∎

练习 A.42 若 $L \in \mathcal{L}(E;E)$（自同态），且 $(\vec{a}_i)$ 是 E中的一个基，证明：

$$\text{if } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ and } \vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i \ \forall i \in [1,n]_{\mathbb{N}}, \quad \text{then} \quad [L]_{|\vec{b}} = [L]_{|\vec{a}}, \tag{A.49}$$

即，单位的变 换不会影响自同态的矩阵。请检查基变换
公式。 。**注意：** 与（A.43）比较：协变性和逆变性不 应混淆。
答案。令 $L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n L_{aij}\vec{a}_i$ 和 $L.\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n L_{bij}\vec{b}_i$。则 $\sum_{i=1}^n L_{bij}\vec{b}_i = L.\vec{b}_j = L.(\lambda\vec{a}_j) = \lambda L.\vec{a}_j = \lambda\sum_{i=1}^n L_{aij}\vec{a}_i = \lambda\sum_{i=1}^n L_{aij}\frac{\vec{b}_i}{\lambda} = \sum_{i=1}^n L_{aij}\vec{b}_i$，因此 $L_{bij} = L_{aij}$。
基变换公式： $[L]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[L]_{|\vec{a}}.P$与此处的 $P = \lambda I$。 ∎

A.8.3 自同态的迹

设 E是一个向量空间，维数为 $E = n$。设 $\vec{u} \in E$和 $\ell \in E^*$，并称 $\mathcal{L}_{\vec{w},\ell} \in \mathcal{L}(E;\ E)$ 为自同态，称为初等自同态，其定义为

$$\mathcal{L}_{\vec{w},\ell}.\vec{u} := \vec{w}(\ell.\vec{u}) = (\ell.\vec{u})\vec{w}. \tag{A.50}$$

定义 A.43 自同态 $L_{\vec{w},\ell}$ 的迹是实数
迹算子是线性映射 $\mathrm{Tr}: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E;\ E) & \to & \mathbb{R} \\ L & \to & \mathrm{Tr}(L) \end{array} \right\}$，定义在初等自同态上，

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{\vec{w}\ell}) := \ell.\vec{w}. \tag{A.51}$$

并由 (A.51) 给出。
命题 A.44 设 $L \in \mathcal{L}(E;E)$。实数 $\mathrm{Tr}(L)$ 是客观的（是 L 的内禀属性），也就是说，它与 E 中的任何基都无关。并且（量化）若 $(\vec{e}_i)$ 是一个基，且对所有 j 都有 $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i$，则

$$\mathrm{Tr}(L) = \sum_{i=1}^n L_{ii} \ (\in \mathbb{R}), \tag{A.52}$$

也就是说，$\mathrm{Tr}(L)$ 矩阵 $[L]_{|\vec{e}}$ 的迹。（对偶记号 $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L^i{}_j\vec{e}_i$ 和 $\mathrm{Tr}(L) = \sum_{i=1}^n L^i{}_i$。）
是
证明。$\mathrm{Tr}(\mathcal{L}_{\vec{w},\ell}) := \ell.\vec{w}$是一个实数，任何观察者都可以对其进行考察，且其值对所有观察者都相同，参见 (A.29)：它是客观的。

设 $L \in \mathcal{L}(E;\ E)$。令 $(\vec{a}_i)$ 为一组基，(π_{ai}) 为其（协变）对偶基，且 $L.\vec{a}_j = \sum_i L_{ij}\vec{a}_i$，即 $[L]_{|\vec{a}} = [L_{ij}]$。并且我们有 $(\sum_{ik} L_{ik}\mathcal{L}_{\vec{a}_i,\ \pi_{ak}}).\vec{a}_j = \sum_{ik} L_{ik}\mathcal{L}_{\vec{a}_i,\ \pi_{ak}}.\vec{a}_j =^{(A.50)} \sum_{ik} L_{ik}\vec{a}_i(\pi_{ak}.\vec{a}_j) = \sum_{ik} L_{ik}\vec{a}_i\delta_{kj} = \sum_i L_{ij}\vec{a}_i$，因此 $L = \sum_{ij} L_{ij}\mathcal{L}_{\vec{a}_i,\ \pi_{aj}}$（初等自同态之和），因此，由于迹是线性的，$\mathrm{Tr}(L) = \sum_{ij} L_{ij}\mathrm{Tr}\mathcal{L}_{\vec{a}_i,\ \pi_{aj}} = \sum_{ij} L_{ij}\delta_{ji} = \sum_i L_{ii}$，于是得到（A.52）。 ∎

练习 A。 45 用基变换公式验证，$\mathrm{Tr}(L)$ 是不变性（对所有观察者取值相同）
的。 .

答案。设 $(\vec{a}_i \quad \vec{b}_i \quad P = [P_{ij}] \quad \vec{a}_i \quad \vec{b}_i \quad Q = P^{-1} \quad [L]_{|\vec{a}} =)$ 和 $(\ )$ 是两个基，$[\ L_{a\ ij}\ ]\ [L]_{|\vec{b}} = [\ L_{b\ ij}\ ] \quad [L]_{|\vec{b}} =^{(A.104)} P^{-1}.[L]_{|\vec{a}}.P, \quad L_{b\ ij} = \sum_{k\ell} Q_{ik}\ L_{a\ k\ell}P_{\ell j} \quad \sum_i L_b$ 是从 $(\ )$ 到 $(\ )$ 的过渡矩阵，$,(\ ),\ _{ii} =$ $(\ )$。我们有 i.e. $(\ )(\ )$，因此 $(\ )\sum_{ik\ell} Q_{ik}\ L_{a\ k\ell}P_{\ell i} = \sum_{k\ell} P.Q_{\ \ell k}\ L_{a\ k\ell} = \sum_{k\ell}\delta_{\ell k}\ L_{a\ k\ell} = \sum_k L_{a\ kk}$ ∎$(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )$，证毕。

一一张量的替代定义：参见 § Q.6。

A.9 转置矩阵

定义可见于任何基础书籍，例如 Strang [18]：若 $M = [M_{ij}]_{\ i=1,\ldots,j=1\ \ldots\ n}^{\ m}{}_{,,}$是一个 $m * n$矩阵，则其转置矩阵是 $n * m$矩阵 $M^T = [(M^T)_{ij}]_{\ i=1,\ldots,j=1\ \ldots\ m}^{\ n}{}_{,,}$，定义如下：

$$(M^T)_{ij} := M_{ji} \tag{A.53}$$

（交换行和列）。例如，$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$得到$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，且 $(M^T)_{12}$=M_{21}=3。

并且 M 是对称的，当且仅当 $M^T = M$（这要求 m=n）。
并且 $M.N = [\sum_k M_{ik}N_{kj}]_{\ j}^{\ i}$得到 $(M.N)^T = [\sum_k M_{jk}N_{ki}]_{\ j}^{\ i} = [\sum_k (N^T)_{ik}(M^T)_{kj}]_{\ j}^{\ i} = N^T.M^T$。

练习 A.46 证明：如果 M 是一个 $n * n$可逆矩阵，那么 M^T 可逆，且 $(M^T)^{-1}$ =$(M^{-1})^T$(=记作 M^{-T})；此外，如果 M 是对称的，那么 M^{-1} 也是对称的。
答案。 $M.M^{-1} = I$ 给出（M^{-1}）$^T.M^T = I^T = I$，因此 M^T 可逆，且（M^T）$^{-1}$ = （M^{-1}）^{T}。此外，如果 $M = M^T$，那么 M^{-1} = （M^{-1}）^{T}。 ∎

A.10 转置端同态：取决于所选的内积

不要将其与矩阵的转置混淆，参见（A.53）。也不要将其与双线性形式的转置（与观察者无关）混淆，参见（A.33）；特别是，线性映射的转置取决于使用它的观察者（取决于内积的选择）。

A.10.1 定义（需要内积：非客观的）

设 E 是一个配备内积 $g(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_g$的有限维向量空间。

定义 A.47 端同态 $L \in \mathcal{L}(E;E)$ 关于 $(\cdot,\cdot)_g$ 的转置，是由下式定义的端同态$L_g^T \in \mathcal{L}(E;E)$

$$\forall \vec{x},\vec{y} \in E, \quad (L_g^T.\vec{y},\vec{x})_g = (\vec{y},L.\vec{x})_g, \quad \text{i.e.} \quad (L_g^T.\vec{y}) \bullet_g \vec{x} = \vec{y} \bullet_g (L.\vec{x}). \tag{A.54}$$

（它取决于（$\cdot$, $\cdot$）$_g$，见（A.59）。）如果（$\cdot$, $\cdot$）$_g$是给定的欧几里得点积（等距框架），那么 L_g^T =记作L^T，因此（$L^T.\vec{y}$, $\vec{x}$）$_g$ =（$\vec{y}$, $L.\vec{x}$）$_g$，即（$L^T.\vec{y}$）$\bullet\vec{x} = \vec{y}\bullet$（$L.\vec{x}$）。

习题 A.48 （数学练习。）例如，当 E有限维时，可通过 E中的一组基证明 L_g^T 的存在性和唯一性，见下一节 A.10.2。更一般的证明：证明：如果（E, （$\cdot$, $\cdot$）$_g$）是一个无限维希尔伯特空间，且 $L \in \mathcal{L}$（E; E）连续，那么 L_g^T存在、唯一且连续（应用 F.1 里斯表示定理）。

答案。令 $\vec{y} \in E$，再令 $\ell_{\vec{y}g}$： $\vec{x} \in E \to \ell_{\vec{y}g}(\vec{x}) := (\vec{y},L.\vec{x})_g \in \mathbb{R}$。 $\ell_{\vec{y}g}$是线性的（显然，因为 L 是线性的，且 $(\cdot,\cdot)_g$是双线性的），并且连续：由 $|\ell_{\vec{y}g}.\vec{x}| \leq ||\vec{y}||_g ||L.\vec{x}||_g \leq ||\vec{y}||_g ||L||\,||\vec{x}||_g$ 可得 $||\ell_{\vec{y}g}||_{E^*} \leq ||L||\,||\vec{y}||_g < \infty$；令 $\vec{\ell}_{\vec{y}g} \in E$为 $\ell_{\vec{y}g} \in E^*$的 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示：对所有 $\vec{x}$， $\ell_{\vec{y}g}.\vec{x} = (\vec{\ell}_{\vec{y}g},\vec{x})_g$，其中 $||\vec{\ell}_{\vec{y}g}||_g = ||\ell_{\vec{y}g}||_{E^*}$；因此我们定义了 L_g^T: $\vec{y} \in E \to L_g^T(\vec{y}) := \vec{\ell}_{\vec{y}g} \in E$；且 $(L_g^T(\vec{y})\ \vec{x})_g = (\vec{\ell}_{\vec{y}g},\vec{x})_g = \ell_{\vec{y}g}.\vec{x} = (\vec{y},L.\vec{x})_g$，因此 L_g^T是线性的（因为 $(\cdot,\cdot)_g$是双线性的），并且连续：由 $||L_g^T.\vec{y}||_g = ||\vec{\ell}_{\vec{y}g}||_g = ||\ell_{\vec{y}g}||_{E^*} \leq ||L||\,||\vec{y}||_g$可得 $||L_g^T|| \leq ||L||_{\mathcal{L}(E;E)} < \infty$。 ∎

备注 A.49 回顾：双线性形式 β 的转置 β^T 是客观的，参见 (A.33)：定义 β^T 无需借助内积之类的工具。请勿与以下情况混淆：线性映射 L 的转置 L_g^T =记作 L^T 是主观的：它取决于观察者对内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 的选择。特别是，在处理转置时，用“其双线性张量表示”在一组基下表示线性映射是危险的： $L \in \mathcal{L}(E;F)$ 自然且典范地由双线性形式 $\beta_L \in \mathcal{L}(F^*,E;\mathbb{R})$ 表示，因此 $(\beta_L)^T \in \mathcal{L}(E,F^*;\mathbb{R})$；而

$$L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n L^i{}_j \vec{b}_i \ \text{ gives } \ \beta_L = \sum_{i,j=1}^n L^i{}_j \vec{b}_i \otimes a^j, \ \text{ thus } \ (\beta_L)^T \overset{(A.33)}{=} \sum_{i,j=1}^n L^j{}_i a^i \otimes \vec{b}_j, \tag{A.55}$$

而 $L^T \in \mathcal{L}(F;E)$ 自然且典范地由双线性形式 $\beta_{(L^T)} \in \mathcal{L}(E^*,F;\mathbb{R})$ 表示，并且

$$L^T.\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n (L^T)^i{}_j \vec{a}_i \ \text{ gives } \ b_{(L^T)} = \sum_{i,j=1}^n (L^T)^i{}_j \vec{a}_i \otimes b^j, \ \text{ thus } \ \boxed{\beta_{(L^T)} \neq (\beta_L)^T} \tag{A.56}$$

原因有二：1- $\vec{a}_i \otimes b^j \neq a^i \otimes \vec{b}_j$，以及 2- $L^T := L_{gh}^T$ 取决于观察者在 E 和 F 中选择的内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$，参见 (A.73)：$(L^T)^i{}_j =^{(A.73)} \sum_{k,\ell=1}^n [g]^{-1}_{ik} L^\ell{}_k\, h_{\ell j}$；而 $(\beta_L)^T$ 与任何内积的选择都无关。（事实上，$(\beta_L)^T \in \mathcal{L}(F^*,E;\mathbb{R})$ 是 L 的伴随 $L^* \in \mathcal{L}(F^*;E^*)$ 的张量表示：令 $L^*.b^j = \sum_{i=1}^n (L^*)_i{}^j a^i$，即可得到 $\frown(L^*) = \sum_{i,j=1}^n (L^*)_i{}^j a^i \otimes \vec{b}_j = (\beta_L)^T$，参见 (A.83)。）

因此，在连续介质力学中，处理转置对象时，强烈建议不要使用线性映射的张量记号（例如使用 F^T 变形梯度的转置时）。 ∎

A.10.2 基的量化

令 $(\vec{e}_i)$ 为 E 中的一组基，令 $g_{ij} := g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$，因此 $[g]_{|\vec{e}} := [g_{ij}]$ =记为$[g]$，并采用（经典记号）

$$L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i, \quad L_g^T.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n (L_g^T)_{ij}, \quad \text{i.e.} \quad [L]_{|\vec{e}} = [L_{ij}] \overset{\text{noted}}{=} [L], \quad [L_g^T]_{|\vec{e}} = [(L_g^T)_{ij}] \overset{\text{noted}}{=} [L_g^T]. \tag{A.57}$$

(A.54) 给出 $[\vec{x}]^T.[g].[L_g^T.\vec{y}] = [L.\vec{x}]^T.[g].[\vec{y}]$，对所有 $\vec{x}$，$\vec{y}$ 均成立，因此

$$[g].[L_g^T] = [L]^T.[g], \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(L_g^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} L_{ki}\, g_{kj} \tag{A.58}$$

也就是说，

$$\boxed{[L_g^T] = [g]^{-1}.[L]^T.[g]}, \quad \text{i.e.} \quad (L_g^T)_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} ([g]^{-1})_{ik} L_{\ell k} g_{\ell j}. \tag{A.59}$$

与 (A.56) 对比。当且仅当 $(\vec{e}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-标准正交时，$[g] = [\delta_{ij}]$ 且 $(L_g^T)_{ij} = L_{ji}$。用对偶记号，$L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L^i{}_j \vec{e}_i$，$L_g^T.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n (L_g^T)^i{}_j$，$[L]_{|\vec{e}} = [L^i{}_j]$，$[L_g^T]_{|\vec{e}} = [(L_g^T)^i{}_j]$，并且

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(L_g^T)^k{}_j = \sum_{k=1}^{n} L^k{}_i\, g_{kj}, \quad \text{i.e.} \quad (L_g^T)^i{}_j = \sum_{k,\ell=1}^{n} ([g]^{-1})_{ik} L^\ell{}_k\, g_{\ell j}. \tag{A.60}$$

注释 A.50 最后一个方程 $(A.60)_2$ 也写作

$$(L_g^T)^i{}_j = \sum_{k,\ell=1}^{n} g^{ik} L^\ell{}_k\, g_{\ell j} \quad \text{when} \quad ([g]_{\vec{e}})^{-1} = [g_{ij}]^{-1} \overset{\text{noted}}{=} [g^{ij}]. \tag{A.61}$$

不要被记号 g^{ij} 迷惑，它由 $[g^{ij}] := [g_{ij}]^{-1}$ 定义。（它也是 $(g^\sharp)^{ij}$ 的简写，见 (F.32)。）使用经典记号以避免误用和误解。 ∎

注 A.51 双线性形式 $\beta \in \mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})$ 满足 $[\beta^T] = [\beta]^T$。线性端同态 $L \in \mathcal{L}(E;E)$ 通常满足 $[L_g^T] = [g]^{-1}.[L]^T.[g] \neq [L]^T$（例如取 $[L] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$）。因此，不要将关于 E 的双线性形式（客观的）与关于 E 的线性端同态（主观的）混淆。 ∎

练习 A.52 在 $\vec{\mathbb{R}^2}$ 中，设 $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ 为一组基。设 $L \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}^2};\vec{\mathbb{R}^2})$ 由 $[L]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 定义。求 $\vec{\mathbb{R}^2}$ 中两个内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$，使得 $L_g^T \neq L_h^T$（转置端同态并不唯一，也不是 L 的内禀属性，因为它取决于观察者所选择的内积）。

答案。A.58 的计算：

Choose $(\cdot,\cdot)_g$ given by $[g]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]$. Thus $[L_g^T]_{|\vec{e}} = [I].[L]_{|\vec{e}}.[I] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; So $L_g^T = L$.

Choose $(\cdot,\cdot)_h$ given by $[h]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Thus $[L_h^T]_{|\vec{e}} = [h]_{|\vec{e}}^{-1}.[L]_{|\vec{e}}.[h]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; So $L_h^T \neq L$.

Thus $L_h^T \neq L_g^T$, e.g., $\vec{e}_2 = L_g^T.\vec{e}_1 \neq L_h^T.\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_2$. ∎

练习 A.53 证明：若 L 可逆，则 L_g^T 可逆，并且 $(L_g^T)^{-1} = (L^{-1})_g^T$（记作 L_g^{-T}）。

答案。设：$\exists \vec{y} \in E, \vec{y} \neq \vec{0}$，使得 $L_g^T.\vec{y} = 0$。由于 L 可逆，存在 $\exists! \vec{x} \in E$ 使得 $L.\vec{x} = \vec{y}$，且 $\vec{x} \neq \vec{0}$，因为 $\vec{y} \neq \vec{0}$，并且 L 是线性的；又由 $L_g^T.\vec{y} = 0$ 得到 $L_g^T.L.\vec{x} = 0$，因此 $(L_g^T.L.\vec{x},\vec{x})_g = 0$，因此 $||L.\vec{x}||_g^2 = 0$，因此 $L.\vec{x} = 0$，因此 $\vec{x} = 0$，因为 L 是线性双射；矛盾。因此 $\mathrm{Ker}(L_g^T) = \{\vec{0}\}$，因此 L_g^T 可逆，因为它是一个自同态。而且 $(L_g^T.(L^{-1})_g^T.\vec{x},\vec{y})_g \overset{(A.54)}{=} ((L^{-1})_g^T.\vec{x}, L.\vec{y})_g \overset{(A.54)}{=} (\vec{x},(L^{-1}).L.\vec{y})_g = (\vec{x},\vec{y})_g = (L_g^T.(L_g^T)^{-1}.\vec{x},\vec{y})_g$，确实 $\forall \vec{x},\vec{y}$，因此 $L_g^T.(L^{-1})_g^T = L_g^T.(L_g^T)^{-1}$，因此 $(L^{-1})_g^T = (L_g^T)^{-1}$，因为 L_g^T 可逆。 ∎

练习 A.54 内积成比例的特殊情形 $(\cdot,\cdot)_a$ and $(\cdot,\cdot)_b$：$\exists \lambda > 0$ s.t. $(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2 (\cdot,\cdot)_b$. 证明：$L_a^T = L_b^T$：两个成比例的内积具有相同的转置自同态。

答案。$(L_b^T.\vec{y},\vec{x})_b = (\vec{y},L.\vec{x})_b = \lambda^2(\vec{y},L.\vec{x})_a = \lambda^2(L_a^T.\vec{y},\vec{x})_a = (L_a^T.\vec{y},\vec{x})_b$，对所有 $\vec{x},\vec{y}$ 均成立，因此 $L_b^T = L_a^T$。 ∎

A.10.3 对称自同态

定义 A.55 自同态 $L \in \mathcal{L}(E;E)$ 称为 $(\cdot,\cdot)_g$-对称，当且仅当 $L_g^T = L$：

$$L\ (\cdot,\cdot)_g\text{-symmetric} \quad \Longleftrightarrow \quad L_g^T = L \quad \Longleftrightarrow \quad (L.\vec{x},\vec{y})_g = (\vec{x},L.\vec{y})_g, \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in E. \tag{A.62}$$

备注 A.56 自同态的对称性 L 并非自同态的内禀属性：它取决于 $(\cdot,\cdot)_g$；参见习题 A.52，其中 L 是 $(\cdot,\cdot)_g$-对称的，而不是 $(\cdot,\cdot)_h$-对称的。 ∎

A.10.4 自同态的一般平坦 $^\flat$ 记号：相对于 $(\cdot,\cdot)_g$

令 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 是向量空间 E上的一个内积，并设 $L\in\mathcal{L}(E;E)$（一个 C^0 自同态）.

定义 A.57 与自同态$L\in\mathcal{L}(E;E)$$_g$相关联的双线性形式 $L_g^\flat\in\mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})$（相对于 $(\cdot,\cdot)$）定义如下：对所有 $\vec{u},\ \vec{w}\in E$,

$$L_g^\flat(\vec{u},\vec{w}):=(\vec{u},L.\vec{w})_g. \tag{A.63}$$

($L_g^\flat$取决于对 $(\cdot,\cdot)_g$的选择。) 因此，我们定义了依赖于 $(\cdot,\cdot)_g$ 的算子 :

$$(.)_g^\flat=\mathcal{J}_g(.):\begin{cases}\mathcal{L}(E;E)\ \to\mathcal{L}(E,E;\mathbb{R})\\ \qquad L\ \to\mathcal{J}_g(L):=L_g^\flat,\end{cases} \tag{A.64}$$

如果施加 $(\cdot,\cdot)_g$ ，那么 $L_g^\flat$ =记为 $L^\flat$。

（ $L_g^\flat$ 的双线性显然成立，因为 L 是线性的，而（$\cdot,\ \cdot$）$_g$ 是双线性的；并且，只要 L和（$\cdot,\ \cdot$）$_g$ 连续，双线性形式 $L_g^\flat$就是连续的，因为 $|L_g^\flat(\vec{u},\ \vec{v})|\leq||g||\,||L.\vec{u}||\,||\vec{v}||\leq(||g||\,||L||)\ ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$。）

命题 A.58 借助自然典范同构 $L\in\mathcal{L}(E;E)\simeq T_L\in\mathcal{L}(E^*,E;\mathbb{R})$（由$T_L(\ell,\vec{w})=\ell.L.\vec{w}$给出），并记 $T_L=$为 L，函数$(.)_g^\flat$ 是将逆变性转为协变性的映射，其定义如下：

$$L_g^\flat=g.L. \tag{A.65}$$

证明。回顾：初等 $\binom{0}{2}$ 张量 $\ell_1\otimes\ell_2$ 与初等 $\binom{1}{1}$ 张量 $\vec{v}\otimes\ell_3$的缩并是 $\binom{0}{2}$ 张量（$\ell_1\otimes\ell_2$）.（$\vec{v}\otimes\ell_3$）：=（$\ell_2.\vec{v}$）$\ell_1\otimes\ell_3$。任意张量上的缩并则是定义在初等张量上的双线性映射。因此，若 E中有一组基（$\vec{e}_i$），其对偶空间 E^*中有对应的对偶基（e^i），且 $g=\sum_{ij}g_{ij}e^i\otimes e^j$和$L=\sum_{ij}L^i{}_j\vec{e}_i\otimes e^j$，那么 $g.L=\sum_{ijk}g_{ik}L^k{}_j\vec{e}_i\otimes e^j$。于是（$g.L$）（$\vec{u},\ \vec{w}$）$=\sum_{ij}u^iw^j$（$g.L$）（$\vec{e}_i,\ \vec{e}_j$）$=\sum_{ijk}u^iw^jg_{ik}L^k{}_j=\sum_{ik}u^ig_{ik}$（$L.\vec{w}$）$^k=\sum_{ik}u^ig_{ik}$（$L.\vec{w}$）$^k=g$（$\vec{u},\ L.\vec{w}$）$=L_g^\flat$（$\vec{u},\ \vec{w}$）。 ∎

量化： 设 $(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基，并采用受降指标记号“i上标变为 i下标”启发的对偶记号表示 L 的分量 $L^i{}_j$，令 $g_{ij}:=g(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)$，$L.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^nL^i{}_j\vec{e}_i$以及 $L^\flat_{g,\ ij}=L^\flat_g(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)$，也就是说，在计算中使用张量记号

$$g=\sum_{ij}g_{ij}e^i\otimes e^j,\quad L=\sum_{ij}L^i{}_j\vec{e}_i\otimes e^j,\quad L_g^\flat=\sum_{ij}L^\flat_{g,ij}e^i\otimes e^j. \tag{A.66}$$

因此 $[g]_{|\vec{e}}=[g_{ij}]$、$[L]_{|\vec{e}}=[L^i{}_j]$ 和 $[L_g^\flat]_{|\vec{e}}=[L^\flat_{g,ij}]$。然后由（A.65）得到（或参见下一道习题）

$$\boxed{[L_g^\flat]=[g].[L]}. \tag{A.67}$$

练习 A.59 用分量证明（A.67）。

Answer. With (A.63) we get $L^\flat_{g,ij}=L^\flat_g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=(\vec{e}_i,L.\vec{e}_j)_g=(\vec{e}_i,\sum_kL^k{}_j\vec{e}_k)_g=\sum_kL^k{}_jg_{ik}=([g].[L])_{ij}$. ∎

注 A.60 此处的变差变化，即从 $\binom{1}{1}$ 型张量 L 到 $\binom{0}{2}$ 张量 $L_g^\flat$，必然依赖观察者：向量空间 E 与其对偶空间 E^*之间不存在自然典范同构，参见 § T.2。详情：在此固定 $\vec{w}$并记作 $\ell_{g,\ \vec{w}}(\vec{u})=(\vec{u},\ L.\vec{w})_g(=L_g^\flat(\vec{u},\ \vec{w}))$；因此 $\ell_{g,\ \vec{w}}\in E^*$是向量 $L.\vec{w}$的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-表示函数（线性形式），即 $\ell_{g,\ \vec{w}}=\vec{R}_g(L.\vec{w})$，其中 $\vec{R}_g$ 是 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示算子（变差变化算子，参见 (F.3)）。

∎

A.11 线性映射的转置：取决于所选的内积 s

本段用于定义变形梯度的转置。

不要将其与矩阵的转置混淆，参见（A.53）。也不要将其与双线性形式的客观转置混淆，参见（A.33）；例如，线性映射的转置并非客观的。

A.11.1 定义（主观）

$(E,\ (\cdot,\ \cdot)_g)$ 和 $(F,\ (\cdot,\ \cdot)_h)$ 是希尔伯特空间，而 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$（当 E 和 F 为无限维时，按设定应为连续的）。例如， $E = \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$、 $F = \vec{\mathbb{R}}^n_t$、 $L = d\Phi^{t_0}_t(P) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ =变形梯度，参见（4.1）；$(\cdot,\ \cdot)_g$ 是进行测量的观察者所选用的以英尺为单位构造的欧几里得点积，测量地点为 t_0；$(\cdot,\ \cdot)_h$ 是进行测量的观察者所选用的以米为单位构造的欧几里得点积，测量地点为 t_0。

定义 A.61 $L \in \mathcal{L}(E;F)$ $\cdot\cdot_g$ $\cdot\cdot_h$ $L^T_{gh} \in$相对于(,)和(,)，(;)的转置是由以下 $\mathcal{L}(F;E)$ $\vec{x}\ \vec{y} \in E\times F$ 条件定义的线性映射(;)：对于所有(,)，

$$(L^T_{gh}.\vec{y},\vec{x})_g = (\vec{y},L.\vec{x})_h, \tag{A.68}$$

这里我们使用了点记号 $L^T_{gh}(\vec{y})$ =记作 $L^T_{gh}.\vec{y}$，因为 L^T_{gh} 是线性的。这定义了映 p

$$(.)^T_{gh} : \begin{cases} \mathcal{L}(E;F) & \to \mathcal{L}(F;E) \\ L & \to (.)^T_{gh}(L) := L^T_{gh} \end{cases} \tag{A.69}$$

注意：因此，一个线性映射有无穷多个转置（这取决于内积 s).
记号：若施加了 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$，则 L^T_{gh} =记作 L^T。
并且，如果 $F = E$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_h = (\cdot,\ \cdot)_g$，那么 $L^T_{gh} = L^T_g$，参见 § A.10。

A.11.2 基的量化

$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ 设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 分别为 E和 F中的基，设 $g_{ij} := g(\vec{a}_i,\ \vec{a}_j)$、 $h_{ij} := h(b_i,\ b_j)$、 $[g]_{|\vec{a}} = [g_{ij}]$、 $[h]_{|\vec{b}} = [h_{ij}]$，并设（经典记号）

$$\begin{aligned} L.\vec{a}_j &= \sum_{i=1}^m L_{ij}\vec{b}_i, \quad \text{i.e.} \quad [L]_{|\vec{a},\vec{b}} = [L_{ij}] \overset{\text{noted}}{=} [L], \\ L^T_{gh}.\vec{b}_j &= \sum_{i=1}^n (L^T_{gh})_{ij}\vec{a}_i, \quad \text{i.e.} \quad [L^T_{gh}]_{|\vec{b},\vec{a}} = [(L^T_{gh})_{ij}] \overset{\text{noted}}{=} [L^T_{gh}]. \end{aligned} \tag{A.70}$$

(A.68) 对所有 $\vec{x}$，$\vec{y}$ 给出 $[\vec{x}]^T_{|\vec{a}}.[g]_{|\vec{a}}.[L^T_{gh}.\vec{y}]_{|\vec{y}} = ([L.\vec{x}]_{|\vec{b}})^T.[h]_{|\vec{b}}.[\vec{y}]_{|\vec{b}}$，因此，$[g]_{|\vec{a}}.[L^T_{gh}]_{|\vec{b},\ \vec{a}} = ([L]_{|\vec{a},\ \vec{b}})^T.[h]_{|\vec{b}}$ 以及 $[L^T_{gh}]_{|\vec{b},\ \vec{a}} = [g]^{-1}_{|\vec{a}}.([L]_{|\vec{a},\ \vec{b}})^T.[h]_{|\vec{b}}$。简写记法：

$$[g].[L^T] = [L]^T.[h], \quad \text{i.e.} \quad \sum_{k=1}^n g_{ik}(L^T_{gh})_{kj} = \sum_{k=1}^m L_{ki}\,h_{kj}, \tag{A.71}$$

i.e.

$$\boxed{[L^T] = [g]^{-1}.[L]^T.[h]}, \quad \text{i.e.} \quad (L^T_{gh})_{ij} = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^m ([g]^{-1})_{ik}L_{\ell k}h_{\ell j}. \tag{A.72}$$

使用对偶记号，$L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L^i{}_j\vec{e}_i$， $[L]_{|\vec{e}} = [L^i{}_j]$， $L^T_{gh}.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n (L^T_{gh})^i{}_j$， $[L^T_{gh}]_{|\vec{e}} = [(L^T_{gh})^i{}_j]$，以及

$$\sum_{k=1}^n g_{ik}(L^T_{gh})^k{}_j = \sum_{k=1}^n L^k{}_i\,h_{kj}, \quad \text{i.e.} \quad (L^T_{gh})^i{}_j = \sum_{k,\ell=1}^n ([g]^{-1})_{ik}L^\ell{}_k\,h_{\ell j} \quad (\overset{\text{noted}}{=} \sum_{k,\ell=1}^n (g^{ik}L^\ell{}_k\,h_{\ell j}). \tag{A.73}$$

（请注意记号 $([g]^{-1})_{ik}$ =记作 g^{ij}，参见注释 A.50。）

练习 A.62 证明：如果 L 可逆，则 $(L^T_{gh})^{-1} = (L^{-1})^T_{hg}$。

答案。$(L^T_{gh}.(L^{-1})^T_{hg}.\vec{x},\ \vec{y})_g = ((L^{-1})^T_{hg}.\vec{x},\ L.\vec{y})_h = (\vec{x},\ L^{-1}.L.\vec{y})_g = (\vec{x},\ \vec{y})_g = (L^T_{gh}.(L^T_{gh})^{-1}.\vec{x},\ \vec{y})_g$，确实 $\forall \vec{x},\ \vec{y}$。∎

A.11.3 变形梯度对称：荒谬

如果 $E \neq F$，线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$ 的对称性毫无意义。

例如：变形梯度 $F^{t_0}_t(p_{t_0}) = d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0})$ =记作 $F \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 不可能是对称的，因为 $F^T \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$。第一 Piola–Kirchhoff 张量 $\mathbb{K}^{t_0}_t$ 也同样如此，这促使我们引入对称的第二类 Piola–Kirchhoff 张量 $\mathbb{SK}^{t_0}_t$，参见 Marsden–Hughes [12] 或 § M.2.3。

A.11.4 等距变换

定义 A.63 线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$ 相对于 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_h$ 是等距变换，当且仅当

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad (L.\vec{x}, L.\vec{y})_h = (\vec{x}, \vec{y})_g, \quad \text{i.e.} \quad L_{gh}^T \circ L = I_E \text{ (identity in } E). \tag{A.74}$$

特别地，自同态 $L \in \mathcal{L}(E; E)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-等距变换，当且仅当

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad (L.\vec{x}, L.\vec{y})_g = (\vec{x}, \vec{y})_g, \quad \text{i.e.} \quad L_g^T \circ L = I_E. \tag{A.75}$$

因此，如果 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$ 是等距变换，且 $(\vec{e}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，那么 $(L.\vec{e}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_h$-正交归一基，因为对于所有 i, j，$(L.\vec{e}_i, L.\vec{e}_j)_h = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)_g = \delta_{ij}$。

练习 A.64 设 $f:\ E \to F$。证明：

$$\text{if } \vec{f} \text{ is an isometry then } \vec{f} \text{ is linear.} \tag{A.76}$$

答案。设 $(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基；因此 $(\vec{f}(\vec{e}_i))$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_h$-正交归一基（因为 $\vec{f}$ 是等距变换）。因此，如果 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$，那么 $\vec{f}(\vec{x}) \overset{b.o.n.}{=} \sum_{i=1}^n (\vec{f}(\vec{x})\ \vec{f}(\vec{e}_i))_h \vec{f}(\vec{e}_i) \overset{hyp.}{=} \sum_{i=1}^n (\vec{x}, \vec{e}_i)_g \vec{f}(\vec{e}_i) \overset{b.o.n.}{=} \sum_{i=1}^n x_i \vec{f}(\vec{e}_i)$，因此 $\vec{f}(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i)\ \vec{f}(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \vec{f}(\vec{e}_i) + \lambda \sum_{i=1}^n y_i \vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{f}(\vec{x}) + \lambda \vec{f}(\vec{y})$，所以 $\vec{f}$ 是线性的。 ∎

练习 A.65 $\mathbb{R}^n$ 是一个仿射空间，$\vec{\mathbb{R}}^n$ 是通常的相关向量空间，而 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 上的内积。定义：保距函数 $f:\ p \in \mathbb{R}^n \to f(p) \in \mathbb{R}^n$ 是一个满足以下条件的函数：

$$||\overrightarrow{f(p)f(q)}||_g = ||\overrightarrow{pq}||_g, \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n. \tag{A.77}$$

证明：若 f 是保距函数，则 f 是仿射的。

答案。令 $O \in \mathbb{R}^n$ 为一个原点，并令 $\vec{f}:\ \vec{x} = \overrightarrow{Op} \in \vec{\mathbb{R}}^n \to \vec{f}(\vec{x}) := \overrightarrow{f\ O\ f\ p}()\ ()$（关联向量函数）。令 $\vec{x} = \overrightarrow{Op}$ 和 $\vec{y} = \overrightarrow{Oq}$。则由重要恒等式 $2(\vec{f}(\vec{x})\ \vec{f}(\vec{y}))_g = ||\vec{f}(\vec{x})||_g^2 + ||\vec{f}(\vec{y})||_g^2 - ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})||_g^2$ 可得 $2(\vec{f}(\vec{x})\ \vec{f}(\vec{y}))_g = ||\vec{f}(\vec{x})||_g^2 + ||\vec{f}(\vec{y})||_g^2 - ||\overrightarrow{f\ q\ f\ p}()\ ()||_g^2 = ||\vec{f}(\vec{x})||_g^2 + ||\vec{f}(\vec{y})||_g^2 - ||\overrightarrow{qp}||_g^2 = ||\vec{x}||_g^2 + ||\vec{y}||_g^2 - ||\vec{x} - \vec{y}||_g^2 = 2(\vec{x}, \vec{y})_g$，因此 $\vec{f}$ 是等距变换，故 $\vec{f}$ 是线性的，参见 (A.76)，于是 f 是仿射的，因为 $f(p) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{Op})$。 ∎

A.12 线性映射的伴随（客观的）

（面向数学家；可能会造成误解、误用和有问题的力学解释。）这里不需要内积：线性映射 L 只有一个伴随 L^*（内禀于 L）；而 L 则有多个转置的 $L^T = L_{gh}^T$，它们取决于内积。

A.12.1 定义

E 和 F 是向量空间，而 $E^* = \mathcal{L}(E;\ \mathbb{R})$ 和 $F^* = \mathcal{L}(F;\ \mathbb{R})$ 是对偶空间（由线性连续泛函构成）。（如果 E 和 F 是有限维的，则连续性总是成立。）

定义 A.66 设 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$（线性且连续）；其伴随是 $L^* \in \mathcal{L}(F^*;\ E^*)$ 中按典范方式定义的线性映射

$$L^* : \begin{cases} F^* & \to E^* \\ m & \to L^*(m) := m \circ L, \end{cases} \tag{A.78}$$

也就是说，对于所有 $(\vec{x}, m) \in E \times F^*$，

$$(L^*(m))(\vec{x}) := m(L(\vec{x})). \tag{A.79}$$

（伴随 L^* 不能与转置的 L^T 混淆，后者需要使用内积，参见 (A.68)。）

L^* 的线性性显而易见，因此，结合 m 和 L 的线性性，我们可以使用点记号：

$$L^*.m := m.L, \quad \text{and} \quad (L^*.m).\vec{x} := m.L.\vec{x}. \tag{A.80}$$

且 $||L^*.m||_{E^*} = ||m.L||_{E^*} \leq ||m||_{F^*} ||L||_{\mathcal{L}(E;F)}$ 给出 $||L^*||_{\mathcal{L}(F^*;E^*)} \leq ||L||_{\mathcal{L}(E;F)} < \infty$，因此 L^* 是连续的（当 L 是连续的时）。

A.12.2 量化

E和 F是有限维的，维数分别为 $\dim E = n$、$\dim F = m$，且 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 分别是 E和 F中的基。令$[L]_{|\vec{a},\vec{b}}$ =记为$[L]$, $[L^*]_{|b,a}$ =记为$[L^*]$, $[m]_{|b}$ =记为$[m]$ 和 $[\vec{x}]_{|\vec{a}}$ =记为$[\vec{x}]$ 为相对于所选基的矩阵：(A.80) 给出 ($[L^*].[m].[\vec{x}] = [m].[L].[\vec{x}]$ 对所有 $\vec{x} \in E$和 $m \in F^*$均成立，因此，对所有 $m \in F^*$（回忆一下，$[m]$ 是行矩阵），因此 $[L^*].[m]^T = ([L]^T.[m]^T$，因此

$$\boxed{[L^*] = [L]^T} \quad \text{(transposed matrix).} \tag{A.81}$$

（完整记法：$[L^*]_{|b,\ a} = ([L]_{|\vec{a},\ \vec{b}})^T$。）

细节：给定对偶基 (π_{ai}) 和 (π_{bi})，并有 $L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^m L_{ij}\vec{b}_i$，即 $[L]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = [L_{ij}]_{i=1,\ \ldots\ldots,\ j=1\ \ldots\ n}^{\ m}$，以及 $L^*.\pi_{bj} = \sum_{i=1}^n (L^*)_{ij}\pi_{ai}$，即 $[L^*]_{|b,\ a} = [(L^*)_{ij}]_{i=1,\ \ldots\ldots,\ j=1\ \ldots\ n}^{\ \ m}$，（A.80）给出，对所有 $(i,\ j) \in [1,n]_{\mathbb{N}} \times [1,m]_{\mathbb{N}}$,

$$(L^*.\pi_{bj}).\vec{a}_i = \pi_{bj}.(L.\vec{a}_i), \quad \text{thus} \quad \boxed{(L^*)_{ij} = L_{ji}} \quad \text{and} \quad [L^*] = [L]^T. \tag{A.82}$$

对偶记号（警告：可能会被误用）：$L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^m L^i{}_j\vec{b}_i$，即 $[L]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = [L^i{}_j]_{i=1,\ \ldots,\ j=1\ \ldots\ n}^{\ \ m}$，以及 $L^*.b^j = \sum_{i=1}^n (L^*)_i{}^j a^i$，即 $[L^*]_{|b,\ a} = [((L^*)_i{}^j]_{i=1,\ \ldots,\ j=1\ \ldots\ n}^{\ \ m}$，因此，对于所有 $(i,\ j) \in [1,n]_{\mathbb{N}} \times [1,m]_{\mathbb{N}}$,

$$(L^*.b^j).\vec{a}_i = b^j.(L.\vec{a}_i), \quad \text{thus} \quad (L^*)_i{}^j = L^j{}_i \quad \text{and} \quad [L^*] = [L]^T. \tag{A.83}$$

(请记住：如有疑问，请使用经典记号；或者更好的是，在此处不要使用对偶记号。)

备注 A.67 提醒：双线性形式的转置 b^T 是 b的内禀属性，而线性映射 L 的伴随 L^* 是 L的内禀属性；但是，线性形式 L 的转置 L^T 并非 该线性形式的内禀属性（它取决于所选的内积）：注意“转置”这一（不太恰当的）术语!

A.12.3 引入内积时与转置的关系

设 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$。我们需要在 E 和 F 中定义内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$。为了建立 L^* 和 L^T_{gh} 之间的泛函关系，我们使用 $(\cdot,\cdot)_g$-黎斯表示映射 $\vec{R}_g : \left\{ \begin{array}{ccc} E^* & \to & E \\ \ell & \to & \vec{R}_g(\ell) = \vec{\ell}_g \end{array} \right\}$，其中对所有 $\vec{x} \in E$，$\ell.\vec{x} = (\vec{\ell}_g, \vec{x})_g$，

见 (F.3)；F 同上。

设 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$（连续）。对于所有 $\vec{x} \in E$ 和所有 $m \in F^*$，有

$$(L^*.m).\vec{x} \overset{(A.79)}{=} m.(L.\vec{x}), \quad \text{thus} \quad (\vec{R}_g(L^*.m), \vec{x})_g = (\vec{R}_h(m), L.\vec{x})_h, \tag{A.84}$$

因此 $((\vec{R}_g \circ L^*).m)\ \vec{x})_g = ((L^T_{gh} \circ \vec{R}_h).m,\ L.\vec{x})_g$。因此 $\vec{R}_g \circ L^* = L^T_{gh} \circ \vec{R}_h$，即

$$\boxed{L^T_{gh} = \vec{R}_g \circ L^* \circ (\vec{R}_h)^{-1}} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{L^T_{gh}} & F \\ \vec{R}_g \uparrow & & \uparrow \vec{R}_h \\ E^* & \xleftarrow[L^*]{} & F^* \end{array} \text{ is a commutative diagram.} \tag{A.85}$$

练习 A.68 由 (A.85) 推导出 (A.71)，即 $[L^T_{gh}] = [g]^{-1}.[L]^T.[h]$。

答案。 $[L^T_{gh}] =^{(A.85)} [\vec{R}_g].[L^*].[\vec{R}_h]^{-1} =^{(F.6)} [g]^{-1}.[L]^T.[h]$。

A.13 线性映射的张量表示

A.13.1 一种张量表示

考虑 （线性映射 $E \to F$与双线性形式 $F^* \times E \to \mathbb{R}$之间的）自然典范同构

$$\widetilde{\mathcal{J}} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E;F) & \to & \mathcal{L}(F^*, E; \mathbb{R}) \\ L & \to & \beta_L = \widetilde{\mathcal{J}}(L) \end{array} \right\} \quad \text{where} \quad \beta_L(m, \vec{u}) := m.(L.\vec{u}), \quad \forall (m, \vec{u}) \in F^* \times E, \tag{A.86}$$

参见 § T.4。出于计算目的，β_L 也称为 L，参见（A.89）。

（注意：将 L 替换为 β_L可能很危险，参见例如 § A.7.2。）

量化： 设 $(\vec{a}_i)_{i=1,\dots,n}$ 是 E中的一组基，$(b_i)_{i=1,\dots,m}$ 是 F 中的一组基，其对偶基为 (π_{bi})，$L\in\mathcal{L}(E;\,F)$。则

$$\beta_L(\pi_{bi},\vec{a}_i)=\pi_{bi}.L.\vec{a}_i. \tag{A.87}$$

因此，如果

$$L.\vec{a}_j=\sum_{i=1}^{m}L_{ij}\vec{b}_i \quad\text{then}\quad \beta_L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\vec{b}_i\otimes\pi_{aj} \tag{A.88}$$

事实上，$(\sum_{ij}L_{ij}b_i\otimes\pi_{aj})(\pi_{bk},\ \vec{a}_\ell)=\sum_{ij}L_{ij}(b_i\otimes\pi_{aj})(\pi_{bk},\ \vec{a}_\ell)=\sum_{ij}L_{ij}(b_i.\pi_{bk})(\pi_{aj}.\vec{a}_\ell)=\sum_{ij}L_{ij}(\vec{b}_i.\pi_{bk})(\pi_{aj}.\vec{a}_\ell)=\sum_{ij}L_{ij}\delta_{ki}\delta_{j\ell}=L_{k\ell}=\pi_{bk}.L.\vec{a}_\ell$，因此 (A.87) 得出 (A.88)。

对偶记号：$L.\vec{a}_j=\sum_{i=1}^{m}L^i{}_j\vec{b}_i$ 和 $\beta_L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^i{}_j\vec{b}_i\otimes a^j$。

缩并规则。如果写作 $L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\vec{b}_i\otimes\pi_{aj}(\simeq\beta_L)$，那么向量 $L.\vec{u}\in F$是根据“缩并规则”计算得出的：

$$L.\vec{u}=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\vec{b}_i\otimes\underbrace{\pi_{aj}).\vec{u}}_{\text{contraction}}:=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\vec{b}_i(\pi_{aj}.\vec{u})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}u_j\vec{b}_i. \tag{A.89}$$

(With duality notations: $L.\vec{u}=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^i{}_j\vec{b}_i\otimes\underbrace{a^j).\vec{u}}_{\text{contraction}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^i{}_j\vec{b}_i(a^j.\vec{u})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^i{}_ju^j\vec{b}_i.$)

备注 A.69 警告：双线性形式 β_L 不应与线性映射 L混淆：β_L 的定义域是 $F^*\times E$，而 β_L 作用于两个对象 ℓ（线性形式）和 $\vec{u}$（向量），得到一个标量结果；而 L 的定义域是 E，L 作用于一个对象 $\vec{u}$，得到一个向量结果。不过，你可以使用 L 的张量记号.....仅通过 (A.89) 计算 $L.\vec{u}$。 ∎

A.13.2 警告：转置与伴随的混淆

线性映射 $L\in\mathcal{L}(E;\,F)$ 的转置 $L^T\in\mathcal{L}(F;\,E)$ 需要先定义内积，参见 (A.68)：它不是 L 的内禀属性，不具有客观性；而双线性形式 $b\in\mathcal{L}(A,B;\mathbb{R})$ 的转置 $b^T\in\mathcal{L}(B,A;\mathbb{R})$ 是 L 的内禀属性（它不需要先定义内积）。

因此，如果你用张量表示 $\beta_L\in\mathcal{L}(F^*,E;\,\mathbb{R})$ 来表示线性映射 $L\in\mathcal{L}(E;\,F)$，参见 (A.88)，那么

1- 你知道转置 $(\beta_L)^T$（由 $(\beta_L)^T(\vec{w},\vec{u})=\beta_L(\vec{u},\vec{w})$ 给出），

2- 但你不能从 $(\beta_L)^T$ 推导出转置 $L^T\in\mathcal{L}(F;\,E)$（也就是说，一开始就写成 $(\beta_L)^T$ 会造成误导）：你需要先选定内积，然后使用公式 $(L^T.\vec{y},\vec{x})_g=(\vec{y},L.\vec{x})_h$，其中 $L^T:=L^T_{gh}$，以求得 $[L^T]=[g]^{-1}.[L]^T.[h]$（一般情况下也能求得 $[L^T]\neq[L]^T$）。

3- 特别地：若 $L\in\mathcal{L}(E;E)$（相对于所选内积）是对称的，那么$\beta_L\in\mathcal{L}(E^*,E;\mathbb{R})$永远不会是对称的，因为 $E^*\neq E$!（回顾：E 和 E^*之间不存在自然典范同构。）

A.14 双线性形式和线性映射的基变换公式 s

A.14.1 双线性形式和线性映射的过渡矩阵记号

设 A 和 B 是有限维向量空间，$\dim A=n$，$\dim B=m$。（例如，应用于变形梯度 $A{=}\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}\to B{=}\vec{\mathbb{R}}^n_t$的基变换公式。）

设 $(\vec{a}_{old,i})$ 和 $(\vec{a}_{new,i})$ 是 A中的两组基，而 $(b_{old,i})$ 和 $(b_{new,i})$ 是 B中的两组基。设 $\mathcal{P}_A$ 和 $\mathcal{P}_B$ 是从旧基到新基的基变换自同态，$P_A:=[\mathcal{P}_A]_{|\vec{a}_{old}}=[P_{Aij}]$ 和$P_B:=[\mathcal{P}_B]_{|\vec{b}_{old}}=[P_{Bij}]$ 是相应的过渡矩阵，并且 $Q_A=P_A{}^{-1}$ 和 $Q_B=P_B{}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{new,j}&=\mathcal{P}_A.\vec{a}_{old,i}=\sum_{i,j=1}^{n}P_{Aij}\vec{a}_{old,i},\quad \pi_{anew,j}=\sum_{i=1}^{n}Q_{Aij}\pi_{aold,i},\\ \vec{b}_{new,j}&=\mathcal{P}_B.\vec{b}_{old,i}=\sum_{i,j=1}^{m}P_{Bij}\vec{b}_{old,i},\quad \pi_{bnew,j}=\sum_{i,j=1}^{n}Q_{Bij}\pi_{bold,i}.\end{aligned} \tag{A.90}$$

对偶记号：$\vec{a}_{new,\ j}=\sum_{i=1}^{n}P_A{}^i{}_j\vec{a}_{old,\ i}$ 和 $a^i_{new}=\sum_{j=1}^{n}Q_A{}^i{}_ja^j_{old}$ 和$\vec{b}_{new,\ j}=\sum_{i=1}^{n}P_B{}^i{}_j\vec{b}_{old,\ i}$ 和 $b^i_{new}=\sum_{j=1}^{n}Q_B{}^i{}_jb^j_{old}$。

A.14.2 双线性形式的坐标系变换 $\in \mathcal{L}(A,\ B;\ \mathbb{R})$

设 $g \in \mathcal{L}(A,\ B;\mathbb{R})$，并且对于所有 $(i,\ j) \in [1,n]_{\mathbb{N}} \times [1,m]_{\mathbb{N}}$，

$$g(\vec{a}_{old,i},\vec{b}_{old,j}) = M_{ij},\quad g(\vec{a}_{new,i},\vec{b}_{new,j}) = N_{ij},\quad \text{i.e.}\quad \begin{cases} [g]_{|olds} = M = [M_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}, \\ [g]_{|news} = N = [N_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}. \end{cases} \tag{A.91}$$

命题 A.70 基变换公式：

$$[g]_{|news} = {P_A}^T.[g]_{|olds}.P_B,\quad i.e.\quad N = {P_A}^T.M.P_B. \tag{A.92}$$

In 特别地，如果 $A = B$ 且 $(\vec{a}_{old,\ i}) = (\vec{b}_{old,\ i})$ 以及 $(\vec{a}_{new,\ i}) = (\vec{b}_{new,\ i})$，那么记作 $P_A = P_B = P$，一个 d

$$\boxed{[g]_{|new} = P^T.[g]_{old}.P},\quad i.e.\quad N = P^T.M.P. \tag{A.93}$$

证明。 $N_{ij} = g\ (\vec{a}_{new,\ i},\ \vec{b}_{new,\ j}) = \sum_{k\ell} {P_A}^k{}_i {P_B}^\ell{}_j g\ (\vec{a}_{old,\ k},\ \vec{b}_{old,\ \ell}) = \sum_{k\ell} {P_A}^k{}_i M_{k\ell} {P_B}^\ell{}_j = \sum_{k\ell} ({P_A}^T)^i{}_k M_{k\ell} {P_B}^\ell{}_j$。 ∎

练习 A.71 证明（客观结果）：

$$g(\vec{u},\vec{w}) = [\vec{u}]^T_{|\vec{a}_{new}}.[g]_{|news}.[\vec{w}]_{|\vec{b}_{new}} = [\vec{u}]^T_{|\vec{a}_{old}}.[g]_{|olds}.[\vec{w}]_{|\vec{b}_{old}}. \tag{A.94}$$

答案。 $[\vec{u}]^T_{|\vec{a}_{new}}.[g]_{|news}.[\vec{w}]_{|\vec{b}_{new}} = ({P_A}^{-1}.[\vec{u}]_{|\vec{a}_{old}})^T.({P_A}^T.[g]_{|olds}.P_B)$。$({P_B}^{-1}.[\vec{w}]_{|\vec{b}_{old}})$。 ∎

A.14.3 双线性形式的坐标系变换 $\in \mathcal{L}(A^*,\ B^*;\ \mathbb{R})$

设 $z \in \mathcal{L}(A^*,\ B^*;\mathbb{R})$，且对所有 $(i,\ j) \in [1,n]_{\mathbb{N}} \times [1,m]_{\mathbb{N}}$，

$$z(a^i_{old},b^j_{old}) = M^{ij},\quad z(a^i_{new},b^j_{new}) = N^{ij},\quad \text{i.e.}\quad \begin{cases} [z]_{|olds} = M = [M^{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}, \\ [z]_{|news} = N = [N^{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}. \end{cases} \tag{A.95}$$

命题 A.72 基变换公式：

$$[z]_{|news} = {P_A}^{-T}.[z]_{|olds}.{P_B}^{-1},\quad i.e.\quad N = {P_A}^{-T}.M.{P_B}^{-1}. \tag{A.96}$$

特别地，若 $A = B$ 且 $(\vec{a}_{old,\ i}) = (\vec{b}_{old,\ i})$ 且 $(\vec{a}_{new,\ i}) = (\vec{b}_{new,\ i})$，则 $P_A = P_B =$记作 P，且

$$\boxed{[z]_{|new} = P^{-T}.[z]_{old}.P^{-1}},\quad i.e.\quad N = P^{-T}.M.P^{-1}. \tag{A.97}$$

证明。 $N_{ij} = z(a^i_{new},b^j_{new}) = \sum_{k\ell} {Q_A}^k{}_i {Q_B}^\ell{}_j z(a^k_{old},b^\ell_{old}) = \sum_{k\ell} {Q_A}^k{}_i M^{k\ell} {Q_B}^\ell{}_j = \sum_{k\ell} ({Q_A}^T)^i{}_k M^{k\ell} {Q_B}^\ell{}_j$。 ∎

A.14.4 双线性形式的坐标系变换 $\in \mathcal{L}(B^*,A;\mathbb{R})$

（借助自然典范同构，转化为线性映射 $L \in \mathcal{L}(A;B) \simeq \mathcal{L}(B^*,A;\ \mathbb{R})$。）设 $T \in \mathcal{L}(B^*,A;\mathbb{R})$，并且对所有 $(i,j) \in [1,n]_{\mathbb{N}} \times [1,m]_{\mathbb{N}}$，

$$T(b^i_{old},\vec{a}_{old,j}) = M^i{}_j,\quad T(b^i_{new},\vec{a}_{new,j}) = N^i{}_j,\quad \text{i.e.}\quad \begin{cases} [T]_{|olds} = M = [M^i{}_j]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}, \\ [T]_{|news} = N = [N^i{}_j]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}. \end{cases} \tag{A.98}$$

命题 A.73 基变换公式：

$$[T]_{|news} = {P_B}^{-1}.[T]_{|olds}.P_A,\quad i.e.\quad N = Q_A.M.P_B. \tag{A.99}$$

In 特别地，若 $A = B$ 且 $(\vec{a}_{old,i}) = (\vec{b}_{old,i})$ 以及 $(\vec{a}_{new,i}) = (\vec{b}_{new,i})$，则 $P_A = P_B =$记作 P，一个 d

$$\boxed{[T]_{|new} = P^{-1}.[T]_{old}.P},\quad i.e.\quad N = P^{-1}.M.P,\quad i.e.\quad N^i{}_j = \sum_{k,\ell=1}^{n} Q^i{}_k M^k{}_\ell P^\ell{}_j. \tag{A.100}$$

证明。 $N^i{}_j = T(b^i_{new},\ \vec{a}_{new,\ j}) = \sum_{k\ell} {Q_B}^i{}_k {P_A}^\ell{}_j T(b^i_{old},\ \vec{a}_{old,\ j}) = \sum_{k\ell} {Q_B}^i{}_k M^i{}_j {P_A}^\ell{}_j$ ∎

A.14.5 三线性形式的坐标系变换 $\in \mathcal{L}(A^*,\ A,\ A;\ \mathbb{R})$

（趋向 $d^2\vec{u}$：对于向量场 $\vec{u} \in \Gamma(U) \simeq T_0^1(U)$，$\vec{u}(p) \in \vec{\mathbb{R}}^n$，其微分满足 $d\vec{u}(p) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}}^n) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n*},\ \vec{\mathbb{R}}^n;\ \mathbb{R})$，且 $d^2\vec{u}(p) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}}^n)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n*},\ \vec{\mathbb{R}}^n,\ \vec{\mathbb{R}}^n;\ \mathbb{R})$，见 § S.1.3。）

考虑一个三线性形式 $T \in \mathcal{L}(A^*,\ A,\ A;\ \mathbb{R})$，以及

$$M^i_{jk} = T(a^i_{old}, \vec{a}_{old,j}, \vec{a}_{old,k}), \qquad N^i_{jk} = T(a^i_{new}, \vec{a}_{new,j}, \vec{a}_{new,k}), \qquad \text{i.e.} \quad [T]_{|\vec{a}_{old}} = [M^i_{jk}], \quad [T]_{|\vec{a}_{new}} = [N^i_{jk}]. \tag{A.101}$$

Then

$$N^i_{jk} = \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_k M^\lambda_{\mu\nu}. \tag{A.102}$$

确实如此 $\sum_{\lambda\mu\nu} M^\lambda_{\mu\nu} \vec{a}_{old,\ \lambda} \otimes a^\mu_{old} \otimes a^\nu_{old} = \sum_{\lambda\mu\nu ijk} M^\lambda_{\mu\nu} Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_k \vec{a}_{new,\ i} \otimes a^j_{new} \otimes a^k_{new}$。 ∎

A.14.6 线性映射 $\in \mathcal{L}(A; B)$的坐标系变换

沿用 § A.14.1 的记号。设 $L \in \mathcal{L}(A;\ B)$ 是一个线性映射，并且对所有 $j = 1, ..., n$，

$$\begin{cases} L.\vec{a}_{old,j} = \sum_{i=1}^{m} M_{ij} \vec{b}_{old,i} = \sum_{i=1}^{m} M^i{}_j \vec{b}_{old,i} \quad \text{i.e.} \quad [L]_{|olds} = M = [M_{ij}] = [M^i{}_j]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}, \\ L.\vec{a}_{new,j} = \sum_{i=1}^{m} N_{ij} \vec{b}_{new,i} = \sum_{i=1}^{m} N^i{}_j \vec{b}_{new,i} \quad \text{i.e.} \quad [L]_{|news} = N = [N_{ij}] = [N^i{}_j]_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}, \end{cases} \tag{A.103}$$

采用经典记号和对偶记号。

命题 A.74 基变换公式：

$$[L]_{|news} = {P_B}^{-1}.[L]_{|olds}.P_A, \quad i.e. \quad N = {P_B}^{-1}.M.P_A. \tag{A.104}$$

特别地，若 $A = B$，若 $(\vec{a}_{old,i}) = (\vec{b}_{old,i})$，$(\vec{a}_{new,i}) = (\vec{b}_{new,i})$，则 $P_A = P_B =$记作 P一个 d

$$\boxed{[L]_{|new} = P^{-1}.[L]_{|old}.P}, \quad i.e. \quad N = P^{-1}.M.P, \quad i.e. \quad N_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n} Q_{ik} M_{k\ell} P_{\ell j}, \tag{A.105}$$

取 $Q = P^{-1}$，并采用对偶记号 $N^i{}_j = \sum_{k\ell} Q^i{}_k M^k{}_\ell P^\ell{}_j$。

证明。$L.\vec{a}_{new,\ j} = \sum_i N^i{}_j \vec{b}_{new,\ i} = \sum_{ik} N^i{}_j {P_B}^k{}_i \vec{b}_{old,\ k} = \sum_k ({P_B}.N)^k{}_j \vec{b}_{old,\ k}$ 以及 $L.\vec{a}_{new,\ j} = L.(\sum_i {P_A}^i{}_j \vec{a}_{old,\ i}) = \sum_i {P_A}^i{}_j \sum_k M^k{}_i \vec{b}_{old,\ k} = \sum_k (M.P_A)^k{}_j \vec{b}_{old,\ k}$，对所有 j 均成立，因此 $P_B.N = M.P_A$。 ∎

练习 A.75 证明：

$$\ell.L.\vec{u} = [\ell]_{|\vec{b}_{new}}.[L]_{|news}.[\vec{u}]_{|\vec{a}_{new}} = [\ell]_{|\vec{b}_{old}}.[L]_{|olds}.[\vec{u}]_{|\vec{a}_{old}} \quad \text{(objective result)}. \tag{A.106}$$

答案。 $[\ell]_{|\vec{b}_{new}}.[L]_{|news}.[\vec{u}]_{|\vec{a}_{new}} = ([\ell]_{|\vec{b}_{old}}.P_B) \circ (P_B{}^{-1}.[L]_{|olds}.P_A) \circ ({P_A}^{-1}.[\vec{u}]_{|\vec{a}_{old}})$。 ∎

注释 A.76 $\mathcal{L}(A,\ A;\ \mathbb{R})$ 中的双线性形式与 $\mathcal{L}(A; A)$ 中的自同态表现不同：公式 (A.93) 和 (A.105) 不应混淆，因为一般而言 $P^{-1} \neq P^T$。例如，如果一位英国观察者使用以英尺为单位的欧几里得旧基 $(\vec{a}_i) = (\vec{a}_{old,\ i})$，一位法国观察者使用以米为单位的欧几里得新基 $(\vec{b}_i) = (\vec{a}_{new,\ i})$，并且（简单情形下）$\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i$ 对所有 i（单位变换）都成立，那么

$$[L]_{|new} = [L]_{|old}, \quad \text{while} \quad [g]_{|new} = \underbrace{\lambda^2}_{>10} [g]_{|old}. \tag{A.107}$$

结果截然不同！也就是说，对于一般的基变换，$P^{-1}.[L]_{|old}.P \neq P^T.[L]_{|old}.P$。参见火星气候轨道器坠毁事故和备注 A.14；有人忘了 1 英尺 $\neq 1$ 米。 ∎

B 欧几里得框架

时间与空间相互独立（经典力学）。$\mathbb{R}^n$ 是几何仿射空间，$n = 1$，2，3，而 $\vec{\mathbb{R}}^n$是由“双点向量”构成的关联向量空间。

B.1 欧几里得基

欧几里得基的构造。

观察者选择一种计量单位（英尺、米、欧几里得使用的长度单位、管道的直径 a.....），并以该单位制作一根长度为 1 的“单位杆”。

公设：杆的长度不取决于它在空间中的方向。

• 空间维数 $n=1$: 这根杆表示一个向量 $\vec{e}_1$，它构成一个基（$\vec{e}_1$），称为相对于所选计量单位的欧几里得基。

• 空间维数 $n \geq 2$:

- 观察者制作了三根长度分别为 3、4 和 5 的杆，并用它们构成一个三角形（A, B, C），其中 A、B 和 C 是顶点，且 A 不在长度为 5 的边上。

- 毕达哥拉斯：$3^2+4^2=5^2$ 得出：三角形（A, B, C）在 A 处有一个直角。

- 在 $\mathbb{R}^n$ 中，两个向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{w}$ 正交，当且仅当三角形（A, B, C）可以这样摆放：$\vec{AB}$ 和 AC 分别平行于 $\vec{u}$ 和 $\vec{w}$。

- 基 $(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,n}$ 相对于所选测量单位为欧几里得基，当且仅当 $\vec{e}_i$ 两两正交，且长度为 1（相对于所选单位）。

例 B.1 一位英国观察者使用英尺定义了一个欧几里得基 $(\vec{a}_i)$。一位法国观察者使用米定义了一个欧几里得基 $(\vec{b}_i)$。我们有

$$1\,\text{foot} = \mu\,\text{metre}, \quad \mu = 0.3048, \quad \text{and} \quad 1\,\text{metre} = \lambda\,\text{foot}, \quad \lambda = \frac{1}{\mu} \simeq 3.28. \tag{B.1}$$

（$\mu = 0.3048$ 是英国英尺以米为单位的官方长度。）例如，当且仅当对所有 i，这些基都“对齐”。

$$\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i \quad (\text{change of measurement unit}), \tag{B.2}$$

因此，从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵是 $P=\lambda I$，因此 $P^T=P$、$P^{-1}=\frac{1}{\lambda}I$ 和 $P^T.P=\lambda^2 I$。 ▪

备注 B.2 实际使用的基并非全都是欧几里得基。参见例 A.13，尤其是当你乘飞机时。 ▪

B.2 欧几里得点积

定义 B.3 一位已经建立了自己的欧几里得基 $(\vec{e}_i)$ 的观察者，参见 § B.1。与之对应的欧几里得点积是双线性形式 $g(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$，定义如下

$$(g_{ij}=) \quad g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\delta_{ij}, \quad \forall i,j, \quad \text{i.e.} \quad [g]_{|\vec{e}}=[\delta_{ij}]=I. \tag{B.3}$$

换言之，

$$(\cdot,\cdot)_g := \sum_{i=1}^n \pi_{ei}\otimes\pi_{ei} = \sum_{i=1}^n e^i\otimes e^i, \tag{B.4}$$

使用经典记号和对偶记号时，$(\pi_{ei})=(e^i)$ 是 $(\vec{e}_i)$ 的对偶基。如果要使用爱因斯坦求和约定，就必须写成 $(\cdot,\cdot)_g := \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} e^i\otimes e^j$：无法避免写出 $\delta_{ij}=g_{ij}$。

因此，对于所有 $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$，其中 $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$ 和 $\vec{y}=\sum_{i=1}^n y_i\vec{e}_i$（经典记号），

$$(\vec{x},\vec{y})_g = \sum_{i=1}^n x_i y_i = [\vec{x}]^T_{|\vec{e}}.[\vec{y}]_{|\vec{e}}. \tag{B.5}$$

使用对偶记号，$\vec{x}=\sum_{i=1}^n x^i\vec{e}_i$、$\vec{y}=\sum_{i=1}^n y^i\vec{e}_i$ 和 $(\vec{x},\vec{y})_g=\sum_{i=1}^n x^i y^i$；如果要使用爱因斯坦求和约定，则写作 $(\vec{x},\vec{y})_g := \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}x^i y^j$：无法避免写出 δ_{ij}。

定义 B.4 相应范数为 $||.||_g := \sqrt{(\cdot,\cdot)_g}$，而相对于所选欧几里得测量单位的向量 $\vec{x}$ 的长度为 $||\vec{x}||_g := \sqrt{(\vec{x},\vec{x})_g}$。

因此，使用欧几里得基 $(\vec{e}_i)$（用于构造 $(\cdot,\cdot)_g$）时，如果 $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i$，那么 $||\vec{x}||_g=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 就是 $\vec{x}$ 相对于所选欧几里得计量单位的长度（毕达哥拉斯定理）。（使用对偶记号 $||\vec{x}||_g=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$，如果要使用爱因斯坦求和约定：$||\vec{x}||_g=\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}x^i x^j}$。）

定义 B.5 两个向量 $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n-\{\vec{0}\}$ 之间的角度 $\theta(\vec{x},\vec{y})$ 定义为

$$\cos(\theta(\vec{x},\vec{y})) = \left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_g}, \frac{\vec{y}}{||\vec{y}||_g}\right)_g. \tag{B.6}$$

（用计算器计算，这个公式会给出 $\theta(\vec{x},\vec{y})=\arccos\left(\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_g}, \frac{\vec{y}}{||\vec{y}||_g}\right)_g\right)$ 的一个值，单位为 $[0,\pi]$。）

B.3 欧几里得基的变换

设 $(\vec{a}_i)$（例如，用英尺构造的英国观察者基）和 (b_i)（例如，用米构造的法国观察者基）是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的欧几里得基，并设 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_h$ 是相应的欧几里得点积。

B.3.1 两个欧几里得点积成比例

命题 B.6 若 $\lambda = ||b_1||_g$，则对所有 $i = 1, ..., n$，$||b_i||_g = \lambda$（单位变换），并且

$$(\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h, \quad and \quad ||.||_g = \lambda||.||_h. \tag{B.7}$$

证明。根据欧几里得基的定义，用于定义 (b_i) 的杆的长度与 i 无关，参见 § B.1，因此对所有 i，$||\vec{b}_i||_g = ||\vec{b}_1||_g$，此处 $||\vec{b}_i||_g =$记作λ。因此，对所有 i，$||\vec{b}_i||_g^2 = \lambda^2 = \lambda^2||\vec{b}_i||_h^2$，因为 $||\vec{b}_i||_h^2 = 1$。并且，若 $i \neq j$，则 $(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_g = 0 = (\vec{b}_i, \vec{b}_j)_h$，因为 $\vec{b}_i$ 和 $\vec{b}_j$ 成直角（毕达哥拉斯），参见 (B.4)。因此，对所有 i, j，$(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_g = \lambda^2(\vec{b}_i, \vec{b}_j)_h$，由此得到 (B.7)。 ∎

例 B.7 例 B.1 的续篇：$(\cdot,\cdot)_a = \sum_{i=1}^n a^i \otimes a^i$ 是英语欧几里得点积（英尺），而 $(\cdot,\cdot)_b = \sum_{i=1}^n b^i \otimes b^i$ 是法语欧几里得点积（米）。由 (B.7) 和 (B.1) 可得：

$$(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2(\cdot,\cdot)_b \quad \text{and} \quad ||.||_a = \lambda||.||_b, \quad \text{with} \quad \lambda \simeq 3.28 \quad \text{and} \quad \lambda^2 \simeq 10.76. \tag{B.8}$$

特别是，若 $\vec{w}$ 满足 $||\vec{w}||_b = 1$（其长度为 1 米），则 $||\vec{w}||_a = \lambda$（其长度为 $\lambda \simeq 3.28$ 英尺）。 ∎

B.3.2 反例：欧几里得点积不存在

1- 热力学：令 T 为温度，P 为压力，并考虑笛卡尔向量空间 $\{(T,P)\} = \{$（温度，压力）$\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$。不存在相应的欧几里得点积：相应范数会给出 $||(T,P)|| = \sqrt{T^2 + P^2} \in \mathbb{R}$，但这没有意义（维数不兼容）。参见 § A.3.5。

2- 极坐标系 $\vec{q} = (r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$：不存在具有物理意义的欧几里得范数 $\sqrt{r^2 + \theta^2}$ 适用于 $\vec{q}$（维数不相容），参见例 6.11。

B.4 变形梯度的欧几里得转置

设 $n \in \{1, 2, 3\}$，并考虑一个线性映射 $L \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$（例如 $L = F_t^{t_0}(P)$）。

设 $(\cdot,\cdot)_G$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的一个欧几里得点积（过去由某人使用），并设 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的欧几里得点积（即两个观察者实际获得结果所在的空间，例如，用英尺构造的 $(\cdot,\cdot)_g$ 和用米构造的 $(\cdot,\cdot)_h$）。设 L^T_{Gg} 和 L^T_{Gh} 是相对于这些点积而言的 L 的转置，也就是说，在 $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 中，L^T_{Gg} 和 L^T_{Gh} 满足以下特征：对所有 $(\vec{X}, \vec{y}) \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \times \vec{\mathbb{R}}^n_t$，参见 (A.68)，

$$(L^T_{Gg}.\vec{y}, \vec{X})_G = (L.\vec{X}, \vec{y})_g \quad \text{and} \quad (L^T_{Gh}.\vec{y}, \vec{X})_G = (L.\vec{X}, \vec{y})_h. \tag{B.9}$$

推论 B.8

$$if \quad (\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h \quad then \quad L^T_{Gg} = \lambda^2 L^T_{Gh}. \tag{B.10}$$

注意：不要忘记 λ^2，参见备注 *A.14*（火星气候轨道器坠毁事故）。

证明。$(L^T_{Gg}.\vec{y},\ \vec{X})_G \overset{(B.9)}{=} (L.\vec{X},\ \vec{y})_g \overset{(B.10)}{=} \lambda^2(L.\vec{X},\ \vec{y})_h \overset{(B.9)}{=} \lambda^2(L^T_{Gh}.\vec{y},\ \vec{X})_G$ 对所有 $\vec{X} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 及所有 $\vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$ 均成立，因此 $L^T_{Gg}.\vec{y} = \lambda^2 L^T_{Gh}.\vec{y}$ 对所有 $\vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$ 均成立，因此（B.10）。 ∎

B.5 自同态的欧几里得转置

设 $n \in \{1, 2, 3\}$，并考虑一个自同态 $L \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$（例如 $L = d\vec{v}_t(p) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 欧拉速度的微分）。设 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的点积。设 L^T_g 和 L^T_h 分别是相对于 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$ 的 L 的转置，也就是说，L^T_g 和 L^T_h 在 $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 中是如下定义的自同态：对所有 $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$，参见 (A.54)，

$$(L^T_g.\vec{y}, \vec{x})_g = (L.\vec{x}, \vec{y})_g, \quad \text{and} \quad (L^T_h.\vec{y}, \vec{x})_h = (L.\vec{x}, \vec{y})_h. \tag{B.11}$$

推论 B.9

$$if \quad (\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h \quad then \quad L_g^T = L_h^T \overset{noted}{=} L^T \quad \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n;\vec{\mathbb{R}}_t^n) \tag{B.12}$$

（一个自同态同态型关系）：因此我们可以说"自同态的欧几里得转置"

证明。 $(L_g^T.\vec{y},\ \vec{x})_{g\,(B.11)}=(L.\vec{x},\ \vec{y})_g \overset{hyp}{=} \lambda^2(L.\vec{x},\ \vec{y})_{h\,(B.11)}= \lambda^2(L_h^T.\vec{y},\ \vec{x})_h \overset{hyp}{=}(L_h^T.\vec{y},\ \vec{x})_g$ 对所有 $\vec{x},\ \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$，因此 $L_g^T.\vec{y} = L_h^T.\vec{y}$ 对所有 $\vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$。 ∎

B.6 单位法向量，单位法形式

本节中的结果不是客观的：我们需要欧几里得点积（需要长度单位：英尺？米？）才能得到一个单位（欧几里得）法向量。

B.6.1 框架

$(\cdot,\ \cdot)_g$ 是欧几里得点积（用于定义欧几里得正交归一性），并且对于所有 $\vec{u},\ \vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}^n$,

$$(\vec{u},\vec{w})_g \overset{\text{noted}}{=} \vec{u} \bullet_g \vec{w} \tag{B.13}$$

（或者当对所有对象规定一个选定的欧几里得点积时，$=$记作$\vec{u} \bullet \vec{w}$）。

Ω 是 $\mathbb{R}^n$、$n=2$ 或 3 中的正则有界开集，且 $\Gamma := \partial\Omega$ 是其正则曲面（维数 $n-1$）。如果 $p \in \Gamma$，那么 $T_p\Gamma$ 是 p 处的切平面，且已知 $T_p\Gamma$ 中的一个基 $(\vec{\beta}_1(p)..... \vec{\beta}_{n-1}(p))$（通常借助描述 Γ 的坐标系获得）。此外，为简化书写，将 $(\vec{\beta}_1(p)..... \vec{\beta}_{n-1}(p))$ 写作 $(\vec{\beta}_1,\ ..... \vec{\beta}_{n-1})$。

B.6.2 单位法向量

称 $\vec{n}_g(p)$ 为 $p \in \Gamma$ 处相对于 $(\cdot,\cdot)_g$ 的单位外法向量；因此，对于所有 $i=1,...,n-1,\ \vec{n}_g(p) \bullet_g \beta_i(p) = 0$，且 $||\vec{n}_g(p)||_g = 1$，也就是说，$\vec{n}_g$ 在 Γ 上定义为（差一个符号）

$$\forall i = 1,...,n-1,\ \vec{\beta}_i \bullet_g \vec{n}_g = 0, \quad \text{and} \quad \vec{n}_g \bullet_g \vec{n}_g = 1 \quad (= ||\vec{n}_g||_g^2), \tag{B.14}$$

也就是说，对于任意 $p \in \Gamma$，$\vec{n}_g(p)$ 与超平面 $\mathsf{Vect}\{\beta_1(p)...,\beta_{n-1}(p)\}$ 正交，且 $\vec{n}_g(p)$ 是单位向量。因此，$(\vec{\beta}_1(p)...,\vec{\beta}_{n-1}(p)\ \vec{n}_g(p))$ 是 p 处 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一组基，简写为 $(\vec{\beta}_1,...,\vec{\beta}_{n-1},\vec{n}_g)$。作图。

因此，对于所有 $\vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}^n$，若 $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n-1} w_i\vec{\beta}_i + w_n\vec{n}_g$（经典记号），则

$$w_n = \vec{w} \bullet_g \vec{n}_g = \text{ the normal component of } \vec{w} \text{ at } p \text{ at } \Gamma. \tag{B.15}$$

（w_n 取决于 $(\cdot,\ \cdot)_g$。）（对偶记号：$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n-1} w^i\vec{\beta}_i + w^n\vec{n}_g$ 和 $w^n = \vec{w} \bullet_g \vec{n}_g$。）

练习 B.10 设 $(\vec{a}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一组基，$\vec{\beta}_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}\vec{a}_i$ 对应 $j=1,\ .....\ n-1$，且 $\vec{n}_g = \sum_{i=1}^n n_i\vec{a}_i$，并且对所有 $i,\ j,$ 有 $g_{ij} = g(\vec{a}_i,\ \vec{a}_j)$。$n_j$ 满足什么方程？特别地，$(\vec{a}_i)$ 是 $(\cdot,\ \cdot)_g$-标准正交的吗？

答案。(B.14) 给出 $[\vec{\beta}_i]_{|\vec{a}}^T.[g]_{|\vec{a}}.[\vec{n}_g]_{|\vec{a}} = 0$，适用于 $i=1,...,n-1$（因此有 $n-1$ 个方程），其中 $[\vec{n}_g]_{|\vec{a}}^T.[g]_{|\vec{a}}.[\vec{n}_g]_{|\vec{a}} = 1$（因此有 1 个方程），而 $\vec{n}_g$ 可确定至相差一个符号。

如果 $(\vec{a}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-标准正交的，那么对于 $j=1,...,n-1$，有 $\sum_{j=1}^n B_{ij}n_j = 0$，其中 $\sum_{i=1}^n n_i^2 = 1$。 ∎

练习 B.11 设 $(\vec{a}_i)$ 是以英尺为单位的欧几里得基，(b_i) 是以米为单位的欧几里得基，$(\cdot,\cdot)_a$ 和 $(\cdot,\cdot)_b$ 是相应的欧几里得点积，因此 $(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2(\cdot,\cdot)_b$，其中 $\lambda \simeq 3.28$，参见 (B.7)。设 $\vec{n}_a(p)$ 和 $\vec{n}_b(p)$ 是相应的单位外法向量，参见 (B.14)。1- 证明（至多相差一个符号）：

$$\vec{n}_b = \lambda\vec{n}_a, \quad \text{and} \quad (\vec{w},\vec{n}_a)_a = \lambda(\vec{w},\vec{n}_b)_b \quad \forall\vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}^n \tag{B.16}$$

2- 然后令 $\vec{n}_a = \sum_{i=1}^m n_{ai}\vec{a}_i$ 和 $\vec{n}_b = \sum_{i=1}^m n_{bi}\vec{b}_i$；证明：

$$\text{If, } \forall i = 1,...,n,\ \vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i \quad \text{then} \quad \forall i = 1,...,n,\ n_{ai} = n_{bi}. \tag{B.17}$$

因此，向量 $\vec{n}_a$ 和 $\vec{n}_b$ 是不同的（$\lambda > 1$），但它们各自的分量相等.....相对于不同的基！当然，$1 = ||\vec{n}_a||_a^2 = \sum_{i=1}^n (n_{ai})^2 = \sum_{i=1}^n (n_{bi})^2 = ||\vec{n}_b||_b^2 = 1$。

答案。 $\vec{n}_a(p) \parallel \vec{n}_b(p)$，因为这些向量是欧几里得向量，且与 $T_p\Gamma$ 正交，参见（B.14）。而 $||.||_a = \lambda||.||_b$ 参见（B.8），因此 $||\vec{n}_b||_b = 1 = ||\vec{n}_a||_a = \lambda||\vec{n}_a||_b = ||\lambda\vec{n}_a||_b$，所以 $\vec{n}_b = \pm\lambda\vec{n}_a$。它们都是外向量，因此 $\vec{n}_b = +\lambda\vec{n}_a$。于是 $(\vec{w},\ \vec{n}_a)_a = \lambda^2\ (\vec{w},\ \vec{n}_a)_b = \lambda^2\ (\vec{w},\ \overset{\vec{n}_b}{\lambda})_b = \lambda\ (\vec{w},\ \vec{n}_b)_b$。 —

并且如果 $\vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i$ (B.16)给出 $\sum_{i=1}^n n_b^i\vec{b}_i = \lambda\sum_{i=1}^n n_a^i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^n n_a^i(\lambda\vec{a}_i) = \sum_{i=1}^n n_a^i\vec{b}_i$，那么 $n_a^i = n_b^i$ ∎

B.6.3 与 $\vec{n}$相关的单位法形式 $n^\flat$

（对于数学家而言；可能会产生误解，并缺乏力学解释；不要忘记： $n^\flat$ 是在定义了 $\vec{n}$ 之后得到的。）

在 $p\in\Gamma$，一旦计算出 $\vec{n}_g(p)$，就可以定义相应的单位法形式 $n_g^\flat(p)\in\mathbb{R}^{n*}$：它是由 $n_g^\flat(p).\vec{w}:=\vec{n}_g(p)\bullet_g\vec{w}$ 定义的线性形式，对所有 $\vec{w}\in\vec{\mathbb{R}}^n$ 均成立；也就是说，在 Γ 上，对所有 $\vec{w}\in\vec{\mathbb{R}}^n$，

$$n_g^\flat.\vec{w}:=\vec{n}_g\bullet_g\vec{w} \tag{B.18}$$

（=请注意 $\vec{n}\bullet\vec{w}$，若对所有对象规定选定的欧几里得点积）。因此 $[n_g^\flat].[\vec{w}]=[\vec{n}_g]^T.[g].[\vec{w}]$。

量化：设 $(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一组基；则 (B.18) 给出 $[n_g^\flat]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}}=[\vec{n}_g]_{|\vec{e}}^T.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}}$，在基 $(\vec{e}_i)$ 给定时可简写为 $[n_g^\flat].[\vec{w}]=[\vec{n}_g]^T.[g].[\vec{w}]$。

因此，为了说明 $^\flat$ 记号，采用对偶记号，令 (e^i) 为 $(\vec{e}_i)$ 的对偶基，设

$$\vec{n}_g=\sum_{i=1}^n n_g^i\vec{e}_i\quad\text{and}\quad n_g^\flat=\sum_{i=1}^n n_{gi}e^i. \tag{B.19}$$

即 n_g^i 和 n_{gi} 分别是 $\vec{n}_g$ 和 $n_g^\flat$ 关于基 $(\vec{e}_i)$ 和 (e^i) 的分量。由于 (B.18) 给出 $n_g^\flat.\vec{e}_i:=\vec{n}_g\bullet_g\vec{e}_i$ 对所有 i 均成立，因此对所有 i,

$$n_{ig}=\sum_{j=1}^n g_{ij}n_g^j \tag{B.20}$$

特殊情形（$(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$-欧几里得基，则 $n_{ig}=n_g^i$。

经典记号：$\vec{n}_g=\sum_{i=1}^n(\vec{n}_g)_i\vec{e}_i$，对偶基（$\pi_{ei}$），$n_g^\flat=\sum_{i=1}^n(n_g^\flat)_i\pi_{ei}$，$(n_g^\flat)_i=\sum_{j=1}^n g_{ij}(\vec{n}_g)_j$.

注意：在物理学中，即使 $g_{ij}=\delta_{ij}$，也别忘了在（B.20）中写出 g_{ij}，因为需要看清所选的度量和基（并验证爱因斯坦求和约定），尽管（B.20）通常简写为 $n_i=\sum_{j=1}^n g_{ij}n^j$.....

B.7 分部积分（格林–高斯–奥斯特罗格拉德斯基）

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的正则有界开集，$\Gamma=\partial\Omega$ 是其边界；设 $\varphi\in C^1(\Omega;\ \mathbb{R})$；设 $(\vec{e}_i)$ 是一个欧几里得基，$(\cdot,\ \cdot)_g$ 是与之关联的欧几里得点积；设 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(p):=d\varphi(p).\vec{e}_i$（通常记号）；设 $\vec{n}_g(p)=\vec{n}(p)=\sum_{i=1}^n n_i(p)\vec{e}_i$（经典记号）是 $p\in\Gamma$ 处的单位外法向量。那么，对于 $i=1,\ .....,\ n$,

$$\int_{p\in\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(p)\,d\Omega=\int_{p\in\Gamma}\varphi(p)n_i(p)\,d\Gamma,\quad\text{in short}\quad\int_\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,d\Omega=\int_\Gamma\varphi n_i\,d\Gamma. \tag{B.21}$$

因此，对于任意 $v\in C^1(\Omega;\mathbb{R})$，在（B.21）中用 φv 代替 φ，可得分部积分公式（格林公式）：

$$\int_\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v\,d\Omega=-\int_\Omega\varphi\frac{\partial v}{\partial x_i}\,d\Omega+\int_\Gamma\varphi v n_i\,d\Gamma. \tag{B.22}$$

因此，对于任意 $\vec{v}\in C^1(\Omega;\vec{\mathbb{R}}^n)$（向量场），若有 $\vec{v}(p)=\sum_{i=1}^n v_i(p)\vec{e}_i$，则可得

$$\int_\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}v_i\,d\Omega=-\int_\Omega\varphi\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,d\Omega+\int_\Gamma\varphi v_i n_i\,d\Gamma. \tag{B.23}$$

因此，取梯度向量 $\vec{\text{grad}}\varphi(p)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\vec{e}_i$，并取散度 $\text{div}\vec{v}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$，可得高斯–奥斯特罗格拉茨基公式:

$$\int_\Omega\vec{\text{grad}}\varphi\bullet\vec{v}\,d\Omega=-\int_\Omega\varphi\,\text{div}\vec{v}\,d\Omega+\int_\Gamma\varphi\vec{v}\bullet\vec{n}\,d\Gamma. \tag{B.24}$$

（而且 $\int_\Gamma\varphi\vec{v}\bullet\vec{n}\,d\Gamma$ 给出了穿过 Γ的通量。）

练习 B.12 使用微分 $d\varphi$ 代替梯度 $\vec{\text{grad}}\varphi$（它是 $d\varphi$的 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示向量），来表示（B.23）。在这种情况下使用 $n^\flat$ 是否有用?

答案. $\int_\Omega d\varphi.\vec{v}\,d\Omega=-\int_\Omega\varphi$ 散度$\vec{v}\,d\Omega+\int_\Gamma\varphi\vec{v}\bullet\vec{n}\,d\Gamma$。由于 $n^\flat$ 取决于 $\vec{n}$（定义），因此没有理由使用 $n^\flat$（除非你想在这里引入无用的记号）。 ∎

C 变形变化率张量和自旋张量

设 $\widetilde{\Phi}:\ [t_1,t_2]\times Obj\ \to\mathbb{R}^n$ 是一个正则运动，参见 (1.5)，并设 $\vec{v}:\ \mathcal{C}\to\vec{\mathbb{R}}^n$ 为欧拉速度场，参见 (2.4)，也就是说，当 $p=\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$ 时，$\vec{v}(t,p)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,P_{Obj})$。其微分 $d\vec{v}$ 见 (2.8)。

在 t，观察者选择一个测量单位（英尺、米.....），并据此构建相应的欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 于 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中，参见 § B.2。（此处我们不再采用客观的观点。）同一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 则用于所有 t。

C.1 $d\vec{v}$的对称部分和反对称部分

给定所选定的欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 于 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中，我们可以考虑转置的自同态 $d\vec{v}_t(p)^T_g=$记作$d\vec{v}_t(p)^T\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\vec{\mathbb{R}}^n_t)$，其定义如下：对于 $\vec{w}_1,\ \vec{w}_2\in\vec{\mathbb{R}}^n_t$处的所有向量 p,

$$(d\vec{v}_t(p)^T.\vec{w}_1,\vec{w}_2)_g=(\vec{w}_1,d\vec{v}_t(p).\vec{w}_2)_g \tag{C.1}$$

参见 § A.11。因此我们定义了

$$d\vec{v}_t^T:\begin{cases}\Omega_t\ \to\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\vec{\mathbb{R}}^n_t)\\ p\ \to d\vec{v}_t^T(p):=d\vec{v}_t(p)^T\end{cases} \tag{C.2}$$

其他常用记号（定义）：$d\vec{v}_t(p)^T=$记作$d\vec{v}(t,p)^T=$记作$d\vec{v}^T(t,p)$。

定义 C.1 （欧拉）变形率张量，或伸长张量，是 $d\vec{v}$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-对称部分：

$$\mathcal{D}=\frac{d\vec{v}+d\vec{v}^T}{2},\quad\text{i.e.,}\quad\forall(t,p)\in\bigcup_{t\in\mathbb{R}}(\{t\}\times\Omega_t),\quad\mathcal{D}(t,p)=\frac{d\vec{v}(t,p)+d\vec{v}(t,p)^T}{2}. \tag{C.3}$$

（欧拉）自旋张量是 $d\vec{v}$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-反对称部分：

$$\Omega=\frac{d\vec{v}-d\vec{v}^T}{2},\quad\text{i.e.,}\quad\forall(t,p)\in\bigcup_{t\in\mathbb{R}}(\{t\}\times\Omega_t),\quad\Omega(t,p)=\frac{d\vec{v}(t,p)-d\vec{v}(t,p)^T}{2}. \tag{C.4}$$

（因此 $d\vec{v}=\mathcal{D}+\Omega$，其中 $\mathcal{D}$ 为变形率张量，而 $\Omega=\vec{\omega}\wedge$ 为旋转乘以膨胀，见下文。）

注意：同一记号也用于点集 $\Omega_t=\Phi_t^{t_0}(\Omega_{t_0})\subset\mathbb{R}^n$ 和自旋张量 $\Omega_t=\frac{d\vec{v}_t-d\vec{v}_t^T}{2}$：上下文可以消除歧义。

C.2 基下的量化

在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中取一组基 $(\vec{e}_i)$，由 (C.1) 可得

$$[g]_{|\vec{e}}.[d\vec{v}^T]_{|\vec{e}}=[d\vec{v}]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}},\quad\text{and}\quad[d\vec{v}^T]_{|\vec{e}}=[g]^{-1}_{|\vec{e}}.[d\vec{v}]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}. \tag{C.5}$$

特别地，如果 $(\vec{e}_i)$ 是一组 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，那么 $[d\vec{v}^T]_{|\vec{e}}=[d\vec{v}]^T_{|\vec{e}}$（正交归一基情形）。因此，对于自同态 $\mathcal{D}$ 和 Ω，在上述欧几里得框架及其欧几里得正交归一基下，我们有 $\mathcal{D}.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\mathcal{D}_{ij}\vec{e}_i$ 和 $\Omega.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\Omega_{ij}\vec{e}_i$，其中 $\mathcal{D}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ 且 $\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$，即

$$[\mathcal{D}]_{|\vec{e}}=\frac{[d\vec{v}]_{|\vec{e}}+[d\vec{v}]^T_{|\vec{e}}}{2}\quad\text{and}\quad[\Omega]_{|\vec{e}}=\frac{[d\vec{v}]_{|\vec{e}}-[d\vec{v}]^T_{|\vec{e}}}{2}\quad\text{(Euclidean framework).} \tag{C.6}$$

对偶记号：$\mathcal{D}.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\mathcal{D}^i_j\vec{e}_i$, $\mathcal{D}^i_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)$ 和 $\Omega.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\Omega^i{}_j\vec{e}_i$, $\Omega^i{}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}-\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)$，因此有 $\mathcal{D}^i_j=\mathcal{D}^j_i$ and $\Omega^i{}_j=-\Omega^j{}_i$。

D 变形率张量的解释

我们关注变形梯度 $F(t) := F^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$ 沿粒子 P_{Obj}的轨迹的演化，该粒子在 t_0时位于 p_{t_0}。因此：

设 $\vec{A} = \vec{a}(t_0,\ p_{t_0})$ 和 $\vec{B} = \vec{b}(t_0,\ p_{t_0})$ 是 Ω_{t_0} 中 t_0 处 p_{t_0} 的向量，并考虑它们经由流 $\Phi^{t_0}_t$ 的推前（即被输运的向量），也就是 t 处 $p(t) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$ 的向量，由下式给出

$$\vec{a}(t, p(t)) := F(t).\vec{A} \quad \text{and} \quad \vec{b}(t, p(t)) := F(t).\vec{B}. \tag{D.1}$$

参见式 (4.3) 和图4.1。它们定义了函数

$$(\vec{a}, \vec{b})_g : \begin{cases} \mathcal{C} \to \mathbb{R} \\ (t, p_t) \to (\vec{a}, \vec{b})_g(t, p_t) := (\vec{a}(t, p_t), \vec{b}(t, p_t))_g. \end{cases} \tag{D.2}$$

命题 D.1 变形率张量 $\mathcal{D} = \frac{d\vec{v}+d\vec{v}^T}{2}$ 给出了经流变形的两个向量之间的（半）演化率，即沿着轨迹，

$$\frac{D(\vec{a}, \vec{b})_g}{Dt} = 2(\mathcal{D}.\vec{a}, \vec{b})_g. \tag{D.3}$$

证明。 $f(t) := (\vec{a}(t,\ p(t))\ \vec{b}(t,\ p(t)))_g = (F(t).\vec{A},\ F(t).\vec{B})_g$ 给出

$$f'(t) = (F'(t).\vec{A}, F(t).\vec{B})_g + (F(t).\vec{A}, F'(t).\vec{B})_g. \tag{D.4}$$

并且 $F'(t) = d\vec{v}(t,\ p(t)).F(t)$，参见（3.33）。因此，若 $\vec{a}(t,\ p(t)) = F(t).\vec{A}$ 且 $\vec{b}(t,\ p(t)) = F(t).\vec{B}$，

$$\begin{aligned} f'(t) &= (d\vec{v}(t, p(t)).F(t).\vec{A}, F(t).\vec{B})_g + (F(t).\vec{A}, d\vec{v}(t, p(t)).F(t).\vec{B})_g \\ &= (d\vec{v}(t, p(t)).\vec{a}(t, p(t)), \vec{b}(t, p(t)))_g + (\vec{a}(t, p(t)), d\vec{v}(t, p(t)).\vec{b}(t, p(t)))_g \\ &= ((d\vec{v}(t, p(t)) + d\vec{v}(t, p(t))^T).\vec{a}(t, p(t)), \vec{b}(t, p(t)))_g, \end{aligned} \tag{D.5}$$

即（D.3），因为 $f(t) = (\vec{a},\ \vec{b})_g(t,\ p(t))$ 给出 $f'(t) = {}^{D}(\vec{a},\ \vec{b})_{Dt}{}^{g}(t,\ p(t))$。 ∎

E 刚体运动与自旋张量

选择一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$（刚体运动的刻画所必需）。

结果：刚体运动是一种其欧拉速度满足 $d\vec{v} + d\vec{v}^T = 0$ 的运动，即 $\mathcal{D} = 0$（欧拉方法与某位观察者所选择的任何初始时刻 t_0 无关）。

但是，通常对刚体运动的经典引言依赖于某个初始时刻 t_0 （拉格朗日方法）。因此，首先让我们采用拉格朗日方法来进行。回顾：T $\Phi^{t_0}_t$在 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 附近的一阶泰勒展开为

$$\Phi^{t_0}_t(q_{t_0}) = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0}) + F^{t_0}_t(p_{t_0}).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}} + o(\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}). \tag{E.1}$$

E.1 仿射运动与刚体运动

E.1.1 仿射运动

定义 E.1 Φ^{t_0} 是仿射运动（理解为“空间中的仿射运动”）当且仅当$\Phi^{t_0}_t$是“仿射运动”，即当且仅当 $\Phi^{t_0}_t$是一个 C^1 微分同胚（在空间中），并且（E.1）对所有 $p_{t_0},\ q_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 以及所有 $t \in [t_1, t_2]$均成立，

$$\Phi^{t_0}_t(q_{t_0}) = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0}) + F^{t_0}_t(p_{t_0}).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}. \tag{E.2}$$

Marsden–Hughes 记法： $\Phi(Q) = \Phi(P) + F(P).\overrightarrow{PQ}$。

命题 E.2 及定义。如果 Φ^{t_0} 是仿射运动，那么 $F^{t_0}_t(p_{t_0})$ 与 p_{t_0}线性无关，即对于所有 $t \in]t_1,\ t_2[$ 以及所有 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 和所有 $q_{t_0} \in \Omega_{t_0}$，

$$F^{t_0}_t(p_{t_0}) = F^{t_0}_t(q_{t_0}) \overset{noted}{=} F^{t_0}_t. \tag{E.3}$$

因此 $dF^{t_0}_t(p_{t_0}) = 0$，即 $d^2\Phi^{t_0}_t(p_{t_0}) = 0$。对于所有 $t \in]t_1,\ t_2[$，Φ^t 都是仿射运动：对于所有$\tau \in]t_1,\ t_2[$ 以及所有 $p_t,\ q_t \in \Omega_t$，

$$\Phi^t_\tau(q_t) = \Phi^t_\tau(p_t) + F^t_\tau.\overrightarrow{p_t q_t}. \tag{E.4}$$

~且 Φ 被称为仿射运动（即“空间中的仿射运动”）。

证明。 $q_{t_0}=p_{t_0}+\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}$ 给出 $\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}+\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}})=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})+d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}$，同理，$\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})=\Phi_t^{t_0}(q_{t_0}+\overrightarrow{q_{t_0}p_{t_0}})=\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})+d\Phi_t^{t_0}(q_{t_0}).\overrightarrow{q_{t_0}p_{t_0}}$。因此（相加） $\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})+\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})+\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})+(d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})-d\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}$，于是 $(d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})-d\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}=0$，这对所有 p_{t_0},q_{t_0} 均成立，因此$d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})-d\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})=0$，即（E.3）。

因此 $d^2\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{u}_{t_0}=\lim_{h\to0}\frac{d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}+h\vec{u}_{t_0})-d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})}{h}\xrightarrow{=}\lim_{h\to0}\frac{d\Phi_t^{t_0}-d\Phi_t^{t_0}}{h}=0$ 对所有 p_{t_0} 及所有 $\vec{u}_{t_0}$，因此 $d^2\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})=0$ 对所有 p_{t_0}，因此 $d^2\Phi_t^{t_0}=0$。

而 (5.17) 给出 $(\Phi_\tau^t\circ\Phi_t^{t_0})(p_{t_0})=\Phi_\tau^{t_0}(p_{t_0})$，因此，令 $p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$，可得 $d\Phi_\tau^t(p_t).d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})=d\Phi_\tau^{t_0}(p_{t_0})$，因此 $d\Phi_\tau^t(p_t)=d\Phi_\tau^{t_0}(p_{t_0}).d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})^{-1}$，而 (E.2) 给出

$$d\Phi_\tau^t(p_t)=d\Phi_\tau^{t_0}.d\Phi_t^{t_0\,-1}\overset{\text{noted}}{=}d\Phi_\tau^t\quad(\text{independent of }p_t),\tag{E.5}$$

因此得到 (E.4)。 ∎

推论 E.3 若 $\widetilde{\Phi}$ 是仿射的，则对所有 t，$\vec{v}_t$ 都是仿射的；对所有 t_0、t，$\vec{V}_t^{t_0}$ 都是仿射的，即对于所有 $p_t\in\Omega_t$，我们有 $d\vec{v}_t(p_t)=d\vec{v}_t$（与 p_t 线性无关）；对于所有 $p_{t_0}\in\Omega_{t_0}$，我们有 $d\vec{V}_t^{t_0}(p_{t_0})\overset{\text{注意}}{=}d\vec{V}_t^{t_0}$（与 p_{t_0} 线性无关）：对于所有 $q_t\in\Omega_t$ 和所有 $q_{t_0}\in\Omega_{t_0}$，

$$\begin{cases}\bullet\ \vec{v}_t(q_t)=\vec{v}_t(p_t)+d\vec{v}_t.\overrightarrow{p_tq_t},\\ \bullet\ \vec{V}_t^{t_0}(q_{t_0})=\vec{V}_t^{t_0}(p_{t_0})+d\vec{V}_t^{t_0}.\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}.\end{cases}\tag{E.6}$$

证明。 (E.2) 给出 $\Phi^{t_0}(t,q_{t_0})=\Phi^{t_0}(t,p_{t_0})+F^{t_0}(t).\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}$，而对时间求导得到 $(E.6)_2$，继而得到 $(E.6)_1$，这要归功于 $p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$、$q_t=\Phi_t^{t_0}(q_{t_0})$ 和 $\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}=(F_t^{t_0})^{-1}.\overrightarrow{p_tq_t}$，参见 (E.2)。 ∎

例 E.4 在 $\mathbb{R}^2$ 中，以 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中的基 $(\vec{E}_1,\ \vec{E}_2)$ 和 $\in\vec{\mathbb{R}}_t^n$ 中的基 $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ 表示时，则由 $[F_t^{t_0}]_{|\vec{E},\ \vec{e}}=$ 给出的 $F_t^{t_0}$ 源自仿射运动 $\overrightarrow{[\Phi_t^{t_0}\ p_{t_0}\ \Phi_t^{t_0}\ q_{t_0}]}()()_{|\vec{e}}=\begin{pmatrix}1+t & 2t^2\\ 3t^3 & e^t\end{pmatrix}.[\overrightarrow{p_{t_0}q_{t_0}}]_{|\vec{E}}$。 ∎

E.1.2 刚体运动

选定一个欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$ 于 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$中，并且在所有时间 t都相同。令 $\Phi:=\Phi_t^{t_0}$以及 $F:=F_t^{t_0}$。回顾：如果 $P\in\Omega_{t_0}$且 $p=\Phi(P)\ (\in\Omega_t)$，那么相对于 $(\cdot,\cdot)_g$，线性映射 $F(P)\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n;\ \vec{\mathbb{R}}_t^n)$ 的转置映射是线性映射 $F^T(p):=F(P)^T\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n;\ \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$，其定义为

$$F^T(p):=F(P)^T:\begin{cases}\vec{\mathbb{R}}_t^n\ \to\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n\\ \vec{w}_p\ \to F^T(p).\vec{w}_p\quad\text{s.t.}\quad(F^T(p).\vec{w}_p,\vec{U}_P)_g=(\vec{w}_p,F(P).\vec{U}_P)_g,\ \ \forall\vec{U}_P\in\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n.\end{cases}\tag{E.7}$$

因此，我们定义了函数 $F^T:\Omega_t\to\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n;\ \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$。

特殊情况：对于仿射运动，由于 F与 P线性无关，我们得到 F^T与 p线性无关。

定义 E.5 刚体运动是满足以下条件的仿射运动：对于所有 $t_0,t\in\mathbb{R}$, $P\in\Omega_{t_0}$, $U_P,W_P\in\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$，且满足 $p=\Phi_t^{t_0}(P)$,

$$(F.\vec{U}_P,F.\vec{W}_P)_g=(\vec{U}_P,\vec{W}_P)_g,\quad\text{i.e.}\quad(F^T.F.\vec{U}_P,\vec{W}_P)_g=(\vec{U}_P,\vec{W}_P)_g,\quad\text{i.e.}\quad\boxed{F^T.F=I}.\tag{E.8}$$

（角度和长度均保持不变。）

换句话说，若柯西应变张量 $C\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n;\ \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$ 由 $C=F^T.F$ 定义，则运动是刚体运动，当且仅当它是仿射的，并且

$$\boxed{C=I},\quad\text{i.e.}\quad\boxed{F^{-1}=F^T}.\tag{E.9}$$

命题 *E.6* 若 Φ^{t_0} 是刚体运动，若 $(\vec{A}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中的 $(\cdot,\cdot)_g$-欧几里得基，若 $P\in\Omega_{t_0}$，若$t\in[t_0,T]$ 且 $p=\Phi_t^{t_0}(P)$，并且若对所有 i，$\vec{a}_i(t,p)=F^{t_0}(t,P).\vec{A}_i$，则 $\vec{a}_i(t,p)=$记作 $\vec{a}_{i,t}$，且与 p 无关；并且对所有 t，$(\vec{a}_{i,t})$ 是一个与 $(\vec{A}_i)$ 定向相同的 $(\cdot,\cdot)_g$-欧几里得基。

证明。 $\Phi_t^{t_0}$ 是仿射的，因此对所有 t, P, $F_t^{t_0}(P) = F_t^{t_0}$（与 P 无关），于是 $\vec{a}_{i,t}(p) = F_t^{t_0}.\vec{A}_i \in \vec{\mathbb{R}}_t^n$ 与 p 无关，这对所有 t 都成立。令 t 固定，并令 $\vec{a}_{i,t} =$ 记作 $\vec{a}_i (= F.\vec{A}_j)$。我们得到对所有 i, j, $(\vec{a}_i, \vec{a}_j)_g = (F.\vec{A}_i, F.\vec{A}_j)_g = (F^T.F.\vec{A}_i, \vec{A}_j)_g = (I.\vec{A}_i, \vec{A}_j)_g = (\vec{A}_i, \vec{A}_j)_g = \delta_{ij}$，因此 $(\vec{a}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基。并且 $\det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) = \det(F.\vec{A}_1, ..., F.\vec{A}_n) = \det(F)\det(\vec{A}_1, ..., \vec{A}_n) = \det(F)$，因为 $(\vec{A}_i)$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基。又由于 $\Phi_t^{t_0}$ 是微分同胚， $t \to \det(F_t^{t_0})$ 是连续的且不为零；此外， $F_{t_0}^{t_0}$ 的 $\det(=) I\det(=1>0)$；因此，对所有 t，$\det(F_t^{t_0}) > 0$，于是 $\det(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) > 0$：这些基具有相同的定向。 ∎

例 E.7 在 $\mathbb{R}^2$ 中，刚体运动由 $F_t^{t_0} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$ 给出，其中 θ 是一个正则函数，使得 $\theta(t_0) = 0$。 ∎

练习 E.8 设 Φ 是一个刚体运动。证明

$$(F^T)'(t) = (F'(t))^T, \quad \text{and} \quad F^T.F' \text{ is antisymmetric.} \tag{E.10}$$

答案。设 $t \in \mathbb{R}$, $p(t) = \Phi_t^{t_0}(P)$, $\vec{U}, \vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 和 $\vec{w}(t, p(t)) = F(t).\vec{W}$。并回忆一下，函数 F^T: $t \to F^T(t)$ 按照通常定义为 $F^T(t) := (F(t))^T$。我们有 $(F(t)^T.\vec{w}(t, p(t)))\ \vec{U})_g = (\vec{w}(t, p(t)))\ F(t).\vec{U})_g$。因此 $((F^T)'(t).\vec{w}(t, p(t)) + F^T(t).\frac{D\vec{w}}{Dt}(t, p(t)))\ \vec{U})_g = (\frac{D\vec{w}}{Dt}(t, p(t)))\ F(t).\vec{U})_g + (\vec{w}(t, p(t)))\ F'(t).\vec{U})_g$，化简后得到 $((F^T)'(t).\vec{w}(t, p(t)))\ \vec{U})_g = (\vec{w}(t, p(t)))\ F'(t).\vec{U})_g = ((F'(t))^T.\vec{w}(t, p(t)))\ \vec{U})_g$，因此 $(F^T)'(t) = (F'(t))^T$。

而（E .8）为 $F^T(t).F(t) = I_{t_0}$，因此 $(F^T)'(t).F(t) + F^T(t).F'(t) = 0$，因此 $(F')^T(t).F(t) + F^T(t).F'(t) = 0$，因此， $F^T.F'$ 是反对称的。 ∎

E.1.3 刚体运动的替代定义： $d\vec{v} + d\vec{v}^T = 0$

伸长 张量 $\mathcal{D}_t = \frac{d\vec{v}_t + d\vec{v}_t^T}{2}$ 和自旋张量 $\Omega_t = \frac{d\vec{v}_t - d\vec{v}_t^T}{2}$ 已在 (C.3)-(C.4) 中定义。

命题 E.9 如果 $\widetilde{\Phi}$ 是刚体运动，参见 *(E.8)*，那么自同态 $d\vec{v}_t \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n; \vec{\mathbb{R}}_t^n)$ 在所有 t处都是反对称的：

$$d\vec{v}_t = \Omega_t, \quad i.e. \quad \mathcal{D}_t = 0. \tag{E.11}$$

反之，如果对所有 t 都有 $d\vec{v}_t + d\vec{v}_t^T = 0$，那么 $\widetilde{\Phi}$ 是刚体运动（此处不要求初始时刻）。因此，关系「对所有 t， $d\vec{v}_t + d\vec{v}_t^T = 0$」给出了与定义 *E.5* 等价的定义。

证明。令 $F(t) := F_{p_{t_0}}^{t_0}(t)$ 和 $F^T(t) := F(t)^T$ 以及 $V(t) := \vec{V}_{p_{t_0}}^{t_0}(t) = (\Phi_{p_{t_0}}^{t_0})'(t) = \vec{v}\ t\ p_t$。 $F.F^T\ '\ t = 0 = F'\ t\ .F\ t\ ^T + (\ ,\ )$（拉格朗日速度和欧拉速度）。(E.) 给出 $(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )_{()}(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )(\ )_{()}(\ ,\ )\, d\vec{v}(t,\ p_t)^T$。因此得到 (E.11)。 $F\ t\ .\ F^T\ '\ t \overset{E.10}{=} F'\ t\ .F\ t\ ^T + F'\ t\ .F\ t\ ^T\ ^T = dV\ t\ .F\ t\ ^{-1} + dV\ t\ .F\ t\ ^{-1\ T} \overset{3.27}{=} d\vec{v}\ t\ p_t +$

反过来，假设 $d\vec{v} + d\vec{v}^T = 0$。那么 (D.3) 给出 $\frac{D(\vec{a},\vec{b})_g}{Dt} = 0$，因此对于所有 t, t_0 以及所有 $p_{t_0} = \Phi_t^{t_0}(p_t)$，有 $(\vec{a}, \vec{b})_g(t, p_t) = (\vec{a}, \vec{b})_g(t_0, p_{t_0})$，即对于所有 t, t_0、所有 p_{t_0} 以及所有 $\vec{A}, \vec{B} \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$，有 $(F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{A}, F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{B})_g = (\vec{A}, \vec{B})_g$：因此 $\widetilde{\Phi}$ 是刚体运动，参见 (E.8)。 ∎

E.2 自旋张量 Ω 的表示：向量与伪向量

这里讨论的是一些有时会被误解的概念。框架： $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$。

E.2.1 提醒

- 与 $\mathbb{R}^3$ 中的一个基 $(\vec{e}_i)$ 相关联的行列式 $\det^{\vec{e}}$，是由 $\det^{\vec{e}}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$定义的交替多重线性形式；由三个向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 围成的代数体积（或有向体积）是 $\det^{\vec{e}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$；而（正）体积为 $|\det^{\vec{e}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)|$，参见 § K。

- 设 A 和 B 是两位观察者（例如 A=英语观察者和 B=法语观察者），设（$\vec{a}_i$）是由 A 选取的欧几里得基（例如以英尺为基础），设（$\vec{b}_i$）是由 B 选取的欧几里得基（例如以米为基础），参见 § B.1。

设 $\lambda = ||b_1||_a > 0$ （长度单位变换系数）。行列式之间的关系为:

$$\det_{|\vec{a}} = \pm\lambda^3 \det_{|\vec{b}} \quad \text{with} \quad \begin{cases} + \text{ if } \det_{|\vec{a}}(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3) > 0 \quad \text{(i.e. if the bases have the same orientation)}, \\ - \text{ if } \det_{|\vec{a}}(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3) < 0 \quad \text{(i.e. if the bases have opposite orientation)}. \end{cases} \tag{E.12}$$

特别是，如果 A 和 B 使用相同的长度单位（或者如果 A 使用两个 $(\cdot,\cdot)_g$-欧几里得基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i)），那么 $\lambda = 1$ 且 $\det_{|\vec{a}} = \pm\det_{|\vec{b}}$。

- 给定欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$：自同态 L 是 $(\cdot,\cdot)_g$-反对称的，当且仅当

$$\forall \vec{u},\vec{v},\ (L.\vec{u},\vec{v})_g + (\vec{u},L.\vec{v})_g = 0, \quad \text{i.e.} \quad L^T = -L. \tag{E.13}$$

E.2.2 向量积（叉积）的定义

设 $(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，设 $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$，并设 $\ell_{\vec{e},\vec{u},\vec{v}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 是由下式定义的线性形式

$$\ell_{\vec{e},\vec{u},\vec{v}} : \begin{cases} \vec{\mathbb{R}^3} & \to \mathbb{R} \\ \vec{z} & \to \ell_{\vec{e},\vec{u},\vec{v}}(\vec{z}) := \det_{|\vec{e}}(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) \end{cases} \tag{E.14}$$

（由欧几里得所选基中的 $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{z}$限定的平行六面体的代数体积 t).

定义 E.10 两个向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$的向量积，或叉积 $\vec{u}\wedge_e\vec{v}$，是 $\ell_{\vec{e}、\vec{u}、\vec{v}}$ 的 $(\cdot、\cdot)_g$-里斯表示向量，即 $\vec{u}\wedge_e\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ 由下式刻画：$\ell_{\vec{e}、\vec{u}、\vec{v}}(\vec{z}) = (\vec{u}\wedge_e\vec{v}、\ \vec{z})_g$，对所有 $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ 均成立，参见 (F.2)，即

$$\forall \vec{z} \in \vec{\mathbb{R}^3}, \quad \boxed{(\vec{u}\wedge_e\vec{v},\vec{z})_g = \det_{|\vec{e}}(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}. \tag{E.15}$$

注意：$\vec{u}\wedge_e\vec{v}$取决于（$\cdot$，$\cdot$）$_g$，因为我们需要一个（$\cdot$，$\cdot$）$_g$-欧几里得基（$\vec{e}_i$）（并且取决于（$\vec{e}_i$）的定向）。

由此，我们定义了双线性叉积算子

$$\wedge_e : \begin{cases} \vec{\mathbb{R}^3}\times\vec{\mathbb{R}^3} & \to \vec{\mathbb{R}^3} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \to \wedge_e(\vec{u},\vec{v}) := \vec{u}\wedge_e\vec{v}. \end{cases} \tag{E.16}$$

（由于行列式的多重线性，双线性显而易见。）如果一位观察者将某个欧几里得基指定给其他所有观察者，那么 $\vec{u}\wedge_e\vec{v}$写作 $\vec{u}\wedge\vec{v}$（非客观）。

E.2.3 向量积的计算

$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i\vec{e}_i$、$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i\vec{e}_i$ 和（E.15）给出

$$(\vec{u}\wedge_e\vec{v},\vec{e}_1)_g = \det_{|\vec{e}}(\vec{u},\vec{v},\vec{e}_1) = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2. \tag{E.17}$$

对（$\vec{u}\wedge_e\vec{v}$，$\vec{e}_2$）$_e$和（$\vec{u}\wedge_e\vec{v}$，$\vec{e}_3$）$_e$进行类似计算，得

$$\vec{u}\wedge_e\vec{v} = \sum_{i=1}^3 (u_{i+1}v_{i+2} - u_{i+2}v_{i+1})\,\vec{e}_i, \quad \text{i.e.} \quad [\vec{u}\wedge_e\vec{v}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}. \tag{E.18}$$

采用一般记号 $w_4 := w_1$ 和 $w_5 = w_2$。（特别是 $\vec{e}_i\wedge_e\vec{e}_{i+1} = \vec{e}_{i+2}$。）

命题 E.11 *1-* $\vec{u}\wedge_e\vec{v} = -\vec{v}\wedge_e\vec{u}$。

2- $\vec{u}\parallel\vec{v}$ 当且仅当 $\vec{u}\wedge_e\vec{v} = 0$。

3- 若 $\vec{u}$ 一且 $\vec{v}$ 线性无关，则 $\vec{u}\wedge_e\vec{v}$ 与由 $\vec{u}$生成的线性空间 $\mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$ 正交且 $\vec{v}$。

4- $\vec{u}\wedge_e\vec{v}$取决于测量单位以及$(\vec{e}_i)$的定向：若$(\cdot,\cdot)_a$和$(\cdot,\cdot)_b$是两个欧几里得点积，令 $\lambda > 0$ 使得$(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2(\cdot,\cdot)_b$，那么

$$\vec{u}\wedge_a\vec{v} = \pm\lambda\vec{u}\wedge_b\vec{v}. \tag{E.19}$$

证明。 1- $\det_{|\vec{e}}(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{z}) = -\det_{|\vec{e}}(\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{z})$（因为 $\det_{|\vec{e}}$是交错的）。

2- 若 $\vec{u} \parallel \vec{v}$则 $\det_{|\vec{e}}(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) = 0 = (\vec{u}\wedge_e \vec{v},\vec{z})_e$，因此 $\vec{u}\wedge_e \vec{v} \perp_g \vec{z}$，对所有 $\vec{z}$ 均成立。并且若 $\vec{u}\wedge_e \vec{v} = 0$，则有 (E.18) 得到 $\vec{u} \parallel \vec{v}$。

3- 若 $\vec{z} \in \mathrm{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}$，则 $\det_{|\vec{e}}(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) = 0 = (\vec{u}\wedge_e \vec{v},\vec{z})_g$，因此 $\vec{u}\wedge_e \vec{v} \perp_g \vec{z}$。

4- $(\vec{u}\wedge_a \vec{v},\ \vec{z})_a \overset{(E.15)}{=} \det_{|\vec{a}}(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{z}) \overset{(E.12)}{=} \pm\lambda^3 \det_{|\vec{b}}(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{z}) \overset{(E.15)}{=} \pm\underline{\lambda}^3(\vec{u}\wedge_b \vec{v},\ \vec{z})_b = \pm\lambda^3 \frac{1}{\lambda^2}(\vec{u}\wedge_b \vec{v},\ \vec{z})_a$，对所有 $\vec{z}$均成立，因此得到 (E.19)。

练习 E.12 的证明 $\vec{u}\wedge_e \vec{v}$是一个逆变向量。

答案。它是 $\mathbb{R}^3$中的一个向量（里斯表示向量），因此是逆变的；也可以通过计算验证：它满足逆变的基变换公式，见 (F.17)。

E.2.4 用向量表示的反对称自同态

命题 E.13 设 $(\vec{e}_i)$ 是选定的$(\cdot,\cdot)_g$-欧几里得基。若自同态$\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ 是$(\cdot,\cdot)_g$-反对称的，则存在唯一的向量 $\vec{\omega}_e \in \mathbb{R}^3$，使得对所有 $\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^3$，

$$(\Omega.\vec{y},\vec{z})_g = \det_{|\vec{e}}(\vec{\omega}_e,\vec{y},\vec{z}), \tag{E.20}$$

即，存在唯一的向量 $\vec{\omega}_e \in \mathbb{R}^3$，使得对所有 $\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^3$，

$$\boxed{\Omega.\vec{y} = \vec{\omega}_e \wedge_e \vec{y}}, \tag{E.21}$$

And

$$[\Omega]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{iff} \quad [\vec{\omega}_e]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{E.22}$$

特别地$\Omega.\vec{\omega}_e = \vec{0}$ $(= \vec{\omega}_e \wedge_e \vec{\omega}_e)$，即 $\vec{\omega}_e$ 是对应于特征值0的特征向量。

证明。 Ω 是反对称的，因此 $[\Omega]_{|\vec{e}}$ 如式（E.22）所示。特别地，$[\Omega.\vec{e}_1]_{|\vec{e}} = [\Omega]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_1]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$。计算 $\vec{\omega}_e$ 的分量（若其存在）：令 $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3$；于是 $[\vec{\omega}\wedge\vec{e}_1]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ -\omega_2 \end{pmatrix}$，

参见（E.18），于是 $\omega_3 = c$ 和 $\omega_2 = b$；对 $\vec{e}_2$ 同理，故 $\omega_1 = a$。因此，若 $\vec{\omega}$ 存在，则它是唯一的。并且，（E.22）中给出的 $\vec{\omega}_e$ 满足（E.21）：它确实存在。

命题 E.14 设 $(\cdot,\cdot)_a$ 和 $(\cdot,\cdot)_b$ 是两个欧几里得点积（例如，以英尺和米为单位），设 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$ 是欧几里得关联基。设 $||\vec{b}_1||_b = \lambda$（单位换算系数）于是 $(\cdot,\cdot)_a = \lambda_2(\cdot,\cdot)_b$）。假设 $[\Omega]_{|\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$，因此 $[\vec{\omega}_a]_{|\vec{a}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，参见 *(E.22)*。那么（Ω 的表示向量变换）：

$$\begin{aligned} &\bullet\ \textit{If } (\vec{b}_i) \textit{ and } (\vec{a}_i) \textit{ have the same orientation, then } \quad \vec{\omega}_b = \lambda\vec{\omega}_a, \\ &\bullet\ \textit{If } (\vec{b}_i) \textit{ and } (\vec{a}_i) \textit{ have opposite orientation, then } \quad \vec{\omega}_b = -\lambda\vec{\omega}_a, \end{aligned} \tag{E.23}$$

例如，若对所有 i 都有 $b_i = \lambda\vec{a}_i$（单位变换，定向相同），则 $\vec{\omega}_b = \lambda\vec{\omega}_a$；若 $b_1 = -\lambda\vec{a}_1$、$b_2 = \lambda\vec{a}_2$、$\vec{b}_3 = \lambda\vec{a}_3$（单位变换，定向相反），则 $\vec{\omega}_b = -\lambda\vec{\omega}_a$。

NB: 公式 $\vec{\omega}_b = \pm\lambda\vec{\omega}_a$ 是向量变换公式，而不是 基变换公式。

证明。 应用 (E.19)。

解释 $\vec{\omega}_e$**:** 设 $[\Omega]_{|\vec{e}} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此，Ω 是在水平面内以 $\frac{\pi}{2}$ 为角度的旋转与比例为 α 的膨胀的复合变换。而 $[\vec{\omega}_e]_{|\vec{e}} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\,\vec{e}_3$ 垂直于水平面，给出了旋转轴和伸缩系数。

练习 E.15 设 Ω 满足 $[\Omega]_{|\vec{e}}=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$（见 (E.22)）。求一个直接正交归一基 $(\vec{b}_i)$（相对于 $(\vec{e}_i)$），使得 $[\Omega]_{|\vec{b}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

答案. 令 $\vec{b}_3=\frac{\vec{\omega}_e}{||\vec{\omega}_e||_e}$，即 $[\vec{b}_3]_{|\vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$。然后选取 $\vec{b}_1\perp\vec{b}_3$，例如 $[\vec{b}_1]_{|\vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$。接着选取 $\vec{b}_2=\vec{b}_3\wedge_e\vec{b}_1$，即 $[\vec{b}_2]_{|\vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}-ac\\-bc\\a^2+b^2\end{pmatrix}$。因此，$(\vec{b}_i)$ 是一个正向的正交归一基，且从 $(\vec{e}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}[\vec{b}_1]_{|\vec{e}}&[\vec{b}_2]_{|\vec{e}}&[\vec{b}_3]_{|\vec{e}}\end{pmatrix}$。并且 $[\Omega]_{|\vec{b}}=P^{-1}.[\Omega]_{|\vec{e}}.P$(基变换公式)，其中 $P^{-1}=P^T$(标准正交基变换)，因此 $[\Omega]_{|\vec{b}}=P^T.[\Omega]_{|\vec{e}}.P$

由于 $[\Omega]_{|\vec{e}}.[\vec{b}_1]_{|\vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\begin{pmatrix}-ac\\-bc\\a^2+b^2\end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}[\vec{b}_2]_{|\vec{e}}$(预期值)，$[\Omega]_{|\vec{e}}.[\vec{b}_2]_{|\vec{e}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-ac\\-bc\\a^2+b^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}bc^2+b\\-ac^2-a(\quad a^2+b^2\\\qquad\qquad a^2+b^2\\abc-abc\end{pmatrix}=$

$-\sqrt{a^2+b^2+c^2}[\vec{b}_1]_{|\vec{e}}\qquad[\ ]_{|\vec{e}}.[\vec{b}_3]_{|\vec{e}}=[\vec{0}]\qquad\vec{b}_3\parallel\vec{\omega}_e\qquad[\ ]_{|\vec{e}}.P=$(预期值)，且 Ω（因而预期）。因此 Ω。而（Ω）Ω 得出结果。

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix}[\vec{b}_2]_{|\vec{e}}&-[\vec{b}_1]_{|\vec{e}}&[\vec{0}]_{|\vec{e}}\end{pmatrix}\qquad P^T.[\ ]_{|\vec{e}}.P_{\ ij}=[\vec{b}_i]^T_{|\vec{e}}.[\ ]_{|\vec{e}}.[\vec{b}_j]_{|\vec{e}}$ ∎

E.2.5 旋度

定义 E.16 如果 $\vec{v}$ 是一个 C^1 向量场，如果 $(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}^3}$ 中的欧几里得基，且如果 $\vec{v}=\sum_{i=1}^3 v^i\vec{e}_i$，那么 $\vec{v}$ 相对于 $(\vec{e}_i)$ 的旋度（或旋转）是向量场 $\vec{\text{curl}}_e\vec{v}=\vec{\text{rot}}_e\vec{v}$，其定义为

$$\vec{\text{curl}}_e\vec{v}=\sum_{i=1}^3(\frac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}}-\frac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}})\,\vec{e}_i,\quad\text{i.e.}\quad[\vec{\text{curl}}_e\vec{v}]_{|\vec{e}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}.\tag{E.24}$$

命题 E.17 令 $\Omega(t,p_t)=\frac{d\vec{v}_{(t,p_t)}-d\vec{v}(\ t\ p_t\ ^T)}{2}$，并令 $\vec{\omega}_e(t,p_t)$ 为相对于欧几里得基 $(\vec{e}_i)$的关联向量，参见 *(E.21)*。则

$$\vec{\omega}_e=\frac{1}{2}\vec{\text{curl}}_e\vec{v}.\tag{E.25}$$

证明。 (C.6) 给出 $[\Omega]_{|\vec{e}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}&\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\\.&0&\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\\.&.&0\end{pmatrix}$，其中 $[\Omega]_{|\vec{e}}$ 是反对称的。因此，由 (E.22)、(E.18) 和 (E.24) 可得 (E.25)。 ∎

E.3 伪叉积与伪向量

框架: $\mathcal{M}_{31}$ $3*1$ 矩阵空间，因此我们离开向量框架，进入矩阵世界 .

E.3.1 定义

定义 E.18 列矩阵也称为伪向量或列向量。

定义 E.19 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 记作= $[\vec{x}]$ 和 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 记作= $[\vec{y}]$ 是 $\mathcal{M}_{31}$中的两个矩阵，它们的伪叉积为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\overset{\circlearrowleft}{\wedge}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}\overset{\text{noted}}{=}[\vec{x}]\overset{\circlearrowleft}{\wedge}[\vec{y}].\tag{E.26}$$

因此，两个伪向量的伪叉积是一个伪向量（即一个矩阵）。

E.3.2 由伪向量表示的反对称矩阵

定义 E.20 设 $A = [A_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ 是一个反对称矩阵（对于所有 i， j 均满足 $A_{ji} = -A_{ij}$ ）。

与 A 相关联的伪向量 $\overset{\circlearrowleft}{\omega}$ 是列矩阵 $\overset{\circlearrowleft}{\omega} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 因此,

$$\boxed{A.[\vec{y}] = \overset{\circlearrowleft}{\omega} \overset{\circlearrowleft}{\wedge} [\vec{y}]}, \quad \text{i.e.} \quad A. \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overset{\circlearrowleft}{\omega} \overset{\circlearrowleft}{\wedge} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \text{for all matrix } [\vec{y}] = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{E.27}$$

E.3.3 反对称自同态及其伪向量表示

设 $\mathbb{R}^3$ 为我们通常所说的仿射空间，$(\cdot,\ \cdot)_g$ 为欧几里得点积，$(\vec{e}_i)$ 为 $(\cdot,\ \cdot)_g$-欧几里得关联基。设 Ω 是相对于 $(\cdot,\ \cdot)_g$的反对称自同态，因此 $\Omega^T = -\Omega$，参见 (E.13)。于是 $[\Omega]_{|\vec{e}}$ 是一个反对称矩阵。称 $\overset{\circlearrowleft}{\omega}$ 为关联伪向量，即参见 (E.27)，对所有 $\vec{y} \in \vec{\mathbb{R}^3}$,

$$[\Omega]_{|\vec{e}}.[\vec{y}]_{|\vec{e}} = \overset{\circlearrowleft}{\omega} \overset{\circlearrowleft}{\wedge} [\vec{y}]_{|\vec{e}}. \tag{E.28}$$

这个公式在力学中被广泛使用，但遗憾的是，有时会记作 $\Omega.\vec{y} = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$ （！）：

请注意： (E.28)并不是向量公式；这只是一个用于矩阵计算的公式，若考虑基变换，则会给出错误结果。例如，设 $(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3)$ 为一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$-欧几里得基，且 $(\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3) = (-\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3)$。因此 $(\vec{b}_i)$ 也是一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$-欧几里得基，但定向不同。

1- 向量方法：设 P 为从 $(\vec{a}_i)$ 到 (b_i) 的过渡矩阵，因此 $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。设 $[\Omega]_{|\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$。因此，Ω 是一个自同态，基变换公式给出

$$[\Omega]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[\Omega]_{|\vec{a}}.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{E.29}$$

因此，向量 $\vec{\omega}_a$ 和 $\vec{\omega}_b$ 由 (E.22) 给出:

$$[\vec{\omega}_a]_{|\vec{a}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad [\vec{\omega}_b]_{|\vec{b}} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_a = a\vec{a}_1 + b\vec{a}_2 + c\vec{a}_3, \\ \vec{\omega}_b = a\vec{b}_1 - b\vec{b}_2 - c\vec{b}_3, \end{array} \right\} \quad \text{thus} \quad \boxed{\vec{\omega}_b = -\vec{\omega}_a}. \tag{E.30}$$

2- 矩阵方法（E.27）给出 $[\Omega]_{|\vec{a}}.[\vec{y}] = \overset{\circlearrowleft}{\omega}_a \overset{\circlearrowleft}{\wedge} [\vec{y}]$ 和 $[\Omega]_{|\vec{b}}.[\vec{y}] = \overset{\circlearrowleft}{\omega}_b \overset{\circlearrowleft}{\wedge} [\vec{y}]$，其中

$$\overset{\circlearrowleft}{\omega}_a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overset{\circlearrowleft}{\omega}_b = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}, \quad \text{so} \quad \boxed{\overset{\circlearrowleft}{\omega}_a \neq -\overset{\circlearrowleft}{\omega}_b}. \tag{E.31}$$

而且，$\overset{\circlearrowleft}{\omega}$ 也不表示单个向量，因为它不满足向量基变换公式$\overset{\circlearrowleft}{\omega}_b \neq P^{-1}.\overset{\circlearrowleft}{\omega}_a$。因此，$\overset{\circlearrowleft}{\omega}$ 不是向量（不具有张量性）：它只是一个矩阵（称为“伪向量”）。

E.4 示例

E.4.1 直线运动

令 $\widetilde{\Phi}: [t_1, t_2] \times Obj \to \mathbb{R}^n$ 为一个 C^1 运动。令 $t_0 \in]t_1, t_2[$ 和 $P_{Obj} \in Obj$。

定义 E.21 P_{Obj} 的运动是直线运动，当且仅当对所有 $t_0, t \in [t_1, t_2]$,

$$\frac{\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t) - \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t_0)}{t-t_0} \parallel \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t_0)。 \tag{E.32}$$

并且，当且仅当对所有 t_0, $t \in [t_1, t_2]$，运动都是直线匀速运动，

$$\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t) = \widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}(t_0) + (t-t_0)\,\widetilde{\Phi}_{P_{Obj}}{}'(t_0), \quad \text{i.e.} \quad p(t) = p(t_0) + (t-t_0)\,\vec{V}^{t_0}(t_0, p(t_0)) \tag{E.33}$$

当 $p(t) = \Phi(t, P_{Obj})$ 时，也就是说，轨迹以恒定速度被 traversed。

E.4.2 圆周运动

设 $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ 为欧几里得基。设 $t_0 \in [t_1, t_2]$。运动 Φ^{t_0} 是圆周运动，当且仅当

$$\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P^{t_0}(t)} = x(t)\vec{E}_1 + y(t)\vec{E}_2, \quad [\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P^{t_0}(t)}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} x(t) = a + R\cos(\theta(t)) \\ y(t) = b + R\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}, \tag{E.34}$$

存在某个 $R > 0$（称为半径）、某个 $a, b \in \mathbb{R}$，以及某个函数 $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。并且 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathcal{O}_C \in \mathbb{R}^{2\widetilde{}}$ 是圆心，$\theta(t)$ 是 t 处的角度。粒子 P_{Obj}（使得 $\Phi(t_0, P_{Obj}) = P$）始终位于圆心为 $\mathcal{O}_C$、半径为 R 的圆上。

Th圆周运动是匀速的，当且仅当，对于所有 t, $\theta''(t) = 0$，也就是说，$\exists \omega_0 \in \mathbb{R}, \forall t \in [t_1, t_2]$, $\theta(t) = \omega_0 \quad t$.

记号:

$$\vec{\varphi}_P^{t_0}(t) = R\cos(\theta(t)\vec{E}_1 + R\sin(\theta(t))\vec{E}_2, \quad \text{so} \quad [\vec{\varphi}_P^{t_0}(t)]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} R\cos(\theta(t)) \\ R\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}. \tag{E.35}$$

因此，圆周运动的拉格朗日速度为

$$\vec{V}_P^{t_0}(t) = (\Phi_t^{t_0})'(t) = (\vec{\varphi}_P^{t_0})'(t), \quad \text{so} \quad [\vec{V}_P^{t_0}(t)]_{|\vec{E}} = R\theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}, \tag{E.36}$$

并且 $\vec{V}_P^{t_0}(t)$ 与 $\vec{\varphi}_P^{t_0}(t)$（半径向量）正交。拉格朗日加速度 s

$$\vec{\Gamma}_P^{t_0}(t) = R\theta''(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} + R(\theta'(t))^2 \begin{pmatrix} -\cos(\theta(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}. \tag{E.37}$$

考虑

$$\vec{e}_r(t) = \frac{\vec{\varphi}_P^{t_0}(t)}{||\vec{\varphi}_P^{t_0}(t)||} = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \vec{e}_\theta(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}, \tag{E.38}$$

因此，$(\vec{e}_r(t)\ \vec{e}_\theta(t))$ 是一个正交归一基。于是:

$$\vec{V}_P^{t_0}(t) = R\theta'(t)\,\vec{e}_\theta(t), \tag{E.39}$$

并且:

$$\vec{\Gamma}_P^{t_0}(t) = -R(\theta'(t))^2\,\vec{e}_r(t) + R\theta''(t)\,\vec{e}_\theta(t). \tag{E.40}$$

例如，在 $\mathbb{R}^3$ 以及由（$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$）给出的“水平”平面内的运动中，垂直线由 $\vec{E}_3$ 给出。这里

$$\vec{V}_P^{t_0}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{\varphi}_P^{t_0}(t), \quad \text{where} \quad \vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}_3 \quad \text{and} \quad \omega(t) = \theta'(t). \tag{E.41}$$

And

$$\vec{\Gamma}^{t_0}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}(t) \wedge \vec{\varphi}_P^{t_0}(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{V}_P^{t_0}(t) \qquad (= R\frac{d\omega}{dt}(t)\,\vec{e}_\theta(t) - \omega^2(t)R\,\vec{e}_r(t)). \tag{E.42}$$

E.4.3 行星的运动（向心加速度）

示例：Obj 例如是太阳系中的一颗行星。

设 $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ 是一个欧几里得基（例如相对于恒星固定，且 $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ 定义黄道面），$(\cdot,\ \cdot)_g$ 是欧几里得相应点积，$||.||$ 是欧几里得相应范数，$\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个原点（例如太阳中心），而 $\mathcal{R}=(\mathcal{O},\ (\vec{e}_i))$。

考虑 $\mathcal{R}$ 中 Obj 的运动 $\widetilde{\Phi}$，参见 (1.5)。设 $t_0\in[t_1,t_1]$，并考虑 $\Phi^{t_0}=$记作Φ 或 $\vec{\varphi}^{t_0}=$记作$\vec{\varphi}$，参见 (3.1)-(3.4)。

定义 E.22 粒子 P_{Obj} 的运动是向心加速度运动，当且仅当该粒子并非静止，并且在任意时刻，其加速度向量 $\vec{A}(t)$ 都指向一个固定点 F（焦点）。

我们将焦点 F 作为参考系的原点，即 $\mathcal{O}:=F$。

因此，对于所有 $t\in[t_1,t_2]$，$\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P\ t}(\ )\parallel\vec{A}_P(t)$，即，

$$\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P(t)}\wedge\vec{A}_P(t)=\vec{0}. \tag{E.43}$$

备注 E.23 直线运动是一种向心加速度运动，但这类运动通常不包括在定义 E.22 中。

∎

例 E.24 太阳系中行星的运动是一种向心加速度运动：以太阳中心为焦点的椭圆运动。

∎

例 E.25 牛顿第二运动定律 $\sum f=m\vec{\gamma}$（伽利略参考系）给出：如果 $\sum f$ 始终指向某个固定点 F，那么该运动就是向心加速度运动。

∎

设 Φ 为向心加速度运动，$\mathcal{O}$ 为焦点，且 $\vec{\varphi}_P(t):=\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P\ t}(\ )$。那么拉格朗日速度和加速度为

$$\vec{V}_P(t)=\frac{d\Phi_P}{dt}(t)=\frac{d\vec{\varphi}_P}{dt}(t),\quad\text{and}\quad\vec{A}_P(t)=\frac{d^2\Phi_P}{dt^2}(t)=\frac{d^2\vec{\varphi}_P}{dt^2}(t), \tag{E.44}$$

且 $\vec{\varphi}_P(t)\wedge\vec{A}_P(t)=\vec{0}$，参见 (E.43)。

定义 E.26 t 处的面积速度是向量

$$\vec{Z}(t)=\frac{1}{2}\vec{\varphi}_P(t)\wedge\vec{V}_P(t). \tag{E.45}$$

命题 E.27 如果 Φ 是向心加速度运动，那么面积速度为常量，即对于任意 t，$\frac{d\vec{Z}}{dt}(t)=\vec{0}$，因此

$$\vec{Z}(t)=\vec{Z}(t_0),\quad\forall t. \tag{E.46}$$

也就是说，位置向量在相等的时间内扫过相等的面积。并且 $\vec{Z}(t_0)=\vec{0}$ 当且仅当 Φ 是直线运动。如果 $\vec{Z}(t_0)\neq\vec{0}$，那么：- $\vec{\varphi}_P(t)$ 和 $\vec{V}_P(t)$ 在任何时间 t都与 $\vec{Z}(t_0)$ 正交；- 粒子 P_{Obj} 的运动发生在一个经过 O且与 $\vec{Z}(t_0)$ 正交的仿射平面内。- $\vec{V}_P(t)$ 永不为零。

证明。(E.45) 和 (E.43) 得出 $2\frac{d\vec{Z}}{dt}(t)=\frac{d\vec{\varphi}_P}{dt}(t)\wedge\vec{V}_P(t)+\vec{\varphi}(t)\wedge\frac{d\vec{V}_P}{dt}(t)=\vec{V}_P(t)\wedge\vec{V}_P(t)+\vec{\varphi}(t)\wedge\vec{A}_P(t)=\vec{0}+\vec{0}$。因此 $\vec{Z}$ 为常数，$\vec{Z}(t)=\vec{Z}(t_0)$ 对所有 t 均成立。于是，若 $\vec{Z}(t_0)\neq\vec{0}$，则对任意 t，$\vec{Z}(t)\neq\vec{0}$，并且

- $\vec{Z}(t)=\frac{1}{2}\vec{\varphi}_P(t)\wedge\vec{V}_P(t)$表明，对于所有 t，$\vec{\varphi}_P(t)$和 $\vec{V}_P(t)$都正交于 $\vec{Z}(t_0)$，因此 $\vec{A}_P(t)$正交于 $\vec{Z}(t_0)$，参见（E.43）。

- 泰勒展开为 $\vec{\varphi}_P(t)=\vec{\varphi}_P(t_0)+\vec{V}_P(t_0)(t-t_0)+\int_{\tau=t_0}^{t}\vec{A}_P(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau$，其中对于所有 τ，$\vec{V}_P(t_0)$和 $\vec{A}_P(\tau)\perp\vec{Z}(t_0)$，因此对于所有 τ，$\vec{\varphi}_P(t)-\vec{\varphi}_P(t_0)\perp\vec{Z}(t_0)$，即对于所有 τ，$\overrightarrow{\mathcal{O}p\ t}(\ )-\overrightarrow{\mathcal{O}P}=\overrightarrow{Pp\ t}(\ )\perp\vec{Z}(t_0)$。因此，$p(t)$ 属于包含 P 且正交于 $\vec{Z}(t_0)$ 的仿射平面，对所有 t 均成立。此外，$\overrightarrow{\mathcal{O}P}=\vec{\varphi}_P(t_0)\perp\vec{Z}(t_0)$，因此 O 属于同一平面。

- $\vec{Z}(t)=\vec{Z}(t_0)\neq\vec{0}$意味着 $\vec{V}_P(t)\neq\vec{0}$对所有 t 都成立，并且 (E.45) 给出：$(\vec{\varphi}_P(t)\ \vec{V}_P(t)\ \vec{Z}(t_0))$ 是一个正向定向的基。由于 $\vec{\varphi}_P$ 和 $\vec{V}$ 连续且不为零，又由于 $\vec{Z}(t_0)\neq\vec{0}$，我们得到：P_{Obj} “绕着 $\vec{Z}(t_0)$ 转动”并保持其方向。

如果 $\vec{Z}(t) = \vec{0}$，那么对所有 t，都有 $\vec{\varphi}_P(t) \parallel \vec{V}_P(t)$，参见 (E.45)，因此 $\vec{V}_P(t) = f(t)\vec{\varphi}_P(t)$，其中 f是某个标量函数。并且 $\vec{V}_P(t) = \vec{\varphi}_P{}'(t)$ 给出 $\vec{\varphi}_P{}'(t) = f(t)\vec{\varphi}_P(t)$，于是 $\vec{\varphi}_P(t) = \vec{\varphi}_P(t_0)e^F(t)$，其中 F是 f的一个原函数，使得 $F(t_0) = 0$，因此 $\vec{\varphi}_P(t) \parallel \vec{\varphi}_P(t_0)$，所以对于所有 t，$\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P\ t}() \parallel \overrightarrow{\mathcal{O}\Phi_P\ t_0}()$：该运动是直线运动。 ∎

解释。（曲线运动。）$\vec{\varphi}_P(t)$ 扫掠的面积，一阶近似下是以 $\vec{\varphi}_P(t)$ 和 $\vec{\varphi}_P(t+\tau)$ 为边的三角形面积（“角扇形”）。因此，当 τ接近 0 时，令

$$\vec{S}_t(\tau) = \frac{1}{2}\vec{\varphi}_P(t) \wedge \vec{\varphi}_P(t+\tau), \quad \text{and} \quad S_t(\tau) = ||\vec{S}_t(\tau)||, \tag{E.47}$$

向量面积和标量面积。令 $\vec{\varphi}_P(t+\tau) = \vec{\varphi}_P(t) + \vec{V}_P(t)\tau + o(\tau)$，得

$$\vec{S}_t(\tau) = \frac{1}{2}\vec{\varphi}_P(t) \wedge (\vec{V}_P(t)\tau + o(\tau)), \tag{E.48}$$

由于 $\vec{S}_t(0) = 0$，我们得到$\frac{\vec{S}_t(\tau)-\vec{S}_(\quad 0}{\tau} = \frac{1}{2}\vec{\varphi}_P)(t) \wedge \vec{V}_P(t) + o(1)$，于是

$$\frac{d\vec{S}_t}{d\tau}(0) = \frac{1}{2}\vec{\varphi}_P(t) \wedge \vec{V}_P(t) = \vec{Z}(t) = \vec{Z}(t_0), \tag{E.49}$$

根据（E.46），因此

$$\frac{d\vec{S}_t}{d\tau}(0) = \frac{d\vec{S}_{t_0}}{d\tau}(0), \qquad \forall t \in [t_0, T], \tag{E.50}$$

也就是说，$\vec{S}_t$ 的变化率是常数。并且利用 $||\vec{S}_t(\Delta\tau)||^2 = (\vec{S}_t(\Delta\tau)\ \vec{S}_t(\Delta\tau))$，我们得到

$$\frac{d||\vec{S}_t||^2}{d\tau}(\Delta\tau) = 2(\frac{d\vec{S}_t}{d\tau}(\Delta\tau), \vec{S}_t(\Delta\tau)), \tag{E.51}$$

因此，由于 $\vec{S}_t(0) = 0$,

$$\frac{d||\vec{S}_t||^2}{d\tau}(0) = 0. \tag{E.52}$$

因此，函数 $t \to ||\vec{S}_t(0)||^2 = S_t(0)^2$ 是常数，从而 $t \to S_t(0)$ 是常数，并且 $\frac{dS_t}{d\tau}(0)$ 是常数。 —

练习 E.28 给出所扫过面积的参数化，并重新进行计算。

答案。设

$$r(t) = ||\vec{\varphi}_P(t)||, \quad \theta(t) = \widehat{p(t)OP} \quad \text{(angle)}, \tag{E.53}$$

then

$$\vec{\varphi}_P(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E.54}$$

Thus

$$\vec{V}_P(t) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos(\theta(t) - r(t))\theta'(t)\sin(\theta(t)) \\ r'(t)\sin(\theta(t) + r(t))\theta'(t)\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E.55}$$

利用（E.45），我们得到

$$\vec{Z}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2(t)\theta'(t) \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad r^2(t)\theta'(t) = r^2(t_0)\theta'(t_0) \quad \text{(constant)}, \tag{E.56}$$

参见（E.46）。因此，所扫过面积的一种参数化为

$$\vec{\mathcal{A}} : \left\{ \begin{array}{rl} [0,1] \times [t_0, T] & \to \mathbb{R}^3 \\ (\rho, t) & \to \vec{\mathcal{A}}(\rho, t) \end{array} \right\}, \qquad \vec{\mathcal{A}}(\rho, t) = \begin{pmatrix} \rho\, r(t)\cos(\theta(t)) \\ \rho\, r(t)\sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E.57}$$

因此，与切向相关联的向量为

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial\rho}(\rho, t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\vec{\mathcal{A}}}{\partial t}(\rho, t) = \begin{pmatrix} \rho r'(t)\cos(\theta(t) - \rho r(t))\theta'(t)\sin(\theta(t)) \\ \rho r'(t)\sin(\theta(t) + \rho r(t))\theta'(t)\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{E.58}$$

因此，向量面积元和标量面积元为

$$d\vec{\sigma} = (\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}) d\rho dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho r^2 \theta' \, d\rho dt \end{pmatrix}, \qquad d\sigma = \rho r^2 \theta' \, d\rho d\theta. \tag{E.59}$$

因此， t_0 与 t 之间的面积为

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t_0) + \int_{\rho=0}^{1} \int_{\tau=t_0}^{t} \rho r^2(\tau) \theta'(\tau) \, d\rho d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau=t_0}^{t} r(\tau)^2 \theta'(\tau) \, d\tau. \tag{E.60}$$

因此

$$\mathcal{A}'(t) = r(t)^2 \theta'(t) = r(t_0)^2 \theta'(t_0) \quad (= \text{constant} = ||\vec{Z}(t_0)||), \tag{E.61}$$

参见 (E.56)。 ∎

练习 E.29 证明比内公式（非直线中心运动）：

$$V_P(t)^2 = Z_0^2 \Big(\frac{1}{r^2} + (\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta})^2 \Big)(t), \qquad \vec{\Gamma}_P(t) = -\frac{Z_0^2}{r^2} \Big(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \Big)(t) \, \vec{e}_r(t), \tag{E.62}$$

分别用于能量和加速度。

答案。命题 E.27 表明 Φ 是平面运动。由 (E.53) 和 $\vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$，我们有 $\vec{\varphi}(t) = r(t)\vec{e}_r(t)$（在平面内）。令 $\vec{e}_\theta(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$，则

$$\vec{V}(t) = \frac{dr}{dt}(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t) = r'(t)\vec{e}_r(t) + r(t)\theta'(t)\vec{e}_\theta(t).$$

而 $\vec{e}_r(t) \perp \vec{e}_\theta(t)$ 给出

$$V^2(t) = (r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2.$$

由于对于所有 t （非直线中心运动）， $\theta'(t) \neq 0$ 成立。令 $s(\theta(t)) = r(t)$。假设 θ 是 C^1，于是 $\theta' > 0$ 或 $\theta' < 0$，并且 $\theta : t \to \theta(t)$ 定义了一个变量替换。并且

$$r'(t) = s'(\theta(t))\theta'(t).$$

并且 (E.61) 和 $\theta'(t) = \frac{Z_0}{r^2 \, t \, ()}$ 给出

$$V^2(t(\theta)) = (s'(\theta))^2 \frac{Z_0^2}{r^4(t)} + r^2(t)\frac{Z_0^2}{r^4(t)} = Z_0^2 (\frac{(s'(\theta))^2}{s^4(\theta)} + \frac{1}{s^2(\theta)}) = Z_0^2 [\Big(\frac{d\frac{1}{s}}{d\theta}(\theta) \Big)^2 + \frac{1}{s^2(\theta)}].$$

因此， $r(t) = s(\theta)$ 和 $\frac{dr}{d\theta} := \frac{ds}{d\theta}$ 给出了第一比内公式。然后

$$\vec{\Gamma}(t) = r''(t)\vec{e}_r(t) + r'(t)\frac{d\vec{e}_r}{dt}(t) + (r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t))\vec{e}_\theta(t) + r(t)\theta'(t)\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t),$$

结合 $\frac{d\vec{e}_r}{dt} \parallel \vec{e}_\theta$、 $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}(t) = -\theta'(t)\vec{e}_r(t)$ 以及 $\vec{e}_\theta \perp \vec{\Gamma}$ （中心运动），我们得到

$$\vec{\Gamma}(t) = (r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2)\vec{e}_r(t).$$

And

$$r'(t) = s'(\theta)\theta'(t) = s'(\theta)\frac{Z_0}{r^2(t)} = Z_0 \frac{s'(\theta)}{s^2(\theta)} = -Z_0 \frac{d\frac{1}{s}}{d\theta}(\theta),$$

thus

$$r''(t) = -Z_0 \frac{d^2 \frac{1}{s}}{d\theta^2}(\theta) \, \theta'(t) = -\frac{Z_0^2}{r^2(t)} \frac{d^2 \frac{1}{s}}{d\theta^2}(\theta),$$

这就是第二比内公式。 ∎

F 里斯表示定理

F.1 里斯表示定理

框架：$(E,(\cdot,\cdot)_g)$ 是希尔伯特空间，即 E 是配备了内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 的向量空间，并且由 $||\vec{v}||_g := \sqrt{(\vec{v},\vec{v})_g}$ 定义的相应范数使 $(E,||.||_g)$ 成为完备空间。而 $E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ 是 E 上线性连续形式的空间（线性"测量工具"的空间），并配备范数 $||\ell||_{E^*} := \sup_{x||_g=1} |\ell.\vec{x}| < \infty$。

- 我们有一个简单的表述：

$$\forall \vec{v} \in E \text{ （向量）}, \quad \exists!\ v_g \in E^* \text{ （线性连续形式）使得：} v_g.\vec{x} = (\vec{v},\ \vec{x})_g, \quad \forall \vec{x} \in E, \tag{F.1}$$

以及 $||v_g||_{E^*} = ||\vec{v}||_g$。（有限维中的常用记号：$v_g.\vec{x} = \vec{v} \bullet_g \vec{x}$，或者简单地记作 $v.\vec{x} = \vec{v} \bullet \vec{x}$，如果选定的 $(\cdot,\cdot)_g$ 对所有观察者都施加了这一条件。

）确实如此：定义 v_g： $E \to \mathbb{R}$，使得 $v_g(\vec{x}) = (\vec{v},\vec{x})_g$ 对所有 $\vec{x} \in E$都成立； v_g 的定义域是 E，且v_g 显然是线性的；由柯西–施瓦茨不等式可得 $|v_g(\vec{x})| = |(\vec{v},\vec{x})_g| \leq ||\vec{v}||_g\,||\vec{x}||_g$ 对所有$\vec{x} \in E$都成立，因此 $||v_g||_{E^*} \leq ||\vec{v}||_g < \infty$，故 v_g 是连续的；并且 $|v_g(\vec{v})| = |(\vec{v},\vec{v})_g| = ||\vec{v}||_g\,||\vec{v}||_g$，因此$||v_g||_{E^*} \geq ||\vec{v}||_g$，故 $||v_g||_{E^*} = ||\vec{v}||_g$。

- 里斯表示定理讨论的是逆命题：如果你选择一个内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$在 E（例如英语或法语）中，那么就可以用一个向量 $\vec{\ell}_g \in E$来表示"测量工具" $\ell \in E^*$：

定理 m F.1（里斯表示定理与定义） $(E,\ (\cdot,\ \cdot)_g)$ 为希尔伯特空间，

$$\forall \ell \in E^* \textit{ (linear continuous form)},\ \exists! \vec{\ell}_g \in E \textit{ (vector)} \quad s.t. \quad \ell.\vec{x} = (\vec{\ell}_g,\vec{x})_g,\ \forall \vec{x} \in E, \tag{F.2}$$

且 $||\vec{\ell}_g||_g = ||\ell||_{E^*}$。*And* $\vec{\ell}_g$ 称为 ℓ 的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示向量（取决于 g）。
（有限维中的通常记号：$v_g.\vec{x} = \vec{v} \bullet_g \vec{x}$，或者在所有观察者都采用某个 $(\cdot,\cdot)_g$ 时，简单记作 $v.\vec{x} = \vec{v} \bullet \vec{x}$。）

证明。有限维情形很简单：取一组基 $(\vec{e}_i)$，若 $[\ell]_{|\vec{e}} = (\ \ell_1\ \ \ldots\ \ \ell_n\ )$（由于 ℓ是线性形式，因此为行矩阵），则由 (F.2) 得到 $[\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}} = [\vec{\ell}_g]_{\vec{e}}^T.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}}$，从而 $[\vec{\ell}_g]_{\vec{e}} = [g]_{|\vec{e}}^{-1}.[\ell]_{|\vec{e}}^T$（列矩阵），因此 $\vec{\ell}_g$。

一般情形（例如在 $E = L^2(\Omega)$ 和有限元方法中）：如果 $\ell = 0$，那么 $\vec{\ell}_g = \vec{0}$（平凡）。设 $\ell \neq 0$：因此 $\text{Ker}\ell = \ell^{-1}(\{0\}) \neq \{\vec{0}\}$（核）。如果 $\dim E = 1$，则它是平凡的（习题）。设 $\dim\ E \geq 2$。由于 ℓ是连续的，其核 $\text{Ker}\ell = \ell^{-1}(\{0\})$ 在 E 中是闭的。因此，如果 $\vec{x} \in E$，那么其（$\cdot,\ \cdot$）$_g$- 正交投影 $\vec{x}_0 \in \text{Ker}\ell$ 到 $\text{Ker}\ell$ 上存在、唯一，并且为： $\forall \vec{y}_0 \in \text{Ker}\ell,\ \ (\vec{x}-\vec{x}_0,\ \vec{y}_0)_{\ g} = 0$.（所以 $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp_g \text{Ker}\ell$）。取一个 $\vec{x} \notin \text{Ker}\ell$（这是可能的，因为 $\ell \neq 0$），并令 $\vec{n} := \frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{||\vec{x}-\vec{x}_0||_g}$；因此 $\vec{n}$ 是一个相对于 $\text{Ker}\ell$ 的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-标准正交向量，并且$(\text{Ker}\ell)^\perp = \text{Vect}\{\vec{n}\}$，因为 $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp = 1$（在有限维情形下参见维数公式，该公式指出，线性映射定义域的维数等于其值域维数与核的维数之和；在无限维情形下参见下一道习题 F.2）。并且 $E = \text{Ker}\ell \oplus (\text{Ker}\ell)^\perp$，因为这两个向量空间都是闭的（希尔伯特空间中的正交补总是闭的）。因此，如果 $\vec{x} \in E$，那么 $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{n} \in \text{Ker}\ell \oplus (\text{Ker}\ell)^\perp$；因此（$\vec{x},\ \vec{n}$）$_g = \lambda$，且 $\ell(\vec{x}) = 0 + \lambda\ell(\vec{n}) = (\vec{x},\ \vec{n})_g\ell(\vec{n}) = (\vec{x},\ \ell(\vec{n})\vec{n}$ $(\cdot,\ \cdot)_g$的双线性性；因此 $\vec{\ell}_g := \ell(\vec{n})\vec{n}$ 满足（F.2）。如果 $\vec{\ell}_{g1}$ 且 $\vec{\ell}_{g2}$ 满足（F.2），那么对于所有 $\vec{x} \in E$ 都有（$\vec{\ell}_{g1} - \vec{\ell}_{g2},\ \vec{x}$）$_g = 0$，从而 $\vec{\ell}_{g1} - \vec{\ell}_{g2} = 0$。因此 $\vec{\ell}_g$ 是唯一的。

An $\vec{\ }$ $\vec{\ }$d 柯西–施瓦茨定理给出 $||\ell||_{E^*} := \sup_{||\vec{x}||_g=1} |\ell(\vec{x})| = \sup_{||\vec{x}||_g=1} |(\ell_g,\ \vec{x})_g| = ||\ell_g|\ \ |_g$.

$\vec{R}_g$是巴拿赫空间之间的同构：由于 $(\vec{R}_g(\ell+\lambda m)\ \vec{x})_g = (\ell+\lambda m).\vec{x} = \ell.\vec{x} + \lambda m.\vec{x} = (\vec{R}_g(\ell)\ \vec{x})_g + \lambda(\ \vec{R}_g(m)\ \vec{x})_g = (\ \vec{R}_g(\ell) + \lambda\vec{R}_g(m)\ \vec{x})_g$对所有 $\vec{x}$均成立，因此具有线性性；由 (F.1) 和 (F.2) 可知它是双射，且范数保持不变，因为 $||\vec{\ell}_g||_g = ||\ell||_{E^*}$。 ∎

练习 F.2 证明：如果 $\ell \in E^* - \{0\}$，那么 $\dim(\text{核}\ell)^\perp = 1\ (= \dim(\text{Im}(\ell)) = \dim\mathbb{R})$。
答案。考虑限制映射 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}$： $\left\{\begin{matrix}(\text{Ker}\ell)^\perp & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \to & \ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}.\vec{x} = \ell.\vec{x}\end{matrix}\right\}$。它是线性的（因为 ℓ 是），因此是单射：事实上，

它是满射，因为 $\ell \neq 0$；它也是单射，因为若 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{x}) = 0 = \ell(\vec{x})$，则 $\vec{x} \in (\text{Ker}\ell)^\perp \bigcap \text{Ker}\ell = \{\vec{0}\}$，因此 $\vec{x} = 0$。所以 $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp \leq \dim(\text{Im}(\ell)) = 1$：事实上，若 $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in (\text{Ker}\ell)^\perp - \{\vec{0}\}$，则 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{z}_1) \in \mathbb{R}$ 且 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{z}_2) \in \mathbb{R}$，因此存在 $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{z}_2) = \lambda\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{z}_1)$，从而 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}(\vec{z}_2 - \lambda\vec{z}_1) = 0$，因此 $\vec{z}_2 - \lambda\vec{z}_1 = \vec{0}$，因为 $\ell_{|\text{Ker}\ell^\perp}$ 是单射。并且 $\vec{n} \in (\text{Ker}\ell)^\perp$ 给出 $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp \geq 1$（如上证明）。因此 $\dim(\text{Ker}\ell)^\perp = 1 = \text{Vect}\{\vec{n}\}$。 ∎

F.2 黎斯表示算子

里斯表示定理 F.1 给出 $(\cdot,\ \cdot)_g$-Riesz 表示算子

$$\vec{R}_g : \begin{cases} E^* \ \to E \\ \ell \ \to \vec{R}_g(\ell) := \vec{\ell}_g, \quad \text{i.e.} \quad (\vec{R}_g(\ell), \vec{v})_g = \ell.\vec{v}, \ \ \forall \vec{v} \in E. \end{cases} \tag{F.3}$$

因此，借助工具 $(\cdot,\ \cdot)_g$，$\vec{R}_g$ 将一个「协变 ℓ」变换为一个「逆变 $\vec{\ell}_g$」。

注意（重要）：$\vec{R}_g$ 是巴拿赫空间 $(E,\ ||.||_g)$ 与 $(E^*,\ ||.||_{E^*})$ 之间的同构，但 $\vec{R}_g$ 并非典范的，因为它的定义需要借助人为工具（由某位观察者选定的内积）。（同构 $E \leftrightarrow E^*$ 永远不可能是典范的，参见 § T.2。）

由此，借助 $\mathcal{G}$ 中内积的集合 E，我们定义了黎斯表示映射

$$\vec{R} : \begin{cases} \mathcal{G} \times E^* \ \to E \\ (g, \ell) \ \to \vec{R}(g, \ell) := \vec{\ell}_g = \vec{R}_g(\ell) = \vec{\ell}(g). \end{cases} \tag{F.4}$$

So $\vec{R}$ 有 两个输入：观察者为第一个槽位所作的选择 $(\cdot,\ \cdot)_g$，第二个槽位为线性形式 t.

F.3 用基进行量化

这里 E 是有限维的，$\dim E = n$，$\ell \in E^*$（线性形式），$(\cdot,\ \cdot)_g$ 是内积，$(\vec{e}_i)$ 是一个基，(π_{ei}) 是对偶基（经典记号）。令

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j), \quad \ell = \sum_{i=1}^n \ell_i \pi_{ei}, \quad \vec{\ell}_g = \sum_{i=1}^n (\vec{\ell}_g)_i \vec{e}_i, \quad \vec{R}_g.\pi_{ej} = \sum_{i=1}^n R_{ij}\vec{e}_i, \tag{F.5}$$

即 $[g]_{|\vec{e}} = [g_{ij}]$，$[\ell]_{|\pi_e} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix}$（行矩阵），$[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} (\vec{\ell}_g)^{\ 1} \\ \dots \\ \\ (\vec{\ell}_g)^{\ n} \end{pmatrix}$（列矩阵），

$[\vec{R}_g]_{\pi_e,\ \vec{e}} = [R_{ij}]$。（对偶记号：$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$，$\vec{\ell}_g = \sum_{i=1}^n \ell^i_g \vec{e}_i$，$\vec{R}_g.e^j = \sum_{i=1}^n R^{ij}\vec{e}_i$，$[\vec{R}_g]_{e,\ \vec{e}} = [R^{ij}]$。）

命题 F.3

$$\boxed{[\vec{\ell}_g] = [g]^{-1}.[\ell]^T} \quad \textit{and} \quad \boxed{[\vec{R}_g] = [g]^{-1}}, \quad \textit{i.e.} \quad (\vec{\ell}_g)_i = \sum_{j=1}^n ([g]^{-1})_{ij}(\ell)_j = \sum_{j=1}^n (\vec{R}_g)_{ij}(\ell)_j. \tag{F.6}$$

完整矩阵记法：$[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}} = ([g]_{|\vec{e}})^{-1}.([\ell]_{|\pi_e})^T$，以及 $[\vec{R}_g]_{|\pi_e,\vec{e}} = ([g]_{|\vec{e}})^{-1}$。

用对偶记号表示由 $(\cdot,\cdot)_g$ 引起的变差变化（ℓ 的下指标，ℓ 的上指标为 $\vec{\ell}_g$）：

$$\ell^i_g = \sum_{j=1}^n R^{ij}\ell_j, \tag{F.7}$$

即 $\ell^i_g = \sum_{j=1}^n g^{ij}\ell_j$ 当 $([g]^{-1})^{ij} =$记为 $[g^{ij}]$ 时。

（特别是，如果 $(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，则 $[\vec{R}_g] = [g]^{-1} = I$ 和 $\ell^i_g = \ell_i$。）

证明。 (F.2) 给出 $[\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}} = [\vec{\ell}_g]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{x}]_{|\vec{e}}$ 对所有 $\vec{x}$ 均成立，因此 $[\ell]_{|\vec{e}} = [\vec{\ell}_g]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}$，从而 $[g]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}} = [\ell]^T_{|\vec{e}}$（因为 $[g]_{|\vec{e}} = [g]^T_{|\vec{e}}$），故 $[\vec{\ell}_g] = [g]^{-1}.[\ell]^T$。

并且 $\vec{R}_g.\ell =^{(F.3)} \vec{\ell}_g$ 给出 $\sum_{j=1}^n (\ell)_j \vec{R}_g.\pi_j = \sum_{i=1}^n (\vec{\ell}_g)_i \vec{e}_i$，因此 $\sum_{i,\ j=1}^n (\ell)_j R_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{\ell}_g)_i \vec{e}_i$，从而 $\sum_{j=1}^n R_{ij}(\ell)_j =(\vec{\ell}_g)_i$ 对所有 i 均成立，因此 $[\vec{R}_g].[\ell]^T = [\vec{\ell}_g]$。故 $[\vec{R}_g] = [g]^{-1}$。 ∎

备注 F.4 如果指定了一种内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$（例如，基于欧几里得英尺），并使用对偶记号，那么 $\vec{\ell}_g$ 的一种常用记法是 $\ell^\sharp$，因为 $\vec{\ell}_g = \vec{R}_g(\ell) = \sum_{i=1}^n \ell^i \vec{e}_i$ 中 ℓ^i 带有上标：指标 i 已通过 $\vec{R}_g$ 升高。因此，（F.2）和（F.6）可写为（等距框架）

$$\ell.\vec{x} = \ell^\sharp \bullet \vec{x} \quad \text{and} \quad [\ell^\sharp]_{|\vec{e}} = [g]^{-1}_{|\vec{e}}.[\ell]^T_{|\vec{e}}. \tag{F.8}$$

我们不会使用这种记号（我们讨论的是客观性）。 ∎

F.4 里斯表示向量变换，以及欧几里得情形

对于一个线性形式 $\ell \in E^*$，两位观察者分别采用各自的内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_h$，得到两个里斯表示向量 $\vec{\ell}_g = \vec{R}_g(\ell)$ 和 $\vec{\ell}_h = \vec{R}_h(\ell)$，其表达式如下，参见（F.2）：

$$\forall \vec{x} \in E, \quad (\vec{\ell}_g, \vec{x})_g = \ell.\vec{x} = (\vec{\ell}_h, \vec{x})_h. \tag{F.9}$$

命题 F.5 对于 E 中的任意一组基$(\vec{e}_i)$，我们有表示向量变换公式：

$$[h]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_h]_{|\vec{e}} = [g]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}}, \quad i.e. \quad [\vec{\ell}_h]_{|\vec{e}} = [h]^{-1}_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}}. \tag{F.10}$$

特别地（对于欧几里得情形），当 $\lambda > 0$ 时：

$$If\ (\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h \quad then \quad \vec{\ell}_h = \lambda^2\vec{\ell}_g. \tag{F.11}$$

反过来，如果对于所有线性形式 $\ell \in E^*$，都有 $\vec{\ell}_h = \lambda^2\vec{\ell}_g$，那么$(\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h$。

因此，线性形式 ℓ 不能被等同于某个里斯表示向量（究竟是哪一个：ℓ_g？ ℓ_h？）；换句话说，里斯表示向量 $\vec{R}_g(\ell)$ 不是客观的，也不是线性形式 ℓ的内禀属性。

注意：*(F.10)-(F.11)* 是“向量变换公式”（一个线性形式相对于两个内积给出两个向量）；它不是“基变换公式”（针对一个向量及其两组分量）。

证明。（F.9) 给出对所有 $\vec{x}$，$[\vec{x}]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}} = [\vec{x}]^T_{|\vec{e}}.[h]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_h]_{|\vec{e}}$，因此 $[g]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_g]_{|\vec{e}} = [h]_{|\vec{e}}.[\vec{\ell}_h]_{|\vec{e}}$，即 (F.10) .

特别地，$\lambda^2(\cdot,\cdot)_h = (\cdot,\cdot)_g$对所有 $\vec{x}$ 都给出 $\lambda^2(\vec{\ell}_g, \vec{x})_h = (\vec{\ell}_g, \vec{x})_g =^{(F.9)} (\vec{\ell}_h, \vec{x})_h$，因此 $\lambda^2\vec{\ell}_g = \vec{\ell}_h$。

逆命题：对所有 ℓ，$\lambda^2\vec{\ell}_g = \vec{\ell}_h$ 给出 $\lambda^2(\vec{\ell}_g, \vec{x})_h = (\vec{\ell}_h, \vec{x})_h \overset{(F.9)}{=} (\vec{\ell}_g, \vec{x})_g$；对所有 $\vec{x}$ 且对所有 ℓ，根据同构 $\vec{R}_g$：$E^* \to E$（参见 (F.3)），因此对所有 $\vec{\ell}_g$，$\lambda^2(\cdot,\cdot)_h = (\cdot,\cdot)_g$。 ∎

示例 F.6 如果 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_h$ 是分别以英尺和米为单位构造的欧几里得点积，那么根据 (F.9),

$$(\cdot,\cdot)_g = \lambda^2(\cdot,\cdot)_h \quad \Longrightarrow \quad \vec{\ell}_h = \lambda^2\vec{\ell}_g, \quad \text{with} \quad \lambda^2 > 10: \tag{F.12}$$

$\vec{\ell}_g$（英语）和 $\vec{\ell}_h$（法语）截然不同！里斯表示向量取决于具体情况，当然不是“典范的”（你可能会在书籍中看到这个词，而那些书里.....什么都没有定义.....）。

例如，在航空领域：如果你确实想使用里斯表示向量来表示一个 $\ell \in \mathbb{R}^{n*}$，那么了解所使用的是哪一种欧几里得点积至关重要，另请参阅备注 A.14（火星气候轨道器坠毁事故）。请记住：英尺是航空领域的国际航空高度单位。 ∎

示例 F.7 如果 $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R})$ 和 $p \in \mathbb{R}^n$，则 f 在 p 处的微分是线性形式 $df(p) \in \vec{\mathbb{R}^{n*}}$，其定义为：对所有 $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$,

$$df(p).\vec{w} := \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h\vec{w}) - f(p)}{h} \quad \text{(definition independent of any inner dot product)}, \tag{F.13}$$

见（S.5）。如果可以选择一个内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$，那么梯度 $\vec{\text{grad}}_g f(p)$ 就是 $df(p)$ 的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示向量：

$$\vec{\text{grad}}_g f(p) := \vec{R}_g(df(p)), \quad \text{i.e.} \quad df(p).\vec{w} = \vec{\text{grad}}_g f(p) \bullet_g \vec{w}, \ \forall \vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}^n. \tag{F.14}$$

而（F.12）给出

$$\vec{\text{grad}}_h f(p) = \lambda^2 \vec{\text{grad}}_g f(p) \quad \text{with} \quad \lambda^2 > 10 \ \text{(English vs French)}: \tag{F.15}$$

梯度非常依赖观察者（梯度是主观的，微分是客观的）。 ∎

备注 F.8 “梯度”依赖观察者；在一维情形下，我们已经看到通常导数也有这种观察者依赖性 $f:\ x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$；问题：$f'(x) = 3$ 是什么意思？

答案。11- 对一位观察者而言，它表示 $f'(x) = \lim_{h\to 0} {}^{f(x+h)-f(x)}\!/_{h}$ .....但是.....在出发空间中，这位观察者选择了一个长度为 1 的基向量 $\vec{a}$（例如长度为 1 英尺），并将其称为 1；因此，不使用滥用记号时，他的导数 $f'(x)$ 实际上是 $f'_{\vec{a}}(x) = \lim_{h\to 0} {}^{f(x+h\vec{a})-f(x)}\!/_{h}$。

12- 对另一位观察者而言，它表示 $f'(x) = \lim_{h\to 0} {}^{f_{(x+h)-f(x)\ h}}$ .....但是.....在出发空间中，这位观察者选择了一个长度为 1 的基向量 b （例如长度为 1 米），并将其称为 1；因此，不使用滥用记号时，他的导数 $f'(x)$ 实际上是 $f'_b(x) = \lim_{h\to 0} {}^{f_{(x+h\vec{b})-f(x)\ h}}$ 。

13- 两位观察者使用相同的公式 $f'(x) = \lim_{h\to 0} {}^{f_{(x+h)-f(x)\ h}}$ ，却得出不同的结果！确实，如果 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$，那么 $= \lim_{h\to 0} {}^{f}\underline{(x + hb) - f(x)\ h} = \lim_{h\to 0} {}^{f}\underline{(x + h\lambda\vec{a}) - f(x)}_{h} = \lambda\lim_{h\to 0} {}^{f}\underline{(x + (h\lambda)\vec{a}) - f(x)}\ (h\lambda) = \lambda\lim_{k\to 0} {}^{f}(x + k\vec{a}) - f(x)\ k$因此

$$f'_b(x) = \lambda f'_a(x), \quad \text{with} \quad \lambda \simeq 3.28 \tag{F.16}$$

使用英尺和米.....结果大不相同！（事实上， $f'(x)$ = 对边 邻边 取决于邻边的长度.....）

备注 F.9 我们强调梯度的主观性：

20- f在点 x沿向量 $\vec{w} \in \vec{\mathbb{R}}$的微分为 $df(x).\vec{w} = \lim_{h\to 0} {}^{f_{(x+h\vec{w})-f(x)\,h}}$，且是客观的：所有观察者都使用同一个公式。

21- 一位观察者选择一个欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$（例如基于英尺），然后用其 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示向量 $\vec{R}_g(df(x)) =$记作 $\vec{\text{grad}}_g f(x)$ 来表示 $df(x)$，称为相对于 $(\cdot,\cdot)_g$的 f在 x处的梯度。

22- 另一位观察者选择一个欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_h$ （例如基于米），然后用其 $(\cdot,\cdot)_h$-里斯表示向量 $\vec{R}_h(df(x)) =$记作 $\vec{\text{grad}}_h f(x)$ 来表示$df(x)$，称为相对于 $(\cdot,\cdot)_h$的 f在 x处的梯度。

23- 两位观察者使用相同的公式 $df(x).\vec{w} = \lim_{h\to 0} {}^{f_{(x+h\vec{w})-f(x)\,h}}$，却得出不同的结果：$\vec{\text{grad}}_h f = \lambda^2\ \vec{\text{grad}}_g f$，因为他们使用了不同的测量工具（一种以英尺为基础，另一种以米为基础）。

24- 回顾：梯度取决于所选的欧几里得单位长度。

练习 F.10 在 (F.16) 中，我们有 $f'_b(x) = \lambda f'_a(x)$。而一维梯度给出 $\text{grad}_b f(x) = \lambda^2 \text{grad}_a f(x)$。为什么?

答案。要定义梯度 $\text{grad}_a f$，我们需要由 $\vec{\mathbb{R}}$ 中的一组基 $(\vec{a})$ 构造出的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_a$；而要定义 f'_a，我们需要一个长度单位。详情：$(\vec{a})$ 和 $(\vec{b})$ 是 $\vec{\mathbb{R}}$ 中的两组基，且 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$，因此 $(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2(\cdot,\cdot)_b$（因为 $1 = (\vec{a},\vec{a})_a = (\vec{b},\vec{b})_b = (\lambda\vec{a},\lambda\vec{a})_b = \lambda^2(\vec{a},\vec{a})_b$ 给出 $(\vec{a},\vec{a})_a = \lambda^2 (\vec{a},\vec{a})_b$，且 $(\vec{a})$ 是一组基）。并且我们有 $f'_b(x\ x\ x\ a\ x\ b = \lambda\lambda^2\ x\ \lambda^2\ x\ \vec{b}\ x = \lambda^2\ x) =^{(F.16)} \lambda f'_a()$，即 $df().\vec{b} = \lambda df().\vec{a}$，因此 $(\text{grad} f_b()\ \vec{b})_b = \lambda(\text{grad} f_a()\ \vec{a})$，因此 $(\text{grad} f_b()\ \vec{b})\ (\text{grad} f_a()\ \frac{\vec{b}}{\lambda})_b = (\text{grad} f_a())_b$，因此 $\text{grad} f_b()\ \text{grad} f_a()$。

练习 F.11 1- 证明 $(\cdot\ \ \cdot)_g = \lambda^2(\cdot\ \ \cdot)_h$ 给出 $||\vec{\ell}_h||_g = \lambda||\vec{\ell}_h||_h$。 2- 这是否与给出 $||\ell||_{\mathbb{R}^{n*}} = ||\vec{\ell}_g||_{\mathbb{R}^n}$的里斯表示定理相矛盾?

答案。1- $\vec{\ell}_h =^{(F.11)} \lambda^2\vec{\ell}_g$ 给出 $||\vec{\ell}_h||_h = \lambda^2||\vec{\ell}_g||_h = \lambda||\vec{\ell}_g||_g$，因为 $||.||_h = \lambda||.||_g$。

2- 不矛盾，因为 $||\ell||_{\mathbb{R}^{n*}} := \sup_{||\vec{x}||_{\mathbb{R}^n}=1} |\ell.\vec{x}|$ 取决于所选的范数 $||.||_{\mathbb{R}^n}$；这里 $||.||_{\mathbb{R}^n}$ 要么是 $||.||_g$，要么是 $||.||_h$。因此，如果你使用该范数来写 $||\ell||_{\mathbb{R}^{n*}} = ||\ell||_{g*}$ $||.||_g$ $||\ell||_{h*} = \sup_{\vec{v}\in\vec{\mathbb{R}}^n} \frac{|\ell.\vec{v}|}{||\vec{v}||_h} = \sup_{\vec{v}\in\vec{\mathbb{R}}^n} \frac{|\ell.\vec{v}|}{\frac{1}{\lambda}||\vec{v}||_g} =$请注意，那么 $\overline{\lambda}\ \overline{\sup}\ \sup_{\vec{v}\in\vec{\mathbb{R}}^n} \frac{|\ell.\vec{v}|}{||\vec{v}||_g} = \lambda||\ell||_{g*}$。

F.5 里斯表示向量是逆变的

$\vec{\ell}_g$ 是 E 中的一个向量，参见 (F.2)，因此它是逆变的。为确信这一点:

练习 F.12 检查:

$$[\vec{\ell}_g]_{|new} = P^{-1}.[\vec{\ell}_g]_{|old} \quad \text{(contravariance formula)}. \tag{F.17}$$

答案。考虑 E 中的两个基 $(\vec{e}_{old,\ i})$ 和 $(\vec{e}_{new,\ i})$。根据基变换公式 $[\vec{x}]_{|new} = P^{-1}.[\vec{x}]_{|old}$和 $[g]_{|new} = P^T.[g]_{|old}.P$，由 (F.2) 得（结合 (A.94)），对所有 $\vec{x}$，

$$\begin{aligned} [\vec{x}]^T_{|old}.[g]_{|old}.[\vec{\ell}_g]_{|old} = \ell.\vec{x} &= [\vec{x}]^T_{|new}.[g]_{|new}.[\vec{\ell}_g]_{|new} \\ &= ([\vec{x}]^T_{|old}.P^{-T}).(P^T.[g]_{|old}.P).[\vec{\ell}_g]_{|new} = [\vec{x}]^T_{|old}.[g]_{|old}.(P.[\vec{\ell}_g]_{|new}), \end{aligned} \tag{F.18}$$

t因为 $[g]$ 可逆（内积是正定的），因此 (F.17).

备注 F.13 • 请记住：表示向量 ℓ_g 并非线性形式 ℓ 的内禀属性，因为它取决于一个（$\cdot$，$\cdot$）（取决于观察者：英尺? 米?）。提醒： E 与 E^*之间不存在自然典范同构，也就是说，无法将线性形式与向量等同起来，参见 § T.2。

• $\vec{\ell_g}$ 与推前的使用不兼容，参见 § 7.2。
• $\vec{\ell_g}$ 与李导数的使用不兼容，参见 (9.51)。

F.6 什么是向量，与$(\cdot,\cdot)_g$-向量有何区别?

1- 最初，向量是 $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ 中用于表示“物质对象”的双点向量。举例来说，儿童的身高可以用墙上的一条竖直双点向量 $\vec{x}$ 来表示，它从地面延伸到一条铅笔画出的线。向量 $\vec{x}$ 是客观的：任何观察者都会使用同一个向量来测量儿童的身高.....然后使用“自己的主观单位”（英尺、米.....）给出数值。

2- 随后（19世纪中叶），向量空间的概念被引入：它是一个四元组 $(E,+,K,.)$，其中 $+$ 是内运算，$(E,+)$ 是一个群， K 是一个域，. 是 E 上的外运算（称为数乘），并且与 $+$ 兼容（参见任意一本数学教材）。

随后引入了（向量空间中的）标量内点积概念。

3- 然后我们可以得到非“材料”向量（“主观构造的向量”）。例如：从通常的双点向量空间 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 开始，再考虑它的对偶空间（$\mathbb{R}^{n*}$、$+$、$\mathbb{R}$、。） =记作 $\mathbb{R}^{n*}$。接着，对于给定的$\ell\in\mathbb{R}^{n*}$ （给定的测量装置），考虑两位观察者：一位英国观察者，他用英尺构造欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$；另一位法国观察者，他用米构造欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_h$。这些观察者各自构造了人为的黎斯表示向量 $\vec{\ell}_g=\vec{R}_g(\ell)\in\vec{\mathbb{R}}^n$ 和 $\vec{\ell}_h=\vec{R}_h(\ell)$，参见（F.12）；他们指出 $\ell_g\neq\ell_h$：这些构造非常主观。

4- 接着，在微分几何中，向量 $\vec{v}$ 被重新定义为“切向量”，这意味着存在一条 C^1 曲线 c：$s\in[a,b]\to c(s)\in E$，使得 $\vec{v}$ 在 $p=c(s)\in\text{Im}(c)$处由 $\vec{v}(p):=\vec{c}'(s)$定义（因此，向量是向量场的一部分，此处定义在 c的值域上）。然后证明， $\vec{v}$ 等价于沿 $\vec{v}$ 方向的 $\frac{\partial}{\partial\vec{v}}=$ 方向导数（ E 与 E^{**}之间的自然典范同构）。关于向量的其他等价定义，参见 Abraham–Marsden [1]。

F.7 一个基的“$(\cdot,\cdot)_g$-对偶向量基”（及警告）

框架： E 是一个有限维向量空间，维数为 $\dim E=n$ （例如 $E=\mathbb{R}^3$）。一位观察者选择一个内积 $(\cdot,\cdot)_g$ （例如，在 $\mathbb{R}^3$ 中，英尺制欧几里得内积）。因此，所得结果具有主观性。而且（$\vec{e}_i$）是 E 中的某个基。

F.7.1 一个基及其关联的众多“向量对偶基”

定义 F.14 基 $(\vec{e}_i)$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-对偶向量基（或 $(\cdot,\cdot)_g$-向量对偶基，或 $(\cdot,\cdot)_g$-对偶基）是 E 中由下式定义的基 $(\vec{e}_{ig})$

$$\forall j=1,...,n,\quad (\vec{e}_{ig},\vec{e}_j)_g=\delta_{ij},\quad \text{i.e.}\quad \boxed{\vec{e}_{ig}\bullet_g\vec{e}_j=\delta_{ij}}. \tag{F.19}$$

注意：向量对偶基并不唯一：它取决于所选的内积，参见例如 (F.22)。

注意：请留意记号： $\vec{e}_{ig}$ 是一个逆变向量（$\vec{e}_{ig}\in E$），因此，即使使用爱因斯坦求和约定， $\vec{e}_{ig}$ 中的指标 $_i$ 也必须是下标。

设 (π_{ei}) 是基 $(\vec{e}_i)$ 的（协变）对偶基，即， $\pi_{ei}\in E^*$ 是由 $\pi_{ei}.\vec{e}_j=\delta_{ij}$ 定义的客观线性形式（对所有观察者都相同），对所有 j 均成立，参见 (A.7)。

定义 F.15（等价定义。） 基 $(\vec{e}_i)$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-向量对偶基，是由 E 中的 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯代表向量构成的基 $(\vec{e}_{ig})$，这些向量对应于 π_{ei}，即

$$\boxed{\vec{e}_{ig}:=\vec{R}_g(\pi_{ei})},\quad \text{i.e.}\quad \vec{e}_{ig}\bullet_g\vec{v}=\pi_{ei}.\vec{v},\ \ \forall\vec{v}\in E. \tag{F.20}$$

其中 $\vec{R}_g$ 是 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯算子，见 (F.3)。

用对偶记号，(e^i)是对偶基，且 $\vec{e}_{ig}:=\vec{R}_g(e^i)$，即$(\vec{e}_{ig},\vec{v})_g=e^i.\vec{v}$ 对所有 $\vec{v}\in E$ 均成立，其中这里指标 i 的位置在左侧为下标、在右侧为上标，因为 R_g 将协变向量（线性形式）变为逆变向量。

练习 F.16 证明向量 $\vec{e}_{ig}$ 满足逆变基变换公式

$$[\vec{e}_{ig}]_{|new} = P^{-1}.[\vec{e}_{ig}]_{|old} \tag{F.21}$$

($\vec{e}_{jg}$ 确实是“逆变向量”。)

答案。 • 第一个答案: $\vec{e}_{ig}$ 是 E中的向量,因此它是逆变的。
• 第二个答案:应用(F.17),因为 $\vec{e}_{ig}$ 是 Riesz 表示向量。
• 第三个答案 = 直接计算:考虑两个基 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$,以及从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵 P,即对所有 j, $\vec{b}_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\vec{a}_i$。 (F.19)
以及向量 $\vec{e}_i$和双线性形式($\cdot\ \cdot\ _g$ $[\vec{e}_j]^T_{|\vec{a}}.[g]_{|\vec{a}}.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{a}} = \vec{e}_{ig}\ \vec{e}_j\ _g = [\vec{e}_j]^T_{|\vec{b}}.[g]_{|\vec{b}}.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[\vec{e}_j]_{|\vec{a}}\ ^T.\ P^T.[g]_{|\vec{a}}.P\ .[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{a}} =$,)
$[\vec{e}_j]^T_{|\vec{a}}.[g]_{|\vec{a}}.P.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{a}}$ $i\ j$ $[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{a}} = P.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{b}}$ 21 ∎
的基变换公式给出(,) () (),对所有,均成立,因此,因此(F.)。

练习 F.17 考虑两个内积 $(\cdot,\cdot)_a$ 和 $(\cdot,\cdot)_b$ (例如,以英尺和米为单位构造的欧几里得点积),以及 E 中的一个基 $(\vec{e}_i)$。称 $(\vec{e}_{ia})$ 和 $(\vec{e}_{ib})$ 分别为 $(\cdot,\cdot)_a$ 和 $(\cdot,\cdot)_b$-对偶向量基。证明:

$$(\cdot,\cdot)_a = \lambda^2(\cdot,\cdot)_b \quad \Longrightarrow \quad \vec{e}_{ib} = \lambda^2\vec{e}_{ia}, \quad \forall i. \tag{F.22}$$

例如, $\lambda^2 > 10$ 采用英尺和米构造的欧几里得基: $\vec{e}_{ib}$ 与 $\vec{e}_{ia}$ 大不相同!向量对偶基高度依赖于观察者:向量对偶基并非内禀于 $(\vec{e}_i)$(并非客观的)。

An答。 (F.19) 给出 $(\vec{e}_{ib},\vec{e}_j)_b = \delta_{ij} = (\vec{e}_{ia},\vec{e}_j)_a = \lambda^2(\vec{e}_{ia},\vec{e}_j)_b$, 因此对于所有 i,j, 都有 $(\vec{e}_{ib} - \lambda^2\vec{e}_{ia},\vec{e}_j)_b = \delta_{ij}$。 ∎

例 F.18 若 $(\vec{e}_i)$ 是一个 $(\cdot,\ \cdot)_g$-正交归一基,我们显然可得 $\vec{e}_{ig} = \vec{e}_i$ 对所有 i均成立,即 $(\vec{e}_{ig}) = (\vec{e}_i)$。这种特殊情况与一位英语(英尺)观察者和一位法国(米)观察者的共同合作并不相容。 ∎

F.7.2 $\vec{e}_{jg}$ 在基 $(\vec{e}_i)$中的分量

命题 F.19 $\vec{e}_{jg}$ 在基 $(\vec{e}_i)$ 中的分量,对于任意 $j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$, 由下式给出 ,

$$\boxed{[\vec{e}_{jg}]_{|\vec{e}} = [\vec{R}_g]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_j]_{|\vec{e}}} = ([g]_{|\vec{e}})^{-1}.[\vec{e}_j]_{|\vec{e}} = \ \textit{the } j\textit{-th column of } ([g]_{|\vec{e}})^{-1}, \tag{F.23}$$

即, $\vec{e}_{jg}$ 的第 i 个分量为 $([g]^{-1}_{|\vec{e}}\ )^{ij}$。

因此, $g(\cdot,\cdot)$ 在基 $(\vec{e}_{ig})$ 下的矩阵,是 $g(\cdot,\cdot)$ 在基 $(\vec{e}_i)$下的矩阵的逆矩阵:

$$([g(\vec{e}_{ig},\vec{e}_{jg})] =) \quad [g]_{|(\vec{e}_{ig})} = [g]_{|(\vec{e}_i)}{}^{-1} \quad (= ([g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)])^{-1}). \tag{F.24}$$

证明。 关于 (F.23) 的第一种证明(直接计算): (F.19) 给出,对于所有 i, j,

$$[\vec{e}_j]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{e}} = \delta_{ij} = [\vec{e}_j]^T_{|\vec{e}}.[\vec{e}_i]_{|\vec{e}}, \quad \text{thus} \quad [g]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_{ig}]_{|\vec{e}} = [\vec{e}_i]_{|\vec{e}}. \tag{F.25}$$

关于 (F.23) 的第二种证明:应用 (F.6)(一般的 Riesz 表示定理),即可得到 (F.23)。

因此, $[g]_{|\vec{e}}$ 为对称的,我们有 $[g]_{|\vec{e}}{}^{-1}$ 对称,且 $g(\vec{e}_{ig},\ \vec{e}_{jg}) = [\vec{e}_{ig}]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_{jg}]_{|\vec{e}} = [\vec{e}_i]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}{}^{-1}.[g]_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}{}^{-1}.[\vec{e}_j]_{|\vec{e}} = [\vec{e}_i]^T_{|\vec{e}}.[g]_{|\vec{e}}{}^{-1}.[\vec{e}_j]_{|\vec{e}} = ([g]_{|\vec{e}}{}^{-1})^{ij}$, 从而得到 (F.24)。 ∎

示例 F.20 $\mathbb{R}^2$, $[g]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 因此 $[g]^{-1}_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。因此 $\vec{e}_{1g} = \vec{e}_1$, $\vec{e}_{2g} = \frac{1}{2}\vec{e}_2$。 ∎

注 F.21 警告: 当 $([g]^{-1}_{|\vec{e}}\ )^{ij} =$指出$g^{ij}$ 时, (F.23) 表示为

$$\vec{e}_{jg} = \sum_{i=1}^n g^{ij}\vec{e}_i, \tag{F.26}$$

其中不满足爱因斯坦求和约定:满足爱因斯坦求和约定的情况为

$$\vec{e}_{jg} = \sum_{i=1}^n (\vec{e}_{jg})^i\vec{e}_i \overset{\text{noted}}{=} \sum_{i=1}^n (P_j)^i\vec{e}_i \tag{F.27}$$

(向量的分量带有上指标),这一点可以通过 $(\vec{e}_{ig},\ \vec{e}_j)_{\ g} =^{(F.19)} \delta_{ij}$ 验证,结果为$\sum_{k\ ,\ \ell=1}^n (P_i)^k g_{kj} = \delta_{ij}$。而在 (F.26) 中,标量 g^{ij} 只是 $(P_j)^i$的另一个名称,仅此而已(与爱因斯坦求和约定无关)。

我们强调：换句话说： $M=[g]_{|\vec{e}}=[M_{ij}]$ 是一个矩阵，它的逆矩阵是矩阵 $M^{-1}=[M_{ij}]^{-1}$：矩阵只不过是标量的集合（与爱因斯坦求和约定无关），它的逆矩阵也只是标量的集合；即使称 $M^{-1}=$为记作 $[M^{ij}]$，这一事实也不会改变（对矩阵而言，上指标的使用无关紧要）。参见注释 A.50。

并且由于 $(P_j)^i$ 等于 $([g]^{-1}_{|\vec{e}})^{ij}=$所记 g^{ij}，有些人将 $\vec{e}_{jg}$ 改名为 $\vec{e}^j$.....以得到 $\vec{e}^j=\sum_{i=1}^n g^{ij}\vec{e}_i$.....但这样做，他们无视 爱因斯坦求和约定，尽管他们最终声称：他们混淆了协变性和逆变性.....还让混乱更加混乱。

注意：请记住：如果遇到令人意外的记号（此处的记号 g^{ij}）而感到困惑，请使用经典记号：这样就不会误用爱因斯坦求和约定，也不会产生误解。尤其是此处，$\vec{e}_{jg}$ 是一个（逆变）向量。

F.7.3 $\vec{e}_{jg}$分量的多种可接受记号

令 $\mathcal{P}\in\mathcal{L}(E;E)$ 为从 $(\vec{e}_i)$ 到 $(\vec{e}_{ig})$ 的基变换自同态：定义为 $\mathcal{P}.\vec{e}_j=\vec{e}_{jg}$。并令 $P=[\mathcal{P}]_{|\vec{e}}$（对应的过渡矩阵）。它为相对于基 $(\vec{e}_i)$ 的 $\vec{e}_{jg}$ 的分量提供了多种可接受（不易混淆）的记号：

$$\vec{e}_{jg}=\mathcal{P}.\vec{e}_j=\underbrace{\sum_{j=1}^n P_{ij}\vec{e}_i=\sum_{j=1}^n (P_j)_i\vec{e}_i}_{\text{clas.}}=\underbrace{\sum_{j=1}^n (P_j)^i\vec{e}_i=\sum_{j=1}^n {P^i}_j\vec{e}_i}_{\text{dual}},\tag{F.28}$$

即第 i 个分 量。向量 $\vec{e}_{jg}$ 的分量可记为 $P_{ij}=(P_j)_i=(P_j)^i={P^i}_j$，即 $P=[\mathcal{P}]_{|\vec{e}}=[P_{ij}]=[(P_j)_i]=[(P_j)^i]=[{P^i}_j]$（同一矩阵的四种不同记号），即

$$\forall j,\quad [\vec{e}_{jg}]_{|\vec{e}}=[\mathcal{P}]_{|\vec{e}}.[\vec{e}_j]_{|\vec{e}}=\begin{pmatrix}P_{1j}\\ \vdots\\ P_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(P_j)_1\\ \vdots\\ (P_j)_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{P^1}_j\\ \vdots\\ {P^n}_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(P_j)^1\\ \vdots\\ (P_j)^n\end{pmatrix}\tag{F.29}$$

$=$ 第 j 列。你可以根据当前需要或心情选择任意一种记号.....

F.7.4 “（协变）对偶基”与“对偶向量基”之间的巨大差异

1. 一个基（$\vec{e}_i$）有无穷多个向量对偶基（$\vec{e}_{ig}$），其数量与内积 $(\cdot,\ \cdot)_g$（观察者的数量）一样多，见（F.23）。

   虽然一个基（$\vec{e}_i$）有唯一的内禀（协变）对偶基（π_{ei}）记作 $=$（e^i），参见（A.7）：将同一个基（$\vec{e}_i$）纳入考察的两个观察者拥有相同的（协变）对偶基。

2. $\pi_{ei}=e^i$ 是协变的，而 $\vec{e}_i$ 和 $\vec{e}_{ig}$ 是逆变的。而且（$\vec{e}_i$）与（π_{ei}）之间不存在过渡矩阵 $=$（e^i），因为 $\vec{e}_i\in E$ 和 $\pi_{ei}=e^i\in E^*$ 并不属于同一个向量空间。

3. 如果你要飞行，使用对偶基 $(\pi_{ei})=(e^i)$至关重要：如果在起飞和着陆时（假如你能活着起飞的话）把英尺和米弄混，可能会致命，因为采用了不同的欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 或 $(\cdot,\ \cdot)_h$；例如，可参见火星气候轨道器坠毁事故，备注 A.14。爱因斯坦求和约定会有所帮助.....但前提是确实遵守它。

F.7.5 关于记号 $g^{ij}=$ 作为 $(g^\sharp)^{ij}$ 的简写记号

定义 **F.22** 里斯关联内积 $g^\sharp\in\mathcal{L}(E^*,\ E^*;\mathbb{R})$ 是如下定义的双线性形式 对于所有 $\ell,m\in E^*$，

$$g^\sharp(\ell,m):=g(\vec{\ell}_g,\vec{m}_g),\quad \text{i.e.}\quad (\ell,m)_{g^\sharp}:=(\vec{\ell}_g,\vec{m}_g)_g.\tag{F.30}$$

其中 $\vec{\ell}_g=\vec{R}_g(\ell)$和 $\vec{m}_g=\vec{R}_g(m)$。

因此，$g^\sharp(\cdot,\ \cdot)=$记为$(\cdot,\ \cdot)_{g^\sharp}$ 确实是 E^*中的内积：显然可得。

量化： $(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基，而(e^i)是其对偶基（对偶记号）。（F.30）给出：

$$(g^\sharp)^{ij}:=g^\sharp(e^i,e^j)=g(\vec{e}_{ig},\vec{e}_{jg}),\quad \text{thus}\quad [g^\sharp]_{|e}=\boxed{[(g^\sharp)^{ij}]=[g_{ij}]^{-1}}=[g]^{-1}_{|\vec{e}},\tag{F.31}$$

参见（F.24）。以及

$$\boxed{[(g^\sharp)^{ij}]\overset{\text{shorthand}}{\underset{\text{notation}}{=}}[g^{ij}]}.\tag{F.32}$$

经典记号：$[g^\sharp]_{|e}=[(g^\sharp)_{ij}]=[g^\sharp(\pi_{ei},\pi_{ej})]=[g(\vec{e}_{ig},\vec{e}_{jg})]=[g_{ij}]^{-1}=([g]_{|\vec{e}})^{-1}$。

练习 F.23 如何用矩阵计算来计算 $g^\sharp(\ell,m)$?

答案. $\ell=\sum_{i=1}^n \ell_i e^i \qquad m=\sum_{j=1}^n m_j e^j \qquad g^\sharp\ \ell\ m\ =\sum_{i\ j=1}^n \ell_i m_j g^\sharp\ e^i\ e^j\ =\sum_{i\ j=1}^n \ell_i\ g^\sharp{}^{ij} m_j\ =$ 并给出 (,) ,(,) ,() （线性形式由行矩阵表示，）。
$[\ell]_{|\vec e}.[g^\sharp]_{|\vec e}.[m]^T_{|\vec e}=[\ell]_{|\vec e}.[g]^{-1}_{|\vec e}.[m]^T_{|\vec e}$ ∎

练习 F.24 (F.30) 表明，$\binom{2}{0}$ 张量 $g^\sharp\in\mathcal{L}(E^*,E^*;\mathbb{R})$ 是通过两次应用 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示定理，由 $\binom{0}{2}$ 张量 $g=(\cdot,\cdot)_g\in\mathcal{L}(E,E;\ \mathbb{R})$ 构造而成的。

1- 只使用一次 $(\cdot,\cdot)_g$-黎斯表示定理，证明可得由 $\simeq\mathcal{L}(E;E)$ 给出的 $\binom{1}{1}$ 张量 $g^\natural\in\mathcal{L}(E^*,E;\mathbb{R})$

$$g^\natural=I. \tag{F.33}$$

2- 逆命题：使用一次 $(\cdot,\cdot)_g$-黎斯表示定理，从恒等映射 $I\in\mathcal{L}(E;\ E)$ 得到的 $\binom{0}{2}$ 张量 $g^\flat\in\mathcal{L}(E,E;\ \mathbb{R})$ 是什么?

3- 总结：$\widetilde{I}=g^\natural$ 给出 $(\widetilde{I})^\flat=g^\flat=g$ 和 $(\widetilde{I})^\sharp=g^\sharp$

答案。1- $g^\natural\in\mathcal{L}(E^*,E;\ \mathbb{R})$ 定义为 $g^\natural(\ell,\vec w)=(\vec\ell_g,\vec w)_g$，对所有 $(\ell,\vec w)\in E^*\times E$ 均成立，其中 $\vec\ell_g$ 是 ℓ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-黎斯表示向量。因此，对所有 $(\ell,\vec w)\in E^*\times E,\ \ g^\natural(\ell,\vec w)=\ell.\vec w=\ell.I.\vec w$，故 $g^\natural\in\mathcal{L}(E^*,E;\ \mathbb{R})$ 自然且典范地与恒等映射 $I\in\mathcal{L}(E;\ E)$ 相关联。

2- 恒等算子 $I\in\mathcal{L}(E;\ E)$（与观察者无关）自然地、典范地与 $\binom{1}{1}$ 张量 $\widetilde{I}\in\mathcal{L}(E^*,E;\ \mathbb{R})$ 相关联，该张量定义为 $\widetilde{I}(\ell,\vec w)=\ell.I.\vec w=\ell.\vec w$对所有 $(\ell,\vec w)\in E^*\times E$均成立，因此 $\widetilde{I}=g^\natural$。 ∎

G 柯西–格林变形张量 $C=F^T.F$

框架：$\widetilde{\Phi}:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\times\\ t\end{array}\right.$ Obj $\to\mathbb{R}^n(\ ,P_{Obj})\ \to\widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})\Big\}$ 是 Obj 的一个运动，$\Omega_\tau=\widetilde{\Phi}(\tau,P_{Obj})$ 是 Obj 在任意 τ时的构形，t_0和 t是固定的，$\Phi:=\Phi_t^{t_0}$: $\left\{\Omega_{t_0}\ \to\Omega P\ \to p=\overset{t}{\Phi}(P)\right\}$ 是 t_0与 t之间的关联运动，而 $F(P):=d\Phi(P):\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}^n_{t_0}\ \to\mathbb{R}^n_t\\ \vec W\ \to\vec w=F\end{array}\right.(P).\vec W:=\lim_{h\to0}\dfrac{\overset{\Phi}{(P+h\vec W)}\ -\Phi\ P}{h}\Big\}$ ( ) 是 P 处 t_0 与 t之间的变形梯度，参见（4.2）。

G.0 目标

C 的构造（柯西方法总结）：

1- 在 t_0处，考虑两个向量 $\vec W_1$ 和 $\vec W_2$, 2- 在 t 处，它们因运动而发生形变，变为向量 $F.W_1$ 和 $F.W_2$; 3- 然后选择一个欧几里得点积（$\cdot,\ \cdot$）$_g$ =记作$\bullet$，在所有 t 处都相同（为简化起见）；

4- 然后，根据转置的定义，$(F.\vec W_1)\bullet(F.\vec W_2)\ =(F^T.F.\vec W_1)\bullet\vec W_2$: 由此得到柯西应变张量 $C:=F^T.F$;

5- 然后 $(F.\vec W_1)\bullet(F.\vec W_2)\ -\vec W_1\bullet\vec W_2=((C-I).\vec W_1)\bullet\vec W_2$ 给出了以 $\vec W_2$为参照的变形度量，该度量用于建立应力的一阶本构定律（柯西）。

G.1 转置的 F^T：所需的内积

我们首先给出 F^T 的泛函定义（定性）；然后得到相对于观察者的 F^T 的常用矩阵表示（量化）。

G.1.1 函数 F^T的定义

在 t_0，过去观察者在 $\mathbb{R}^n_{t_0}$中选取了一个内积（$\cdot,\ \cdot$）$_G$；而在 t，当前观察者在 $\mathbb{R}^n_t$中选取了一个内积（$\cdot,\ \cdot$）$_g$。

根据定义，线性映射 $F(P)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n_{t_0};\ \mathbb{R}^n_t)$ 相对于 $(\cdot,\cdot)_G$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$ 的转置是线性映射 $F(P)^T_{Gg}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n_t;\ \mathbb{R}^n_{t_0})$，其定义如下：对于所有 $\vec U_P\in\mathbb{R}^n_{t_0}$（位于 P 的向量）和 $\vec w_p\in\mathbb{R}^n_t$（位于 p 的向量），

$$(F(P)^T_{Gg}.\vec w_p,\vec U_P)_G=(F(P).\vec U_P,\vec w_p)_g,\quad\text{in short}\quad\boxed{(F^T_{Gg}.\vec w,\vec U)_G=(F.\vec U,\vec w)_g}, \tag{G.1}$$

参见 (A.68)。当 $p=\Phi(P)$ 时，这定义了 $F^T_{Gg}(p):=F(P)^T_{Gg}$：

$$F^T_{Gg}:\left\{\begin{array}{ll}\Omega_t & \to\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})\\ p & \to\boxed{F^T_{Gg}(p):=F(P)^T_{Gg}}\end{array}\right\},\quad\text{so in short}\quad\boxed{(F^T.\vec{w})\bullet_G\vec{U}=\vec{w}\bullet_g(F.\vec{U})},\tag{G.2}$$

别忘了，$F^T:=F^T_{Gg}$ 取决于 $(\cdot,\cdot)_G$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$。

练习 G.1 1. 在 $F^T.\vec{z}.\vec{W}=\vec{z}.F.\vec{W}=F.\vec{W}.\vec{z}=\vec{W}.F^T.\vec{z}$ 中，哪些点积是内积？ 2. $F.\vec{W}_1.F.\vec{W}_2=\vec{W}_1.F^T.F.\vec{W}_2$ 是什么意思?

答案。1. 不可选：$(\vec{W},\vec{z})\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}\times\vec{\mathbb{R}}^n_t$，所以 $(F^T.\vec{z})\bullet_G\vec{W}=\vec{z}\bullet_g(F.\vec{W})=(F.\vec{W})\bullet_g\vec{z}=\vec{W}\bullet_G(F^T.\vec{z})$。2. 不可选：$\vec{W}_1,\vec{W}_2\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，所以 $(F.\vec{W}_1)\bullet_g(F.\vec{W}_2)=\vec{W}_1\bullet_G(F^T.(F.\vec{W}_2))$。 ▟

备注 G.2 更一般地，在曲面 Ω（一个流形）上，对于所有 $(\vec{U}_P,\ \vec{w}_p)\in T_P\Omega_{t_0}\times T_p\Omega_t$，(G.1) 都有定义，其中 $T_{p_\tau}\Omega_\tau$ 是 Ω_τ 处的切空间 p_τ。 ▟

G.1.2 基的量化（矩阵表示）

经典记号：$(\vec{a}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的一组基，$(\vec{b}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的一组基。Marsden–Hughes 对偶记号：$(\vec{E}_I)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的一组基，$(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的一组基。为使表述简洁，省略了对点 P 和 p 的指明（如有疑问，请使用 § G.1.1 中的完整记法）。

$$\text{Let }[G]:=[(\vec{a}_i,\vec{a}_j)_G],\ [g]:=[(\vec{b}_i,\vec{b}_j)_g],\ [F]_{|\vec{a},\vec{b}}=[F_{ij}]=^{\text{noted}}[F],\ [F^T]_{|\vec{b},\vec{a}}=[(F^T)_{ij}]=^{\text{noted}}[F^T].$$

（G.1）给出 $[\vec{U}]^T.[G].[F^T.\vec{w}]=[F.\vec{U}]^T.[G].[\vec{w}]$，因此 $[\vec{U}]^T.[G].[F^T].[\vec{w}]=[\vec{U}]^T.[F]^T.[g].[\vec{w}]$，对所有 $\vec{U},\ \vec{w}$，因此

$$[G].[F^T]=[F]^T.[g],\quad\text{i.e.}\quad\boxed{[F^T]=[G]^{-1}.[F]^T.[g]}.\tag{G.3}$$

备注 G.3 如果 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$ 是 $(\cdot,\ \cdot)_G$ 和 $(\cdot,\ \cdot)_g$-正交归一基，则 $[C]=[F]^T.[F]$。但请记住：如果需要使用坐标系，那么所用的基就是坐标系基，它们通常不是正交归一的，即通常 $[G]^{-1}\neq I$ 和 $[g]^{-1}\neq I$。 ▟

练习 G.4 先用经典记号，再用 Marsden 对偶记号，通过分量表示 (G.3)。**答案**。经典记号：

$$\begin{array}{c}G_{ij}=G(\vec{a}_i,\vec{a}_j),\quad g_{ij}=g(\vec{b}_i,\vec{b}_j),\quad\text{i.e.}\quad[G]_{\vec{a}}=[G_{ij}],\quad[g]_{|\vec{b}}=[g_{ij}],\\ \text{and}\quad F.\vec{a}_j=\sum_{i=1}^nF_{ij}\vec{b}_i,\quad F^T.\vec{b}_j=\sum_{i=1}^n(F^T)_{ij}\vec{a}_i,\quad\text{i.e.}\quad[F]_{|\vec{a},\vec{b}}=[F_{ij}],\quad[F^T]_{|\vec{b},\vec{a}}=[(F^T)_{ij}].\end{array}\tag{G.4}$$

于是 $(F^T.\vec{b}_j,\vec{a}_i)_G=^{(G.1)}(\vec{b}_j,F.\vec{a}_i)_g$ 给出 $(\sum_{k=1}^n(F^T)_{kj}\vec{a}_k,\vec{a}_i)_G=(\vec{b}_j,\sum_{k=1}^nF_{ki}\vec{b}_k)_g$，因此 $\sum_{k=1}^n(F^T)_{kj}(\vec{a}_k,\vec{a}_i)_G=\sum_{k=1}^nF_{ki}(\vec{b}_j,\vec{b}_k)_g$，其中 $F_{ki}=([F]^T)_{ik}$，因此

$$\sum_{k=1}^nG_{ik}(F^T)_{kj}=\sum_{k=1}^n([F]^T)_{ik}g_{kj},\quad\text{i.e.}\quad(F^T)_{ij}=\sum_{k,\ell=1}^n([G]^{-1})_{ik}F_{\ell k}g_{\ell j},\tag{G.5}$$

对所有 i,j，因此得到 (G.3)。

Marsden 记号：$G_{IJ}=G(\vec{E}_I,\vec{E}_J)$，$g_{ij}=g(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$，$F.\vec{E}_J=\sum_{i=1}^nF^i{}_J\vec{e}_i$，$F^T.\vec{e}_j=\sum_{I=1}^n(F^T)^I{}_j\vec{E}_I$，因此 $\sum_{K=1}^nG_{IK}(F^T)^K{}_j=\sum_{k=1}^nF^k{}_Ig_{kj}$，i.e. $(F^T)^I{}_j=\sum_{K,k=1}^nG^{IK}F^k{}_Kg_{kj}$ where $[G^{IJ}]:=[G_{IJ}]^{-1}$. ▟

G.1.3 备注： F^*

（致数学家：F^* 在力学中似乎没什么用处，除了把简单的事情复杂化，以及玩弄分量和对偶记号.....）。

定义 G.5 线性映射 $F\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$（作用于向量）的伴随，是由以下方式典范定义的线性映射 $F^*\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t;\ \vec{\mathbb{R}}^{n*}_{t_0})$（作用于函数）：对所有 $m\in\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t$，

$$F^*(m):=m\circ F,\quad\text{written}\quad F^*.m=m.F\ \ (\in\vec{\mathbb{R}}^{n*}_{t_0}).\tag{G.6}$$

因此，对于所有 $(m,\ \vec{W}) \in \vec{\mathbb{R}}_t^{n*} \times \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$,

$$(F^*.m).\vec{W} = m.F.\vec{W} \ \ (\in \mathbb{R}). \tag{G.7}$$

量化（矩阵表示）： (π_{ai}) 和 (π_{bi}) 分别是 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 的协变对偶基。令 $(F^*)_{ij}$ 为 F^* 相对于这些对偶基的分量:

$$F^*.\pi_{bj} = \sum_{I=1}^{n} (F^*)_{ij}\pi_{ai}, \quad \text{i.e.} \quad [F^*]_{|\pi_b,\pi_a} = [(F^*)_{ij}]. \tag{G.8}$$

(G.7) 给出 $(F^*.\pi_{bj}).\vec{a}_i = \pi_{bj}.F.\vec{a}_i$，因此

$$\forall i,j, \ \boxed{(F^*)_{ij} = F_{ji}}, \quad \text{i.e.} \quad [F^*]_{|\pi_b,\pi_a} = ([F]_{|\vec{a},\vec{b}})^T, \quad \text{in short} \quad [F^*] = [F]^T. \tag{G.9}$$

Marsden 对偶记号： $F^*.e^j = \sum_{I=1}^{n} (F^*)_I{}^j E^I$ 对所有 I，j 均给出 $(F^*)_I{}^j = F^j{}_I$。

对 F^* 的解释。与经典力学中的通常做法一样，我们使用欧几里得点积：这里，在 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中为 $(\cdot,\ \cdot)_G$，在 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$ 中为 $(\cdot,\ \cdot)_g$。然后，我们使用 $F^*.m \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^{n*}$ 的 $(\cdot,\ \cdot)_G$- 黎斯表示向量 $\vec{R}_G(F^*.m) \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$，以及 $m \in \vec{\mathbb{R}}_t^{n*}$ 的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-黎斯表示向量 $\vec{R}_g(m) \in \vec{\mathbb{R}}_t^n$，因此，对所有 $m \in \vec{\mathbb{R}}_t^{n*}$ 和 $\vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$,

$$(F^*.m).\vec{W} = \vec{R}_G(F^*.m) \bullet_G \vec{W}, \quad \text{and} \quad m.(F.\vec{W}) = \vec{R}_g(m) \bullet_g F.\vec{W} = (F^T.\vec{R}_g(m)) \bullet_G \vec{W}. \tag{G.10}$$

因此，(G.7) 给出 $\vec{R}_G(F^*.m) = F^T.\vec{R}_g(m)$，于是

$$\vec{R}_G.F^* = F^T.\vec{R}_g, \quad \text{i.e.} \quad F^* = \vec{R}_G{}^{-1}.F^T.\vec{R}_g. \tag{G.11}$$

备注 G.6 F^*的定义是 F内禀的（客观的），而 F^T的定义并不对 F 而言是内禀的（不客观），因为其定义需要内积（观察者选择）。 ∎

G.2 柯西–格林变形张量 C

G.2.1 C的定义

考虑位于 P 的向量 $\vec{W}_i \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$、$i = 1,\ 2$，以及它们朝向 $p = \Phi(P)$ 的前推 $\vec{w}_i$，即

$$\vec{w}_i = F.\vec{W}_i, \tag{G.12}$$

$\vec{w}_i(p) = F(P).\vec{W}_i(P)$ 的简写记号。选定 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中的内积 $(\cdot,\cdot)_G$ 和 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$ 中的内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 后，我们得到 $(\vec{w}_1(p)\ \vec{w}_2(p))_g = (F(P).\vec{W}_1(P)\ \ F(P).\vec{W}_2(P))_g =^{(G.2)} (F_{Gg}^T(p).F(P).\vec{W}_1(P)\ \ \vec{W}_2(P))_G$，当 $p = \Phi(P)$ 时，简写为:

$$(\vec{w}_1,\vec{w}_2)_g = (F.\vec{W}_1, F.\vec{W}_2)_g = (\underbrace{F^T.F}_{C}.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G, \tag{G.13}$$

定义 G.7 </style}Ω相对于 $(,)_G$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$ 的（右）柯西–格林变形张量，是自同态 $C_{Gg}(P) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n;\ \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$，定义如下

$$C_{Gg}(P) := F_{Gg}^T(p) \circ F(P), \quad \text{in short} \quad \boxed{C := F^T.F}. \tag{G.14}$$

So

$$C = F^T \circ F : \vec{W} \xrightarrow{F} F(\vec{W}) \xrightarrow{F^T} F^T(F(\vec{W})) = C(\vec{W}), \tag{G.15}$$

其中 F 和 F^T 线性，因此 C 是线性的，且 $C(\vec{W})$ 记作 $C.\vec{W} = F^T.F.\vec{W}$。而 (G.13) 表明，对于所有 $W_1, W_2 \in \mathbb{R}_{t_0}^n$，$C$ 由下式刻画:

$$\vec{w}_1 \bullet_g \vec{w}_2 = \boxed{(C.\vec{W}_1) \bullet_G \vec{W}_2 = (F.\vec{W}_1) \bullet_g (F.\vec{W}_2)}. \tag{G.16}$$

此外，由于 $(\cdot,\cdot)_g$ 是对称的（内积），C 是 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中的 $(\cdot,\cdot)_G$-对称自同态，即对于所有 W_1,$W_2 \in \mathbb{R}_{t_0}^n$,

$$(C.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (\vec{W}_1, C.\vec{W}_2)_G, \quad \text{i.e.} \quad (C.\vec{W}_1) \bullet_G \vec{W}_2 = \vec{W}_1 \bullet_G (C.\vec{W}_2), \tag{G.17}$$

因为 $(F^T.F.\vec{W}_1,\ \vec{W}_2)_G = (F.\vec{W}_1,\ F.\vec{W}_2)_g = (\vec{W}_1,\ F^T.F.\vec{W}_2)_G$。

G.2.2 量化

由（G.14）得 $[C]=[F^T].[F]$，其中 $[F^T]=^{(G.3)}[G]^{-1}.[F]^T.[g]$，因此

$$\boxed{[C]=[G]^{-1}.[F]^T.[g].[F]}, \tag{G.18}$$

$[C_{Gg}]_{|\vec a}=[G]^{-1}_{|\vec a}.([F]_{|\vec a,\ \vec b})^T.[g]_{|\vec b}.[F]_{|\vec a,\ \vec b}$的简写。

练习 G.8 练习 先用经典记号，再用对偶记号，利用分量表示式 (G.18) .

答案。经典记号:

$$F.\vec a_j=\sum_{i=1}^n F_{ij}\vec b_i \quad\text{and}\quad C.\vec a_j=\sum_{i=1}^n C_{ij}\vec a_i, \quad\text{i.e.}\quad [F]_{|\vec a,\vec b}=[F_{ij}] \quad\text{and}\quad [C]_{|\vec a}=[C_{ij}]. \tag{G.19}$$

(G.16)-(G.17) 给出 $(\vec a_i,C.\vec a_j)_G=(F.\vec a_i,F.\vec a_j)_g$，因此 $(\vec a_i,\sum_k C_{kj}\vec a_k)_G=(\sum_k F_{ki}\vec b_k,\sum_\ell F_{\ell j}\vec b_\ell)_g$，从而$\sum_k C_{kj}(\vec a_i,\vec a_k)_G=\sum_{k\ell}F_{ki}(\vec b_k,\vec b_\ell)_g F_{\ell j}$，即

$$\sum_{k=1}^n G_{ik}C_{kj}=\sum_{k,\ell=1}^n F_{ki}\,g_{k\ell}F_{\ell j}=\sum_{k,\ell=1}^n([F]^T)_{ik}\,g_{k\ell}F_{\ell j}, \quad\text{so}\quad \boxed{[G].[C]=[F]^T.[g].[F]}, \tag{G.20}$$

因此 $C_{ij}=\sum_{k,\ell,m=1}^n([G]^{-1})_{im}F_{km}\,g_{k\ell}F_{\ell j}=\sum_{k,\ell,m=1}^n([G]^{-1})_{im}([F]^T)_{mk}\,g_{k\ell}F_{\ell j}$。对偶记号:

$$\begin{array}{l} F.\vec E_J=\sum_{i=1}^n F^i{}_J\vec e_i \quad\text{and}\quad C.\vec E_J=\sum_{I=1}^n C^I{}_J\vec E_I, \quad\text{i.e.}\quad [F]_{|\vec E,\vec e}=[F^i{}_J] \quad\text{and}\quad [C]_{|\vec E}=[C^I{}_J],\ \text{and} \\ \sum_{K=1}^n G_{IK}C^K{}_J=\sum_{k,\ell=1}^n F^k{}_I\,g_{k\ell}F^\ell{}_J, \quad\text{and}\quad C^I{}_J=\sum_{k,\ell,M=1}^n G^{IM}F^k{}_M\,g_{k\ell}F^\ell{}_J \quad\text{when}\quad [G^{IJ}]:=[G_{IJ}]^{-1}. \end{array} \tag{G.21}$$

▀

练习 G.9 $(\cdot,\cdot)_G$是以英尺为单位的欧几里得点积，$(\cdot,\cdot)_g$是以米为单位的欧几里得点积，因此 $(\cdot,\cdot)_g=\mu^2(\cdot,\cdot)_G$，其中 $\mu\simeq 0.3048$；并且 $(\vec a_i)=(\vec b_i)$ 是一个 $(\cdot,\cdot)_G$-标准正交基。证明

$$[C]=\mu^2[F]^T.[F]. \tag{G.22}$$

答案。 $[C]_{|\vec a}=^{(G.18)}[G]^{-1}_{|\vec a}.[F]^T_{|\vec a,\ \vec a}.[g]_{|\vec a}.[F]_{|\vec a,\ \vec a}$ 给出 $[C]_{|\vec a}=I.[F]^T_{|\vec a,\ \vec a}.\mu^2 I.[F]_{|\vec a,\ \vec a}$。简化记号 =(G.22)。 ▀

G.3 C的时间泰勒展开

这里在所有时间都使用唯一的内积 $(\cdot,\cdot)_G=(\cdot,\cdot)_g$（以便比较 t_0 附近的结果）。此外，我们使用正交归一基（以简化记号），简言之，$[C]=[F]^T.[F]$。

P固定，$C_t^{t_0}(P)=$记为$C(t)$，且 $[C(t)]=[F(t)]^T.[F(t)]$（因为此处为 $[G]=[g]=I$），以及$\vec V_t^{t_0}(P)=$记为$\vec V(t)$，而 $\vec A_t^{t_0}(P)=$记为$\vec A(t)$ 是拉格朗日速度和加速度；$\vec v\,(t,p)$ 和 $\vec\gamma\,(t,p)$ 则是 t 处、$p=\Phi_t^{t_0}(t,P)$ 的欧拉速度和加速度。

With 拉格朗日变量（用于定义 C）： $F(t+h)=F(t)+h\,d\vec V(t)+\frac{h^2}{2}\,d\vec A(t)+o(h^2)$ 给出

$$\begin{aligned}[C(t+h)]&=[F(t+h)]^T.[F(t+h)]\\ &=[F^T+h\,d\vec V^T+\frac{h^2}{2}\,d\vec A^T+o(h^2)](t)[F+h\,d\vec V+\frac{h^2}{2}\,d\vec A+o(h^2)](t)\\ &=[C(t)+h\underbrace{([F^T].[d\vec V]+[d\vec V]^T.[F])(t)}_{=[(C_P^{t_0})'(t)]=^{\text{noted}}[C'(t)]}+\frac{h^2}{2}\underbrace{([F]^T.[d\vec A]+2[d\vec V]^T.[d\vec V]+[d\vec A]^T.[F])(t))}_{=[(C_P^{t_0})''(t)]=^{\text{noted}}[C''(t)]}(t)+o(h^2).\end{aligned} \tag{G.23}$$

（与拉格朗日变量的通常情况一样，这里涉及三个时间：t_0、t 和 $t+h$。）尤其是

$$[C_P^{t_0}(t_0+h)]=I+([d\vec V]+[d\vec V]^T)(t_0)+\frac{h^2}{2}([d\vec A]+2[d\vec V]^T.[d\vec V]+[d\vec A]^T)(t_0)+o(h^2). \tag{G.24}$$

不严谨地写作 $C_P^{t_0}(t_0+h)=I+(d\vec V+d\vec V^T)(t_0)+\frac{h^2}{2}(d\vec A+2d\vec V^T.d\vec V+d\vec A^T)(t_0)+o(h^2)$，但别忘了它具有矩阵意义。

使用欧拉变量：由 $p(t) = \Phi^{t_0}(t,P)$，可得 $d\vec{V}^{t_0}(t,P) = d\vec{v}(t,p(t)).F(t)$ 以及 $d\vec{A}^{t_0}(t,P) = d\vec{\gamma}(t,p(t)).F(t)$，因此简写为 $d\vec{v} := d\vec{v}(t,p(t))$ 和 $d\vec{\gamma} := d\vec{\gamma}(t,p(t))$，

$$\begin{aligned} C_P^{t_0}(t+h) = C_P^{t_0}(t) &+ h\,(F^T(t).(d\vec{v} + d\vec{v}^T)(t,p(t)).F(t)) \\ &+ \frac{h^2}{2}\,(F^T(t).(d\vec{\gamma} + 2d\vec{v}^T.d\vec{v} + d\vec{\gamma}^T)(t,p(t)).F(t)) + o(h^2). \end{aligned} \tag{G.25}$$

$[C_P^{t_0}(t+h)] = ...$ 的滥用记号（相对于某个基的矩阵）。

备注 G.10 $F'' = d\vec{A}$ 很容易理解，但 $C'' = F^T.d\vec{A} + 2d\vec{V}^T.d\vec{V} + d\vec{A}^T.F = (F^T.d\vec{A} + d\vec{V}^T.d\vec{V}) + (F^T.d\vec{A} + d\vec{V}^T.d\vec{V})^T$ 则不那么容易理解（而且关于 $\vec{V}$ 不是线性的）。

我们在流的复合上已经遇到过一个问题：公式 $F_{t_2}^{t_0} = F_{t_2}^{t_1}.F_{t_1}^{t_0}$ 很简单（确定性），但公式 $C_{t_2}^{t_0} = F_{t_2}^{t_0})^T.F_{t_2}^{t_0} = (F_{t_1}^{t_0})^T.(F_{t_2}^{t_1})^T.F_{t_2}^{t_1}.F_{t_1}^{t_0} = (F_{t_1}^{t_0})^T.C_{t_2}^{t_1}.F_{t_1}^{t_0}$“没那么简单”（$\neq C_{t_2}^{t_1}.C_{t_1}^{t_0}$）。（事实上，考虑 C 而非 F，就相当于考虑“运动的平方”，参见（$C.\vec{W}$，$\vec{W}$）$_g = ||F.\vec{W}||_{g^\circ}^2$ ）

由于 $C'(t_0) = d\vec{V}(t_0) + d\vec{V}(t_0)^T$ 这对 t_0 附近的线性近似可能影响不大，但如果用 C'' 来构造本构定律，那么对二阶近似（以及大变形）的影响终究不小。考虑李导数或许是一个有趣的替代方案。

G.4 备注： $C^\flat$

数学家请注意：这可能导致错误、误用以及协变与逆变混淆，见下一节 G.4.2。关于一般的 $^\flat$ 记号，见 § A.10.4。

G.4.1 $C^\flat$的定义.....

定义 G.11 在 $P \in \Omega_{t_0}$ 处，与线性映射 $C_{Gg}(P) =$记作$C \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 相关联的双线性形式 $C^\flat_{Gg}(P) =$记作$C^\flat \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}, \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \mathbb{R})$ 定义如下：对于 P 处的所有 $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 向量，

$$C^\flat(\vec{W}_1, \vec{W}_2) := (\vec{W}_1, C.\vec{W}_2)_G \quad (= (F.\vec{W}_1, F.\vec{W}_2)_g). \tag{G.26}$$

于是，$C^\flat$ 是双线性对称形式（显然），并且当 $F_t^{t_0} =$注意到F是微分同胚（通常的假设）时，它是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的度量，但不是欧几里得度量（当且仅当 $C = I$ 时，即对于刚体运动）。

量化： (G.26) 对所有 $\vec{W}_1, \vec{W}_2$ 给出 $[\vec{W}_2]^T.[C^\flat].[\vec{W}_1] = [\vec{W}_2]^T.[G].[C].[\vec{W}_1]$，因为 $C^\flat$ 且 $(\cdot,\cdot)_G$ 是对称的，因此

$$[C^\flat] = [G].[C] \quad (= [F]^T.[g].[F]). \tag{G.27}$$

习题 G.12 用对偶记号将 (G.27) 表示为分量形式，并解释平坦的 $^\flat$ 记号。

答案。（G.26）给出 $C^\flat(\vec{E}_J, \vec{E}_I) := (C.\vec{E}_J, \vec{E}_I)_{G^\circ}$ 因此，利用 $C^\flat(\vec{E}_I, \vec{E}_J) = C_{IJ}$ 和 $C.\vec{E}_J = \sum_I C^I{}_J \vec{E}_I$，我们得到$C_{JI} = \sum_K C^K{}_J(\vec{E}_K, \vec{E}_I)_G = \sum_K C^K{}_J G_{KI}$；并且 $C^\flat$ 和 $(\cdot,\cdot)_G$ 是对称的，因此

$$C_{IJ} = \sum_K G_{IK} C^K{}_J, \quad \text{i.e.} \quad [C^\flat]_{|\vec{E}} = [G]_{|\vec{E}}.[C]_{|\vec{E}}. \tag{G.28}$$

降指标记号 $C^\flat$ 源于：$C^I{}_J$ 中的上指标 I 在 $C^\flat$中变成了 C_{IJ} 中的下指标，这描述了由于使用内积而导致的变差变化。

并且 (G.27) 还给出 $C_{IJ} = (F.\vec{E}_I,\ F.\vec{E}_J)_g = \sum_{k\ell} F^k{}_I F^\ell{}_J (\vec{b}_k,\ \vec{b}_\ell)_g$，因此

$$C_{IJ} = \sum_{k\ell} F^k{}_I g_{k\ell} F^\ell{}_J = \sum_{k\ell} (F^T)^I{}_k g_{k\ell} F^\ell{}_J, \quad \text{i.e.} \quad [C^\flat]_{|\vec{E}} = ([F]_{|\vec{E},\vec{e}})^T.[g]_{|\vec{e}}.[F]_{|\vec{E},\vec{e}}. \tag{G.29}$$

G.4.2 .....以及关于 $C^\flat$.....和 Jaumann 的注释

$C^\flat$ 也可以仅用 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 定义，对于所有 $\vec{W}_1,\ \vec{W}_2 \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，

$$C^\flat_g(\vec{W}_1, \vec{W}_2) := (F.\vec{W}_1, F.\vec{W}_2)_g, \tag{G.30}$$

即，$C^\flat_g := g^* =$注意到$C^\flat$。因此我们也可以说，$C^\flat_g$ 是度量 $(\cdot,\cdot)_g$ 经由 Φ的拉回，见（8.9）。

• 然而， $C^\flat = C_g^\flat$ 本身毫无用处： $C^\flat$ 并非 欧几里得点积（它是在每个 P处由 $C_g^\flat(P)$ $(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$定义的度量：$=(F(P).\vec{W}_1, F(P).\vec{W}_2)_g$对所有 $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$处于 P的向量均成立）。事实上，只有当 $C^\flat(\vec{W}_1, \vec{W}_2)$的值可以与初始值（$\vec{W}_1, \vec{W}_2$）$_G$相比较时， $C^\flat$才有助于刻画变形；也就是说，只有在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中引入了欧几里得点积（$\cdot,\cdot$）$_G$时才有用。这就是为什么 $C^\flat$通常由 C定义，参见（G.26）。

• 你可能会想使用无穷小应变张量 $\varepsilon = \frac{F+F^T}{2} - I$，或格林–拉格朗日变形张量 $E = \frac{1}{2}(C - I)$，它由 F^T: $= F^T_{Gg}$(本质上) 得到。

• 对于像 $C^\flat$ 这样的 $\binom{0}{2}$ 张量，不存在客观的“迹”；而 Tr(C) 是客观的，因为 C 是一个自同态（$\simeq$ 一个 $\binom{1}{1}$ 张量）。

• 二阶张量的李导数取决于张量的型；像 C 这样的 $\binom{1}{1}$ 张量的李导数给出雅曼导数，通常比像 $C^\flat$ 这样的 $\binom{0}{2}$ 张量的李导数更受青睐，后者是下对流李导数，参见备注 G.13。

因此，在力学中引入并使用 $C^\flat$ 大多只会徒增复杂性，还会妨碍对协变性与逆变性之分等基本概念的理解。

备注 G.13 解释问题（关于 Jaumann）。

$2\mathcal{D} = d\vec{v} + d\vec{v}^T$给出 $2\frac{D\mathcal{D}}{Dt} = \frac{D}{Dt}(d\vec{v} + d\vec{v}^T) = d\dot{\vec{\gamma}} + d\dot{\vec{\gamma}}^T - d\vec{v}.d\vec{v} - d\vec{v}^T.d\vec{v}^T)$，因此，结合 (G.23)，并牢记其矩阵意义，

$$\begin{aligned} C''(t) &= F(t)^T.(2\frac{D\mathcal{D}}{Dt} + d\vec{v}.d\vec{v} + d\vec{v}^T.d\vec{v}^T + 2d\vec{v}^T.d\vec{v})(t, p(t)).F(t) \\ &= 2F(t)^T.(\frac{D\mathcal{D}}{Dt} + \mathcal{D}.d\vec{v} + d\vec{v}^T.\mathcal{D})(t, p(t)).F(t). \end{aligned} \tag{G.31}$$

$\frac{D\mathcal{D}}{Dt} + \mathcal{D}.d\vec{v} + d\vec{v}^T.\mathcal{D}$项看起来像是下对流李导数，但其中用的是 $d\vec{v}^T$而非 $d\vec{v}^*$，参见 (9.58)；因此，你可能会看到 (G.31) 写成 $C'' = 2F^T.\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{D}.F$。然而，使用下对流李导数会得到令人失望的结果（通常更倾向于使用 Jaumann）。事实上，应使用 $\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{D}^\flat$ （下对流李导数），其中 $\mathcal{D}^\flat_g := \frac{d\vec{v}^\flat_g + (d\vec{v}^\flat_g)^T}{2}$，以得到 ($C^\flat$) $'' = 2F^T.\mathcal{L}_{\vec{v}}\mathcal{D}^\flat_g.F$。 ∎

G.5 伸长比和变形角

这里，$(\cdot,\cdot)_g = (\cdot,\cdot)_G$，也就是说，在 t_0和 t处，我们使用相同的欧几里得点积，以便用相同的测量单位比较长度。（如果 $(\cdot,\cdot)_g \neq (\cdot,\cdot)_G$，那么就使用 $(\cdot,\cdot)_g = \mu^2(\cdot,\cdot)_G$。）

G.5.1 伸长比

$\vec{}$ $\vec{}$杆在 $P \in \mathbb{R}^n_{t_0}$ 处、 t_0 与 t 之间的伸长比定义为

$$\lambda(\vec{W}_P) := \frac{||\vec{w}_p||_G}{||\vec{W}_P||_G} = \frac{||F_P.\vec{W}_P||_G}{||\vec{W}_P||_G} \quad (= ||F_P.(\frac{\vec{W}_P}{||\vec{W}_P||_G})||_G) \tag{G.32}$$

其中， $\vec{w}_p = F_P.\vec{W}_P$是运动在 $p = \Phi$处对 P作用后得到的变形向量。也就是说，简言之

$$\forall \vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \text{ s.t. } ||\vec{W}|| = 1, \quad \lambda(\vec{W}) := ||F.\vec{W}||. \tag{G.33}$$

（你可能会看到： $\lambda(d\vec{X}) = ||F.d\vec{X}||$，其中 $d\vec{X}$是单位向量（！）；应避免使用这种记号，见第 4.3 节。）

G.5.2 变形角

回顾：在 $P \in \Omega_{t_0}$ 处，$\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} - \{\vec{0}\}$ 中的两个向量 $\vec{W}_1$ 和 $\vec{W}_2$ 所形成的角度 $\theta_{t_0} = (\vec{W}_1, \vec{W}_2)$由下式给出：$\cos(\theta_{t_0}) = \frac{W_1}{||\vec{W}_1||_G} \bullet \frac{W_2}{||\vec{W}_2||_G} (= (\frac{W_1}{||\vec{W}_1||_G}, \frac{W_2}{||\vec{W}_2||_G})_G)$。

对于位于 $p = \Phi^{t_0}_t(P)$ 的变形向量 $\vec{w}_i = F.\vec{W}_i$，变形角定义为 θ_t

$$\cos(\theta_t) := (\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2}) = \frac{\vec{w}_1}{||\vec{w}_1||} \bullet \frac{\vec{w}_2}{||\vec{w}_2||} = \frac{F.\vec{W}_1}{||F.\vec{W}_1||} \bullet \frac{F.\vec{W}_2}{||F.\vec{W}_2||} \quad (= \frac{(C.\vec{W}_1) \bullet \vec{W}_2}{||\vec{w}_1||\,||\vec{w}_2||}). \tag{G.34}$$

G.6 C的分解

G.6.1 球形张量与偏张量

定义 G.14 变形球张量为

$$C_{sph} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(C)\, I, \tag{G.35}$$

其中，$\mathrm{Tr}(C) =$ 是自同态 C 的迹（ $\binom{0}{2}$ 张量 C的没有“迹”）。

定义 G.15 偏张量为

$$C_{dev} = C - C_{sph}. \tag{G.36}$$

（因此 $\mathrm{Tr}(C_{dev}) = 0$ ，且 $C = C_{sph} + C_{dev}$。 ）

G.6.2 刚体运动

当且仅当对所有 t_0, t，变形都是刚性的，

$$(F_t^{t_0})^T.F_t^{t_0} = I, \quad \text{i.e.} \quad C_t^{t_0} = I, \quad \text{written} \quad C = I = F^T.F. \tag{G.37}$$

因此，经过刚体运动后，长度和角度保持不变。

G.6.3 C的对角化

命题 G.16 $C = F^T.F$为对称正定，因此 C可对角化，其特征值均为正定，且 $\mathbb{R}^n_{t_0}$ 有一组由 C的特征向量构成的正交归一基。

证明。$(C(P).\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (F(P).\vec{W}_1, F(P).\vec{W}_2)_g = (\vec{W}_1, C(P).\vec{W}_2)_G$，因此 C是$(\cdot,\cdot)_G$-对称的。$(C.\vec{W}_1, \vec{W}_1)_G = (F.\vec{W}_1, F.\vec{W}_1)_g = ||F.\vec{W}_1||_g^2 > 0$ 当 $\vec{W}_1 \neq \vec{0}$时成立，因为 F可逆（假设 $\Phi_t^{t_0}$是微分同胚）。因此 C 是$(\cdot,\cdot)_G$-对称正定实自同态。 ∎

定义 G.17 设 λ_i 为 C的特征值。则 $\sqrt{\lambda_i}$ 称为主伸长。对应特征向量给出主方向。

G.6.4 莫尔圆

本节讨论 $3*3$ 对称正定自同态的一般性质，例如 $C_t^{t_0}(P)$。

考虑 $\vec{\mathbb{R}}^3$ 带有欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathbb{R}^3}$ ，以及 $(\cdot,\ \cdot)_{\mathbb{R}^3}$-正交归一基 $(\vec{a}_i)$。

设 $\mathcal{M}$: $\vec{\mathbb{R}}^3 \to \vec{\mathbb{R}}^3$ 是一个对称正定自同态。因此， $\mathcal{M}$ 在一个 $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^3}$-正交归一基 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 下可对角化，也就是说， $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\exists \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$使得

$$\mathcal{M}.\vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i \quad \text{and} \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ij}, \quad \text{so} \quad [\mathcal{M}]_{|\vec{e}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{G.38}$$

并且，正交归一基（$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$）按如下顺序排列： $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ （> 0）。

令 S为 $\mathbb{R}^3$中的单位球面，即集合 $\{$（x, y, z）： $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$。其在 $\mathcal{M}$下的像 $\mathcal{M}$（S）是椭球面 $\{$（x, y, z）： $\frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} = 1\}$。接着考虑 $\vec{n} = \sum_i n_i \vec{e}_i$ 使得 $||\vec{n}||_{\mathbb{R}^3} = 1$:

$$[\vec{n}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \tag{G.39}$$

因此，其像 $\vec{A} = \mathcal{M}.\vec{n} \in \mathcal{M}(S)$ 满足

$$\vec{A} = \mathcal{M}.\vec{n}, \quad [\vec{A}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 n_1 \\ \lambda_2 n_2 \\ \lambda_3 n_3 \end{pmatrix}. \tag{G.40}$$

接着定义

$$A_n = (\vec{A}, \vec{n})_{\mathbb{R}^3}, \quad \vec{A}_\perp = \vec{A} - A_n \vec{n}, \quad A_\perp := ||\vec{A}_\perp||. \tag{G.41}$$

因此 $\vec{A} = A_n \vec{n} + \vec{A}_\perp \in \mathrm{Vect}\{\vec{n}\} \otimes \mathrm{Vect}\{\vec{n}\}^\perp$。（备注： $\vec{A}_\perp$ 与椭球面 $\mathcal{M}(S)$ 不构成标准正交关系，但与初始球面 S 构成标准正交关系。）

莫尔圆的用途：寻找一种关系：

$$A_\perp = f(A_n), \tag{G.42}$$

“法向力 A_n”（相对于初始球面）与“切向力$A_\perp$”（相对于初始球面）之间的关系。

(G.39)、(G.40) 和 $A_n = (\mathcal{M}.\vec{n},\ \vec{n})_{\mathbb{R}^3}$ 给出

$$\begin{cases} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \\ \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2 = A_n \\ \lambda_1^2 n_1^2 + \lambda_2^2 n_2^2 + \lambda_3^2 n_3^2 = ||\vec{A}||^2 = A_n^2 + A_\perp^2. \end{cases} \tag{G.43}$$

这是一个以 $n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2$ 为未知数的线性方程组。其解为

$$\begin{cases} n_1^2 = \dfrac{A_\perp^2 + (A_n - \lambda_2)(A_n - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}, \\ n_2^2 = \dfrac{A_\perp^2 + (A_n - \lambda_3)(A_n - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ n_3^2 = \dfrac{A_\perp^2 + (A_n - \lambda_1)(A_n - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \end{cases} \tag{G.44}$$

n_i^2为非负数，并且有 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq 0$，我们得到

$$\begin{cases} A_\perp^2 + (A_n - \lambda_2)(A_n - \lambda_3) \geq 0, \\ A_\perp^2 + (A_n - \lambda_3)(A_n - \lambda_1) \leq 0, \\ A_\perp^2 + (A_n - \lambda_1)(A_n - \lambda_2) \geq 0. \end{cases} \tag{G.45}$$

接着令 $x = A_n$ 和 $y = A_\perp$，并考虑对于某个 $a,\ b \in \mathbb{R}$，方程

$$y^2 + (x-a)(x-b) = 0, \quad \text{so} \quad (x - \frac{a+b}{2})^2 + y^2 = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

这是一个圆的方程，其圆心位于（$\frac{a+b}{2}$，0），半径为 $\frac{|a-b|}{2}$。

因此，(G.45)$_2$表明 A_n 和 $A_\perp$ 位于圆心为（$\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}$，0）、半径为 $\frac{\lambda_1-\lambda_3}{2}$的圆内，而 (G.45)$_{1,3}$表明 A_n 和 $A_\perp$ 位于其他圆外（这些圆与第一个圆相邻且包含于其中，见图）。

练习 G.18 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$，会发生什么情况?

Answer. Then $\left\{ \begin{array}{l} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \dfrac{A_n}{\lambda_1}, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \dfrac{A_n^2 + A_\perp^2}{\lambda_1^2}. \end{array} \right\}$ Thus $A_n = \lambda_1$ and $A_n^2 + A_\perp^2 = \lambda_1^2$, thus $A_\perp = 0$. Here $C = \lambda_1 I$, 方程为:$\mathrm{d}_\perp$ ⊧ i h dil i A 0. ∎

练习 G.19 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 > 0$，会发生什么情况?

Answer. Then $\left\{ \begin{array}{l} n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \\ \lambda_1(1 - n_3^2) + \lambda_3 n_3^2 = A_n, \\ \lambda_1^2(1 - n_3^2) + \lambda_3^2 n_3^2 = A_n^2 + A_\perp^2. \end{array} \right\}$ Thus $A_n = \lambda_1 - (\lambda_1 - \lambda_3)n_3^2 \in [\lambda_3, \lambda_1]$, and $A_\perp = \pm(\lambda_1^2 - (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)n_3^2 - A_n^2)^{\frac{1}{2}}$,，其中 $A_n^2 + A_\perp^2$ 是半径为 λ_1^2的圆 $(1 - n_3^2)$ 上的一点 $+\lambda_3^2 n_3^2$. ∎

G.7 格林–拉格朗日变形张量 E

(G.13) 给出 $(\vec{w}_1,\ \vec{w}_2)_g = (F.\vec{W}_1,\ F.\vec{W}_2)_g = (C.\vec{W},\ \vec{W})_G$ 在 $p = \Phi(P)$ 处，因此

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g - (\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = ((C - I).\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G. \tag{G.46}$$

定义 G.20 </style}相对于 t_0 和 t的格林–拉格朗日张量（或格林–圣维南张量）在 P 处是自同态 $E_t^{t_0}(P) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$，其定义为

$$E_t^{t_0}(P) := \frac{C_t^{t_0}(P) - I_{t_0}}{2}, \quad \text{in short} \quad \boxed{E = \frac{C - I}{2}} \quad (= \frac{F^T.F - I}{2}). \tag{G.47}$$

（特别是对于刚体运动 $E = 0$。）并且 $E_t^{t_0}$: $\Omega_{t_0} \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 是相对于 t_0 和 t的格林–拉格朗日张量。

之所以如此，是因为$_{1\,2}$ $(C_{\cdot}, .) = (F_{\cdot}, F_{\cdot})$ 对应于“运动的平方”，见下面的线性化。

于是我们得到 $E_P^{t_0}(t) = \frac{1}{2}(C_P^{t_0}(t) - I_{t_0})$ 关于时间的泰勒展开，其中 $p(t) = \Phi_P^{t_0}(t)$，并且根据（G.25）：

$$\begin{aligned} E_P^{t_0}(t+h) &= F_P^{t_0}(t)^T.\big(h\,\frac{d\vec{v} + d\vec{v}^T}{2} + \frac{h^2}{2}\,(\frac{d\vec{\gamma} + d\vec{\gamma}^T}{2} + d\vec{v}^T.d\vec{v})\big)(t, p(t)).F_P^{t_0}(t) + o(h^2) \\ &= F_P^{t_0}(t)^T.\big(h\,\mathcal{D} + h^2\,((\frac{D\mathcal{D}}{Dt} + \mathcal{D}.d\vec{v} + d\vec{v}^T.\mathcal{D})(t, p(t))).F_P^{t_0}(t) + o(h^2). \end{aligned} \tag{G.48}$$

G.8 小变形（线性化）：无穷小应变张量 ε

G.8.1 兰道记号：大-O 和小-o

提醒。设 f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$。

$$f = O(g) \text{ near } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists C > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x\ s.t.\ |x - x_0| < \eta,\ |f(x)| < C|g(x)|. \tag{G.49}$$

并且 f 被称为在 x_0附近“与 g可比”。

如果 $|g| > 0$，那么结论为 $\frac{|f\ x|}{|g\ x|}() () | < C$; 并且 $f = O(x^n)$ 在 x=0 附近当且仅当 $|f_{(\ x\ +}{}_{|x^n|} < C$)在 x=0附近。

And

$$f = o(g) \text{ near } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x\ s.t.\ |x - x_0| < \eta,\ |f(x)| < \varepsilon|g(x). \tag{G.50}$$

并且 f 被称为“在 x_0附近与 g 相比可忽略”。

如果 $|g| > 0$，那么结论为 $\frac{|f\ x|}{|g\ x|}() () | \xrightarrow{x \to x_0} 0$。并且 $f = o(x^n)$ 在 x=0 附近当且仅当 $|f_{(\ x\ +}{}_{|x^n|} \longrightarrow_{x \to 0} 0$)。

G.8.2 无穷小应变张量 ε的定义

假设该运动为 C^2。沿着轨迹，当 $F_P^{t_0}(t_0) = I$ 时，在 t_0 附近，

$$F_P^{t_0}(t_0 + h) = I + O(h), \tag{G.51}$$

因此，对所有 $\vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，都有 $F_P^{t_0}(t_0 + h).\vec{W} = \vec{W} + O(h)$，即在 t_0 附近，

$$||\vec{w} - \vec{W}|| = O(h) \quad \text{when} \quad \vec{w} = F_P^{t_0}(t_0 + h).\vec{W}. \tag{G.52}$$

这假设始终采用唯一的内积 $(\cdot,\ \cdot)_G = (\cdot,\ \cdot)_g$，且 (G.52) 表示在 t_0 附近的 $||\vec{w} - \vec{W}||_g = O(h)$。

定义 G.21 若 $(\cdot,\ \cdot)_g$是一个始终不变的内积，且 $(\vec{e}_i)$ 是一个始终不变的 $(\cdot,\ \cdot)_g$-正交归一基，则 P 处的无穷小应变张量是由下式定义的矩阵

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}(P)]_{|\vec{e}} = \frac{[F(P)]_{|\vec{e}} + [F(P)]^T_{|\vec{e}}}{2} - [I], \tag{G.53}$$

简略地滥用记号写作，

$$\underline{\underline{\varepsilon}} := \frac{F + F^T}{2} - I \quad (\text{matrix meaning}). \tag{G.54}$$

（更准确地说，在 $P \in \Omega_{t_0}$处以及在 t_0与 t之间，$[\varepsilon_t^{t_0}(P)]_{|\vec{e}} = {}^{[F_t^{t_0}}{}_{\underline{(P)]_{|\vec{e}} + [F_t^{t_0}(\quad P\ ]^T_{|\vec{e}}}}{2} - [I]$)。）

So $\underline{\underline{\varepsilon}}.\vec{W} = \frac{F.\vec{W} + F^T.\vec{W}}{2} - .\vec{W}$ means $[\underline{\underline{\varepsilon}}]_{|\vec{e}}.[\vec{W}]_{|\vec{e}} = \frac{[F]_{|\vec{e}}.[\vec{W}]_{|\vec{e}} + [F]^T_{|\vec{e}}.[\vec{W}]_{|\vec{e}}}{2} - [\vec{W}]_{|\vec{e}}$.

备注 G.22 ε 在 (G.54) 中不能是张量（不能是函数），因为 $F_t^{t_0}(P)$：$\mathbb{R}^n_{t_0} \to \mathbb{R}^n_t$和$F_t^{t_0}(P)^T$：$\mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_{t_0}$ 以及 I_{t_0}：$\mathbb{R}^n_{t_0} \to \mathbb{R}^n_{t_0}$的定义域并不相同。

因此，ε 不是函数，也不是张量：它是一个矩阵.....但被称为“无穷小应变张量”.....

命题 G.23 格林–拉格朗日张量 $E = \frac{F^T.F-I}{2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_{t_0};\ \mathbb{R}^n_{t_0})$在 t_0 附近满足 :

$$E = \varepsilon + o(t-t_0) \quad (= \frac{F+F^T}{2} - I + o(t-t_0)) \quad (matrix\ meaning), \tag{G.55}$$

这意味着 $[E] = [\varepsilon] + o(t-t_0)$。因此，对于“小变形”，我们写作 $E \simeq \varepsilon$，即 $E \cong \frac{F+F^T}{2} - I$.

解释：*(G.55)* 是 E 的线性化，因为我们保留了“二次” $E = \frac{1}{2}(F^T.F - I)$ 的线性部分，该部分由 $(E.\vec{W}, \vec{U})_g = \frac{1}{2}\big((F.\vec{W}, F.\vec{U})_g - (\vec{W}, \vec{U})_g\big)$ 给出，对所有 $\vec{U}, \vec{W} \in \mathbb{R}^n_{t_0}$ 都成立（“运动的平方”，参见 $(F\cdot, F\cdot)_g$ 项）。

证明。选取一个 $(\cdot,\cdot)_g$-正交归一基，$[F^T] = {}^{(G.3)}[F]^T$，因此 $[C] = [F]^T.[F]$，因此

$$2[E] = [C] - [I] = [F]^T.[F] - [I] = ([F]^T - [I]).([F] - [I]) + [F]^T + [F] - 2[I]. \tag{G.56}$$

于是，在 t_0 附近且满足 $h = t-t_0$ 时，(G.51) 给出 $([F]^T - [I]).([F] - I]) = O(h)O(h) = O(h^2)$，因此$2[E] = [F]^T + [F] - 2[I] + O(h)$，因此 (G.55)。

H 指张量 $F.F^T$ （左 Cauchy–Green 张量）

Finger 方法与相对论基础（伽利略经典相对论或爱因斯坦广义相对论）相一致：我们只能在当前时刻 t 进行测量，并且可以参照过去。

存在许多误解，正如柯西–格林变形张量 C 的情况一样，这源于缺乏精确的定义：定义域？值域？所涉及的点（p 还是 P）？欧几里得点积（英语？法语？）？协变性？逆变性？.....

H.1 定义

设 $\widetilde{\Phi}$ 为运动，$t_0 \in \mathbb{R}$、Φ^{t_0} 为关联运动，$P \in \Omega_{t_0}$、$t \in \mathbb{R}$，且 $F_t^{t_0}(P) := d\Phi_t^{t_0}(P) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_{t_0};\ \mathbb{R}^n_t)$。并设 $(\cdot,\cdot)_G$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$ 分别是 $\mathbb{R}^n_{t_0}$ 和 $\mathbb{R}^n_t$ 中的欧几里得点积。

定义 H.1 在 t 处相对于 t_0 的 Finger 张量 $b_t^{t_0}(p_t)$，即左 Cauchy–Green 变形张量，是由下式定义的自同态 $\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_t;\ \mathbb{R}^n_t)$，其中 $P = \Phi_t^{t_0\,-1}(p_t)$，

$$\underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t) := F_t^{t_0}(P).(F_t^{t_0})^T_{Gg}(p_t) \quad \text{written in short} \quad \boxed{b = F.F^T}, \tag{H.1}$$

也就是说，它由 $(\underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t).\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g = (F_t^{t_0}(P)^T.\vec{w}_1, F_t^{t_0}(P)^T.\vec{w}_2)_G = ((F_t^{t_0})^T(p_t).\vec{w}_1, (F_t^{t_0})^T(p_t).\vec{w}_2)_G$，对所有位于 $p_t \in \Omega_t$ 的 $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ 向量定义，简写为

$$(\underline{\underline{b}}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g = (F^T.\vec{w}_1, F^T.\vec{w}_2)_G. \tag{H.2}$$

（与 $C = F^T.F$ 和 $(C.\vec{W}_1,\ \vec{W}_2)_G = (F.\vec{W}_1,\ F.\vec{W}_2)_g$ 比较。）

相对于 t_0 的 Finger 张量为

$$\underline{\underline{b}}^{t_0} : \begin{cases} \mathcal{C} = \bigcup_t (\{t\} \times \Omega_t) \ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_t; \mathbb{R}^n_t) \\ \qquad\qquad (t, p_t) \ \to \underline{\underline{b}}^{t_0}(t, p_t) := \underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t). \end{cases} \tag{H.3}$$

注意：b^{t_0} 看起来像一个欧拉函数，但实际上不是，因为它依赖于一个 t_0。

发现的另一种定义：

$$B_t^{t_0} := \underline{\underline{b}}_t^{t_0} \circ (\Phi_t^{t_0})^{-1}, \quad \text{i.e.} \quad B_t^{t_0}(P) := \underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t) = F_t^{t_0}(P).F_t^{t_0}(P)^T, \quad \text{written} \quad B = F.F^T. \tag{H.4}$$

请注意：$B_t^{t_0}(P) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n_t;\ \mathbb{R}^n_t)$ 是在 t 处、p_t 上的自同态，而不是在 t_0 处、P 上的自同态：例如，$B_t^{t_0}(P).\vec{w}_t(p_t) = b_t^{t_0}(p_t).\vec{w}_t(p_t)$ 有意义，而 $B_t^{t_0}(P).\vec{W}_{t_0}(P)$ 则毫无意义。

注 H.2 Φ 对柯西–格林变形张量 $C = F^T.F$的推前为$\Phi_*(C) = F.C.F^{-1} = F.F^T = b$，参见 (8.15)：它就是 Finger 张量。因此，$\mathbb{R}^n_{t_0}$中的自同态 C是 $\mathbb{R}^n_t$中的自同态 b 的拉回。（然而，推前和拉回都不依赖任何内积，而转置的 F^T 则依赖.....）。

H.2 $\underline{\underline{b}}^{-1}$

通过拉回（迈向 t处的虚功率原理）。利用 $p_t = \Phi_t^{t_0}(P)$ 和 $\vec{W}_i(P) = (F_t^{t_0}(P))^{-1}.\vec{w}_i(p_t)$:

$$(\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (F^{-1}.\vec{w}_1, F^{-1}.\vec{w}_2)_G = (F^{-T}.F^{-1}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g = (\underline{\underline{b}}^{-1}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g. \tag{H.5}$$

因此，$b^{-1} := (b_t^{t_0})^{-1}$ 很有用:

$$(\underline{\underline{b}}_t^{t_0})^{-1} : \begin{cases} \Omega_t & \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n; \vec{\mathbb{R}}_t^n) \\ p_t & \to (\underline{\underline{b}}_t^{t_0})^{-1}(p_t) = F_t^{t_0}(P)^{-T}.F_t^{t_0}(P)^{-1} = H_t^{t_0}(p_t)^T.H_t^{t_0}(p_t) \end{cases} \tag{H.6}$$

其中 $p_t = \Phi_t^{t_0}(P)$ 和 $H_t^{t_0}(p_t) = (F_t^{t_0}(P))^{-1}$ 参见 (4.41)。因此我们可以定义

$$(\underline{\underline{b}}^{t_0})^{-1} : \begin{cases} \bigcup_t (\{t\} \times \Omega_t) & \to \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n; \vec{\mathbb{R}}_t^n) \\ (t, p_t) & \to (\underline{\underline{b}}^{t_0})^{-1}(t, p_t) := (\underline{\underline{b}}_t^{t_0})^{-1}(p_t). \end{cases} \tag{H.7}$$

备注：$(\underline{\underline{b}}^{t_0})^{-1}$ 看起来像一个欧拉函数，但实际上不是，因为它依赖于 t_0。

简而言之:

$$\underline{\underline{b}}^{-1} = H^T.H, \quad \text{to compare with} \quad C = F^T.F, \tag{H.8}$$

并且有 $\vec{w} = F.W$,

$$\underline{\underline{b}}^{-1}.\vec{w} = H^T.\vec{W}, \quad \text{to compare with} \quad C.\vec{W} = F^T.\vec{w}, \tag{H.9}$$

并且有 $\vec{W}_i = F^{-1}.\vec{w}_i$，即 $\vec{w}_i = F.\vec{W}_i$,

$$(\underline{\underline{b}}^{-1}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g = (\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G, \quad \text{to compare with} \quad (C.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g. \tag{H.10}$$

备注 H.3 $p_t = \Phi_t^{t_0}(P)$ 和 $b(p_t) = F(P).F(P)^T$以及 $C(P) = F(P)^T.F(P)$ 给出

$$\underline{\underline{b}}(p_t).F(P) = F(P).C(P), \tag{H.11}$$

写作 $b = F.C.F^{-1}$。因此 $b^{-1} = F.C^{-1}.F^{-1}$，所以

$$\Phi_t^{t_0 *}\underline{\underline{b}}^{-1} = F^{-1}.\underline{\underline{b}}^{-1}.F = F^{-1}.F^{-T} = (F^T.F)^{-1} = C^{-1}, \tag{H.12}$$

即 b^{-1} 的拉回是 $\underline{\underline{C}}^{-1}$，也就是说 $\underline{\underline{b}}^{-1}$ 是 C^{-1} 的推前。 ∎

H.3 b^{-1} 的时间导数

由 (H.7)，令 $(\underline{\underline{b}}^{t_0})^{-1} =$记为$b^{-1} = H^T.H$。因此，沿着一条轨迹，并结合 (4.45)，我们得

$$\begin{aligned} \frac{D\underline{\underline{b}}^{-1}}{Dt} &= \frac{DH^T}{Dt}.H + H^T.\frac{DH}{Dt} = -d\vec{v}^T.H^T.H - H^T.H.d\vec{v} \\ &= -\underline{\underline{b}}^{-1}.d\vec{v} - d\vec{v}^T.\underline{\underline{b}}^{-1}. \end{aligned} \tag{H.13}$$

练习 H.4 用 (H.10) 证明 (H.13)。

答案。(H.10) 给出 $\frac{D}{Dt}(b^{-1}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g = 0 = (\frac{Db^{-1}}{Dt}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g + (b^{-1}.\frac{D\vec{w}_1}{Dt}, \vec{w}_2)_g + (b^{-1}.\vec{w}_1, \frac{D\vec{w}_2}{Dt})_g$，并且$\vec{w}_i(t, p(t)) = F^{t_0}(t, P).\vec{W}t_0(P)$ 给出 $\frac{D\vec{w}_i}{Dt} = d\vec{v}.\vec{w}_i$，因此 $(\frac{Db^{-1}}{Dt}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g + (b^{-1}.d\vec{v}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g + (b^{-1}.\vec{w}_1, d\vec{v}.\vec{w}_2)_g = 0$，从而得到 (H.13)。 ∎

练习 H.5 证明 (H.13)，其中 $F^T.b^{-1}.\underline{\underline{F}} = I_{t_0}$。

答案. $b^{-1} = (F.F^T)^{-1} = F^{-T}.F^{-1}$给出 $F^T.b^{-1}.F = I_{t_0}$，因此 $(F^T)'.b^{-1}.F + F^T.\frac{Db^{-1}}{Dt}.\underline{\underline{F}} + F^T.b^{-1}.F' = 0$，因此 $F^T.d\vec{v}^T.b^{-1}.F + F^T.\underline{\frac{Db^{-1}}{Dt}}.F + F^T.b^{-1}.d\vec{v}.F = 0$，因此 (H.13)。 ∎

H.4 欧拉–阿尔曼西张量 a

欧拉–阿尔曼西方法与相对论基础（伽利略相对性或爱因斯坦广义相对论）相一致：我们只能在当前时间 t 进行测量，也可以回顾过去。

在 ti n Ω_t 中，考虑 Finger 张量 $b = \underline{\underline{F}}.F^T$及其逆函数 $b^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-T}.F^T = H^T.H$，参见 (H.8) .

定义 on H.6 在 $p_t \in \Omega_t$ 处的欧拉–阿尔曼西张量是自同态 $a_t^{t_0}(p_t) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n; \vec{\mathbb{R}}_t^n)$，定义为 b y

$$\underline{\underline{a}}_t^{t_0}(p_t) = \frac{1}{2}(I_t - \underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t)^{-1}) = \frac{1}{2}(I_t - H(p_t)^T.H(p_t)), \tag{H.14}$$

写成

$$\underline{\underline{a}} = \frac{1}{2}(I - \underline{\underline{b}}^{-1}) = \frac{1}{2}(I - H^T.H), \tag{H.15}$$

以便与格林–拉格朗日张量 $E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T.F - I) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n; \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$ 进行比较 .

备注： $a_{\underline{\underline{}}}^{t_0}$ 看起来像一个欧拉函数，但实际上不是，因为它依赖于 t_0。

(H.10) 给出 ($\vec{w}_i = F.\vec{W}_i$)

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g - (\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = 2(\underline{\underline{a}}.\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g, \tag{H.16}$$

以便与 $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_g - (\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = 2(E.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G$ 进行比较。（这也给出 $(a.\vec{w}_1, \underline{\underline{}} \vec{w}_2)_g = (E.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G$。）而 (H.15) 给出

$$F^T.\underline{\underline{a}}.F = E, \quad \text{i.e.} \quad \underline{\underline{a}} = F^{-T}.E.F^{-1}, \tag{H.17}$$

当 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$时，表示为 $\underline{\underline{}} F_t^{t_0}(P)^T.a_t^{t_0}(p).F_t^{t_0}(P) = E_t^{t_0}(P)$。

备注 H.7 $a_t^{t_0}$ 不是通过 $\Phi_t^{t_0}$对 $E_t^{t_0}$的推前（推前结果为 $F.E.F^{-1}$）。 ∎

H.5 a的时间泰勒展开

(H.13) 给出

$$\frac{D\underline{\underline{a}}}{Dt} = \frac{\underline{\underline{b}}^{-1}.d\vec{v} + d\vec{v}^T.\underline{\underline{b}}^{-1}}{2}. \tag{H.18}$$

H.6 Almansi 修正无穷小应变张量 $\widetilde{\varepsilon}$

我们现在处于 t （当前时间），并回顾过去：我们更倾向于从欧拉–阿尔曼西张量 a定义无穷小应变张量$\widetilde{\varepsilon}$，而不是从欧拉–拉格朗日张量 E定义 ε，参见§ G.8.2。

与 § G.8.2 中相同的欧几里得框架，并且矩阵意义也相同。

我们有 $I - \underline{\underline{b}}^{-1} = I - H^T.H = -(I - H^T).(I - H) + 2I - H^T - H$ 其中 H 表示 $H_t^{t_0}(p_t)$。因此，对于小位移，我们得到 $I - b^{-1} = 2I - \underline{\underline{H}}^T - H + O(h)$，于是

$$\underline{\underline{a}}(t, p(t)) = \underline{\underline{\widetilde{\varepsilon}}}(t, p(t)) + O(h) \quad \text{where} \quad \underline{\underline{\widetilde{\varepsilon}}} := I - \frac{H + H^T}{2}. \tag{H.19}$$

并且，对于 $t = t_0 + h$，我们有 $F^{t_0}(t, P) = I + (t - t_0)\, d\vec{v}(t, P) + o(t - t_0)$，参见 (4.35)，因此我们有 $H^{t_0}(t, p(t)) = F^{t_0}(t, P)^{-1} = I - (t - t_0)\, d\vec{v}(t, P) + o(t - t_0)$，当 $p(t) = \Phi^{t_0}(t, P)$ 时。因此

$$F^{t_0}(t, P) - I = I - H^{t_0}(t, p(t)) + O(t - t_0). \tag{H.20}$$

因此，对于小位移（$|t - t_0| << 1$）：

$$\underline{\underline{a}}(t, p(t)) \simeq \underline{\underline{\widetilde{\varepsilon}}}(t, p(t)) \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}^{t_0}(t, P) \quad \text{(matrix meaning)}. \tag{H.21}$$

I 极分解、弹性与客观性

I.1 F 的极分解（“等距客观性”）

假设该运动是正则的， $t_0, t \in \mathbb{R}$, $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$, $F := F_t^{t_0}(p_{t_0})$ $(= d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}))$, $(\cdot,\cdot)_G$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$ 分别是 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 和 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$ 中的欧几里得点积，并且 $C = F^T.F \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n; \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n)$。这里由于需要使用内积，因此不再采用协变客观性。

I.1.1 $F = R.U$ （右极分解）

自同态 C 是 $(\cdot,\cdot)_G$-对称正定的（假设该运动是正则的），$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^*_+$（特征值），$\exists \vec{c}_1, ..., \vec{c}_n \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$（对应特征向量），使得对于所有 $i = 1, ..., n$,

$$C.\vec{c}_i = \alpha_i \vec{c}_i \quad \text{and} \quad (\vec{c}_i) \text{ is a } (\cdot,\cdot)_G\text{-orthonormal basis in } \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}. \tag{I.1}$$

因此，如果 $(\vec{a}_i)$ 是一个 $(\cdot,\ \cdot)_G$-欧几里得基，那么 $D = P^{-1}.[C]_{\vec{a}}.P$，其中 $D = \text{diag}(\alpha_1,\ .....,\ \alpha_n) = [C]_{\vec{c}}$ 且 $P^{-1} = P^T$，$P = [P_{ij}]$ 是从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{c}_i)$ 的过渡矩阵，即由以下关系定义：$\vec{c}_j = \sum_i P_{ij}\vec{a}_i$，对所有 j 均成立。Th
en, define the end同胚 hism $U \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$, called the right stretch t张量, by, for all $i = 1., \ n$,

$$U.\vec{c}_i = \sqrt{\alpha_i}\,\vec{c}_i, \quad \text{and} \quad U \overset{\text{noted}}{=} \sqrt{C}, \tag{I.2}$$

称为主伸长。然后，定义线性映射 $R \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t)$，称为旋转映射，满足

$$R := F \circ U^{-1} \overset{\text{noted}}{=} F.U^{-1}, \tag{I.3}$$

使得

$$\boxed{F = R \circ U} \overset{\text{noted}}{=} R.U, \quad \text{called the right polar decomposition of } F. \tag{I.4}$$

命题 I.1 有:

$$C = U \circ U \overset{noted}{=} U^2, \quad U \textit{ is symmetric definite positive}, \quad R^{-1} = R^T. \tag{I.5}$$

And

$$\textit{the right polar decomposition} \quad F = R \circ U \quad \textit{is unique}: \tag{I.6}$$

若 $F = \widehat{R} \circ \widehat{U}$ 其中 $\widehat{U} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 是对称正定的，且 $\widehat{R} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 满足 $\widehat{R}^{-1} = \widehat{R}^T$、$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，则 $U = U$ 且 $R = R$。

证明。(I.2) 给出对于所有 j，参见 (I.1)，有 $(U \circ U).\vec{c}_j = \lambda \vec{c}_j = C.\vec{c}_j$，因此 $U \circ U = C$；然后 $(U^T.\vec{c}_i,\ \vec{c}_j)_G = (\vec{c}_i,\ U.\vec{c}_j)_G = (\vec{c}_i,\ \sqrt{\alpha_j}\vec{c}_j)_G = \sqrt{\alpha_j}(\vec{c}_i,\ \vec{c}_j)_G = \sqrt{\alpha_j}\delta_{ij} = \sqrt{\alpha_i}\delta_{ij} = \sqrt{\alpha_i}(\vec{c}_i,\ \vec{c}_j)_G = (\sqrt{\alpha_i}\vec{c}_i,\ \vec{c}_j)_G = (U.\vec{c}_i,\ \vec{c}_j)_G$ 对于所有 $i,\ j$ 均成立，因此 $U^T = U$（对称性）。

于是 $R^T \circ R = U^{-T} \circ F^T \circ F \circ U^{-1} = U^{-T} \circ C \circ U^{-1} = U^{-1} \circ (U \circ U) \circ U^{-1} = I_{t_0}$ 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中为恒等映射。（详细信息：$(R^T.R.\vec{W}, \vec{Z})_G = (R.\vec{W}, R.\vec{Z})_g = (F.U^{-1}.\vec{W}, F.U^{-1}.\vec{Z})_g = (F^T.F.U^{-1}.\vec{W}, U^{-1}.\vec{Z})_G = (U^2.U^{-1}.\vec{W}, U^{-1}.\vec{Z})_G = (U^{-1}.U.\vec{W}, \vec{Z})_G = (\vec{W}, \vec{Z})_G$。）因此 $R^{-1} = R^T \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$，所以 $R \circ R^T = R \circ R^{-1} = I_t$ 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中为恒等映射。

并且 $F = \widehat{R} \circ \widehat{U} = R \circ U$ 得到 $F^T \circ F = \widehat{U}^T \circ \widehat{R}^T \circ \widehat{R} \circ \widehat{U} = U^T \circ \widehat{R}^T \circ \widehat{R} \circ U$，因此 $F^T \circ F = \widehat{U}^T \circ \widehat{U}$，其中 $F^T \circ F = U^T \circ U$，因此 $\widehat{U} \circ \widehat{U} = U \circ U = \sqrt{C}$，故 $\widehat{U} = U$（正平方根的唯一性$\widehat{\ }$特征值）。由此可得 $R = R$。 ∎

I.1.2 $F = S.R_0.U$ （用于协变客观性的右移极分解）

实际上，如果不允许无处不在这一特性，我们就需要说明得更具体一些：由于我们在仿射空间 $\mathbb{R}^n$ 中进行研究，考虑 Marsden 移位算子

$$S := S^{t_0}_t(p_{t_0}) : \begin{cases} T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0}) \overset{\text{noted}}{=} \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} & \to T_{p_t}(\Omega_t) \overset{\text{noted}}{=} \vec{\mathbb{R}}^n_t \\ \vec{w}_{t_0,p_{t_0}} & \to (S.\vec{w}_{t_0,p_{t_0}})(t,p_t) = \vec{w}_{t_0,p_{t_0}} \quad \text{where} \quad p_t = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0}). \end{cases} \tag{I.7}$$

注意：1- S 如果具备时间和空间普适性礼物，看起来就是代数恒等式（否则就不是），

2- S不是拓扑恒等映射，因为在一般情形下它会改变范数：考虑 $||\vec{w}_{t_0,\ p_{t_0}}||_G$ 在 t_0 处，以及 $||S.\vec{w}_{t_0,\ p_{t_0}}||_g = ||\vec{w}_{t_0,\ p_{t_0}}||_g$ 在 t 处。

那么，令 $R_0 \in \mathcal{L}(T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0}); T_{p_{t_0}}(\Omega_{t_0}))$ =记作 $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 为如下定义的自同态，简而言之，

$$R_0 := S^{-1} \circ R \overset{\text{noted}}{=} S^{-1}.R, \quad \text{so} \quad \boxed{R = S.R_0} \quad (= S \circ R_0). \tag{I.8}$$

完整记法：$(R_0)^{t_0}_{t,\ G_g}(p_{t_0}) := (S^{t_0}_t)^{-1}(R^{t_0}_{t,\ G_g}(p_{t_0}))$.

命题 I.2 自同态 $R_0 = S^{-1} \circ R$ 是$(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0},(\cdot,\cdot)_G)$中的旋转算子：

$$R_0^{-1} = R_0^T \quad in\ (\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0},(\cdot,\cdot)_G). \tag{I.9}$$

And

$$F = S \circ R_0 \circ U. \tag{I.10}$$

解释： F 由以下部分组成：纯变形 U （ $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中的自同态）、旋转 R_0（ $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中的自同态），以及平移算子 S： $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \to \vec{\mathbb{R}}^n_t$ （从过去到现在的时间和位置）。

证明。

$$\begin{aligned}
(R_0^T.\vec{W}_2,\vec{W}_1)_G &= (R_0.\vec{W}_1,\vec{W}_2)_G \quad \text{(definition of the transposed)}\\
&= (S^{-1}.R.\vec{W}_1,\vec{W}_2)_G \quad \text{(definition of } R_0)\\
&= (R.\vec{W}_1,\vec{W}_2)_G \quad (S \text{ is the algebraic identity})\\
&= (R^T.\vec{W}_2,\vec{W}_1)_g \quad \text{(definition of } R^T)\\
&= (R^{-1}.\vec{W}_2,\vec{W}_1)_g \quad \text{(cf. (I.5))}\\
&= (R_0^{-1}.\vec{W}_2,\vec{W}_1)_G \quad (S \text{ is the algebraic identity}),
\end{aligned} \tag{I.11}$$

对所有 $\vec{W}_1$， $\vec{W}_2 \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$均成立，因此 $R_0^T = R_0^{-1}$属于 $(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$， $(\cdot$， $\cdot)_G)$。由 (I.8) 和 (I.4) 得到 (I.10) .

习题 I.3 设 $D =$ 为 diag(α_i)，设 $(\vec{a}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中的一个欧几里得基，设 P 为从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{c}_i)$ 的过渡矩阵，因此 $[C]_{|\vec{a}} = P.D.P^{-1}$；证明$[U]_{|\vec{a}} = P.\sqrt{D}.P^{-1}$。在 $(\vec{a}_i)$ 的情况下， $=(\vec{E}_i)$ 是一个 $(\cdot$， $\cdot)_g$-正交归一基吗?

答案。方程 (I.1)（对于 $j = 1,...,n$），写成矩阵方程 $[C]_{|\vec{a}}.P = P.D$，因为 $[\vec{c}_j]_{\vec{a}}$ 是 P 的第 j 列。并且，方程 (I.2)（对于 $j = 1,...,n$），写成矩阵方程 $[U]_{|\vec{a}}.P = P.\sqrt{D}$，因为$[\vec{c}_j]_{\vec{a}}$ 是 P 的第 j 列。

注 I.4 与其考虑 $R_0 \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$（参见 (I.8)），不如考虑由 $R = \widetilde{R}_0 \circ S$ 定义的 $\widetilde{R}_0 \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$，即 $\widetilde{R}_0 = R \circ S^{-1}$。

I.1.3 $F = V.R$ （左极分解）

Sa步骤比右极分解少，但需要进行拉回（用 F^{-1} 代替 F).

设 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) \in \Omega_t$，设 $\underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t) := F_t^{t_0}(p_{t_0}) \circ (F_t^{t_0})^T(p_t) \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$，记为 $b = F \circ F^T$（左 Cauchy–Green 变形张量，也称为 Finger 张量）。自同态 b为对称正定： $\exists\beta_1,...,\beta_n \in \mathbb{R}^*_+$（特征值），$\exists\vec{d}_1,...,\vec{d}_n \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$（对应特征向量），使得对所有 $i = 1,...,n$,

$$\underline{\underline{b}}.\vec{d}_i = \beta_i\vec{d}_i, \quad \text{and} \quad (\vec{d}_i) \text{ is a } (\cdot,\cdot)_g\text{-orthonormal basis in } \vec{\mathbb{R}}^n_t. \tag{I.12}$$

然后，定义 对所有 $i = 1,...,n$，定义唯一的自同态 $V \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$，称为左伸长张量：

$$V.\vec{d}_i = \sqrt{\beta_i}\vec{d}_i, \quad \text{and} \quad V \overset{\text{noted}}{=} \sqrt{\underline{\underline{b}}}. \tag{I.13}$$

（完整记法：$V_t^{t_0},_{Gg}(p_t) = \sqrt{\underline{\underline{b}}_t^{t_0}(p_t)_{Gg}}$ ）然后定义线性映射 $R_\ell \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$：

$$R_\ell := V^{-1} \circ F \overset{\text{noted}}{=} V^{-1}.F, \tag{I.14}$$

使得

$$\boxed{F = V \circ R_\ell} \overset{\text{noted}}{=} V.R_\ell, \quad \text{called the left polar decomposition of } F. \tag{I.15}$$

命题 I.5 我们有： *1-*

$$\underline{\underline{b}} = V \circ V \overset{noted}{=} V^2, \quad V \textit{ is symmetric definite positive}, \quad R_\ell^{-1} = R_\ell^T. \tag{I.16}$$

并且左极分解 $F = V \circ R$ 是唯一的。

2- $R_\ell = R$ 和 $V = R.U.R^{-1}$ （因此 U 和 V 相似），所以 U 和 V 具有相同的特征值，即对所有 i，都有 $\alpha_i = \beta_i$；而对所有 i， $d_i = R.\vec{c}_i$ 给出了特征向量之间的关系。

证明。1- 用 F^{-1}和 $b^{-1}=(F^{-1})^T.(F^{-1})$ 代替 F和 $C=F^T.F$，得到 $F^{-1}=R_\ell^{-1}.U_\ell^{-1}$，参见 (I.3)；因此 $F=U_\ell.R_\ell$；再令 $U_\ell=V$，得到 (I.15) 和 (I.16)。

2- $V.R_\ell=F=R.U=(R.U.R^{-1}).R$，因此，根据右极分解的唯一性，$V=R.U.R^{-1}$（所以 U和 V 相似），且 $R_\ell=R$。因此，由 (I.12)，$\beta_i\vec{d}_i=V.\vec{d}_i=R.U.(R^{-1}.\vec{d}_i)$，进而由$\vec{c}_i=R^{-1}.\vec{d}_i$，则 $(\vec{c}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的正交归一基，而 $\beta_iR.\vec{c}_i=R.U.\vec{c}_i=\alpha_iR.\vec{c}_i$ 给出 $\beta_i=\alpha_i$，且$\vec{c}_i$ 是 U的特征向量，对所有 i均成立。 ∎

I.2 线弹性：经典的“张量”方法

I.2.1 经典方法（“等距客观性”）及一个问题

采用无穷小应变“张量”（它并非张量，而是矩阵）

$$\underline{\underline{\varepsilon}}=\frac{F+F^T}{2}-I, \tag{I.17}$$

均匀各向同性弹性本构定律写作（应力的矩阵方程 s)

$$(\underline{\underline{\sigma}}(\Phi)=)\quad \underline{\underline{\sigma}}=\lambda\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})I+2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}, \tag{I.18}$$

其中 λ,μ 是拉梅系数，σ 是柯西应力“张量”。

问题： 回顾一下：将 F 和 F^T 相加以构成 ε，从数学角度看毫无意义，因为 $F:\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}\to\vec{\mathbb{R}}^n_t$，而 $F^T:\ \vec{\mathbb{R}}^n_t\to\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，并且 I 是某个恒等算子：σ 不是张量。尤其是，Tr(ε) 的含义值得商榷（因为 ε 不是自同态，而 Tr(ε) 表示 $\mathrm{Tr}([\varepsilon])=\frac{\mathrm{Tr}([F])+\mathrm{Tr}([F^T])}{2}-n$），同样，$\underline{\underline{\varepsilon}}.\vec{n}=\frac{1}{2}(F.\vec{n}+F^T.\vec{n})$ 的含义也值得商榷，或者说

$$\underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}=\lambda\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\vec{n}+2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}.\vec{n} \tag{I.19}$$

因为 $\vec{n}$必须在 F对应的 $(t_0,\ p_{t_0})$ 处定义，而在 F^T对应的 $(t,\ p_t)$ 处定义。（柯西方法：$\vec{n}$在 $(t,\ p_t)$ 处定义。）

因此，尽管最终有这样的说法，ε 和 σ 都不是张量（它们没有函数意义）：它们只有值得质疑的矩阵意义（依赖观察者）$[\varepsilon]:=\frac{[F]+[F]^T}{2}-[I]$ 和

$$[\underline{\underline{\sigma}}]=\lambda\mathrm{Tr}([\underline{\underline{\varepsilon}}])[I]+2\mu[\underline{\underline{\varepsilon}}],\quad\text{and}\quad[\underline{\underline{\sigma}}].[\vec{n}]=\lambda\mathrm{Tr}([\underline{\underline{\varepsilon}}])[\vec{n}]+2\mu[\underline{\underline{\varepsilon}}].[\vec{n}]. \tag{I.20}$$

注释 I.6 若要论证将“张量”这一名称用于 ε是合理的，可以这样理解：“对于小位移，欧拉变量 p_t 和拉格朗日变量 p_{t_0} 可以混为一谈”：$p_t\simeq p_{t_0}$（因此 Ω_{t_0} 和 Ω_t “几乎相等”，所以可以考虑 $F(p_{t_0})+F^T(p_t)$）。这意味着使用零阶泰勒展开 $p_t=\Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)=p_{t_0}+o(1)$。但接下来的计算中，就不能 再使用一阶（或更高阶）泰勒展开，例如不能使用速度.....

I.2.2 泛函（张量）表述（“等距客观性”）

问题：能否将本构定律 (I.18) 修改为张量表达式（泛函表达式）？一种肯定的方案如下：

1. 考虑“右极分解” $F=R.U$ 其中 $U\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$，参见 (I.3)。格林-拉格朗日张量 $E=\frac{C-I}{2}$（$\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中的自同态）根据 (I.5) 可写为，

$$E=\frac{U^2-I_{t_0}}{2}=\frac{(U-I_{t_0})^2+2(U-I_{t_0})}{2} \tag{I.21}$$

（格林–拉格朗日张量与旋转 R 无关），因此，令 $U-I_{t_0}=O(h)$（小变形近似），得到 $p_{t_0}\in\Omega_{t_0}$ 处修正后的无穷小应变张量

$$\boxed{\widetilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}=U-I_{t_0}}\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}), \tag{I.22}$$

$\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的自同态（与 ε 比较，后者不是函数，参见前一节）。（完整记法$\widetilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{t_0}_t,_{G}g(p_{t_0})=U^{t_0}_t,_{G}g(p_{t_0})-I_{t_0}(p_{t_0})$ 在 $\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 中。）并且，对所有 $\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$，有

$$\boxed{\widetilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}.\vec{W}=U.\vec{W}-\vec{W}=R^{-1}.\vec{w}-\vec{W}}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0},\quad\text{when}\quad\vec{w}=F.\vec{W}\ (\text{push-forward}). \tag{I.23}$$

解释：从$\vec{w}=F.\vec{W}=R.U.\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_t$（经运动变形后的物体）中去除“刚体旋转”，得到 $R^{-1}.\vec{w}=U.\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$；再从中去除初始 $\vec{W}$，即可得到 $\widetilde{\varepsilon}.\vec{W}\in\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$。

具体而言， $||\widetilde{\underline{\varepsilon}}.\vec{W}||_G = ||(U-I_{t_0}).\vec{W}||_G$ 测量了 $\vec{W}$ 所经历的相对伸长。然后，你可以应用 R ，在 p_t 处回到 $\mathbb{R}^n_t$:

$$R.(\widetilde{\underline{\varepsilon}}.\vec{W}) = F.\vec{W} - R.\vec{W} = \vec{w} - R.\vec{W} \ \in \vec{\mathbb{R}}^n_t, \quad \text{when} \quad \vec{w} = F.\vec{W} = \ (\text{push-forward}). \tag{I.24}$$

2. 接着，在 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 处，考虑应力张量 $\widetilde{\Sigma}(\Phi)$ =记作 $\widetilde{\Sigma} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$（在泛函意义上良好定义），其定义为

$$\boxed{\widetilde{\Sigma} = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})I_{t_0} + 2\mu\widetilde{\underline{\varepsilon}}} = \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})I_{t_0} + 2\mu(U-I_{t_0}). \tag{I.25}$$

（迹 $\mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})$ 是良好定义的，因为 $\widetilde{\varepsilon}$ 是一个自同态。）那么，对于你在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中得到的任意 $\vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ ，在 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$,

$$\widetilde{\Sigma}.\vec{W} = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})\vec{W} + 2\mu\widetilde{\underline{\varepsilon}}.\vec{W} = \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})\vec{W} + 2\mu(U.\vec{W}-\vec{W}) \tag{I.26}$$

（在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中于泛函意义上良好定义）。然后通过 R 旋转并平移，将其变换到 p_t 处的 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$,

$$\begin{aligned} R.\widetilde{\Sigma}.\vec{W} &= \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})R.\vec{W} + 2\mu R.\widetilde{\underline{\varepsilon}}.\vec{W} = \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})R.\vec{W} + 2\mu R.(U-I_{t_0}).\vec{W} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})R.\vec{W} + 2\mu(F-R).\vec{W}, \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})R.\vec{W} + 2\mu(\vec{w} - R.\vec{W}), \quad \text{where} \quad \vec{w} = F.\vec{W} = R.U.\vec{W}. \end{aligned} \tag{I.27}$$

你已经定义了双点张量（在泛函意义上定义良好）

$$R.\widetilde{\Sigma} = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})R + 2\mu R.\widetilde{\underline{\varepsilon}} \ \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t). \tag{I.28}$$

3. 然后，你可以提出本构定律，其中应力张量（对称自同态）在 $\mathbb{R}^n_t$ 中由下式给出

$$(\widetilde{\underline{\sigma}}(\Phi) =) \quad \boxed{\widetilde{\underline{\sigma}} = R \circ \widetilde{\Sigma} \circ R^{-1}} \overset{\text{noted}}{=} R.\widetilde{\Sigma}.R^{-1} \ \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\vec{\mathbb{R}}^n_t). \tag{I.29}$$

（在泛函意义上定义良好。）并且，对于在 Ω_t 中定义的所有向量场 $\vec{w}$ ，你得到（在泛函意义上定义良好）的向量场

$$\widetilde{\underline{\sigma}}.\vec{w} = R.\widetilde{\Sigma}.R^{-1}.\vec{w} \ \in \vec{\mathbb{R}}^n_t. \tag{I.30}$$

解释 式 (I.29)-(I.30)：通过应用 R^{-1} 向后平移并进行刚性旋转，应用 Σ 对应的弹性应力定律（诺尔客观性原理），然后通过应用 R向前平移并进行刚性旋转。

式 (I.29)-(I.30) 的详细表达式：由 $\mathrm{Tr}(R.\widetilde{\varepsilon}.R^{-1}) = \mathrm{Tr}(\widetilde{\varepsilon})$（见习题 I.8），可得，在 (t,p_t) 处，

$$\begin{aligned} \widetilde{\underline{\sigma}} = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})\, I_t + 2\mu R.\widetilde{\underline{\varepsilon}}.R^{-1} &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})\, I_t + 2\mu R.(U-I_{t_0}).R^{-1} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})\, I_t + 2\mu(F.R^{-1}-I_t). \end{aligned} \tag{I.31}$$

对于任意 $\vec{w} \in \mathbb{R}^n_t$，并且由 $\vec{w} = R.W$，可得

$$\begin{aligned} \widetilde{\underline{\sigma}}.\vec{w} = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\underline{\varepsilon}})\, \vec{w} + 2\mu R.\widetilde{\underline{\varepsilon}}.\vec{W} &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})\, \vec{w} + 2\mu R.(U-I_{t_0}).\vec{W} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(U-I_{t_0})\, \vec{w} + 2\mu(R.U.R^{-1}.\vec{w}-\vec{w}). \end{aligned} \tag{I.32}$$

与经典的没有函数意义的（I.19）进行比较。

备注 I.7 这样做可以避免使用 Piola–Kirchhoff 张量。 ∎

练习 I.8 证明：$\mathrm{Tr}(R.\widetilde{\varepsilon}.R^{-1}) = \mathrm{Tr}(\widetilde{\varepsilon}) = \sum_i(\alpha_i-1)$。（注意：$\widetilde{\varepsilon}$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的自同态，而$R.\widetilde{\varepsilon}.R^{-1}$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的自同态。）

答案. $\det|^{\vec{e}}(R.\widetilde{\varepsilon}.R^{-1} - \lambda I_t) = \det|^{\vec{e}}(R.(\widetilde{\varepsilon}-\lambda I_{t_0}).R^{-1}) = \det|_{\vec{E},\vec{e}}(R).\det|^{\vec{E}}(\widetilde{\varepsilon}-\lambda I).\det|_{\vec{e},\vec{E}}(R^{-1}) = \det|^{\vec{E}}(\widetilde{\varepsilon}-\lambda I)$ 对所有欧几里得基 $(\vec{E}_i)$ 和 $(\vec{e}_i)$，其中 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 均成立。（对于 $L = \widetilde{\varepsilon}$ 和分量，$\mathrm{Tr}(R.L.R^{-1}) = \sum_i(R.L.R^{-1})^i_i = \sum_{ijk} R^i_j L^j_k (R^{-1})^k_i = \sum_{jk}(R^{-1}.R)^k_j L^j_k = \sum_{jk}\delta^k_j L^j_k = \sum_j L^j_j = \mathrm{Tr}(L)$。） ∎

练习 I.9 $\mathbb{R}^2$ 沿第一轴的伸长：原点 O，相同的欧几里得基 $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ 和欧几里得点积在所有时间均保持不变，$\xi > 0$，$t \geq t_0$，$L, H > 0$，$P \in [0, L] \times [0, H]$，$[\overrightarrow{OP}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$，以及$[\overrightarrow{O\Phi_t^{t_0}\ P}()]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} X_0 + \xi(t-t_0\ X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0)(\\ \kappa+1 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [\overrightarrow{Op}]_{|\vec{E}}$)，其中 $\kappa = \xi(t-t_0) > 0$，对于 $t > t_0$。1- 求出 $F, C, U = \sqrt{C}$和 $R = F.U^{-1}$。与经典表达式有何关系? —

2- 弹簧 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{Oc_{t_0}}(s) = X_0\vec{E}_1 + Y_0\vec{E}_2 + s\vec{W}$，即 $[\overrightarrow{OP}]_{|\vec{E}} = [\overrightarrow{Oc_{t_0}}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} X_0+sW_1 \\ Y_0+sW_2 \end{pmatrix}_{|\vec{E}}$，其中有 $s \in [0, L]$ 和 $\vec{W} = W_1\vec{E}_1 + W_2\vec{E}_2$。给出变形后的弹簧，即给出 $p = c_t(s) = \Phi_t^{t_0}(c_{t_0}(s))$，以及 $\vec{c}_t'$和伸长比。

答案. 1- $[F] = [d\Phi] = \begin{pmatrix} \kappa+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，所有时间都采用相同的欧几里得点积和基，因此 $[F^T] = [F]^T = [F]$，接着 $[C] = [F^T].[F] = [F]^2 = \begin{pmatrix} (\kappa+1)_0^{\ 2} & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$，因此 $[U] = [F] = \begin{pmatrix} \kappa+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，因此 $[R] = [I]$。所有矩阵均相对于基 $(\vec{E}_i)$ 给出，因此 F，C，U，R（例如，$C.\vec{E}_1 = (\kappa+1)^2\vec{E}_1$ 和 $C.\vec{E}_2 = \vec{E}_2$）。

由于 $R = I$ 和 $[\varepsilon] = [\varepsilon]$，(I.31) 得到通常结果 $[\sigma] = \lambda \mathrm{Tr}([\varepsilon])I + 2\mu[\varepsilon]$，参见 (I.18)（矩阵意义）。

2- $\overrightarrow{Oc_t\ s}() = \overrightarrow{O\Phi_t^{t_0}\ c_{t_0}\ s}(()) = \begin{pmatrix} (X_0+sW_1)(& & \kappa+1 \\ & Y_0+sW_2 & \end{pmatrix}_{|\vec{E}}$，因此 $\vec{c}_t'(s) = \begin{pmatrix} W_1(\\ \kappa+1 \\ W_2 \end{pmatrix}_{|\vec{E}}$)，伸长比$\frac{W_1^2(\kappa+1\ ^2+W_2^2)}{W_1^2+W_2^2}$在 (t, p_t)。

练习 I.10 $\mathbb{R}^2$ $[\overrightarrow{O\Phi_t^{t_0}\ P}]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} X+\xi\ t-t_0\ Y \\ Y \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X+\kappa Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ =简单剪切于 $[\overrightarrow{Op}]_{|\vec{E}}$：( ) ( ) 记作。回答相同的问题，并另外给出 的特征值。

答案。1- $[F] = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$[C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^2+1 \end{pmatrix}$。特征值：$\det(C - \lambda I) = \lambda^2 - (2+\kappa^2)\lambda + 1$。判别式 $\Delta = (2+\kappa^2)^2 - 4 = \kappa^2(\kappa^2+4)$。特征值 $\alpha_\pm = \frac{1}{2}(2+\kappa^2 \pm \kappa\sqrt{\kappa^2+4})$。（我们检验 $\alpha_\pm > 0$。）特征向量 $\vec{v}_\pm$（变形主方向）由 $(1-\alpha_\pm)x + \kappa y = 0$ 给出，即 $y = \frac{1}{2}(\kappa \pm \sqrt{\kappa^2+4})x$，因此，例如 $\vec{v}_\pm = \begin{pmatrix} 2 \\ \kappa \pm \sqrt{\kappa^2+4} \end{pmatrix}$。（我们检验 $\vec{v}_+ \perp \vec{v}_-$。）令 P为从 $(\vec{E}_1, \vec{E}_2)$ 到 $(\frac{\vec{v}_+}{||\vec{v}_+||}, \frac{\vec{v}_-}{||\vec{v}_-||})$ 的过渡矩阵，$D = \mathrm{diag}(\alpha_+, \alpha_-)$，得到 $C = P.D.P^{-1}$（其中 $P^{-1} = P^T$，因为这里 $(\frac{\vec{v}_+}{||\vec{v}_+||}, \frac{\vec{v}_-}{||\vec{v}_-||})$ 是正交归一基），因此 $U = P.\sqrt{D}.P^{-1}$（我们检验 $U^T = U$ 和 $U^2 = C$）。并且 $R = F.U^{-1}$。

2- $\overrightarrow{Oc_t\ s}() = \overrightarrow{O\Phi_t^{t_0}\ c_{t_0}\ s}(()) = \begin{pmatrix} (X_0+sW_1) & +\kappa\ Y_0+sW_2 \\ & Y_0+sW_2 \end{pmatrix}()$，因此 $[\vec{c}_t'(s)] = \begin{pmatrix} W_1 + \kappa W_2 \\ W_2 \end{pmatrix}$。伸长比$\frac{(W_1+\kappa W_2)}{W_1^2+W_2^{2\ 2}+W_2^2}$在 (t, p_t)。

I.2.3 第二种泛函表述：使用 Finger 张量

上述方法使用推前：它使用 F，也就是说，你带着记忆而来。你也可以选择使用拉回，即使用 F^{-1}（你记得过去，这是柯西的观点）：然后你使用 $F^{-1} = R^{-1}.V^{-1}$ F^{-1}的右极分解，并考虑张量

$$\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t = V^{-1} - I_t \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}_t^n; \vec{\mathbb{R}}_t^n), \tag{I.33}$$

and

$$(\underline{\underline{\sigma}}_t(\Phi) =) \quad \underline{\underline{\sigma}}_t = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t) I_t + 2\mu\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t, \quad \text{and} \quad \underline{\underline{\sigma}}_t.\vec{n}_t = \lambda \mathrm{Tr}(\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t)\,\vec{n}_t + 2\mu\widetilde{\widetilde{\varepsilon}}_t.\vec{n}_t. \tag{I.34}$$

（函数定义良好的量：给出一种张量方法）。

I.3 采用协变客观方法的弹性?

在 § I.2 中，您需要从欧几里得点积开始，因此结果从一开始就不可能是协变客观的。您能否不使用欧几里得点积作为起点，以建立一般定律? 提议：

假设：柯西应力 $\vec{w}$ 是一个欧拉向量场。

然后，我们可以使用（协变客观）李导数来刻画应力变化率，参见 § 9.3 和 9.5：对于粒子 $P_{Obj} \in Obj$，其在 τ处的欧拉速度为 $\vec{v}(\tau,\ p_\tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau,\ P_{Obj})$ —

$_{\sim}p_\tau = \Phi(\tau,\ P_{Obj})$，欧拉向量场 $\vec{w}$沿 $\vec{v}$的李导数在 $(t,\ p_t)$ 处为，

$$\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}(t,p_t) = \lim_{\tau\to t}\frac{\vec{w}(\tau,p_\tau)-\vec{w}_{t*}(\tau,p_\tau)}{\tau-t} = (\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}+d\vec{w}.\vec{v}-d\vec{v}.\vec{w})(t,p_t). \tag{I.35}$$

因此，提出以虚功率原理来衡量应力变化率（完整描述请参见 https://arxiv.org/abs/2208.10780v1）。

1- 假设：1.1- 假设 n 欧拉向量场 $\vec{w}_j$（“力场”） $j=1,...,n$能够表征一种材料。（事实上，对于弹性问题，用 1-形式 α_i 替代向量场 $\vec{w}_j$ 来表征功可能更合适。）

1.2- 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中选取一组基 $(\vec{e}_i)$，并设 (e^i) 是其在 $\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t$中的（协变）对偶基，则假设内功率密度在 (t,p_t) 处由下式给出（在一阶情况下）：

$$p_{\text{int}}(\vec{v}) = \sum_{j=1}^n e^j.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_j = \sum_{j=1}^n e^j.(\frac{\partial\vec{w}_j}{\partial t}+d\vec{w}_j.\vec{v}-d\vec{v}.\vec{w}_j). \tag{I.36}$$

（在二阶情况下，可以加入二阶李导数，如 $\mathcal{L}_{\vec{v}}(\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_j)$；更高阶情况也类似。）

2- 然后，为使该 p_{int} 满足框架不变性假设，选择 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中的一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$；首先，当 $d\vec{v}=0$时，内功率必须为零，因此我们得到

$$p_{\text{int}}(\vec{v}) = -\sum_{j=1}^n e^j.d\vec{v}.\vec{w}_j = -\underline{\underline{\tau}}\ \overset{\cdot}{0}\ d\vec{v},\quad \text{where}\quad \underline{\underline{\tau}} = \sum_{j=1}^n \vec{w}_j\otimes e^j, \tag{I.37}$$

定义于 t处。（ $[\tau]_{|\vec{e}}$的第 j列为 $[\vec{w}_j]_{|\vec{e}}$。）其次，当 $d\vec{v}+d\vec{v}^T=0$（旋转）时，内功率为零，因此我们得到

$$p_{\text{int}}(\vec{v}) = -\underline{\underline{\tau}}\ \overset{\cdot}{0}\ \frac{d\vec{v}+d\vec{v}^T}{2} = -\underline{\underline{\sigma}}\ \overset{\cdot}{0}\ d\vec{v}\quad \text{where}\quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\underline{\underline{\tau}}+\underline{\underline{\tau}}^T}{2}, \tag{I.38}$$

该 $p_{\text{int}}(\vec{v}) = \underline{\underline{\sigma}}\ \overset{\cdot}{0}..... d\vec{v}$ 是内功率的一阶通常表达式。

例 I.11（I.36）可应用于正交各向异性弹性，例如，对于某种材料，在某一时间 t_0，纤维沿着 $\vec{e}_1$排列。为简单起见，考虑二维情形：1- 对于由$[$给出的伸长型运动 $(\Phi_e)\ F_e\ (p_{t_0})\ ] = [d\ (\Phi_e)\ p_{t_0}\ (\ ] = \begin{pmatrix}1+\alpha_{11} & 0\\ 0 & 1-\alpha_{22}\end{pmatrix}\ p_{t_0}\ \ 0\ (p_{t_0})\ \ \overset{\cdot}{)}$，可以测量方向 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$上的杨氏模量；2- 对于由 $[\ (F_s)\ p_{t_0}\ (] = [d)\ \Phi_s\ (p_{t_0})\ ] = \begin{pmatrix}1 & \gamma_{12}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 给出的剪切型运动，可以测量剪切模量。

对于更 复杂的材料，可能需要更多向量 $\vec{w}_j$ 来描述本构定律，也就是说 ，(I.36) 可以 视为与 $\sum_{i=1}^m e^j.\mathcal{L}_{\vec{v}}\vec{w}_j$ 及 $m>n$有关。 ▪

备注 I.12 李导数方法与通常的经典方法不同：

1- 经典方法寻找一个二阶应力张量 $[\sigma]$，将其表示为变形梯度$\underline{\underline{=}}[F]$的函数，参见 (I.18)。

2- 李导数方法从内功率（用于衡量力）出发，参见 (I.36)，由此便可以构造τ 和 σ （应力张量），参见 (I.37)-(I.38)。

例如，应用$\underline{\underline{=}}$于黏弹性：$\underline{\underline{=}}$采用李导数方法时，会自动使用向量场（和/或微分形式）的李导数，而不是二阶张量场的李导数（后者似乎无法得出良好结果，参见麦克斯韦黏弹性型定律，以及第 25 页脚注[1]）。▪

J 位移

$\vec{\text{J}}$.1 位移向量 $\vec{\mathcal{U}}$

在 $\mathbb{R}^n$中，令$p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$。那么双点向量

$$\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}) = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) - I_{t_0}(p_{t_0}) = p_t - p_{t_0} = \overrightarrow{p_{t_0}p_t} \tag{J.1}$$

称为相对于 t_0 和 t、位于 p_{t_0} 处的位移向量。这定义了映射

$$\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}: \begin{cases}\Omega_{t_0} & \to\vec{\mathbb{R}}^n\\ p_{t_0} & \to\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}) := p_t-p_{t_0} = \overrightarrow{p_{t_0}p_t}\quad \text{when}\quad p_t=\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}).\end{cases} \tag{J.2}$$

备注 J.1 $\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})$ 并未定义向量场（它不是张量的），因为 $\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}) = p_t - p_{t_0} = \overrightarrow{p_{t_0}p_t}$是一个双点向量，既不属于 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$，也不属于 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$，因为 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 和 $p_t \in \Omega_t$（它需要时间和空间的普适性礼物）。特别是，在非平面曲面（流形）上，这毫无意义。详见 § J.5。 ∎

注释 J.2 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的弹性固体，函数 $\vec{\mathcal{U}}^{t_0}$ 通常被视为未知量（待求）；但真正的"未知量"是运动 Φ^{t_0}。人们有时会将其与一维弹簧的伸长情况混淆；但请看图4.1，其中 $||\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})||$ 表示弹簧的初始长度，而 $||\vec{w}_{t_0*}(t,p_t)||$表示弹簧的当前长度；与此同时，位移向量 $\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0} = p_t - p_{t_0}$的长度可能很长，而弹簧的伸长 $||\vec{w}_{t_0*}(t,p_t)|| - ||\vec{w}_{t_0}(p_{t_0})||$ 却很小。 ∎

J.2 位移向量的微分

$\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}$ 在 p_{t_0} 处的微分为

$$d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}) = d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) - I_{t_0} = F_t^{t_0}(p_{t_0}) - I_{t_0}, \quad \text{written} \quad d\vec{\mathcal{U}} = F - I, \tag{J.3}$$

因此，它并未定义为一个函数，因为 $F_t^{t_0}(p_{t_0}) : \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n \to \mathbb{R}$，而 $I_{t_0} : \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n \to \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$。

因此，$d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})$ 应理解为一个矩阵：其中

$$[\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})] = [\overrightarrow{p_{t_0}p_t}] = [\overrightarrow{O\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})}] - [\overrightarrow{Op_{t_0}}], \tag{J.4}$$

相对于原点 O 以及任意时刻的唯一基底，计算 $[d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})] = [d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0})] - I$，姑且记作 $d\vec{\mathcal{U}} = d\vec{\Phi} - I$。然后，令 $\vec{W} \in \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$，

$$d\vec{\mathcal{U}}.\vec{W} = F.\vec{W} - \vec{W}, \quad \text{which means} \quad = [F_t^{t_0}(p_{t_0})].[\vec{W}] - [\vec{W}]. \tag{J.5}$$

因此，我们定义了（矩阵意义）

$$\vec{\mathcal{U}}^{t_0} : \begin{cases} [t_0,T] \times \Omega_{t_0} & \to \vec{\mathbb{R}}^n \\ (t, p_{t_0}) & \to \vec{\mathcal{U}}^{t_0}(t,p_{t_0}) := \vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}), \end{cases} \quad \text{and} \quad \vec{\mathcal{U}}_{p_{t_0}}^{t_0} : \begin{cases} [t_0,T] & \to \vec{\mathbb{R}}^n \\ t & \to \vec{\mathcal{U}}_{p_{t_0}}^{t_0}(t) := \vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}). \end{cases} \tag{J.6}$$

J.3 变形"张量" ε（矩阵），续

（J.3）给出（矩阵意义）

$$F_t^{t_0}(p_{t_0}) = I_{t_0} + d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0}), \quad \text{written} \quad F = I + d\vec{\mathcal{U}}. \tag{J.7}$$

因此，柯西–格林变形张量 $C = F^T.F$简写为（矩阵意义 ng）

$$C = I + d\vec{\mathcal{U}} + d\vec{\mathcal{U}}^T + d\vec{\mathcal{U}}^T.d\vec{\mathcal{U}} \quad \text{(matrix meaning)}, \tag{J.8}$$

即 $[C_t^{t_0}(p_{t_0})] = [I_{t_0}] + [d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})] + [d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})]^T + [d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})]^T.[d\vec{\mathcal{U}}_t^{t_0}(p_{t_0})]$。

因此 格林–拉格朗日变形张量 $E = \frac{C-I}{2}$，参见（G.47），简写为（矩阵意义 ）

$$E = \frac{d\vec{\mathcal{U}} + d\vec{\mathcal{U}}^T}{2} + \frac{1}{2}d\vec{\mathcal{U}}^T.d\vec{\mathcal{U}} \quad \text{(matrix meaning)}. \tag{J.9}$$

因此，变形张量 ε，参见（G.54），写为（矩阵意义）

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = E - \frac{1}{2}(d\vec{\mathcal{U}})^T.d\vec{\mathcal{U}}, \tag{J.10}$$

其中 $\underline{\underline{\varepsilon}}$ E 的"线性部分"（小位移：我们只用到了一阶导数 $d\Phi_t^{t_0}$）。

J.4 小位移假设，续

（通常的引言。）设 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$、 $\vec{W}_i \in \mathbb{R}^n_{t_0}$、 $\vec{w}_i(p_t) = F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{W}_i(p_{t_0}) \in \mathbb{R}^n_t$（推前），记作 $\vec{w}_i = F.\vec{W}_i$。然后定义（矩阵意义）

$$\vec{\Delta}_i := \vec{w}_i - \vec{W}_i = d\vec{\mathcal{U}}.\vec{W}_i, \quad \text{and} \quad ||\vec{\Delta}||_\infty = \max(||\vec{\Delta}_1||_{\mathbb{R}^n}, ||\vec{\Delta}_2||_{\mathbb{R}^n}). \tag{J.11}$$

于是，小位移假设可写为（矩阵意义）：

$$||\vec{\Delta}||_\infty = o(||\vec{W}||_\infty). \tag{J.12}$$

因此， $\vec{w}_i = \vec{W}_i + \vec{\Delta}_i$（其中 $\vec{\Delta}_i$ “很小”）和假设 $(\cdot,\cdot)_g = (\cdot,\cdot)_G$（在 t_0 和 t 处具有相同的内积）给出

$$(\vec{w}_1, \vec{w}_2)_G - (\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (\vec{\Delta}_1, \vec{W}_2)_G + (\vec{\Delta}_2, \vec{W}_1)_G + (\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2)_G.$$

因此，（J.10）给出 $2(E.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = 2(\varepsilon.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G + (d\vec{\mathcal{U}}^T.d\vec{\mathcal{U}}.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G$，而（J.12）给出

$$(E.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G = (\underline{\underline{\varepsilon}}.\vec{W}_1, \vec{W}_2)_G + O(||\vec{\Delta}||^2_\infty), \tag{J.13}$$

所以， $E_t^{t_0}$可用 $\varepsilon_t^{t_0}$ 近似，也就是说， $E_t^{t_0} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}_t^{t_0}$（矩阵意义）。

J.5 微分几何中的位移向量

J.5.1 移位算子

步骤如下，参见 Marsden–Hughes [12]。引入的复杂性源于将小位移假设应用于格林–拉格朗日张量 $E = \frac{F^T.F - I}{2}$，其线性化给出 $\varepsilon = \frac{F + F^T}{2} - I$（经典方法先“对运动平方”以得到 E，然后再“线性化” E .....以得到 F.....其中还带有一个多余的 F^T）。

设 $P \in \Omega_{t_0}$, $\vec{W}_P \in \mathbb{R}^n_{t_0}$, $p_t = \Phi_t^{t_0}(P) \in \Omega_t$，并且 $\vec{w}_{p_t} = F_t^{t_0}(P).\vec{W}_P \in \mathbb{R}^n_t$（推前）。

- **仿射情形 $\mathbb{R}^n$（连续介质力学）：** 对于 $p_t = \Phi_t^{t_0}(P)$，移位张量为:

$$\widetilde{S_t^{t_0}} : \begin{cases} \Omega_{t_0} \times \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} & \to \Omega_t \times \vec{\mathbb{R}}^n_t \\ (P, \vec{Z}_P) & \to \widetilde{S_t^{t_0}}(P, \vec{Z}_P) = (p_t, S_t^{t_0}(\vec{Z}_P)) \quad \text{with} \quad S_t^{t_0}(\vec{Z}_P) = \vec{Z}_P. \end{cases} \tag{J.14}$$

（向量没有改变，但时间和作用点发生了变化：真实的观察者并没有普适性礼物。）因此:

$$S_t^{t_0} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \vec{\mathbb{R}}^n_t) \quad \text{and} \quad [S_t^{t_0}]_{|\vec{e}} = I \text{ identity matrix}, \tag{J.15}$$

选择了 t_0 处和 t 处的唯一基底后，矩阵等式便成立。并且（简化$\sim$记号） $S_t^{t_0}(P, \vec{Z}_P) =$记作 $S_t^{t_0}(\vec{Z}_P)$。那么， P 处的变形张量 ε 可定义为

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_t^{t_0}(P).\vec{Z}(P) = \frac{(S_t^{t_0})^{-1}(F_t^{t_0}(P).\vec{Z}(P)) + F_t^{t_0}(P)^T.(S_t^{t_0}(P).\vec{Z}(P))}{2} - \vec{Z}(P), \tag{J.16}$$

简言之： $\varepsilon.\vec{Z} = \frac{(S_t^{t_0})^{-1}(F.\vec{Z}) + F^T.(S_t^{t_0}.\vec{Z})}{2} - \vec{Z}$。

- **在流形中：** Ω 是一个流形（例如 $\mathbb{R}^3$ 中一个我们无法脱离的曲面）。令 $T_P\Omega_{t_0}$ 为 P 处的切空间（ P 处的纤维），$T_{p_t}\Omega_t$ 为 p_t 处的切空间（ p_t 处的纤维）。一般来说， $T_P\Omega_{t_0} \neq T_{p_t}\Omega_t$（例如球面“地球”）。 t_0 处的丛（纤维的并集）为 $T\Omega_{t_0} = \bigcup_{P \in \Omega_{t_0}} (\{P\} \times T_P\Omega_{t_0})$，而 t 处的丛为 $T\Omega_t = \bigcup_{p_t \in \Omega_t} (\{p_t\} \times T_{p_t}\Omega_t)$。那么移位算子

$$\widetilde{S_t^{t_0}} : \begin{cases} T\Omega_{t_0} & \to T\Omega_t \\ (P, \vec{Z}_P) & \to \widetilde{S_t^{t_0}}(P, \vec{Z}_P) = (p_t, S_t^{t_0}(\vec{Z}_P)), \end{cases} \tag{J.17}$$

$\vec{\ }$的定义使得 $Z_P \in T_P\Omega_{t_0}$ 沿着一条路径“尽可能少地发生扭曲”。例如，在球面上，如果$\vec{\ }$路径是测地线，且 θ_{t_0} 是 Z_P 与该测地线在 P处的切向量之间的角度，那么θ_{t_0}也是 $S_t^{t_0}(\vec{Z}_P)$ 与该测地线在 p_t 处的切向量之间的角度，并且 $S_t^{t_0}(\vec{Z}_P)$ 的长度与 $\vec{Z}_P$ 相同（以恒定速率开车时，你会认为测地线是一条直线，尽管$S_t^{t_0}(\vec{Z}_P) \neq \vec{Z}_P$：地球并非平坦）。

J.5.2 位移向量

（仿射空间框架，Ω_{t_0} 是 $\mathbb{R}^n$中的开集。）令 $P \in \Omega_{t_0}$、 $\vec{W}_P \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$、 $p_t = \Phi^{t_0}_t(P) \in \Omega_t$，以及 $d\Phi^{t_0}_t = F^{t_0}_t \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$。定义

$$\widetilde{\delta\vec{\mathcal{U}}^{t_0}_t} : \begin{cases} \Omega_{t_0} \times \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0} \ \to \Omega_t \times \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t) \\ \quad (P,\vec{Z}_P) \ \to \widetilde{\delta\vec{\mathcal{U}}^{t_0}_t}(P,\vec{Z}_P) = (p_t, \delta\vec{\mathcal{U}}^{t_0}_t(\vec{Z}_P)) \quad \text{with} \quad \delta\vec{\mathcal{U}}^{t_0}_t(\vec{Z}_P) = (F^{t_0}_t - S^{t_0}_t).\vec{Z}_P. \end{cases} \tag{J.18}$$

那么 $\delta\vec{\mathcal{U}}^{t_0}_t = F^{t_0}_t - S^{t_0}_t$是一个双点张量。而

$$\begin{aligned} C^{t_0}_t &= (F^{t_0}_t)^T.F^{t_0}_t = (\delta\mathcal{U}^{t_0}_t + S^{t_0}_t)^T.(\delta\mathcal{U}^{t_0}_t + S^{t_0}_t) \\ &= I + (S^{t_0}_t)^T.\delta\mathcal{U}^{t_0}_t + (\delta\mathcal{U}^{t_0}_t)^T.S^{t_0}_t + (\delta\mathcal{U}^{t_0}_t)^T.\delta\mathcal{U}^{t_0}_t, \end{aligned} \tag{J.19}$$

由于 $(S^{t_0}_t)^T.S^{t_0}_t = I$是 $T\Omega_{t_0}$中的恒等映射：事实上，对于所有 $\vec{A},\vec{B}$，$((S^{t_0}_t)^T.S^{t_0}_t.\vec{A},\vec{B})_{\mathbb{R}^n} = (S^{t_0}_t.\vec{A}, S^{t_0}_t.\vec{B})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{A},\vec{B})_{\mathbb{R}^n}$，参见 (J.14)。于是，格林–拉格朗日张量在 Ω_{t_0} 上定义为

$$E^{t_0}_t = \frac{1}{2}(C^{t_0}_t - I_{t_0}) = \frac{(S^{t_0}_t)^T.\delta\mathcal{U}^{t_0}_t + S^{t_0}_t.(\delta\mathcal{U}^{t_0}_t)^T}{2} + \frac{1}{2}(\delta\mathcal{U}^{t_0}_t)^T.\delta\mathcal{U}^{t_0}_t, \tag{J.20}$$

以便与 (G.47) 进行比较。

K 行列式

K.1 交替多重线性形式

设 E是一个向量空间，并令 $\mathcal{L}(E,...,E;\ \mathbb{R}) =$记为$\mathcal{L}(E^n;\ \mathbb{R})$，表示多重线性形式的集合，即当且仅当

$$m(...,\vec{x}+\lambda\vec{y},...) = m(...,\vec{x},...) + \lambda m(...,\vec{y},...) \tag{K.1}$$

对所有 $\vec{x},\vec{y} \in E$、所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及所有"槽位"均成立。特别地，对所有 $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$ 和所有 $\vec{x}_1,...,\vec{x}_n \in E$，$m(\lambda_1\vec{x}_1,...,\lambda_n\vec{x}_n) = (\prod_{i=1,...,n}\lambda_i)\ m(\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$。

定义 K.1 若 $n=1$，则 1-交替多重线性函数是线性形式，也称为 1-形式。若 $n \geq 2$，则 $\mathcal{A}\ell$：

$$\left\{ \begin{array}{ll} E^n & \to \mathbb{R} \\ \vec{v}_1\ ...\ \vec{v}_n & \to \mathcal{A}\ell(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}(E^n;\ \mathbb{R})$$

是 n-交替多重线性形式，当且仅当对所有 $\vec{u},\vec{v} \in E$，

$$\mathcal{A}\ell(...,\vec{u},...,\vec{v},...) = -\mathcal{A}\ell(...,\vec{v},...,\vec{u},...), \tag{K.2}$$

其他元素保持不变。若 $n=1$，1-形式的集合为 $\Omega^1(E) = E^*$。若 $n \geq 2$，则集合 n-交替多重线性形式为

$$\Omega^n(E) = \{m \in \mathcal{L}(E^n;\mathbb{R}) : m = \mathcal{A}\ell \text{ is alternating}\}. \tag{K.3}$$

若 $\mathcal{A}\ell,\ \mathcal{B}\ell \in \Omega^n(E)$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$，则 $\mathcal{A}\ell + \lambda\mathcal{B}\ell \in \Omega^n(E)$，这得益于对每个变量的线性性。因此，$\Omega^n(E)$ 是一个向量空间，是 $(\mathcal{F}(E^n;\mathbb{R})\ +,\ .)$ 的子空间。

K.2 莱布尼茨公式

特殊情形 $\dim E = n$。设 $\mathcal{A}\ell \in \Omega^n(E)$（一个 n-交替多重线性形式）。回顾一下（例如参见 Cartan [5]）：1-置换 σ：$[1,n]_{\mathbb{N}} \to [1,n]_{\mathbb{N}}$ 是一个双射映射（即单射且满射）；令 S_n 为 $[1,n]_{\mathbb{N}}$的所有置换构成的集合。

2- 对换 τ：$[1,n]_{\mathbb{N}} \to [1,n]_{\mathbb{N}}$是交换两个元素的置换，也就是说，$\exists i,\ j$ 使得 $\tau(...,i,...,j,...) = (...,j,...,i,...)$，其余元素保持不变。

3- 一个置换是若干对换的复合（定理留作习题，或参见 Cartan）。置换为偶置换，当且仅当对换的个数为偶数；置换为奇置换，当且仅当对换的个数为奇数。依据：置换的奇偶性（偶或奇）是不变性。

4- 置换 σ 的符号 $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ 若 σ 为偶置换则为 $+1$，若 σ 为奇置换则为 -1。

命题 K.2（莱布尼茨公式） 设 $\mathscr{A} \in \Omega^n(E)$。设$(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$ =记作$(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基。对于所有向量 $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in E$，其中 $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n v_j^i \vec{e}_i$ 对所有 j 均成立，

$$\mathscr{A}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = c \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} = c \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n v_{\tau(i)}^i \quad (\textit{with } c := \mathscr{A}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)). \tag{K.4}$$

因此，如果 $c = \mathscr{A}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$已知，那么 $\mathscr{A}$ 已知。因此 $\dim(\Omega^n(E)) = 1$。（经典记法：$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} \vec{e}_i$，$\mathscr{A}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = c \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_{\sigma(i),i} = c \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n v_{i,\tau(i)}$。）

证明。 设 $F := \mathcal{F}([1,n]_{\mathbb{N}}; [1,n]_{\mathbb{N}})$ =记作$[1,n]_{\mathbb{N}}^{[1,n]_{\mathbb{N}}}$为函数集合 $i: \begin{cases} [1,n]_{\mathbb{N}} & \to [1,n]_{\mathbb{N}} \\ k & \to i_k = i \end{cases}(k)$。$\mathscr{A}$ 由于 $\mathscr{A}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \sum_{j_1=1}^n v_1^{j_1} \mathscr{A}(\vec{e}_{j_1}, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)$ 是多重线性的（“第一列”展开）。由递推可得 $\mathscr{A}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \sum_{j_1,..., j_n=1}^n v_1^{j_1} ... v_n^{j_n} \mathscr{A}(\vec{e}_{j_1}, ..., \vec{e}_{j_n}) = \sum_{j \in F} \prod_{k=1}^n v_k^{j(k)} \mathscr{A}(\vec{e}_{j(1)}, ..., \vec{e}_{j(n)})$。

并且 $\mathscr{A}(\vec{e}_{i_1}, ..., \vec{e}_{i_n}) \neq 0$ 当且仅当 $i: k \in \{1, ..., n\} \to i(k) = i_k \in \{1, ..., n\}$ 是单射（因此是双射）。因此 $\mathscr{A}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} \mathscr{A}(\vec{e}_{\sigma(1)}, ..., \vec{e}_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} \mathscr{A}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$，这就是 (K.4) 中的第一个等式。接着 $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_{\sigma^{-1}\ i}^{\sigma(\sigma^{-1}(i))}$()，因为 σ 是双射，因此$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau^{-1}) \prod_{i=1}^n v_{\tau(i)}^i$，这就是 (K.4) 中的第二个等式，因为 $\varepsilon(\tau)^{-1} = \varepsilon(\tau)$。（参见 Cartan [5]。）∎

K.3 向量的行列式

定义 K.3 $(\vec{e}_i)_{i=1,...,n}$ 是 E中的一个基，则交替多重线性形式 $\det_{|\vec{e}} \in \Omega^n(E)$ 定义为

$$\det_{|\vec{e}}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n) = 1 \tag{K.5}$$

称为相对于$(\vec{e}_i)$的行列式。并且根据命题 K.2（此处 $c = 1$），

$$\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)} = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n v_{\tau(i)}^i \tag{K.6}$$

称为向量 $\vec{v}_i$ 相对于$(\vec{e}_i)$的行列式。记作

$$\Omega^n(E) = \mathrm{Vect}\{\det_{|\vec{e}}\} \quad (\text{the 1-D vector space spanned by } \det_{|\vec{e}}). \tag{K.7}$$

因此，若 $\mathscr{A} \in \Omega^n(E)$，则

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n) \det_{|\vec{e}}, \tag{K.8}$$

⃗因此，若(b_i)是另一个基，则

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \det_{|\vec{b}} = c \det_{|\vec{e}}, \quad \text{with} \quad c = \det_{|\vec{b}}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n). \tag{K.9}$$

⃗**练习 K.4** 测量单位变换：若 $(\vec{a}_i)$ 是一个基，且 $b_j = \lambda \vec{a}_j$ 对所有 j 都成立，证明

$$\forall j = 1, ..., n, \quad \vec{b}_j = \lambda \vec{a}_j \quad \Longrightarrow \quad \det_{|\vec{a}} = \lambda^n \det_{|\vec{b}} \tag{K.10}$$

（欧几里得情形下，测量单位变换时体积之间的关系）。

Answer. $\det_{|\vec{a}}(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n) = \det_{|\vec{a}}(\lambda \vec{a}_1, ..., \lambda \vec{a}_n) \overset{multi}{=}_{linear} \lambda^n \det_{|\vec{a}}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) \overset{(K.5)}{=} \lambda^n \overset{(K.5)}{=} \lambda^n \det_{|\vec{b}}(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n)$. ∎

命题 K.5 $\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \neq 0$ 当且仅当$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$是一个基，或者等价地，$\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = 0$ 当且仅当$\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ 线性相关。

证明。 如果其中一个 $\vec{v}_i$是 $= \vec{0}$，那么 $\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = 0$（多重线性性）；如果 $\sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i = 0$ 且其中一个 $c_i \neq 0$，那么 $\vec{v}_i$ 是其余向量的线性组合，因此 $\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = 0$（因为 $\det_{|\vec{e}}$ 是交替的）。因此 $\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \neq 0 \Rightarrow$ 当且仅当 $\vec{v}_i$线性无关。若 $\vec{v}_i$线性无关，则 $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ 是一个基，因此 $\det_{|\vec{v}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = 1 \neq 0$，且 $\det_{|\vec{v}} = c \det_{|\vec{e}}$，所以 $\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \neq 0$。∎

练习 K.6 在 $\mathbb{R}^2$ 中。设 $\vec{v}_1=\sum_{i=1}^2 v_1^i\vec{e}_i$ 和 $\vec{v}_2=\sum_{j=1}^2 v_2^j\vec{e}_j$（对偶记号）。证明:

$$\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=v_1^1v_2^2-v_1^2v_2^1. \tag{K.11}$$

答案。按第一列展开（对第一个向量 $\vec{v}_1=v_1^1\vec{e}_1+v_1^2\vec{e}_2$ 使用线性性）：$\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)=\det_{|\vec{e}}(v_1^1\vec{e}_1+v_1^2\vec{e}_2,\ \vec{v}_2)=v_1^1\det_{|\vec{e}}(\vec{e}_1,\ \vec{v}_2)+v_1^2\det_{|\vec{e}}(\vec{e}_2,\ \vec{v}_2)$。因此（对第二个向量 $\vec{v}_2=v_2^1\vec{e}_1+v_2^2\vec{e}_2$ 使用线性性）：$\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,\ \vec{v}_2)=0+v_1^1v_2^2\det(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)+v_1^2v_2^1\det(\vec{e}_2,\ \vec{e}_1)+0=v_1^1v_2^2-v_1^2v_2^1$。 ▪

练习 K.7 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设 $\vec{v}_j=\sum_{i=1}^3 v_j^i\vec{e}_i$，证明:

$$\det(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}v_1^iv_2^jv_3^k, \tag{K.12}$$

其中 $\varepsilon_{ijk}=\frac{1}{2}(j-i)(k-j)(k-i)$，即 $\varepsilon_{ijk}=1$ 当 (i,j,k) 为 $=(1,2,3)$、$(3,1,2)$ 或 $(2,3,1)$（偶排列）时，$\varepsilon_{ijk}=-1$ 当 (i,j,k) 为 $=(3,2,1)$、$(1,3,2)$ 和 $(2,1,3)$（奇排列）时，以及 $\varepsilon_{ijk}=0$ 其他情况。

答案。按第一列展开（如习题 K.6）。

结果 $=v_1^1v_2^2v_3^3+v_2^1v_3^2v_1^3+v_3^1v_1^2v_2^3-v_1^3v_2^2v_3^1-v_2^3v_3^2v_1^1-v_3^3v_1^2v_2^1$。 ▪

K.4 矩阵的行列式

设 $M=[M_{ij}]_{i=1,\dots,j=1\dots n}^{n}$,,是一个 n^2 实矩阵。设 $\vec{\mathbb{R}}^n=\mathbb{R}\times...\times\mathbb{R}$（笛卡尔积 n次），其典范基为 $(\vec{E}_i)$。设 $\vec{v}_j\in\vec{\mathbb{R}}^n$, $\vec{v}_j=\sum_{i=1}^n M_{ij}\vec{E}_i$; 因此 $M=\left([\vec{v}_1]_{|\vec{E}},...,[\vec{v}_n]_{|\vec{E}}\right)$。

定义 K.8 矩阵 $M=\left([\vec{v}_1]_{|\vec{E}},...,[\vec{v}_n]_{|\vec{E}}\right)$ 的行列式为

$$\det(M):=\det_{|\vec{E}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n). \tag{K.13}$$

命题 K.9 设 M^T为转置矩阵，即 $(M^T)_{ij}=M_{ji}$对所有 i,j都成立。那么

$$\det(M^T)=\det(M). \tag{K.14}$$

证明。 $\det[M_{ij}]=\det_{\vec{E}}(\vec{v}_1,\ ...,\ \vec{v}_n)\overset{(K.6)}{=}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n v_i^{\sigma(i)}=\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^n v_{\tau(i)}^i=\det[M_{ji}]$。 ▪

K.5 体积

定义 K.10 设$(\vec{e}_i)$ 是一个欧几里得基。考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的一个平行六面体，其边是向量$\vec{v}_1$、...、 $\vec{v}_n$；相对于$(\vec{e}_i)$，它的代数体积为

$$algebraic\ volume=\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n). \tag{K.15}$$

相对于$(\vec{e}_i)$，它的体积为（非负）

$$volume=\left|\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)\right|. \tag{K.16}$$

例如，若 $n=1$ 且 $\vec{v}=v^1\vec{e}_1$，则$\det_{|\vec{e}}(\vec{v})=v^1$ 是 $\vec{v}$ 的代数长度（相对于由 $\vec{e}_1$给出的测量单位）。而 $|\det_{|\vec{e}}(\vec{v})|=|v^1|$ 是 $\vec{v}$ 的长度（ $\vec{v}$的范数）。（体积函数$(\vec{v}_1,\ ...,\ \vec{v}_n)\to\left|\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,\ ...,\ \vec{v}_n)\right|$不是 多重线性形式，因为绝对值函数不是线性的。）例如，若 $n=2$ 或 3，参见习题 K.6-K.7。

No述。设 $(\vec{e}_i)$ 是笛卡尔基，$(e^i)=(dx^i)$ 是对偶基。那么，参见 Cartan [6],

$$\det_{|\vec{e}}\overset{\text{noted}}{=}e^1\wedge...\wedge e^n=dx^1\wedge...\wedge dx^n. \tag{K.17}$$

而对于积分，体积元（非负）使用欧几里得基 $(\vec{e}_i)$，并且 is

$$d\Omega(\vec{x})=|\det_{|\vec{e}}|=|dx^1\wedge...\wedge dx^n|\overset{\text{noted}}{=}dx^1...dx^n. \tag{K.18}$$

因此，边由 $\delta x_1\vec{u}_1,...,\delta x_n\vec{u}_n$ 给出的平行六面体在 $\vec{x}$ 处的体积为 $d\Omega(\vec{x})(\delta x_1\vec{u}_1,...,\delta x_n\vec{u}_n)=|\delta x_1...\delta x_n||\det_{|\vec{e}}(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)|$; 因此，多边形区域 Ω $=$的体积

$\bigcup_{i=1}^N P_i$ 其中 P_i 是一个平行六面体，其边由 $\delta x_{i,1}\vec{u}_{i,1},...,\delta x_{i,n}\vec{u}_{i,n}$ 给出

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{N} |\det_{|\vec{e}}(\vec{u}_{i,1},...,\vec{u}_{i,n})|\delta x_{i,1}...\delta x_{i,n}. \tag{K.19}$$

因此（黎曼方法），正则区域 Ω 的体积可表示为

$$|\Omega| = \int_\Omega d\Omega = \int_{\vec{x}\in\Omega} |\det_{|\vec{e}}(\vec{u}_{i,1},...,\vec{u}_{i,n})|\, dx^1...dx^n. \tag{K.20}$$

特别地，由于任意正则体积 Ω 都可以用任意小的立方体近似，$|\Omega| = \sum_{i=1}^N |\delta x_{i,\ 1}...\delta x_{i,\ n}|$ 行列式$_{|\vec{e}}(\vec{e}_1,\ ...\ ...,\ \vec{e}_n)| = \sum_{i=1}^N |\delta x_{i,\ 1}...\delta x_{i,\ n}|$ 可得

$$|\Omega| = \int_\Omega d\Omega = \int_{\vec{x}\in\Omega} dx^1...dx^n. \tag{K.21}$$

习题 K.11 设 $\Psi:\ \vec{q}=(q_1,\ .....,\ q_n)\ \in [a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]\to\vec{x}=(x_1=\Psi_1(\vec{q})\ .....\ x_n=\Psi_n(\vec{q}))\ \in\Omega$ 是区域 Ω 的一个参数化描述；证明

$$d\Omega(\vec{x}) = |J_\Psi(\vec{q})|\, dq^1...dq^n \quad (= |\det_{|\vec{e}}(\vec{p}_1(\vec{x}),...,\vec{p}_n(\vec{x}))|\, dq^1...dq^n), \tag{K.22}$$

其中，$\vec{p}_i(x)\ =(\frac{\partial\Psi}{\partial q_i}(\vec{q}))$ 是 $\vec{x}=\Psi(\vec{q})$ 处的参数基，而 $J_\Psi(\vec{q})\ =\det_{|\vec{e}}[d\Psi(\vec{q})]_{|\vec{e}}$ 是 $\vec{q}$ 处的 Ψ 的雅可比矩阵。因此，$|\Omega| = \int_{\vec{q}}|J_\Psi(\vec{q})|\, dq^1...dq^n$。

答案。用于说明的极坐标（可直接推广）：考虑由极坐标系 Ψ 参数化的圆盘 Ω：$\vec{q}\ =(\rho,\theta)\ \in\ [0,R]\times[0,2\pi]\ \to\ \vec{x}\ =(x\ =\ \rho\cos\ \theta, y\ =\ \rho\sin\ \theta)\ \in\ \mathbb{R}^2$其中，$\mathbb{R}^2$ 中采用了欧几里得基 $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$（因此 $\vec{x}\ =\ \rho\cos\ \theta\vec{e}_\theta + \rho\sin\ \theta\vec{e}_2)$。$\vec{x}\ =\ \Psi(\vec{q})$ 处对应的极坐标基为 $(\vec{p}_1(\vec{x})\ =\ \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}(\rho,\theta)\ \vec{p}_2(\vec{x})\ =\ \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(\rho,\theta))$，因此 $[\vec{p}_1(\vec{x})]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\end{pmatrix}$，且 $[\vec{p}_2(\vec{x})]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix}-\rho\sin\rho & \cos\ \theta\end{pmatrix}$。于是 $\det_{|\vec{e}}(\vec{p}_1(\vec{x})\ \vec{p}_2(\vec{x}))\ =\ \rho\,(>0$ 这里），因此 $d\Omega\ =\ |\rho|\, d\rho d\theta\ =\ \rho\, d\rho d\theta$。于是体积为 $|\Omega| = \int_{\vec{x}\in\Omega} d\Omega\ =\int_{\rho=0}^R\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho\, d\rho d\theta\,(=\pi R^2)$。

练习 **K.12** 正则曲面 Σ 在 $\mathbb{R}^3$上的“体积元”称为“面积元”，它是什么？ ”?

答案。设 $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$中的一个欧几里得基。我们需要几何曲面 $\Sigma=\mathrm{Im}(\Psi)$ 的一个正则参数描述 $\Psi:(u,v)\ \in[a_1,b_2]\times[a_2,b_2]\to\vec{x}=\Psi(u,v)\ =x_1(u,v)\vec{e}_1+...+x_3(u,v)\vec{e}_3$。因此，$\vec{t}_1(\vec{x})\ =\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v)$ 和 $\vec{t}_2(\vec{x})\ =\frac{\partial\Psi}{\partial v}(u,v)$ 是 Σ 处、$\vec{x}=\Psi(u,v)$ 处的切向量。因此，单位法向量为 $\vec{n}(\vec{x})\ =\ \frac{\vec{t}_1(\vec{x})\wedge\vec{t}_2(\vec{x})}{||\vec{t}_1(\vec{x})\wedge\vec{t}_2(\vec{x})||}$，于是 $\det_{|\vec{e}}(\vec{t}_1,\vec{t}_2,\vec{n})\ =\ ||\vec{t}_1(\vec{x})\wedge\vec{t}_2(\vec{x})||$ 是以 $\vec{t}_1$ 和 $\vec{t}_2$ 为边的平行四边形的面积（高为 1 的体积）。因此，$\vec{x}=\Psi(u,v)$ 处的面积元为 $d\Sigma(\vec{x})\ = ||\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v)\ \wedge\ \frac{\partial\Psi}{\partial v}(u,v)||\, dudv$。因此，$|\Sigma| = \int_{\vec{x}\in\Sigma} d\Sigma(\vec{x})\ =\int_{u=a_1}^{b_1}\int_{v=a_2}^{b_2}||\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v)\ \wedge\frac{\partial\Psi}{\partial v}(u,v)||\, dudv$。

K.6 自同态的行列式

K.6.1 定义和基本性质

定义 K.13 相对于基 $(\vec{e}_i)$，自同态 $L\in\mathcal{L}(E;E)$ 的行列式为

$$\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L) := \det_{|\vec{e}}(L.\vec{e}_1,...,L.\vec{e}_n). \tag{K.23}$$

这定义了 $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}:\ \mathcal{L}(E;E)\ \to\mathbb{R}$。（若上下文没有歧义，则将 $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}$ 记作 $\det_{|\vec{e}}$。）

命题 K.14 设 $L\in\mathcal{L}(E;E)$。

1- 若 $L=I$ 为恒等映射，则对所有基 $(\vec{e}_i)$，$\det_{|\vec{e}}(I)\ =1$。

2- 对所有 $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\in E$,

$$\det_{|\vec{e}}(L.\vec{v}_1,...,L.\vec{v}_n) = \widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L)\det_{|\vec{e}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n). \tag{K.24}$$

3- 如果 $L.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i$，即 $[L]_{|\vec{e}}=[L_{ij}]$，那么

$$\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L) = \det([L]_{|\vec{e}}) = \det([L_{ij}]). \tag{K.25}$$

4- 对所有 $M\in\mathcal{L}(E;\ E)$，并且记作 $M\circ L=(M.L$（得益于线性性），

$$\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(M.L) = \widetilde{\det_{|\vec{e}}}(M)\,\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L) = \widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L.M). \tag{K.26}$$

5- L 可逆当且仅当 行列式$_{|\vec{e}}(L)\neq 0$。

6- 如果 L 可逆，那么

$$\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L^{-1}) = \frac{1}{\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L)}. \tag{K.27}$$

7- 若$(\cdot,\cdot)_g$是 E上的内积，且 L_g^T是 L 的$(\cdot,\cdot)_g$转置（即，对于所有 $\vec{u},\vec{w}\in E$，都有$(L_g^T\vec{w},\vec{u})_g=(\vec{w},L.\vec{u})_g$），则

$$\widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L_g^T) = \widetilde{\det_{|\vec{e}}}(L). \tag{K.28}$$

8- 若$(\vec{e}_i)$ 和$(\vec{b}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$ 中的两个关于$(\cdot,\cdot)_g$的正交归一基（例如，测量单位相同的两个欧几里得基），则行列式$_{|\vec{b}}=\pm$行列式$_{|\vec{e}}$。

证明。 1- $\widetilde{\text{行列式}}_{|\vec{e}}(I) =^{(K.23)}$行列式$_{|\vec{e}}(I.\vec{e}_1,\ .....,\ I.\vec{e}_n) =^{(K.5)}$行列式$_{|\vec{e}}(\vec{e}_1,\ .....,\ \vec{e}_n)=1$，对所有基都成立。

2- 令 $m:(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)\to m(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n):=\det_{|\vec{e}}(L.\vec{v}_1,...,L.\vec{v}_n)$: 这是一个多重线性交错形式，因为$L$是线性的；因此 $m=^{(K.8)}m(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)\det_{|\vec{e}}$；又由于 $m(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)=^{(K.23)}\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L)$，故得 (K.24)。3- 将 (K.13) 应用于 $M=[L]_{|\vec{e}}$，即可得到 (K.25)。

4- $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}((M.L).\vec{e}_1,...,(M.L).\vec{e}_n) = \widetilde{\det}_{|\vec{e}}(M.(L.\vec{e}_1)...,M.(L.\vec{e}_n)) =^{(K.24)}\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(M)\,\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L.\vec{e}_1,...,L.\vec{e}_n)$。

5- 若 L 可逆，则 $1=\det_{|\vec{e}}(I)=\det_{|\vec{e}}(L.L^{-1})=\det_{|\vec{e}}(L)\det_{|\vec{e}}(L^{-1})$，因此 $\det_{|\vec{e}}(L)\neq 0$。

If $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L)\neq 0$ 则 $\det_{|\vec{e}}(L.\vec{e}_1,\ .....,\ L.\vec{e}_n)\neq 0$，因此 $(L.\vec{e}_1,\ .....,\ L.\vec{e}_n)$ 是一组基，因此 L 可逆。

6- (K.26) 给出 $1=\det_{|\vec{e}}(I)=\det_{|\vec{e}}(L^{-1}.L)=\det_{|\vec{e}}(L)\det_{|\vec{e}}(L^{-1})$，因此得到 (K.27)。

7- $(L_g^T\vec{w},\ \vec{u})_g=(\vec{w},\ L.\vec{u})_g$给出 $[g]_{|\vec{e}}.[L_g^T]_{|\vec{e}}=([L]_{|\vec{e}})^T.[g]_{|\vec{e}}$，因此 $\det([g]_{|\vec{e}})\det([L_g^T]_{|\vec{e}})=\det(([L]_{|\vec{e}})^T)\det([g]_{|\vec{e}})$，且 $\det([g]_{|\vec{e}})\neq 0$（习题），因此得到 (K.28)。

8- 设 $\mathcal{P}$ 为从 $(\vec{e}_i)$ 到 (b_i) 的换基自同态，P 为从 $(\vec{e}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵。两组基 $(\cdot,\cdot)_g$均为标准正交基，因此 $P^T.P=I$，故 $\det(P)=\pm1=\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(\mathcal{P})$。并且 $\det_{|\vec{e}}(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)=\det_{|\vec{e}}(\mathcal{P}.\vec{e}_1,...,\mathcal{P}.\vec{e}_n)=\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{e}}(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)=\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}}(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)$，因此$\widetilde{\det}_{|\vec{e}}=\det_{|\vec{e}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}}=\pm\det_{|\vec{b}}$。

定义 K.15 </style}两个 $(,\cdot)_g$-标准正交基 $(\vec{e}_i)$ 和 (b_i) 具有相同的定向，当且仅当 $\det_{|\vec{b}}=^+\det_{|\vec{e}}$。

练习 K.16 证明 $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(\lambda L)=\lambda^n\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L)$。

答案。 $\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(\lambda L)=\det_{|\vec{e}}(\lambda L.\vec{e}_1,\ .....,\ \lambda L.\vec{e}_n)=\lambda^n\det_{|\vec{e}}(L.\vec{e}_1,\ .....,\ L.\vec{e}_n)=\lambda^n\widetilde{\det}_{|\vec{e}}(L)$。

K.6.2 自同态的行列式是客观的

命题 K.17 设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 是 E 中的基。自同态的行列式 $L\in\mathcal{L}(E;E)$是客观的（与观察者无关，此处即与基无关）：

$$(\det([L]_{|\vec{a}})=)\quad \widetilde{\det_{|\vec{a}}}(L)=\widetilde{\det_{|\vec{b}}}(L)\quad (=\det([L]_{|\vec{b}})). \tag{K.29}$$

注意： 但是，n 向量的行列式是**不**客观的，参见 *(K.9)*（比较向量的基变换公式 $[\vec{w}]_{|\vec{b}}=P^{-1}.[\vec{w}]_{|\vec{a}}$与自同态的基变换公式 $[L]_{|\vec{b}}=P^{-1}.[L]_{|\vec{a}}.P$）。

证明。 设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 是 E中的基，且 P 是从 $(\vec{a}_i)$ 到 (b_i) 的过渡矩阵。由基变换公式 $[L]_{|\vec{b}}=P^{-1}.[L]_{|\vec{a}}.P$和 (K.26) 可得 $\det([L]_{|\vec{b}})=\det(P^{-1})\det([L]_{|\vec{a}})\det(P)=\det([L]_{|\vec{a}})$，因此由 (K.25) 可得 (K.29)。

练习 K.18 设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 是 E 中的基，且 $\mathcal{P}\in\mathcal{L}(E;E)$ 是从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的换基自同态（即，对所有 j，$\mathcal{P}.\vec{a}_j=\vec{b}_j$）。证明

$$\det_{|\vec{a}}(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)=\widetilde{\det_{|\vec{a}}}(\mathcal{P}),\quad \text{thus}\quad \det_{|\vec{a}}=\widetilde{\det_{|\vec{a}}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}},\quad \text{i.e.}\quad \det_{|\vec{b}}=\frac{\det_{|\vec{a}}}{\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})}, \tag{K.30}$$

答案。$\det_{|\vec{a}}(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)=\det_{|\vec{a}}(\mathcal{P}.\vec{a}_1,...,\mathcal{P}.\vec{a}_n)\ (K.24)=\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{a}}(\vec{a}_1,...,\vec{a}_n)=\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})\,1=\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}}(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)$，因此有 (K.30) 以及 $\det_{|\vec{a}}=\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}}$ and $\det_{|\vec{a}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)=\widetilde{\det}_{|\vec{a}}(\mathcal{P})\det_{|\vec{b}}(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$。

K.7 线性映射的行列式

（变形梯度 $F_t^{t_0}(P) = d\Phi_t^{t_0}(P)$ 所需： $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n \to \vec{\mathbb{R}}_t^n$。）

L设 A和 B为向量空间，维数为 $A = \dim B = n$，且 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\quad \vec{b}_i)$ 是 A 和 B中的基。

K.7.1 定义和首要性质

定义 K.19 相对于基 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i)，线性映射 $L \in \mathcal{L}(A;B)$ 的行列式为

$$\widetilde{\det_{|\vec{a},\vec{b}}}(L) := \det_{|\vec{b}}(L.\vec{a}_1, ..., L.\vec{a}_n). \tag{K.31}$$

（（基为隐式时， $\widetilde{\det}_{|\vec{a},\ \vec{b}}(L)$ =记作 $\det(L)$。）

因此，由 (K.13) 得到，取 $L.\vec{a}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{b}_i$，即 $[L]_{|\vec{a},\ \vec{b}} = [L_{ij}]$:

$$\widetilde{\det_{|\vec{a},\vec{b}}}(L) = \det([L]_{|\vec{a},\vec{b}}) = \det([L_{ij}]). \tag{K.32}$$

命题 K.20 设 $\vec{u}_1$，...， $\vec{u}_n \in A$。则

$$\det_{|\vec{b}}(L.\vec{u}_1, ..., L.\vec{u}_n) = \widetilde{\det_{|\vec{a},\vec{b}}}(L)\ \det_{|\vec{a}}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n). \tag{K.33}$$

证明. m： $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) \in A^n \to m(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n) := \det_{|\vec{b}}(L.\vec{u}_1, ..., L.\vec{u}_n) \in \mathbb{R}$ 是多重线性交错形式，因为 L 是线性的；并且 $m(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n) = \det_{|\vec{b}}(L.\vec{a}_1, ..., L.\vec{a}_n) =^{(K.31)} \widetilde{\det}_{|\vec{a},\vec{b}}(L) = \widetilde{\det}_{|\vec{a},\vec{b}}(L)\ \det_{|\vec{a}}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$。因此 $m = \widetilde{\det}_{|\vec{a},\vec{b}}(L)\ \det_{|\vec{a}}$，参见 (K.9)，故得 (K.33)。 ∎

推论 K.21 设 A、B、C 为向量空间，且 维数 $A =$ 维数 $B =$ 维数 $C = n$。设 $(\vec{a}_i)$、(b_i)、$(\vec{c}_i)$分别为 A、B、C中的基。设 L： $A \to B$和 M： $B \to C$ 为线性映射。于是，记 $M \circ L =$（由线性性可知）$M.L$，

$$\widetilde{\det_{|\vec{a},\vec{c}}}(M.L) = \widetilde{\det_{|\vec{a},\vec{b}}}(L)\ \widetilde{\det_{|\vec{b},\vec{c}}}(M). \tag{K.34}$$

证明。 $\widetilde{\det}_{|\vec{a},\ \vec{c}}(M.L) = \widetilde{\det}_{|\vec{c}}(M.L.\vec{a}_1)$ ....., $M.L.\vec{a}_n)) = \det_{|\vec{b},\ \vec{c}}(M)\ \widetilde{\det}_{|\vec{b}}(L.\vec{a}_1,$ ....., $L.\vec{a}_n) = \det_{|\vec{b},\ \vec{c}}(M)\ \widetilde{\det}_{|\vec{a},\ \vec{b}}(L)$ ∎.

K.7.2 运动的雅可比行列式与膨胀

设 $\widetilde{\Phi}$为一个运动，令 t_0， $t \in \mathbb{R}$，令 $\Phi_t^{t_0}$为关联运动，令 $F_t^{t_0}(p_{t_0}) := d\Phi_t^{t_0}(p_{t_0}) : \vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n \to \vec{\mathbb{R}}_t^n$为相对于 t_0 和 t在 $p_{t_0} \in \Omega_{t_0}$ 处的变形梯度，参见（4.1）。设 $(\vec{E}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$中的一个欧几里得基，且 $(\vec{e}_i)$ 对所有 $t \geq t_0$都是 $\vec{\mathbb{R}}_t^n$中的一个欧几里得基，并且 $[F_t^{t_0}(p_{t_0})]_{|\vec{E},\ \vec{e}} = [F_{ij}(p_{t_0})]$,, 即 $F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_j = \sum_{i\ ,\ j=1}^n F_{ij}(p_{t_0})\vec{e}_i$ ，对所有 j均成立。

定义 K.22 在 p_{t_0} 处，相对于 $\mathbb{R}_t^n$ 中 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 和内的欧几里得基 $(\vec{E}_i)$ 的“体积膨胀率”为 $(\vec{e}_i)$

$$J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi_t^{t_0})(p_{t_0}) := \widetilde{\det_{|\vec{E},\vec{e}}}(F_t^{t_0}(p_{t_0})) \quad (= \det_{|\vec{e}}(F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_1, ..., F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_n) = \det([F_{ij}(p_{t_0})])), \tag{K.35}$$

通常写作 $J_{|\vec{E},\ \vec{e}} := \det([F]_{|\vec{E},\ \vec{e}})$（或者在所有内容均为隐含时，简写为 $J = \det(F)$）。

因此，在 t_0 的 p_{t_0} 处，$(p_{t_0},\ \vec{E}_1,$ ....., $\vec{E}_n)$ 是一个单位平行六面体；相对于在 $\vec{\mathbb{R}}_{t_0}^n$ 中选定的测量单位，其体积为 1。而在 t 的 $p_t = \Phi_t^{t_0}(p_{t_0})$ 处，$J_{|\vec{E},\ \vec{e}}(\Phi_t^{t_0})(p_{t_0}) = \det_{|\vec{e}}(F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_1,$ ....., $F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_n)$ 是平行六面体 $(p_t,\ F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_1,$ ....., $F_t^{t_0}(p_{t_0}).\vec{E}_n)$ 相对于在 $\mathbb{R}_t^n$ 中选定的测量单位 的体积。

解释： $t_2 > t_1 \geq t_0$ 和 $[\vec{e}_i)$ 是 t_1 和 t_2 处的基:

- 膨胀，如果 $J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi_{t_2}^{t_0})(p_{t_0}) > J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi_{t_1}^{t_0})(p_{t_0})$（体积增加），

- 缩并，如果 $J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t_2})(p_{t_0}) < J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t_1})(p_{t_0})$（体积减小），并且
- 若对所有 t 均有 $J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t_2})(p_{t_0}) = J_{|\vec{E},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t_1})(p_{t_0})$，则称为不可压缩性（体积守恒）。

特别地，若 $(\vec{e}_i) = (\vec{E}_i)$，则 $J_{|\vec{e},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t_0})(p_{t_0}) = 1$；若 $t > t_0$，则

- 若 $J_{|\vec{e},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t})(p_{t_0}) > 1$，则称为膨胀（体积增加），
- 若 $J_{|\vec{e},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t})(p_{t_0}) < 1$，则称为缩并（体积减小），并且
- 若对所有 t 均有 $J_{|\vec{e},\vec{e}}(\Phi^{t_0}_{t})(p_{t_0}) = 1$，则称为不可压缩性（体积守恒）。

习题 K.23 设 $(\vec{E}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 中的一个欧几里得基，且 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中关于同一欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$ 的两个欧几里得基。证明：

$$J_{|\vec{E},\vec{a}}(\Phi^{t_0}_t(P)) = \pm J_{|\vec{E},\vec{b}}(\Phi^{t_0}_t(P)). \tag{K.36}$$

答案。 P 是从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵，因此此处 $\det(P) = \pm 1$。由 (4.30) 得 $[F]_{|\vec{E},\vec{a}} = P.[F]_{|\vec{E},\vec{b}}$，所以 $\det([F]_{|\vec{E},\vec{a}}) = \pm\det([F]_{|\vec{E},\vec{b}})$，进而 $\det^{\vec{a}}(F.\vec{E}_1,...,F.\vec{E}_n) = \pm\det^{\vec{b}}(F.\vec{E}_1,...,F.\vec{E}_n)$。 ∎

K.7.3 转置的行列式

设 $(A,\ (\cdot,\ \cdot)_g)$ 和 $(B,\ (\cdot,\ \cdot)_h)$ 为有限维希尔伯特空间。设 $L \in \mathcal{L}(A;\ B)$ 为一个线性映射。回顾一下：转置映射 $L^T_{gh} \in \mathcal{L}(B;A)$ 定义如下：对所有 $\vec{u} \in A$ 和所有 $\vec{w} \in B$，参见 (A.68)

$$(L^T_{gh}.\vec{w},\vec{u})_g := (\vec{w},L.\vec{u})_h. \tag{K.37}$$

设 $(\vec{a}_i)$ 是 A 中的一组基，(b_i) 是 B 中的一组基。那么

$$\widetilde{\det}([L^T_{gh}]_{|\vec{b},\vec{a}}) = \det([L]_{|\vec{a},\vec{b}})\frac{\det([(\cdot,\cdot)_g]_{|\vec{a}})}{\det([(\cdot,\cdot)_h]_{|\vec{b}})}. \tag{K.38}$$

事实上，(K.37) 给出 $[(\cdot,\ \cdot)_g]_{|\vec{a}}.[L^T_{gh}]_{|\vec{b},\ \vec{a}} = ([L]_{|\vec{a},\ \vec{b}})^T.[(\cdot,\ \cdot)_h]_{|\vec{b}}$。

K.8 膨胀率

任意 时刻均选取同一个欧几里得基 $(\vec{e}_i)$，且 $(\cdot,\cdot)_g$ 是相应的内积。

K.8.1 $\frac{\partial J^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0}) = J^{t_0}(t,p_{t_0})$ 散度$\vec{v}(t,p_t)$

考虑一个正则运动 $\widetilde{\Phi}$，参见 (1.5)，其欧拉速度为 $\vec{v}(t,p_t) = \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial t}(t,P_{Obj})$，其中 $p_t = \widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$。设给定 t_0；关联运动 Φ^{t_0} 由 $\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}) = \widetilde{\Phi}(t,P_{Obj})$ 给出，记作 $=$，当$p_{t_0} = \widetilde{\Phi}(t_0,P_{Obj})$ 时，记为 p_t，见 (3.1)，并假设它至少是 C^2；拉格朗日速度为 $\vec{V}(t,p_{t_0}) = \frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})$，且当 $p_t = \Phi^{t_0}(t,p_{t_0})$ 时，欧拉速度满足 $\vec{v}(t,p_t) = \frac{\partial\Phi^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})$，参见 (3.25)。设$F^{t_0}(t,p_{t_0}) = d\Phi^{t_0}(t,p_{t_0}) = F^{t_0}_t(p_{t_0}) = d\Phi^{t_0}_t(p_{t_0})$，并考虑雅可比行列式

$$J^{t_0}_t(p_{t_0}) = \det_{|\vec{e}}(F^{t_0}_t(p_{t_0})) = J^{t_0}(t,p_{t_0}), \tag{K.39}$$

引理 K。24 $\frac{\partial J^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0})$ 满足，在 $p_t = \Phi^{t_0}_t(p_{t_0})$下，

$$\frac{\partial J^{t_0}}{\partial t}(t,p_{t_0}) = J^{t_0}(t,p_{t_0})\,\mathrm{div}\vec{v}(t,p_t) \tag{K.40}$$

（在 t 处、 p_t时考虑的值）。特别地， Φ 是不可压缩的，当且仅当 散度$\vec{v}(t,p_t) = 0$。

证明。 设 $\mathcal{O}$是 $\mathbb{R}^n$中的一个原点。设 $\overrightarrow{\mathcal{O}\Phi^{t_0}} = \sum_{i=1}^n \Phi^i\vec{e}_i$， $\vec{V}^{t_0} = \sum_{i=1}^n V^i\vec{e}_i$， $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i\vec{e}_i$， $F^{t_0}.\vec{E}_j = d\Phi^{t_0}.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi^i}{\partial X^j}\vec{e}_i$。 设$[F^{t_0}]_{|\vec{E},\ \vec{e}}$ =记作 F， J^{t_0} =记作 J且 $[d\Phi^i]_{|\vec{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi^i}{\partial X^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^i}{\partial X^n}\end{pmatrix}$ =记作 $d\Phi^i$

（行矩阵）。因此 $J=$行列式$F=$行列式$\begin{pmatrix} d\Phi^1 \\ ..... \\ d\Phi^n \end{pmatrix}$，所以（行列式是多重线性

的）

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial(d\Phi^1)}{\partial t}\\ d\Phi^2\\ \vdots\\ d\Phi^n\end{pmatrix}+\ldots+\det\begin{pmatrix}d\Phi^1\\ \vdots\\ d\Phi^{n-1}\\ \frac{\partial(d\Phi^n)}{\partial t})\end{pmatrix}.$$

由 $\Phi^{t_0}\ C^2$，因此 $\partial(d\Phi^i)\,\partial t(t,\ p_{t_0})$ 施瓦茨$=\ d(\frac{\partial\Phi^i}{\partial t})(t,\ p_{t_0})\ =\ dV^i(t,\ p_{t_0})\ =\ dv^i(t,\ p_t).F(t,\ p_{t_0})$，参见 (3.27)。因此

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial(d\Phi^1)}{\partial t}\\ d\Phi^2\\ \vdots\\ d\Phi^n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n\frac{\partial v^1}{\partial x^i}d\Phi^i\\ d\Phi^2\\ \vdots\\ d\Phi^n\end{pmatrix}\underset{\text{alternating}}{\overset{\det\text{ is}}{=}}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial v^1}{\partial x^1}d\Phi^1\\ d\Phi^2\\ \vdots\\ d\Phi^n\end{pmatrix}=\frac{\partial v^1}{\partial x^1}\det\begin{pmatrix}d\Phi^1\\ d\Phi^2\\ \vdots\\ d\Phi^n\end{pmatrix}=\frac{\partial v^1}{\partial x^1}J$$

其他项同上，因此

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,p_{t_0})=\frac{\partial v^1}{\partial x^1}(t,p_t)\ J(t,p_{t_0})+\ldots+\frac{\partial v^n}{\partial x^n}(t,p_t)\ J(t,p_{t_0})=\operatorname{div}\vec{v}(t,p_t)\ J(t,p_{t_0}),$$

即 (K.40)。 ∎

定义 K.25 $\operatorname{div}\vec{v}(t,\ p_t)$ 是膨胀率。

K.8.2 莱布尼茨公式

命题 K.26（莱布尼茨公式）在满足正则性假设的条件下（例如，满足勒贝格定理的假设，从而能够在 $\int$ 下求导），有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\int_{p_t\in\Omega_t}f(t,p_t)\,d\Omega_t\Big)&=\int_{p_t\in\Omega_t}\big(\frac{Df}{Dt}+f\operatorname{div}\vec{v}\big)(t,p_t)\,d\Omega_t\\&=\int_{p_t\in\Omega_t}\big(\frac{\partial f}{\partial t}+df.\vec{v}+f\operatorname{div}(\vec{v})\big)(t,p_t)\,d\Omega_t\\&=\int_{p_t\in\Omega_t}\big(\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}(f\vec{v})\big)(t,p_t)\,d\Omega_t.\end{aligned}\tag{K.41}$$

证明。令

$$Z(t):=\int_{p\in\Omega_t}f(t,p)\,d\Omega_t=\int_{P\in\Omega_{t_0}}f(t,\Phi^{t_0}(t,P))\,J^{t_0}(t,P)\,d\Omega_{t_0}.$$

（正则运动的雅可比行列式为正。）于是（在 $\int$ 下求导）

$$\begin{aligned}Z'(t)&=\int_{P\in\Omega_{t_0}}\frac{Df}{Dt}(t,p_t)\,J^{t_0}(t,P)+f(t,p_t)\frac{\partial J^{t_0}}{\partial t}(t,P)\,d\Omega_{t_0}\\&=\int_{P\in\Omega_{t_0}}(\frac{Df}{Dt}(t,p_t)\ +f(t,p_t)\operatorname{div}\vec{v}(t,p_t))J^{t_0}(t,P)\,d\Omega_{t_0},\end{aligned}$$

由 (K.40) 得。并且 $\operatorname{div}(f\vec{v})\ =df.\vec{v}+f\operatorname{div}\vec{v}$ 得到 (K.41)。 ∎

推论 K.27 对于$(\vec{u},\vec{w})_g$ $=$记作 $\vec{u}\bullet\vec{w}$ （在给定的欧几里得框架中），

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}f(t,p_t)\,d\Omega_t=\int_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}(t,p_t)\,d\Omega_t+\int_{\partial\Omega_t}(f\vec{v}\bullet\vec{n})(t,p_t)\,d\Gamma_t,\tag{K.42}$$

Ω 内的时间变化Ω_t 与穿过曲面 $\partial\Omega_t$的通量之和。

证明。 应用 $(K.41)_3$。 ∎

K.9 $\partial J/\partial F = J\,F^{-T}$

K.9.1 $^{\partial}_{\det\partial M_{ij}}$ 的含义是什么?

设 $\mathcal{M}_{nn} = \{M = [M_{ij}] \in \mathbb{R}^{n^2}\}$ 为 $n * n$ 矩阵的集合，并考虑函数

$$Z := \det : \begin{cases} \mathcal{M}_{nn} \to \mathbb{R} \\ M = [M_{ij}] \to Z(M) := \det(M) = \det([M_{ij}]). \end{cases} \tag{K.43}$$

问题：$\frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M)$ 是什么意思?

答案：这是方向导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = df(\vec{x}).\vec{e}_i$... 的"标准含义"，这里$f = Z$，因此 $\vec{x} =$记作 M 是一个矩阵（ $\mathcal{M}_{nn}$中的一个向量），而 $(\vec{e}_i)$ 是 $\mathcal{M}_{nn}$中的典范基（m_{ij}）（矩阵 m_{ij} 的所有元素均为零，只有第 i 行、第 j 列交点处的元素等于 1 ）。因此:

$$\frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M) := dZ(M).m_{ij} = \lim_{h\to 0}\frac{Z(M+hm_{ij}) - Z(M)}{h} \ (\in \mathbb{R}). \tag{K.44}$$

K.9.2 的计算 $^{\partial}_{\det\partial M_{ij}}$ ——

命题 K.28

$$\forall i,j,\ \frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M) = Z(M)\,(M^{-T})_{ij}, \quad written \quad \frac{\partial Z}{\partial M} = Z\,M^{-T}. \tag{K.45}$$

证明。 $\frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M) := \lim_{h\to 0}\frac{\det(M+hm_{ij})-\det(M)}{h}$; 行列式 $\det(M + hm_{ij})$ 关于列 j 的展开为

$$\det(M + h[m_{ij}]) = \det(M) + h\,c_{ij} \tag{K.46}$$

其中 c_{ij}是 M 的第 (i,j) 个余子式; 因此 $\frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M) = \lim_{h\to 0}\frac{Z(M+hm_{ij})-Z(M)}{h} = c_{ij}$; 又因为 $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}[c_{ij}]^T$，即 $[c_{ij}] = \det(M)M^{-T}$，我们得到 $\frac{\partial Z}{\partial M_{ij}}(M) = \det(M)(M^{-T})_{ij}$，即 (K.45)。∎

K.9.3 $\partial J/\partial F = J\,F^{-T}$通常写作 $[\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}] = J\,F^{-T}$

§ K.8 的设定: 令 $F := d\Phi(p_{t_0})$，我们有 $F.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^n F_{ij}\vec{e}_i$ 其中 $F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(p_{t_0})$，并且

$$J_{\Phi,p_{t_0},\vec{E},\vec{e}} \overset{\text{noted}}{=} J : \begin{cases} \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t) \to \mathbb{R} \\ F \to J(F) := \det([F_{ij}]) \quad (= \det([\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(p_{t_0})]), \end{cases} \tag{K.47}$$

因此， $J(F)$ 是 Φ 在 p_{t_0}处相对于（$\vec{E}_i$）和（$\vec{e}_i$）的雅可比行列式 $\widetilde{\det}_{\vec{E},\vec{e}}(d\Phi(p_{t_0}))$。因此，(K.45) 给出:

推论 K.29

$$\forall i,j,\ \frac{\partial J}{\partial F_{ij}}(F) = J(F)\,([F]^{-T})_{ij}, \quad written \quad \frac{\partial J}{\partial F} = J\,F^{-T}. \tag{K.48}$$

K.9.4 对 $\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}$ 的解释? ——

首先涉及的导数是沿着方向 $\vec{E}_j$ 在 t_0处的导数: $F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}(p_{t_0}) := d\Phi_i(p_{t_0}).\vec{E}_j$

问题： $\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}$是方向导数的常用记号，参见 § K.9.1。那么， $\frac{\partial J}{\partial F_{ij}}$ 是沿哪个方向的导数?

答案: 1- 将 $F \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$"认定"为由 $\widetilde{F}(\ell,\vec{U}) = \ell(F.\vec{U})$ 给出的张量 $\widetilde{F} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t,\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\mathbb{R})$; 因此，若 $F.\vec{E}_j = \sum_{i=1}^n F_{ij}\vec{e}_i$，则 $\widetilde{F} = \sum_{i,j=1}^n F_{ij}\vec{e}_i\otimes\pi_{Ej}$，相对于 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中的一组基 $(\vec{E}_i)$ 及其协变对偶基 (π_{Ei})，以及一组基 $(\vec{e}_i)$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$。

2- Define the function $\widetilde{\det}_{\vec{E},\vec{e}} = \widetilde{J} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t,\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad \widetilde{F} \to \widetilde{J}(\widetilde{F}) := J(F) = \underset{\vec{E},\vec{e}}{\det}(F) = \det([F_{ij}]) \end{array} \right\}$;

3- 接下来，沿着方向 $\vec{e}_i \otimes \pi_{Ej} \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^{n*}_t, \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}; \mathbb{R})$ 对 $\widetilde{J}$ 求导是有意义的，得到

$$\frac{\partial \widetilde{J}}{\partial F_{ij}}(\widetilde{F}) := \lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{J}_{|\vec{e},\vec{E}}(\widetilde{F} + h\vec{e}_i \otimes \pi_{Ej}) - \widetilde{J}_{|\vec{e},\vec{E}}(\widetilde{F})}{h} \quad (\overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}}(F)); \tag{K.49}$$

这是一个双向导数：π_{Ej} 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$（过去时刻 p_{t_0}）和 $\vec{e}_i$ 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$（当前时刻 p_t）。这个导数是什么意思？（作者并不知道答案。）

L 体积和面积的输运

这里是 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ 通常的仿射空间。令 $t_0, t \in \mathbb{R}$ 和 $\Phi^{t_0}_t$: $\mathbb{R} \times \Omega_{t_0} \to \Omega_t$，见（3.1）。令 $F_P = d\Phi^{t_0}_t(P)$。令 $(\cdot,\cdot)_g$ 为 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一个欧几里得点积（英语、法语.....），其相应范数为 $||.||_g$。

L.1 变换后的平行六面体

$\Phi^{t_0}_t$在 P处相对于一组（$\cdot,\cdot$）$_g$-欧几里得基的雅可比行列式定义见（K.35）：令 $F_P = F^{t_0}_t(P)$,

$$J_P = J(P) := \det_{|\vec{e}}(F^{t_0}_t(P).\vec{E}_1, ..., F^{t_0}_t(P).\vec{E}_n)), \quad \text{and} \quad J_P > 0 \tag{L.1}$$

假设该运动是正则的。因此，若（$\vec{U}_{1P}$，.....，$\vec{U}_{nP}$）是在 P处的平行六面体，在 t_0处，若 $\vec{u}_{ip} = F_P.\vec{U}_{iP}$，那么（$\vec{u}_{1p}$，.....，$\vec{u}_{np}$）是在 p处的平行六面体，在 t处，其体积为

$$\det_{|\vec{e}}(\vec{u}_{1p}, ..., \vec{u}_{np}) = J_P \ \det_{|\vec{e}}(\vec{U}_{1P}, ..., \vec{U}_{nP}). \tag{L.2}$$

L.2 变换后的体积

黎曼积分和 (L.2) 给出了变量替换公式：对于任意正则函数 f： $\Omega_t \to \mathbb{R}$,

$$\int_{p_t \in \Omega_t} f(p_t)\, d\Omega_t = \int_{P \in \Omega_{t_0}} f(\Phi^{t_0}_t(P))\, |J(P)|\, d\Omega_{t_0}. \tag{L.3}$$

（见 (K.18)： $d\Omega_t$ 是一个正测度：它不是多重线性形式。）特别地,

$$|\Omega_t| = \int_{p_t \in \Omega_t} d\Omega_t(p_t) = \int_{P \in \Omega_{t_0}} |J(P)|\, d\Omega_{t_0}(P). \tag{L.4}$$

（对于正则运动， $J(P) > 0$。）

L.3 变换后的平行四边形

考虑两个线性无关向量 $\vec{U}_{1P}$， $\vec{U}_{2P} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$位于 t_0处的 P，以及向量 $\vec{u}_{1p} = F_P.\vec{U}_{1P}$和 $\vec{u}_{2p} = F_P.\vec{U}_{2P}$位于 t处的 $p = \Phi^{t_0}_t(P)$。由于 $\Phi^{t_0}_t$是一个微分同胚，因此 $\vec{u}_{1p}$和 $\vec{u}_{2p}$线性无关。

然后选取一个欧几里得点积（$\cdot$， $\cdot$）$_g$（英语、法语.....），以便使用向量积，参见 (E.15)，并使其在所有时间 t 都相同。于是平行四边形的面积为

$$||\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}||_g \quad \text{and} \quad ||\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p})||_g, \tag{L.5}$$

四边形的单位法向量为

$$\vec{N}_P = \frac{\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}}{||\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}||_g} \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}, \quad \text{and} \quad \vec{n}_p = \frac{\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p}}{||\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p}||_g} \in \vec{\mathbb{R}}^n_t. \tag{L.6}$$

命题 L.1 若 $\vec{u}_{1p} = F_P.\vec{U}_{1P}$且 $\vec{u}_{2p} = F_P.\vec{U}_{2P}$，则

$$\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p} = J_P\, F_P^{-T}.\big(\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}\big), \quad \text{and} \quad ||\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p}||_g = J_P\, ||F_P^{-T}.(\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P})||_g, \tag{L.7}$$

因为对于 $J_P > 0$ （正则运动），并且

$$\vec{n}_p = \frac{F_P^{-T}.\vec{N}_P}{||F_P^{-T}.\vec{N}_P||_g} \quad (\neq F_P.\vec{N}_P \ \textit{in general}). \tag{L.8}$$

证明。 设 $\vec{W}_P \in \mathbb{R}^{\vec{n}}_{t_0}$ 和 $\vec{w}_p = F_P.\vec{W}_P$。那么平行六面体（$\vec{u}_{1p}$, $\vec{u}_{2p}$, $\vec{w}_p$）的体积为

$$\begin{aligned}(\vec{u}_{1p} \wedge \vec{u}_{2p}, \vec{w}_p)_g &= \det(\vec{u}_{1p}, \vec{u}_{2p}, \vec{w}_p) = \det(F_P.\vec{U}_{1P}, F_P.\vec{U}_{2P}, F_P.\vec{W}_P) = \det(F_P)\det(\vec{U}_{1P}, \vec{U}_{2P}, \vec{W}_P)\\ &= J_P\,(\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}, \vec{W}_P)_g = J_P\,(\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}, F_P^{-1}.\vec{w}_p)_g = J_P\,(F_P^{-T}.(\vec{U}_{1P} \wedge \vec{U}_{2P}), \vec{w}_p)_g,\end{aligned} \tag{L.9}$$

对所有 $\vec{w}_p$，因此 (L.7)，因此 $\frac{\vec{u}_{1p}\wedge\vec{u}_{2p}}{||\vec{u}_{1p}\wedge\vec{u}_{2p}||_g} = \frac{J_P\,F_P^{-T}.\,(\vec{U}_{1P}\wedge\vec{U}_{2P})\;\vec{U}_{1P}\wedge\vec{U}_{2P})\;||_g}{J_P||F_P^{-T}.\cdot}$，因此 (L.8)。 ∎

L.4 变换后的曲面

L.4.1 曲面的变形

参数曲面 Ψ_{t_0}（位于 Ω_{t_0}）和相应的几何曲面 S_{t_0} 定义如下

$$\Psi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{rl} [a,b]\times[c,d] & \to \Omega_{t_0} \\ (u,v) & \to P = \Psi_{t_0}(u,v) \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad S_{t_0} = \mathrm{Im}(\Psi_{t_0}) \subset \Omega_{t_0}. \tag{L.10}$$

（也可以在选定原点 O 后，用向量值参数曲面 $\vec{r}_{t_0} = \overrightarrow{O\Psi_{t_0}}$来表示。）变换后的参数曲面为 $\Psi_t := \Phi_t^{t_0} \circ \Psi_{t_0}$ 相应的几何曲面为 S_t:

$$\Psi_t := \Phi_t^{t_0} \circ \Psi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{rl} [a,b]\times[c,d] & \to \Omega_{t_0} \\ (u,v) & \to p = \Psi_t(u,v) = \Phi_t^{t_0}(\Psi_{t_0}(u,v)) = \Phi_t^{t_0}(P) \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad S_t = \Phi_t^{t_0}(S_{t_0}). \tag{L.11}$$

(Af选定原点 O 后，相应的向量值参数曲面为 $\vec{r}_t = \overrightarrow{O\Psi_t}$。)

Let ($\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$) 是空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \supset [a$ 中的典范基 $,b]\times[c,d] = \{(u,v)\}$ 参数 → 。曲面 Ψ_{t_0} 假定为正则的，也就是说，Ψ_{t_0} 是 C^1，并且对于所有 $P = \Psi_{t_0}(u,v) \in S_{t_0}$， e → 在 P 处的切向量 T_{1P} 和 T_{2P} 线性无关，也就是说，

$$\left.\begin{array}{l} \vec{T}_{1P} := d\Psi_{t_0}(u,v).\vec{E}_1 \overset{\text{noted}}{=} \dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v), \\ \vec{T}_{2P} := d\Psi_{t_0}(u,v).\vec{E}_2 \overset{\text{noted}}{=} \dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v), \end{array}\right\} \quad \text{and} \quad \vec{T}_{1P} \wedge \vec{T}_{2P} \neq \vec{0}. \tag{L.12}$$

S_t 在 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$ 处的切向量在 t 处为

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{t}_{1p} := d\Psi_t(u,v).\vec{E}_1 = \dfrac{\partial \Psi_t}{\partial u}(u,v), \quad \text{so} \quad \vec{t}_{1p} = F_P.\vec{T}_{1P} \quad (= d\Phi_t^{t_0}(P).\dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v)), \\ \vec{t}_{2p} := d\Psi_t(u,v).\vec{E}_2 = \dfrac{\partial \Psi_t}{\partial v}(u,v), \quad \text{so} \quad \vec{t}_{2p} = F_P.\vec{T}_{2P} \quad (= d\Phi_t^{t_0}(P).\dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)). \end{array} \right. \tag{L.13}$$

这些向量线性无关，因为 $\Phi_t^{t_0}$是微分同胚，而 Ψ_{t_0} 是正则的。事实上，我们用到了曲线的切向量及其推前，参见图4.1和§ 6.5.1。

L.4.2 欧几里得点积与单位法向量

然后选取一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$（英语、法语.....），以便使用向量积，参见（E.15），并使其在所有时间 t 都相同。那么，相对于 Ψ_{t_0}，P 处的 $d\Sigma_P$ 的标量面积元，以及相对于 Ψ_t，p 处的 $d\sigma_p$ 的标量面积元，分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} d\Sigma_P := ||\dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)||_g\, du\, dv \quad (= ||\vec{T}_{1P} \wedge \vec{T}_{2P}||_g\, du\, dv), \\ d\sigma_p := ||\dfrac{\partial \Psi_t}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \Psi_t}{\partial v}(u,v)||_g\, du\, dv \quad (= ||\vec{t}_{1p} \wedge \vec{t}_{2p}||_g\, du\, dv). \end{array} \right. \tag{L.14}$$

S_{t_0} 和 S_t 的面积为

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_{t_0}| = \displaystyle\int_{P\in S_{t_0}} d\Sigma_P := \int_{u=a}^{b}\int_{v=c}^{d} ||\dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)||_g\, du\, dv, \\ |S_t| = \displaystyle\int_{p\in S_t} d\sigma_p := \int_{u=a}^{b}\int_{v=c}^{d} ||\dfrac{\partial \Psi_t}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \Psi_t}{\partial v}(u,v)||_g\, du\, dv. \end{array} \right. \tag{L.15}$$

（参见（K.18）： $d\Sigma_P$ 和 $d\sigma_p$ 是正测度：它们不是多重线性形式。）

而 S_{t_0} 处的单位法向量 N_P、 $\vec{n}_p$ 处的单位法向量 t_0 和 t 处的单位法向量 p 为

$$\begin{cases} \vec{N}_P = \dfrac{\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)||_g} \quad (=\dfrac{\vec{T}_{1P}\wedge\vec{T}_{2P}}{||\vec{T}_{1P}\wedge\vec{T}_{2P}||_g}) \\ \vec{n}_p = \dfrac{\frac{\partial\Psi_t}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_t}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\Psi_t}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_t}{\partial v}(u,v)||_g} \quad (=\dfrac{\vec{t}_{1p}\wedge\vec{t}_{2p}}{||\vec{t}_{1p}\wedge\vec{t}_{2p}||_g}=. \end{cases} \tag{L.16}$$

相对于 $\vec{r}_{t_0}$ 的 $d\vec{\Sigma}_P$ 处的矢量面积元 P 于 $S_{t_0}=\mathrm{Im}(\Psi_{t_0})$，以及相对于 Ψ_t 的 $d\vec{\sigma}_p$ 处的矢量面积元 p 于 $S_t=\mathrm{Im}(\Psi_t)$ 为

$$\begin{cases} d\vec{\Sigma}_P := \vec{N}_P\, d\Sigma_P = \dfrac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v)\wedge\dfrac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)\, du\, dv \quad (=\vec{T}_{1P}\wedge\vec{T}_{2P}\, du\, dv) \\ d\vec{\sigma}_p := \vec{n}_p\, d\sigma_p = \dfrac{\partial\Psi_t}{\partial u}(u,v)\wedge\dfrac{\partial\Psi_t}{\partial v}(u,v)\, du\, dv \quad (=\vec{t}_{1p}\wedge\vec{t}_{2p}\, du\, dv). \end{cases} \tag{L.17}$$

（可用于求曲面上的通量： $\int_\Gamma \vec{f}\bullet\vec{n}\, d\sigma = \int_\Gamma \vec{f}\bullet d\vec{\sigma}$。）

（注意： $d\vec{\Sigma}_P$ 和 $d\vec{\sigma}_p$ 不是多重线性的，因为 $d\Sigma_P$ 和 $d\sigma_p$ 不是。）

L.4.3 曲面之间的关系

$\vec{t}_{1p}\wedge\vec{t}_{2p} = J_P\, F_P^{-T}.(\vec{T}_{1P}\wedge\vec{T}_{2P})$，参见 (L.7)，得出

$$\frac{\partial\Psi_t}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_t}{\partial v}(u,v) = J_P\, F_P^{-T}.(\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\Psi_{t_0}}{\partial v}(u,v)). \tag{L.18}$$

这给出了矢量面积元和标量面积元之间的关系，

$$\vec{n}\, d\sigma_p = d\vec{\sigma}_p = J_P\, F_P^{-T}.d\vec{\Sigma}_P = J_P\, F_P^{-T}.\vec{N}_P\, d\Sigma_P, \quad \text{and} \quad d\sigma_p = J_P\, ||F_P^{-T}.\vec{N}_P||_g\, d\Sigma_P. \tag{L.19}$$

（用 (L.8) 验证。）

L.5 皮奥拉恒等式

提醒：设 $M=[M^1|M^2|M^3]$ 是 $3*3$ 矩阵函数，我们采用连续介质力学中通常使用的散度（非客观的），定义为 $\mathrm{div}M := \begin{pmatrix} \frac{\partial M_1^1}{\partial X^1}+\frac{\partial M_2^1}{\partial X^2}+\frac{\partial M_3^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial M_1^2}{\partial X^1}+\frac{\partial M_2^2}{\partial X^2}+\frac{\partial M_3^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial M_1^3}{\partial X^1}+\frac{\partial M_2^3}{\partial X^2}+\frac{\partial M_3^3}{\partial X^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_j^1}{\partial X^j} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_j^2}{\partial X^j} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial M_j^3}{\partial X^j} \end{pmatrix}$，参见 (S.65)。若 $\mathrm{Cof}(M)$ 是余子式矩阵（在 $\mathbb{R}^3$中：$\mathrm{Cof}(M)^i_j = M^{i+1}_{j+1}M^{i+2}_{j+2} - M^{i+1}_{j+2}M^{i+2}_{j+1}$），则 $M^{-1} = {}^1/_{\det M}\mathrm{Cof}(M)^T$，即，

$$(\det M)M^{-1} = \mathrm{Cof}(M)^T. \tag{L.20}$$

由于框架是欧几里得的，我们使用欧几里得基及其相关矩阵，因此（矩阵意义）

$$J(P)F(P)^{-T} = \mathrm{Cof}(F(P)) \overset{\text{noted}}{=} \mathrm{Cof}(F)(P), \quad \text{written} \quad JF^{-T} = \mathrm{Cof}(F). \tag{L.21}$$

命题 L.2（皮奥拉恒等式）在 $\mathbb{R}^3$中，我们有

$$\mathrm{div}(JF^{-T})(P) = 0, \quad i.e. \quad \forall i,\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathrm{Cof}(F)^i_j}{\partial X^j}(P) = 0. \tag{L.22}$$

也写作 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial X^j}(J\frac{\partial X^i}{\partial x^j}) = 0$.....注意：*(L.22)* 只是一次矩阵计算，因为我们使用了矩阵的散度（我们采用了相对于给定基的分量）。

证明。我们处于 $\mathbb{R}^3$ 中，因此 $\mathrm{Cof}(F)^i_j = F^{i+1}_{j+1}F^{i+2}_{j+2} - F^{i+1}_{j+2}F^{i+2}_{j+1}$，且 $F=[d\Phi_t]=[\frac{\partial\varphi^i}{\partial X^j}]$，也就是说，$F^i_j = \frac{\partial\varphi^i}{\partial X^j}$。因此

$$\frac{\partial \mathrm{Cof}(F)^i_j}{\partial X^j} = \frac{\partial^2\varphi^{i+1}}{\partial X^j\partial X^{j+1}}\frac{\partial\varphi^{i+2}}{\partial X^{j+2}} + \frac{\partial\varphi^{i+1}}{\partial X^{j+1}}\frac{\partial^2\varphi^{i+2}}{\partial X^j\partial X^{j+2}} - \frac{\partial^2\varphi^{i+1}}{\partial X^j\partial X^{j+2}}\frac{\partial\varphi^{i+2}}{\partial X^{j+1}} - \frac{\partial\varphi^{i+1}}{\partial X^{j+2}}\frac{\partial^2\varphi^{i+2}}{\partial X^j\partial X^{j+1}}.$$

因此，对于所有 $i=1,2,3$，我们得到 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathrm{Cof}(F)^i_j}{\partial X^j} = 0$（各项两两抵消）。 ∎

L.6 Piola 变换

设 $\vec{u}$ 是 Ω_t中的一个向量场。目标是在 Ω_{t_0} 中找到一个向量场 U_{Piola}，使得对于所有满足 $\omega_{t_0} = {\Phi_t^{t_0}}^{-1}(\omega_t) \subset \Omega_{t_0}$的开子集 $\omega_t \subset \Omega_t$,

$$\int_{\partial\omega_{t_0}} \vec{U}_{\text{Piola}} \bullet \vec{N}\, d\Sigma = \int_{\partial\omega_t} \vec{u} \bullet \vec{n}\, d\sigma, \tag{L.23}$$

or

$$\int_{\omega_{t_0}} \text{div}(\vec{U}_{\text{Piola}})\, d\Omega_{t_0} = \int_{\omega_t} \text{div}(\vec{u})\, d\Omega_t, \tag{L.24}$$

i.e.

$$\int_{P\in\omega_{t_0}} \text{div}(\vec{U}_{\text{Piola}})(P)\, d\Omega_{t_0} = \int_{P\in\omega_{t_0}} \text{div}(\vec{u})(\Phi_t^{t_0}(P))\, J(P)\, d\Omega_{t_0}. \tag{L.25}$$

（假设运动是 正则的，因此 $J(P) > 0$）。因此我们 想要

$$\text{div}\vec{U}_{\text{Piola}}(P) = J(P)\, \text{div}\vec{u}(p) \quad \text{when} \quad p = \Phi_t^{t_0}(P). \tag{L.26}$$

定义 L.3 Piola 变换是映射

$$\begin{cases} C^\infty(\Omega_t;\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\Omega_{t_0};\mathbb{R}^n) \\ \qquad \vec{u} \to \vec{U}_{\text{Piola}}, \quad \boxed{\vec{U}_{\text{Piola}}(P) := J(P)F(P)^{-1}.\vec{u}(p)} \quad \text{when} \quad p = \Phi_t^{t_0}(P). \end{cases} \tag{L.27}$$

(So $\vec{U}_{\text{Piola}}(P) = J(P)\Phi^*(\vec{u})(P)$，其中 $\Phi^*(\vec{u})(P) = F(P)^{-1}.\vec{u}(p)$ =是关于 $\Phi = \Phi_t^{t_0}$ 的拉回。)

命题 L.4 由 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$，$\vec{U}_{\text{Piola}} = \sum_{i=1}^n U^i_{\text{Piola}}\vec{e}_i$和 $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u^i\vec{e}_i$，可得

$$\text{div}\vec{U}_{\text{Piola}}(P) = J(P)\, \text{div}\vec{u}(p), \quad i.e. \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial U^i_{\text{Piola}}}{\partial X^i}(P) = J(P)\sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^i}(p). \tag{L.28}$$

证明。散度$(\tau.\vec{w}) =^{(S.61)} \widetilde{\text{散度}}(\tau).\vec{w} + \tau\ 0..\ d\vec{w}$给出散度$((JF^{-1}).(\vec{u}\circ\Phi_t^{t_0}))(P) =$(散度$(JF^{-T})(P)\ \vec{u}(p))_g +$ $(J(P)F(P)^{-1})\ 0..\ (d\vec{u}(p).F(P)) \overset{=}{=}^{(L.22)} 0 + J(P)(F(P).F(P)^{-1})\ 0..\ d\vec{u}(p) = J(P)\ I\ 0..\ d\vec{u}(p) = J(P)$散度$\vec{u}(p)$, 由此得到 (L.28)。 ∎

M 功与功率

M.1 定义

M.1.1 功

（类似热力学的方法。）元功是一个微分形式 α，例如 $\alpha = dU$ （内能密度）、 $\alpha = \delta W =$ （元功）。考虑一条正则曲线 $c:\ t \in [t_0, T] \to c(t) \in \mathbb{R}^n$。并令 $\vec{v}(t, c(t)) := \vec{c}'(t)$。沿曲线的 α 的功为

$$\begin{aligned} \int_c \alpha &:= \int_{t=t_0}^T \alpha(t, c(t)).\vec{c}'(t)\, dt \overset{\text{noted}}{=} \int_{t=t_0}^T \alpha.d\vec{c} \\ &= \int_{t=t_0}^T \alpha(t, c(t)).\vec{v}(t, c(t))\, dt \overset{\text{noted}}{=} \int_{t=t_0}^T \alpha.\vec{v}\, dt. \end{aligned} \tag{M.1}$$

例如，微分形式 $\alpha = \delta W$ 的 $W_T^{t_0}(\alpha, c) = \int_c \delta W =$ 沿 c 的功。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$接着考虑一个物体 Obj 及其运动 $\Phi:\ (t, P_{Obj}) \to p(t) = \Phi(t, P_{Obj}) = \Phi_{P_{Obj}}(t) \in \mathbb{R}^n$，曲线 $c_{P_{Obj}} = \Phi_{P_{Obj}}:\ t \in [t_0, T] \to p(t) = \Phi_{P_{Obj}}(t) \in \mathbb{R}^n$，以及欧拉速度 $\vec{v}(t, p(t)) = \Phi_{P_{Obj}}'(t)$。$\widetilde{\ }$物体 Obj 和欧拉微分形式 α 沿 Φ 所做的功，是所有粒子的 α 的功之和，$\widetilde{\ }$形式化地写作 $\sum_{P_{Obj}\in Obj}(\int_{c_{P_{Obj}}} \alpha_{P_{Obj}})$。因此，对于关联运动 $\Phi^{t_0}(t, p_{t_0}) = \Phi(t, P_{Obj}) = p(t) = \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，当 $p_{t_0} = \Phi(t_0, P_{Obj})$ 时，以及 $\Omega_t = \Phi(t,$ Obj $)$,

$$W_T^{t_0}(\widetilde{\Phi}) := \int_{p_{t_0}\in\Omega_{t_0}} \int_{t=t_0}^T \alpha(t, \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t)).\vec{v}(t, \Phi^{t_0}_{p_{t_0}}(t))\, dt\, d\Omega_{t_0} = \int_{t=t_0}^T \int_{p_t\in\Omega_t} \alpha(t, p_t)).\vec{v}(t, p_t)\, d\Omega_t\, dt. \tag{M.2}$$

（最后 若可以应用 Fubini定理，则等式成立，例如，当 α 为 C^0 且 Φ^{t_0} 为 C^1时，Obj 有界 .)

练习 M.1 若 α 是闭且恰当微分形式， $\alpha = dU$，则证明

$$\int_c dU = U(c(T)) - U(c(t_0)) \overset{\text{noted}}{=} \Delta U \tag{M.3}$$

仅取决于曲线 c 的端点 $c(t_0)$ 和 $c(T)$。
答案。 $\int_c dU = \int_{t=t_0}^{T} dU(c(t)).\vec{c}'(t)\ dt = \int_{t=t_0}^{T} \underbrace{d_{\ (U\circ c)\ dt}}(t)\ dt = [U\circ c]_{t_0}^{T} = U(c(T)) - U(c(t_0))$。 ∎

备注（连续介质力学）：观察者选择一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g = \cdot \bullet_g \cdot = \cdot \bullet \cdot$（若规定了 $(\cdot,\ \cdot)_g$，则此选择是隐含的）。若他选择用 $(\cdot,\ \cdot)_g$-里斯表示向量 $\vec{f}_t(p_t)$ 来表示线性形式 $\alpha_t(p_t)$（依赖观察者），参见 (B.8)，则

$$\int_c \alpha = \int_{t=t_0}^{T} \alpha(t, c(t)).\vec{c}'(t)\, dt = \int_{t=t_0}^{T} \vec{f} \bullet d\vec{c} = \int_{t=t_0}^{T} \vec{f} \bullet \vec{v}\, dt. \tag{M.4}$$

M.1.2 及其相关功率密度

~定义：微分形式 α 沿着 Φ 的功率密度是欧拉函数

$$\psi := \alpha.\vec{v} : \begin{cases} \mathcal{C} = \bigcup\limits_{t\in[t_0,T]} (\{t\} \times \Omega_t) \ \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad (t,p) \ \to \psi(t,p) = \alpha(t,p).\vec{v}(t,p). \end{cases} \tag{M.5}$$

在 t 处的功率为

$$\mathcal{P}_t(\widetilde{\Phi}) = \mathcal{P}(t,\widetilde{\Phi}) := \int_{p\in\Omega_t} \psi(t,p)\, d\Omega_t = \int_{p\in\Omega_t} \alpha_t(p).\vec{v}_t(p)\, d\Omega_t \overset{\text{noted}}{=} \mathcal{P}(t,\vec{v}_t) = \mathcal{P}_t(\vec{v}_t). \tag{M.6}$$

→备注：给定欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$，再利用 $(\cdot,\cdot)_g$-里斯表示向量 f （它依赖观察者），我们得到

$$\psi = \vec{f} \bullet \vec{v}, \quad \text{i.e.} \quad \psi(t,p) = \vec{f}(t,p) \bullet_g \vec{v}(t,p) \quad (= (\vec{f}(t,p), \vec{v}(t,p))_g), \tag{M.7}$$

由此得到 $\mathcal{P}(t,\widetilde{\Phi}) := \int_{p\in\Omega_t} \vec{f}\ (t,p)\ \bullet \vec{v}(t,p)\ d\Omega_t$.

M.2 皮奥拉–基尔霍夫张量

考虑一个正则欧拉速度场 $\vec{v}$，因此 $d\vec{v}$ 是一个自同态（可视为一个 $\binom{1}{1}$ 张量）。那么，我们还需要另一个自同态 τ （可视为一个 $\binom{1}{1}$ ，以得到客观双重缩并

$$\underline{\underline{\tau}} \ \overset{\cdot\cdot}{=}\ d\vec{v} := \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\tau}}.d\vec{v}), \tag{M.8}$$

这意味着 $\tau(t,\_p) \overset{\cdot\cdot}{=} d\vec{v}(t,\ p) := \mathrm{Tr}(\tau(t,\ p).d\vec{v}(t,\ p))$。

量化：在 t 处取一个基 $(\vec{e}_i)$，并且 $\tau = \sum_{ij} \tau^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$ 和 $d\vec{v} = \sum_{jk} v^j_{|k} \vec{e}_j \otimes e^k$ （为便于计算，已将自同态写成类似 $\binom{1}{1}$ 张量的形式）， $\tau.d\vec{v} = \sum_{ijk} \tau^i_j v^j_{|k} \vec{e}_i \otimes e^k$ 和

$$\underline{\underline{\tau}} \ \overset{\cdot\cdot}{=}\ d\vec{v} = \sum_{i,j=1}^{n} \tau^i_j v^j_{|i} \quad \text{(objective value)}, \tag{M.9}$$

参见 (Q.32) 。然后选取一个欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$，以便使用双重矩阵乘积

$$\underline{\underline{\tau}} : d\vec{v} := \sum_{i,j=1}^{n} \tau^i_j v^i_{|j} = [\underline{\underline{\tau}}]_{|\vec{e}}{}^T : [d\vec{v}]_{|\vec{e}} \quad \text{(subjective value)}. \tag{M.10}$$

M.2.1 应力的客观内功率： $d\vec{v}$的函数

材料内应力的常见假设：一阶情况下，功率密度具有如下形式

$$\psi = \underline{\underline{\tau}} \ \overset{\cdot\cdot}{=}\ d\vec{v}, \quad \text{i.e.} \quad \psi(t,p) = \underline{\underline{\tau}}(t,p) \ \overset{\cdot\cdot}{=}\ d\vec{v}(t,p), \ \ \forall (t,p) \in \mathcal{C}, \tag{M.11}$$

因此， t 处的功率为

$$\mathcal{P}_t(\vec{v}_t) = \int_{p\in\Omega_t} \psi(t,p)\, d\Omega_t = \int_{p\in\Omega_t} \underline{\underline{\tau}}_t(p) \ \overset{\cdot\cdot}{=}\ d\vec{v}_t(p)\, d\Omega_t. \tag{M.12}$$

M.2.2 第一皮奥拉–基尔霍夫张量

皮奥拉–基尔霍夫方法是将欧拉量转换为拉格朗日量，以便参照初始构形。(M.12)给出

$$\mathcal{P}_t(\vec{v}_t)=\int_{P\in\Omega_{t_0}}\psi_t(\Phi_t^{t_0}(P))\,|J_t^{t_0}(P)|\,d\Omega_{t_0}=\int_{P\in\Omega_{t_0}}\underline{\underline{\tau}}_t(\Phi_t^{t_0}(P))\;\overset{\cdot}{\otimes}\;d\vec{v}_t(\Phi_t^{t_0}(P))\;J_t^{t_0}(P)\,d\Omega_{t_0}\tag{M.13}$$

（对于正则运动， $\Phi_t^{t_0}$在 P处的雅可比行列式 $J_t^{t_0}(P)=\det(F_t^{t_0}(P))$ 为正）。拉格朗日速度$\vec{V}^{t_0}(t,P)=\vec{v}_t(\Phi_t^{t_0}(P))$ 满足 $d\vec{V}_t^{t_0}(P)=d\vec{v}_t(p_t).F_t^{t_0}(P)$，其中 $p_t=\Phi^{t_0}(t,P)$。因此

$$\underline{\underline{\tau}}_t(p_t)\;\overset{\cdot}{\otimes}\;d\vec{v}_t(p_t)=\underline{\underline{\tau}}(p_t)\;\overset{\cdot}{\otimes}(d\vec{V}_t^{t_0}(P).F_t^{t_0}(P)^{-1})=(F_t^{t_0}(P)^{-1}.\underline{\underline{\tau}}(p_t))\;\overset{\cdot}{\otimes}\;d\vec{V}_t^{t_0}(P).\tag{M.14}$$

量化：选取一组基和一个欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$，因此

$$\mathcal{P}_t(\vec{v}_t)=\int_{P\in\Omega_{t_0}}\underbrace{(J_t^{t_0}(P)\underline{\underline{\tau}}(p_t)^T.F_t^{t_0}(P)^{-T})}_{I\!K_t^{t_0}(P)}:d\vec{V}_t^{t_0}(P)\,d\Omega_{t_0}.\tag{M.15}$$

定义 M.2 相对于 t_0, t 和一组基 $(\vec{e}_i)$， $P\in\Omega_{t_0}$处的第一 Piola–Kirchhoff（双点）张量是线性映射 $I\!K_t^{t_0}(P)\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$，定义如下

$$I\!K_t^{t_0}(P)=J_t^{t_0}(P)\,\underline{\underline{\sigma}}_t(\Phi_t^{t_0}(P)).F_t^{t_0}(P)^{-T},\quad\text{where}\quad\underline{\underline{\sigma}}=\underline{\underline{\tau}}^T,\tag{M.16}$$

不严格地写作

$$\boxed{I\!K=J\,\underline{\underline{\sigma}}.F^{-T}}.\tag{M.17}$$

因此

$$\mathcal{P}_t(\vec{v}_t)=\int_{\Omega_{t_0}}I\!K_t^{t_0}(P):d\vec{V}_t^{t_0}(P)\,d\Omega_{t_0}.\tag{M.18}$$

注 M.3 Piola–Kirchhoff 张量并不那么容易掌握：在欧拉框架中一切都相当简单（即 t 最初表述定律的构形），但当改用初始构形（在 t_0处）表达时，一切就变得复杂得多.....因此，当用 Piola–Kirchhoff 张量引入李导数（欧拉型）时，李导数便成了一个相当神秘的数学对象，见第 25 页脚注。

注 M.4 备注续：使用拉回后，(M.13) 写作（$J_t^{t_0}$（P）为正定）

$$\mathcal{P}(t,\widetilde{\Phi})=\int_{p_t\in\Omega_t}\psi_t(p_t)\,d\Omega_t=\int_{P\in\Omega_{t_0}}\big((\Phi_t^{t_0})^*\psi_t\big)(P)\,\big((\Phi_t^{t_0})^*d\Omega_t\big),\tag{M.19}$$

因为 $((\Phi_t^{t_0})^*d\Omega_t)=J_t^{t_0}(P)\,d\Omega_{t_0}$ 且 $((\Phi_t^{t_0})^*\psi_t)(P)=\psi_t(p_t)$（实值函数）。由此得到 Piola–Kirchhoff 张量（拉回至初始构形），因为 $(\Phi_t^{t_0})^*(\alpha_t.\vec{v}_t)(p_t)=(\alpha_t.\vec{v}_t)(\Phi_t^{t_0}(P))=\alpha_t(\Phi_t^{t_0}(P)).\vec{v}_t(\Phi_t^{t_0}(P))$。

M.2.3 第二类 Piola–Kirchhoff 张量

第一皮奥拉–基尔霍夫张量 $I\!K$ 可能会混淆欧拉变量与拉格朗日变量、线性映射与自同态.....而 $I\!K(p_{t_0})$ 并不对称：它不可能对称，因为 $I\!K(p_{t_0})\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 不是自同态。为得到对称张量，定义第二类 Piola–Kirchhoff 张量：

定义 M.5 第二类 Piola–Kirchhoff 张量是自同态 $S\!K_t^{t_0}(P)\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$，简要定义如下：

$$S\!K=F^{-1}.I\!K=JF^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.F^{-T}.\tag{M.20}$$

完整记法：$S\!K_t^{t_0}(P)=(F_t^{t_0}(P))^{-1}.I\!K_t^{t_0}(P)=J_t^{t_0}(P)(F_t^{t_0}(P))^{-1}.\sigma_t(p).(\underline{\underline{F}}_t^{t_0}(P))^{-T}$。

因此，如果 $\underline{\underline{\sigma}}_t(p)\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t;\vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 是对称的，那么 $S\!K_t^{t_0}(P)\in\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0})$ 也是对称的。

因此，借助自同态 $d\vec{v}_t \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_t,\ \vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 的拉回：

$$((\Phi_t^{t_0})^* d\vec{v}_t)(P) = F_t^{t_0}(P)^{-1}.d\vec{v}_t(p_t).F_t^{t_0}(P), \tag{M.21}$$

且 $d\vec{v}_t(p_t) = d\vec{V}_t^{t_0}(P).F_t^{t_0}(P)^{-1}$ 和 $\sigma_t(p)$ 对称（因此 $\mathit{SK}_t^{t_0}$ 对称），

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_t(\vec{v}_t) &= \int_{\Omega_{t_0}} \mathit{IK}_t^{t_0} : d\vec{V}_t^{t_0}\, d\Omega_{t_0} = \int_{\Omega_{t_0}} (F_t^{t_0}.\mathit{SK}_t^{t_0}) : d\vec{V}_t^{t_0}\, d\Omega_{t_0} = \int_{\Omega_{t_0}} ([F_t^{t_0}].[\mathit{SK}_t^{t_0}]) : [d\vec{V}_t^{t_0}]^T\, d\Omega_{t_0} \\ &= \int_{\Omega_{t_0}} \mathit{SK}_t^{t_0} : ((d\vec{V}_t^{t_0})^T.F_t^{t_0})\, d\Omega_{t_0} = \int_{\Omega_{t_0}} \mathit{SK}_t^{t_0} : (\frac{{F_t^{t_0}}^T.d\vec{V}_t^{t_0} + d(\vec{V}_t^{t_0})^T.F_t^{t_0}}{2})\, d\Omega_{t_0}.\end{aligned} \tag{M.22}$$

备注 M.6 这是对 $\mathit{SK}(t) = J(t)F(t)^{-1}.\sigma(t).F(t)^{-T}$ 的一种“选定的时间导数”，它会导出某种李导数，正如连续介质力学书籍中所解释的那样，见第 25 页脚注。 ∎

M.3 经典超弹性： $\partial W/\partial F$

E 和 F 是有限维空间，$\dim E = n$、$\dim F = m$。

M.3.1 定义

提醒：考虑一个函数

$$\widehat{W} : \begin{cases} \mathcal{L}(E;F) & \to \mathbb{R} \\ L & \to \widehat{W}(L) \end{cases} \tag{M.23}$$

其微分 $d\widehat{W}$：$\mathcal{L}(E;\ F) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(E;\ F);\ \mathbb{R})$ 在 $L \to d\widehat{W}(L)$ 处定义为：沿方向 M，参见 (S.3)，

$$d\widehat{W}(L)(M) = \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{W}(L+hM) - \widehat{W}(L)}{h} \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial L}(L)(M). \tag{M.24}$$

$d\widehat{W}(L)(M)$ 也写作 $dW(L)(M) = dW(L).M$，因为 $dW(L)$ 是线性的。

例 M.7 $\widehat{W}$：$F \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_t) \to \widehat{W}(F) \in \mathbb{R}$（实值函数），其中 $F := F_t^{t_0}(p_{t_0})$ 是 $\in \Omega_{t_0}$处、t处、p_{t_0}处的变形梯度。因此，$d\widehat{W}(F).M = \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{W}(F+hM) - \widehat{W}(F)}{h}$ 记作 $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}(F).M \in \mathbb{R}$ 是 $\widehat{W}$ 在 F 处沿方向 $M \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\vec{\mathbb{R}}^n_t)$ 的导数。 ∎

例 M.8 $m = n$、自同态 $L \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}}^n)$，以及 $\widehat{W}(L) := \mathrm{Tr}(L)$（迹）。这里$d\mathrm{Tr}(L)(M) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Tr}(L+hM) - \mathrm{Tr}(L)}{h} = \mathrm{Tr}(M)$（迹是线性的），因此对所有 L，都有 $d\mathrm{Tr}(L) = \mathrm{Tr}$。 ∎

M.3.2 基底表示（量化）： $\partial W/\partial L_{ij}$

设 $(\vec{a}_i)$ 和 (b_i) 分别是 E和 F中的基，其中 (π_{ai}) 是 $(\vec{a}_i)$ 的（协变）对偶基。设 $(\mathcal{L}_{ij})_{i=1,\dots,j=1\dots}{}^{m}{}_{,,n} = (\vec{b}_i \otimes \pi_{aj})$ 是 $\mathcal{L}(E;\ F)$ 中的关联基，即 $\mathcal{L}_{ij}$ 由下式定义：对所有 $i = 1,...,m$和 $j,\ell = 1,...,n$，参见命题 A.41（矩阵 $[\mathcal{L}_{ij}]_{|\vec{a},\vec{b}}$的所有元素均为零，唯有行 i与列 j的交点处的元素等于 1）。设 $L \in \mathcal{L}(E;\ F)$。W在 L沿方向 $\mathcal{L}_{ij}$ 的导数为

$$d\widehat{W}(L).\mathcal{L}_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{W}(L+h\mathcal{L}_{ij}) - \widehat{W}(L)}{h} \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial L_{ij}}(L) \tag{M.25}$$

（通常记号）。相对于所选基的相关矩阵：

$$[d\widehat{W}(L)]_{|\mathcal{L}_{ij}} := [\frac{\partial \widehat{W}}{\partial L_{ij}}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \overset{\text{noted}}{=} [d\widehat{W}(L)]_{|\vec{a},\vec{b}} \quad (\overset{\text{noted}}{=} [d\widehat{W}(L)_{ij}]). \tag{M.26}$$

因此，若 $M = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij}\mathcal{L}_{ij}$，则 $d\widehat{W}(L)(M) = \sum_{ij} M_{ij}\, d\widehat{W}(L)(\mathcal{L}_{ij})$，因为 $d\widehat{W}(L)$ 是线性的，所以

$$d\widehat{W}(L)(M) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \widehat{W}}{\partial L_{ij}}(L) M_{ij} = [d\widehat{W}(L)]_{|\vec{a},\vec{b}} : [M]_{|\vec{a},\vec{b}}, \tag{M.27}$$

双矩阵缩并。对偶记号：$d\widehat{W}(L)(M) = \sum_{ij} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial L^i_j}(L) M^i_j$。

注 M.9 记号 $[M]_{|\vec{E},\ \vec{e}}$： $[d\widehat{W}(L)]_{|\vec{E},\ \vec{e}}$只是一个矩阵乘积，因为 $M=\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}^m})$ 和$d\widehat{W}(L)\in\mathcal{L}(\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}^m});\ \mathbb{R})$ 是不同类型的数学对象。 ▪

例 M.10 继续例 M.8，取 $(\vec{e}_i)=(\vec{E}_i)$：于是 $\widehat{W}(L)=\mathrm{Tr}(L)$ 得到 $d\widehat{W}(L).M=\mathrm{Tr}(M)=\sum_i M_{ii}$，因此对于所有 i,j，都有 $\frac{\partial\widehat{W}}{\partial L_{ij}}(L)=\delta_{ij}$，于是 $[d\widehat{W}(L)]_{|\vec{e}}=[I]=[\ ^{\partial_{\mathrm{Tr}}\partial L_{ij}}(L)]$(单位矩阵)，并且我们恢复了 $d\mathrm{Tr}(L)(M)=[\ ^{\partial_{\mathrm{Tr}}\partial L_{ij}}(L)]:[M]=[I]:[M]=\sum_{i=1}^n M_{ii}=\mathrm{Tr}(M)$。 ▪

例 M.11 继续例 M.7：导数 $\frac{\partial W}{\partial F_{ij}}$ 的含义颇有意思：它是沿着方向 $\mathcal{L}_{ij}=$所标记的$\vec{e}_i\otimes\pi_{Ej}$的导数，其中 $(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中 $p=\Phi_t^{t_0}(P)$ 处的一个基，而 (π_{Ej}) 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$中 P处的一个基 $(\vec{E}_j)$ 的对偶基，即 $\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F_{ij}}(F)=d\widehat{W}(F).\mathcal{L}_{ij}=$所标记的$d\widehat{W}(F)$。$(\vec{e}_i\otimes\pi_{Ej})$同时沿着方向 $\vec{e}_i$(在 (t,p) 处) 和 π_{Ej}(在 (t_0,P) 处) 求导，其中 F表示 $F_t^{t_0}(P)$。 ▪

M.3.3 运动与 ω-引理

将 (M.23) 推广到 C^1 函数，其中 $\mathcal{U}_\mathcal{E}$ 是仿射空间中的开子集，其关联向量空间为 E，

$$\widehat{W}:\begin{cases}\mathcal{U}_\mathcal{E}\times\mathcal{L}(E;F)&\to\mathbb{R}\\(P,L)&\to\widehat{W}(P,L).\end{cases}\tag{M.28}$$

在 P 处，设 $\widehat{W}_P(L):=\widehat{W}(P,L)$。微分 $d\widehat{W}_P(L)=$记作$\partial_2\widehat{W}(P,L)$，沿方向 $M\in\mathcal{L}(E;\ F)$ 的微分为

$$\partial_2\widehat{W}(P,L).M:=d(\widehat{W}_P)(L).M=\lim_{h\to0}\frac{\widehat{W}(P,L+hM)-\widehat{W}(P,L)}{h}\overset{\text{noted}}{=}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial L}(P,L).M.\tag{M.29}$$

给定一个运动 $\Phi:=\Phi_t^{t_0}:\Omega_{t_0}\to\Omega_t$，定义

$$f:\begin{cases}C^1(\overline{\Omega_{t_0}};\overline{\Omega_t})&\to C^0(\overline{\Omega_{t_0}};\mathbb{R})\\\Phi&\to f(\Phi):=\widehat{W}(.,d\Phi(.)),\end{cases}\tag{M.30}$$

一个仅取决于其一阶（协变）梯度的 Φ 函数；因此，对所有 $P\in\Omega_{t_0}$,

$$f(\Phi)(P)=\widehat{W}(P,d\Phi(P))\in\mathbb{R}.\tag{M.31}$$

（这类关系通常是在应用参考系不变原理之后推导出来的，并假设其仅依赖于一阶导数 $d\Phi=F$。）

引理 M.12（ω-引理）对于 $\Phi,\Psi\in C^1(\Omega_{t_0};\ \Omega_t)$,

$$\boxed{df(\Phi)(\Psi)=\partial_2\widehat{W}(.,d\Phi)(d\Psi)\overset{noted}{=}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F}(.,d\Phi)(d\Psi)},\tag{M.32}$$

即，对于 $P\in\Omega_{t_0}$, $df(\Phi)(\Psi)(P)=\frac{\partial W}{\partial F}(P,d\Phi(P))(d\Psi(P))$.

取 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$、 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 和 $d\Psi.\vec{E}_j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Psi_i}{\partial X_j}\vec{e}_i$ 中的基 $(\vec{E}_i)$ 及 $(\vec{e}_i)$，得到

$$df(\Phi)(\Psi)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F_{ij}}(.,d\Phi)\frac{\partial\Psi_i}{\partial X_j}(.)\overset{noted}{=}[\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F_{ij}}]:[\frac{\partial\Psi_i}{\partial X_j}].\tag{M.33}$$

Marsden 记号： $df(\Phi)(\Psi)=\sum_{i,J=1}^n\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F^i_J}\frac{\partial\Psi^i}{\partial X^J}=[\frac{\partial\widehat{W}}{\partial F^i_J}]:[\frac{\partial\Psi^i}{\partial X^J}]$。

证明。 $C^1(\Omega_{t_0};\ \Omega_t)$ 是一个向量空间，因此 $df(\Phi)(\Psi)=\lim_{h\to0}\frac{f(\Phi+h\Psi)-f(\Phi)}{h}\in C^0(\Omega_{t_0};\ \Omega_t)$，即，对于任意 $P\in\Omega_{t_0}$，我们有 $df(\Phi)(\Psi)(P)=\lim_{h\to0}\frac{f(\Phi+h\Psi)(P)-f(\Phi)(P)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{W(P,d\Phi(P)+h\,d\Psi(P))-W(P,d\Phi(P))}{h}=d\vec{W}_P(d\Psi(P)$，即 (M.32) ▪

M.3.4 应用于经典超弹性： $I\!K = \partial W/\partial F$

设 $(\cdot,\cdot)_g$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中在所有时间 t 上唯一的欧几里得点积，并设 $(\vec{E}_i)$ 和 $(\vec{e}_i)$ 分别是在 t_0 和 t 处的欧几里得基。设 $\sigma_t(p) =$ 在 t 处、 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$ 时的柯西应力张量。

设 $I\!K(P) = J(P)\,\sigma_t(p).F^{-T}(P)$ =表示 P处的第一 Piola–Kirchhoff（双点）张量，参见 (M.16)。由于 $I\!K$ 依赖于 Φ，其完整记法为 $I\!K = I\!K(\Phi)$，定义如下：

$$I\!K(\Phi)(P) = J(P)\,\underline{\underline{\sigma}}_t(\Phi(P)).d\Phi(P)^{-T}. \tag{M.34}$$

定义 M.13 如果存在一个函数 $\widehat{I\!K}$，使得 $I\!K$ 满足

$$I\!K(\Phi)(P) = \widehat{I\!K}(P, d\Phi(P)) \tag{M.35}$$

那么 $I\!K$ 称为本构函数。（一阶假设： $I\!K$ 仅依赖于 $d\Phi = F$ Φ的一阶导数。）

定义 M.14 材料是超弹性的，当且仅当存在一个函数 $\widehat{W}$： $\left\{ \Omega_{t_0} \times \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\, \vec{\mathbb{R}}^n_t) \to \mathbb{R}\,(P, L) \to \widehat{W}(P, L) \right\}$

使得

$$(I\!K(\Phi) =) \qquad \widehat{I\!K}(., d\Phi) = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}(., d\Phi), \quad \text{written} \quad \widehat{I\!K} = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}, \tag{M.36}$$

也就是说，对所有 $P \in \Omega_{t_0}$, $\widehat{I\!K}(P,\ F(P)) = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}(P,\ F(P))$，其中 $F = d\Phi$。

设 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$中的基分别为 $(\vec{E}_I)$ 和 $(\vec{e}_i)$，且 (E^I) 是 $(\vec{E}_I)$ 的对偶基，并且 $I\!K = \sum_{i,\ J=1}^{n} I\!K^i{}_J \vec{e}_i \otimes E^J$，

$$[I\!K(\Phi)]_{|\vec{E},\vec{e}} = [\widehat{I\!K}(., F)]_{|\vec{E},\vec{e}} = [\frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}(., F)]_{|\vec{E},\vec{e}}, \quad \text{i.e.} \quad [I\!K^i_J] = [\frac{\partial \widehat{W}}{\partial F^i_J}(., F)]. \tag{M.37}$$

因此，对于任意（虚）运动 $\Psi : \Omega_{t_0} \to \Omega_t$，由 (M.32) 和 (M.27)，

$$\widehat{I\!K}(d\Phi)(d\Psi) = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F}(d\Phi)(d\Psi) \qquad = \sum_{iJ} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F^i_J}(F) \frac{\partial \Psi^i}{\partial X^J} \overset{\text{noted}}{=} [\widehat{I\!K}] : [d\Psi], \tag{M.38}$$

也就是说，对所有 $P \in \Omega_{t_0}$, $\widehat{I\!K}(d\Phi)(d\Psi)(P) = \sum_{iJ} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial F^i_J}(P,\ F_t^{t_0}(P))\ \frac{\partial \Psi^i}{\partial X^J}(P)$。

练习 M.15 在 $\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $\vec{\mathbb{R}}^n_t$ 中均定义唯一的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$，并分别取欧几里得基 $(\vec{E}_i) \in \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}$ 和 $(\vec{e}_i) \in \vec{\mathbb{R}}^n_t$，且 (E^i) 是 $(\vec{E}_i)$ 的对偶基，已知 $C = F^T.F$，证明（沿 $\vec{e}_i \otimes E^J$ 方向求导）：

$$\frac{\partial C}{\partial F^i_J}(F) = \sum_K F^i_K \vec{E}_J \otimes E^K + \sum_K F^i_K \vec{E}_K \otimes E^J \quad (= dC(F).(\vec{e}_i \otimes E^J)). \tag{M.39}$$

$$\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial F}(F) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{C(F)}\,\big)^{-1}.\frac{\partial C}{\partial F}(F). \tag{M.40}$$

$$\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial C} = \frac{1}{2}(\sqrt{C})^{-1}. \tag{M.41}$$

答案。令 $F = \sum_{iJ} F^i_J \vec{e}_i \otimes E^J$，则 $F^T = \sum_{Ij} (F^T)^I_j \vec{E}_I \otimes e^j = \sum_{Ij} F^j_I \vec{E}_I \otimes e^j$，且 $C = \sum_{IJ} C^I_J \vec{E}_i \otimes E^J = F^T.F = \sum_{IJ}\sum_k (F^T)^I_k F^k_J \vec{E}_I \otimes E^J = \sum_{IJ}\sum_k F^k_I F^k_J \vec{E}_I \otimes E^J = C(F)$，因此 $C^I_J = \sum_k F^k_I F^k_J = C^I_J(F)$。并且

$$\begin{aligned} C(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) &= (F + h\vec{e}_i \otimes E^J)^T.(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) = (F^T + h\vec{E}_J \otimes e^i).(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) \\ &= C(F) + h\,(\vec{E}_J \otimes e^i).F + h\,F^T.(\vec{e}_i \otimes E^J) + h^2\,\vec{E}_J \otimes E^i \\ &= C(F) + h\,(\sum_K F^i_K \vec{E}_J \otimes E^K + \sum_K (F^T)^K_i \vec{E}_K \otimes E^J) + h^2\,\vec{E}_J \otimes E^J \end{aligned} \tag{M.42}$$

因此得式（M.39）。并且 $C(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) - C(F) = (\sqrt{C}(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) + \sqrt{C}(F))$。$(\sqrt{C}(F + h\vec{e}_i \otimes E^J) - \sqrt{C}(F))$ 得到$d\sqrt{C}(F)(\vec{e}_i \otimes E^J) = 2\sqrt{C}(F).d\sqrt{C}(F)(\vec{e}_i \otimes E^J)$。因此 $\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial F^i_J}(F) = \frac{1}{2}(\sqrt{C}(F))^{-1} \cdot \frac{\partial C}{\partial F^i_J}(F)$。

$(C + h\vec{e}_i \otimes e^j) - C = (\sqrt{C + h\vec{e}_i \otimes e^j} + \sqrt{C}).(\sqrt{C + h\vec{e}_i \otimes e^j} - \sqrt{C})$除以 h，得到 $\vec{e}_i \otimes e^j = 2\sqrt{C}.\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{C + h\vec{e}_i \otimes e^j} - \sqrt{C}}{h} = 2\sqrt{C}.d\sqrt{C}.(\vec{e}_i \otimes e^j)$，因此对于所有 L 都有 $L = 2\sqrt{C}.(d\sqrt{C}.L)$（ $d\sqrt{C}$ 的线性性），从而 $d\sqrt{C}.L = \frac{1}{2}(\sqrt{C})^{-1}.L$。 ∎

M.3.5 推论（超弹性）： $SK = \partial W/\partial C$

利用第二类 Piola–Kirchhoff 张量 $SK = F^{-1}.PK$ 的对称性，我们推得 $SK_t^{t_0}(\Phi_t^{t_0})(P) = \widehat{SK_t^{t_0}}(P,\ F_t^{t_0}(P))$（本构函数）。并且我们可以推得存在一个函数 $\widetilde{W}:\begin{cases}\Omega_{t_0}\times\mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n_{t_0};\ \vec{\mathbb{R}}^n_{t_0}) \to \mathbb{R}\\ (P,\ L) \to \widetilde{W}(P,\ L)\end{cases}$，使得

$$\widehat{SK_t^{t_0}}(.,C) = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial C}(.,C). \tag{M.43}$$

（详见 Marsden 和 Hughes [12]，以及所需的热力学假设。）

N 质量守恒

设 $\rho(t,\ p) = \rho_t(p)$ 为 t 时 $p \in \Omega_t$ 处的（欧拉）质量密度，假设其为 > 0；子集 $\omega_t \subset \Omega_t$ 的质量 $m(\omega_t)$ 为

$$m(\omega_t) = \int_{p\in\omega_t} \rho_t(p)\, d\omega_t. \tag{N.1}$$

质量守恒原理（粒子既不损失也不产生）：对于所有 $\omega_{t_0} \subset \Omega_{t_0}$ 和所有 t，

$$m(\omega_t) = m(\omega_{t_0}), \quad \text{i.e.} \quad \int_{p\in\omega_t} \rho_t(p)\, d\omega_t = \int_{P\in\omega_{t_0}} \rho_{t_0}(P)\, d\omega_{t_0}. \tag{N.2}$$

命题 N.1 若满足 *(N.2)*，则有 $J_t^{t_0}(P) = \det(d\Phi_t^{t_0}(P))$（假设运动正则，故雅可比行列式为正）以及 $p = \Phi_t^{t_0}(P)$，

$$\rho_t(p) = \frac{\rho_{t_0}(P)}{J_t^{t_0}(P)}. \tag{N.3}$$

证明。 变量替换公式给出

$$\int_{p\in\omega_t} \rho_t(p)\, d\omega_t = \int_{P\in\omega_{t_0}} \rho_t(\Phi_t^{t_0}(P))\, J_t^{t_0}(P)\, d\omega_{t_0},$$

因此 (N.2) 给出 $\rho_t(\Phi_t^{t_0}(P))J_t^{t_0}(P) = \rho_{t_0}(P)$。 ∎

命题 N.2 $\vec{v} = \vec{v}(t, p_t)$ 是点 $(t, p_t) \in \mathbb{R}\times\Omega_t$ 处的欧拉速度，*(N.2)* 给出

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\vec{v}) = 0. \tag{N.4}$$

因此，对所有 $\omega_t \subset \Omega_t$，

$$\int_{\omega_t} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\omega_t = -\int_{\partial\omega_t} \rho\vec{v}.\vec{n}\, d\sigma_t. \tag{N.5}$$

证明。 (N.2) 给出 $\frac{d}{dt}(\int_{p(t)\in\omega_t} \rho(t,\ p(t))\ d\omega_t) = 0$，对所有 ω_t 应用莱布尼茨公式 (K.41)，得到 (N.4)。然后，格林公式 $\int_{\Omega_t} \text{散度}(\rho\,\vec{v})\ d\Omega^t = \int_{\partial\Omega_t} \rho\vec{v}.\vec{n}\, d\sigma_t$ 给出 (N.5)。 ∎

练习 N.3 利用 (N.3) 证明 (N.4)。

答案。 $J(t,\ P)\rho(t,\ \Phi(t,\ P)) = \rho_{t_0}(P)$ 给出，其中 $p_t = \Phi(t,\ P)$，

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,P)\,\rho(t,p_t) + J(t,P)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,p_t) + d\rho(t,p_t).d\Phi(t,P)\right) = 0.$$

因此 $\frac{\partial J}{\partial t}(t,P) = J(t,P)\,\mathrm{div}\vec{v}(t,p)$，参见 (K.40)，得出 (N.4)。 ∎

O 动量平衡

O.1 框架

~ ~Φ： $[t_0,T]\times Obj \to \mathbb{R}^n$ 是正则运动，$\Omega_t=\Phi(t,$ $Obj)$，$\Gamma_t=\partial\Omega_t$(边界)，$\vec{v}$ 是欧拉速度场，ω_t 是 Ω_t 中的正则子域，$\partial\omega_t$ 是其边界。

观察者选取一个欧几里得基 $(\vec{e}_i)$（例如用英尺或米构造），并将 $(\cdot,\cdot)_g$ 称为相应的欧几里得点积。并且 $\vec{n}(t,\ p)=\vec{n}_t$ (p) 是 t 处 $p\in\partial\omega_t$的外单位法向量。

假定所有函数都足够正则，以便验证以下计算。 g g .

Let $\rho:\left\{\begin{array}{l}\bigcup_{t\in[t_0,T]}(\{t\}\times\Omega_t)\ \to\mathbb{R}\\ (t,p_t)\ \to\rho(t,p_t)\end{array}\right\}$ (a mass density), let $\vec{f}:\left\{\begin{array}{l}\bigcup_{t\in[t_0,T]}(\{t\}\times\Omega_t)\ \to\vec{\mathbb{R}}^n\\ (t,p_t)\ \to\vec{f}(t,p_t)\end{array}\right\}$ (a 体力密度)，并令 $\vec{T}:\left\{\begin{array}{l}t\in[t_0,T](\{t\}\times\partial\omega_t\times\mathbb{R}^n_t)\ \to\mathbb{R}^n\\ (t,\ p_t,\vec{n}(p_t))\ \to\vec{T}(t,\ p_t,\ \vec{n}(p_t))\end{array}\right\}$（面力密度），其定义域为任意正则子集 $\omega_t\subset\Omega_t$。

O.2 总平衡定律

→ →**定义 O.1** 当且仅当对于所有位于 Ω_t 中的正则开子集 ω_t，ρ、$\vec{f}$ 和 T 满足动量平衡，

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\omega_t}\rho\vec{v}\,d\Omega_t\Big)=\int_{\omega_t}\vec{f}\,d\Omega_t+\int_{\partial\omega_t}\vec{T}_{\partial\omega_t}\,d\Gamma_t\quad\text{(master balance law).}\tag{O.1}$$

（这实际上是一个线性假设，见定理 O.2。）

因此，根据（K.41），

$$\int_{\omega_t}\frac{D(\rho\vec{v})}{Dt}+\rho\vec{v}\,\mathrm{div}\vec{v}\,d\Omega_t=\int_{\omega_t}\vec{f}\,d\Omega_t+\int_{\partial\omega_t}\vec{T}_{\partial\omega_t}\,d\Gamma_t.\tag{O.2}$$

并根据质量守恒假设，参见（N.4），我们得到

$$\int_{\omega_t}\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}\,d\Omega_t=\int_{\omega_t}\vec{f}\,d\Omega_t+\int_{\partial\omega_t}\vec{T}_{\partial\omega_t}\,d\Gamma_t,\tag{O.3}$$

其中 $\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{\gamma}=$ 为欧拉加速度。

O.3 柯西定理 $\vec{T}=\sigma.\vec{n}$ （应力张量 σ）

定理 O.2（柯西第一定律：柯西应力张量）若总平衡定律 *(O.1)* 得到满足，则 T 关于 $\vec{n}$ 是线性的，也就是说，存在一个欧拉自同态 σ，对应于一个欧拉张量$\sigma\in T^1_1(\Omega_t)$，称为柯西应力张量，使得对所有 $\partial\omega_t$，简写为

$$\vec{T}=\underline{\sigma}.\vec{n},\tag{O.4}$$

其中 $\vec{n}$ 是 $\partial\omega_t$ 的单位外法向量（即，对所有 t 和 $p_t\in\partial\omega_t$，均有 $\vec{T}(t,p_t)=\sigma(t,p_t).\vec{n}(t,p_t)$）。

证明基于：

引理 O.3 设 $\varphi:\left\{\begin{array}{l}\Omega\ p\ \to\mathbb{R}\\ \to\varphi(p)\end{array}\right\}\in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ 以及 $\psi:\left\{\begin{array}{l}\Omega\times\vec{\mathbb{R}}^3\ \to\mathbb{R}\ (p,\vec{w})\\ \to\psi(p,\vec{w})\end{array}\right\}\in C^1(\Omega\ \vec{\mathbb{R}}^3;$ $\mathbb{R})$。若

$$\forall\omega\ open\ in\ \Omega,\ \int_{p\in\omega}\varphi(p)\,d\Omega=\int_{p\in\partial\omega}\psi(p,\vec{n}(p))\,d\Gamma\tag{O.5}$$

（不依赖曲率或高阶导数，因为对于任意 $p\in\partial\omega$，ψ 仅取决于 $\vec{n}(p)$），因此

$$\exists\vec{k}\in C^1(\overline{\Omega};\vec{\mathbb{R}^3})\ s.t.\ \psi=(\vec{k},\vec{n})_g,\ and\ \varphi=\mathrm{div}\vec{k},\tag{O.6}$$

也就是说，ψ 关于 $\vec{n}$呈线性，且 φ 是散度。

证明。（引理 O.3。）（这是标准证明：我们在此回顾一下。）设 $p\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$。考虑由顶点 p、$p+(h_1,0,0)$、$p+(0,h_2,0)$和 $p+(0,0,h_3)$确定的四面体，其中 $h_i>0$ 对所有 i成立。（四面体每个面的单位法向量都是恒定的。）设 Σ_1 为外单位法向量是$-\vec{E}_1$的那个侧面：其面积为 $\sigma_1=\frac{1}{2}h_2h_3$（直角三角形）。$\Sigma_2$和 Σ_3的情形同上。设 Σ为第四个侧面：其面积为 $\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{h_2^2h_3^2+h_3^2h_1^2+h_1^2h_2^2}$，外单位法向量为$\vec{n}=\frac{1}{2\sigma}(h_2h_3,h_3h_1,h_1h_2)$（见习题 O.5），也就是 $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$，其中 $n_i=\frac{\sigma_i}{\sigma}$pour $i=1$、2、3。四面体的体积记为 $\frac{1}{6}h_1h_2h_3=\ell^3$。设 $M:=\sup_{p\in\Omega}|\varphi(p)|$；我们有 $M<\infty$，因为 φ 在Ω中连续。于是由（O.6）可得

$$M\ell^3\geq|\int_{\partial\omega_t}\psi(p,\vec{n}(p))\,d\Gamma|,\quad\text{so}\quad\int_{\partial\omega_t}\psi(p,\vec{n}(p))\,d\Gamma=O(\ell^3).\tag{O.7}$$

又由于 ψ 连续，对 Σ_i 应用中值定理可得：存在 $p_i\in\Sigma_i$ 使得

$$\int_{\Sigma_i}\psi(p,\vec{n}(p))\,d\Gamma=\sigma_i\psi(p_i,\vec{n}_i).$$

Thus

$$\int_{\partial\omega_t}\psi(p,\vec{n}(p))\,d\Gamma=\Big(\sigma_1\psi(p_1,-\vec{E}_1)+\sigma_2\psi(t,p_2,-\vec{E}_2)+\sigma_3\psi(p_3,-\vec{E}_3)+\sigma\psi(p_4,\vec{n})\Big).$$

于是，由于 Ψ 连续，(O.7) 得出

$$\sigma_1\psi(p_1,-\vec{E}_1)+\sigma_2\psi(p_2,-\vec{E}_2)+\sigma_3\psi(p_3,-\vec{E}_3)+\sigma\psi(p_4,\vec{n})=O(\ell^3).\tag{O.8}$$

我们通过取 $h_2=h_3=$记为h 和 $h_1=h^2$，将四面体沿 yz 面压平；因此 $\sigma_1=\frac{1}{2}h^2$,$\sigma_2=o(h^2)$，$\sigma_3=o(h^2)$，$\sigma\sim\sigma_1$, $\ell^3=\frac{1}{6}h^4$，且 $\vec{n}\sim-\vec{n}_1=\vec{E}_1$ 和 $p_i\sim p$；于是

$$\psi(p,-\vec{E}_1)+\psi(p,+\vec{E}_1)=0.\tag{O.9}$$

对 xz 和 xy同理。对于给定的 h_1,h_2,h_3 的固定四面体，考虑较小的四面体 $\varepsilon h_1,\varepsilon h_2,\varepsilon h_3$。于是，由 $\varepsilon\to0$ (O.8) 和 (O.9) 可得

$$\psi(p,\vec{n})=-\frac{\sigma_i}{\sigma}\psi(p,-\vec{E}_1)-\frac{\sigma_2}{\sigma}\psi(p,-\vec{E}_2)-\frac{\sigma_3}{\sigma}\psi(p,-\vec{E}_3)=\sum_{i=1}^{3}n_i\psi(p,\vec{E}_i),$$

因为 $n_i=\frac{\sigma_i}{\sigma}$pour $i=1$，2，3。对于任意（倾斜的）四面体，也可以进行相同的步骤（或者应用变量替换，回到上述四面体）。因此，ψ_p 是关于 $\vec{n}_p$的线性映射，也就是说，存在一个线性形式 α_p，使得 $\psi_p(\vec{n}_p)=\alpha_p.\vec{n}_p$ 对任意 $p\in\partial\omega$ 都成立。里斯表示定理给出：$\exists\vec{k}_p$，使得 $\alpha_p.\vec{n}_p=(\vec{k}_p,\ \vec{n}_p)_g=$所记$\vec{k}_p\bullet\vec{n}_p$。

证明。（定理。）对每个分量应用引理 O.3，其中取 $\vec{\varphi}=\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}-\vec{f}=\sum_{i=1}^n\varphi^i\vec{e}_i$，参见 (O.3)。

推论 O.4 其中 散度$\sigma:=\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j})\vec{e}_i$（“矩阵散度”的定义见 *(S.65)*），

$$\begin{cases}\vec{f}+\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}=\rho\dfrac{D\vec{v}}{Dt}&in\ \Omega_t,\\ \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}=\vec{T}&on\ \Gamma_t\end{cases}\tag{O.10}$$

（矩阵意义）。（采用对偶记号，散度$\sigma:=\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x^j})\vec{e}_i$。）

证明。对 (O.3) 应用散度公式。

练习 O.5 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的三角形 T，其顶点为 $A=(h_1,\ 0,\ 0)$、$B=(0,\ h_2,\ 0)$、$C=(0,\ 0,\ h_3)$。证明 $\vec{n}=(h_2h_3,\ h_3h_1,\ h_1h_2)$ 与 T 正交，并且 $\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{h_2^2h_3^2+h_3^2h_1^2+h_1^2h_2^2}$ 是其面积。

答案。考虑参数曲面 $\vec{r}(t,\ u)=A+t\vec{AB}+u\vec{AC}$，其中 $t,u\in[0,1]$ 描述该三角形。因此 $\vec{n}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}h_1\\0\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_2h_3\\h_3h_1\\h_1h_2\end{pmatrix}$是标准正交的。并且 $d\sigma=||\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}||dudt=\sqrt{h_2^2h_3^2+h_3^2h_1^2+h_1^2h_2^2}dudt$。因此 $\sigma=\int_{t=0}^1\int_{u=0}^1d\sigma=\sqrt{h_2^2h_3^2+h_3^2h_1^2+h_1^2h_2^2}$是该三角形面积的两倍。

P 角动量平衡

定义 P.1 ρ、f 和 T 满足角动量平衡，当且仅当对于所有正则子开集 $\omega_t \subset \Omega_t$

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho\, \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\, d\Omega_t = \int_{\omega_t} \rho\, \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\, d\Omega_t + \int_{\partial\omega_t} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}\, d\Gamma_t, \tag{P.1}$$

称为动量矩主平衡定律的等式。（例如，这不包括 Cosserat连续体材料。）

定理 P.2 （柯西第二定律。）若满足总平衡定律（即 $\vec{T} = \sigma.\vec{n}$）和动量矩主平衡定律，则 σ 是对称的。

证明。（标准证明。）令 $\vec{x} = \overrightarrow{OM} = \sum_i x_i \vec{E}_i$，且 $\vec{T} = \sum_i T_i \vec{E}_i = \sigma.\vec{n} = \sum_{ij} \sigma_{ij} n_j \vec{E}_i$。则（第一分量）$(\vec{x} \wedge \vec{T})_1 = x_2 T_3 - x_3 T_2 = x_2(\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3) - x_3(\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3) = (x_2\sigma_{31} - x_3\sigma_{21}) n_1 + (x_2\sigma_{32} - x_3\sigma_{22}) n_2 + (x_2\sigma_{33} - x_3\sigma_{23}) n_3$。因此 $\int_{\partial\omega_t} (\vec{x} \wedge \vec{T})_1\, d\Gamma_t = \int_{\omega_t} \frac{\partial (x_2\sigma_{31} - x_3\sigma_{21})}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2\sigma_{32} - x_3\sigma_{22})}{\partial x_2} + \frac{\partial (x_2\sigma_{33} - x_3\sigma_{23})}{\partial x_3}\, d\Omega_t = \int_{\omega_t} x_2(\text{散度}\sigma)_3 + x_3(\text{散度}\sigma)_2 + \sigma_{32} - \sigma_{23}\, d\omega_t$。

(O.10) 给出 $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{f} = \text{div}\sigma$，因此 $\vec{x} \wedge (\rho\vec{\gamma} - \vec{f}) = \vec{x} \wedge \text{div}\sigma$，所以 $\vec{x} \wedge (\rho\vec{\gamma} - \vec{f})$ 的第一个分量是 $x_2(\text{div}\sigma)_3 - x_3(\text{div}\sigma)_2$，参见 (O.10)。因此 (P.1) 给出 $\int_{\omega_t} \sigma_{32} - \sigma_{23}\, d\omega_t = 0$。这对所有 ω_t 都成立，因此 $\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0$。其他分量同理：$\sigma$ 是对称的。 ∎

Q $\mathcal{L}^r_s(E)$中的一致张量

一致张量使得我们能够毫无歧义地定义“客观缩并规则”。一致张量是作用于向量和线性形式、取值为标量的多重线性函数。

注意：在经典力学课程中，所谓的“张量”通常并非张量，而是矩阵。例如，你可能会遇到“欧几里得张量”这一说法，它指的是：相对于某个观察者所选取的欧几里得基（以英尺、米等为基础）的“某种东西”的矩阵表示。（“欧几里得张量”是个毫无意义的说法，例如，你能定义“欧几里得向量”吗？）

Q.1 张量积与多重线性形式

设 A_1，……，A_n 是 n 有限维向量空间。并设 $A_i^* = \mathcal{L}(A_i; \mathbb{R})$ 为线性形式的集合。

Q.1.1 函数的张量积

设 $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$，……，$f_n : A_n \to \mathbb{R}$ 是 n 函数。它们的张量积是函数 $f_1 \otimes ... \otimes f_n : A_1 \times ... \times A_n \to \mathbb{R}$，其定义为（分变量函数）

$$(f_1 \otimes ... \otimes f_n)(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = f_1(\vec{x}_1)...f_n(\vec{x}_n). \tag{Q.1}$$

（例如，$n = 2$ 和 $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$ 以及 $(\cos \otimes \sin)(x, y) = \cos(x) \sin(y)$。）

Q.1.2 线性形式的张量积：多重线性形式

令 $\mathcal{L}(A_1, ……, A_n; \mathbb{R})$ 表示笛卡尔积 $A_1 \times ... \times A_n$ 上的 $\mathbb{R}$-多重线性形式集合，也就是函数 M：$A_1 \times ... \times A_n \to \mathbb{R}$，满足：对于所有 $i = 1$，……，n、所有 $\vec{x}_i$，$\vec{y}_i \in A_i$ 以及所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，

$$M(..., \vec{x}_i + \lambda\vec{y}_i, ...) = M(..., \vec{x}_i, ...) + \lambda\, M(..., \vec{y}_i, ...), \tag{Q.2}$$

其他变量保持不变。

定义：初等张量是多重线性形式 $M = \ell_1 \otimes .... \otimes \ell_n$，其中 $\ell_i \in A_i^*$ 对于所有 i；因此

$$\forall (\vec{x}_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in \prod_{i=1}^{n} A_i, \quad (\ell_1 \otimes ... \otimes \ell_n)(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n) = (\ell_1.\vec{x}_1)...(\ell_n.\vec{x}_n) \in \mathbb{R}. \tag{Q.3}$$

（点号位于 $\ell_i.\vec{x}_i$ 不是**内积**：而是对偶空间的“外积” $\ell_i.\vec{x}_i := \ell_i(\vec{x}_i)$，参见（A.45）。）

Q.2 $\mathcal{L}^0_s(E)$中的一致张量

设 E 为实向量空间，维数为$E = n \in \mathbb{N}^*$。本节讨论由 M 上的多重线性形式 E构成的 E上的第一个叠层，称为 0 s 型或 $\binom{0}{s}$型的一致张量。

例如， $M \in \mathcal{L}^0_1(E)$ 是一个线性形式， $M \in \mathcal{L}^0_2(E)$ 是一个内积， $M \in \mathcal{L}^0_n(E)$ 是一个行列式.....

用于量化的记号：$(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一个基，(π_{ei}) 是它的（协变）对偶基（$E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ 中的基），(∂_i) 是它的双对偶基（ $E^{**} = \mathcal{L}(E^*;\mathbb{R})$ 中的基）。

Q.2.1 一致张量的型定义 $\binom{0}{s}$

$\mathcal{L}^0_0(E)$: $= \mathbb{R}$，且若 $s \in \mathbb{N}^*$，则

$$\mathcal{L}^0_s(E) := \mathcal{L}(\underbrace{E \times ... \times E}_{s \text{ times}}; \mathbb{R}) \tag{Q.4}$$

称为 E 上 $\binom{0}{s}$ 型一致张量的集合。

Q.2.2 示例： $\binom{0}{1}$ 型一致张量 $=$ 线性形式

$\binom{0}{1}$ 型一致张量是 $\mathcal{L}^0_1(E) = \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = E^*$ 的一个元素：它是线性形式 $\ell \in \mathcal{L}^0_1(E) = E^*$。**量化：**对于 $\ell_i := \ell(\vec{e}_i)$，根据（A.10），我们有

$$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i \pi_{ei}, \quad \text{and} \quad [\ell]_{|\pi_e} = (\,\ell_1 \quad ... \quad \ell_n\,) \overset{\text{noted}}{=} [\ell]_{|\vec{e}} \tag{Q.5}$$

(row 线性形式的矩阵）。对偶记号：(e^i) 是协变对偶基，且 $\ell \neq v \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$.

因此，若 $\vec{v} \in E$, $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$，则 $\vec{v}$ 可表示为 $[\vec{v}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \\ ..... \\ v_n \end{pmatrix}$（向量的列矩阵），矩阵计

算规则给出

$$\ell(\vec{v}) = [\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{v}]_{|\vec{e}} = (\,\ell_1 \quad ... \quad \ell_n\,).\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \ell_i v_i \overset{\text{noted}}{=} \ell.\vec{v}. \tag{Q.6}$$

对偶记号：$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i$ 和 $\ell(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \ell_i v^i$，且满足爱因斯坦求和约定。

Q.2.3 示例：型 $\binom{0}{2}$ 一致张量

型 $\binom{0}{2}$ 一致张量是 $\mathcal{L}^0_2(E) = \mathcal{L}(E,\ E;\ \mathbb{R})$ 的一个元素：它是一个双线性形式 $T \in \mathcal{L}(E,\ E;\ \mathbb{R})$。

量化：设 $T_{ij} := T(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)$。那么，对于 $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$和 $\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i$,

$$T(\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} v_i w_j = [\vec{v}]^T_{|\vec{e}}.[T]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}}, \quad \text{i.e.} \quad T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \pi_{ei} \otimes \pi_{ej}. \tag{Q.7}$$

对偶记号： $T(\vec{v},\ \vec{w}) = \sum^n_{i\ ,\ j=1} T_{ij} v^i w^j$，且满足爱因斯坦求和约定。

$\mathcal{L}^0_2(E)$中的初等一致张量是一个张量 $T = \ell \otimes m$，其中 $\ell,\ m \in E^*$。因此，对于所有$\vec{v},\ \vec{w} \in E$,

$$(\ell \otimes m)(\vec{v},\vec{w}) = (\ell.\vec{v})(m.\vec{w}). \tag{Q.8}$$

Q.2.4 示例：行列式

行列式是一个交替 $\binom{0}{n}$ 一致张量，参见（K.2）。

Q.3 $\mathcal{L}^r_s$（E）中的一致张量

在本节中，我们考虑 E 上的一种叠加：作用于向量 $(\in E)$ 和函数 $\in E^*$ （线性形式）的多重线性形式。

Q.3.1 一致张量的 $\binom{r}{s}$ 型定义

设 r, $s\in\mathbb{N}$ 使得 $r+s\geq 1$。多重线性形式的集合

$$\mathcal{L}^r_s(E):=\mathcal{L}(\underbrace{E^*\times ...\times E^*}_{r\text{ times}},\underbrace{E\times ...\times E}_{s\text{ times}};\mathbb{R}) \tag{Q.9}$$

称为 E上 $\binom{r}{s}$ 型一致张量的集合。

情形 $r=0$ 已在§ Q.2 中讨论。
当 $r\geq 1$时，张量 $T\in\mathcal{L}^r_s(E)$是一个泛函：其定义域包含一个函数集合（集合 $E^*=\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$）。

Q.3.2 示例： $\binom{1}{0}$ 型一致张量：视为一个向量

一致 $\binom{1}{0}$ 张量是一个元素 $T\in\mathcal{L}^1_0(E)=\mathcal{L}(E^*;\mathbb{R})=\mathcal{L}(\mathcal{L}(E;\mathbb{R});\mathbb{R})=E^{**}$。借助自然典范同构

$$\mathcal{J}:\begin{cases}E&\to E^{**}=\mathcal{L}^1_0(E)\\ \vec{w}&\to\mathcal{J}(\vec{w})=w,\quad\text{defined by}\quad w(\ell):=\ell(\vec{w}),\quad\forall\ell\in E^*,\end{cases} \tag{Q.10}$$

参见 (T.9) 和命题 T.5,

$$w\overset{\text{noted}}{=}\vec{w},\quad\text{so}\quad w.\ell\overset{\text{noted}}{=}\vec{w}.\ell\quad(=\ell.\vec{w}). \tag{Q.11}$$

因此，一个 $\binom{1}{0}$ 型一致张量 w 通过自然典范同构被识别为向量 $\vec{w}=\mathcal{J}^{-1}(w)$。

解释： E^{**}是方向导数的集合。事实上，如果 $\mathcal{E}$是一个仿射空间，如果 E是其关联向量空间，如果 $p\in\mathcal{E}$，并且如果 f是在 p处可微的函数，那么 $w.df(p)=^{(Q.10)}df(p).\vec{w}$就是沿 $\vec{w}$的方向导数。

备注：在微分几何中， $w.df$写作 $\vec{w}(f)$，因此 $\vec{w}(f)(p):=df(p).\vec{w}$，这就是将向量定义为方向导数。

量化： 对所有 i, j,

$$\partial_i.\pi_{ej}=\delta_{ij}=\pi_{ej}.\vec{e}_i,\quad\text{thus}\quad\partial_i=\mathcal{J}(\vec{e}_i)\overset{\text{noted}}{=}\vec{e}_i. \tag{Q.12}$$

对偶记号：$\partial_i.e^j=\delta^j_i=e^j.\vec{e}_i$。例如，如果 f是一个 C^1函数，那么 $df(\quad p\quad)=\sum_{i=1}^n f_{|i}\ p\ e^i$ $p\ \pi_{ei}=\quad)=\sum_{i=1}^n f_{|i}(\,)(\,)(\,)$，并且

$$\partial_i(df(p))=df(p).\vec{e}_i=f_{|i}(p)\overset{\text{noted}}{=}\partial_i(f)(p)\overset{\text{noted}}{=}\vec{e}_i(f)(p). \tag{Q.13}$$

Q.3.3例子：型 $\binom{1}{1}$ 一致张量

$\mathcal{L}^1_1(E)$中的初等一致张量是张量 $T=u\otimes\beta$，其中 $u\in E^{**}$ 和 $\beta\in E^*$。并且，借助$\vec{u}=J^{-1}(u)\in E$，参见（Q.10），我们也写作 $T=\vec{u}\otimes\beta$。因此，对于所有 $\ell\in E^*$ 和 $\vec{w}\in E$

$$(u\otimes\beta)(\ell,\vec{w})=u(\ell)\beta(\vec{w})=\ell(\vec{u})\beta(\vec{w})\overset{\text{noted}}{=}\vec{u}(\ell)\beta(\vec{w})\overset{\text{noted}}{=}(\vec{u}\otimes\beta)(\ell,\vec{w}). \tag{Q.14}$$

量化： 令 $T(\pi_{ei},\ \vec{e}_j)$。因此

$$T=\sum_{i,j=1}^n T_{ij}\ \vec{e}_i\otimes\pi_{ej},\quad\text{and}\quad[T]_{|\vec{e}}=[T_{ij}], \tag{Q.15}$$

$[T]_{|\vec{e}}=[T_{ij}]$ T $\vec{e}_i$ $T\ e^i\ \vec{e}_j=T^i{}_j$ $[T]_{|\vec{e}}=$是相对于基（）的矩阵。对偶记号：(,), ,, , 并满足爱因斯坦求和约定。
$[T^i{}_j]$ $T=\sum_{i\ j=1}^n T^i{}_j\vec{e}_i\otimes e^j$

因此，令 $\ell\in E^*$, $\ell=\sum_{i=1}^n\ell_i e^i\in E^*$ 和 $\vec{w}\in E$, $\vec{w}=\sum_{i=1}^n w^i\vec{e}_i\in E$, (Q.15) 给出

$$T(\ell,\vec{w})=\sum_{i,j=1}^n T_{ij}\vec{e}_i(\ell)\pi_{ej}(\vec{w})=\sum_{i,j=1}^n T_{ij}\ell_i w_j=[\ell]_{|\vec{e}}.[T]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}} \tag{Q.16}$$

（$[\ell]_{|\vec{e}}$是行矩阵）。对偶记号： $T(\ell,\ \vec{w})=\sum_{i\ ,\ j=1}^n T^i{}_j\ell_i w^j$，并且满足爱因斯坦求和约定。

Q.3.4 示例：型 $\binom{1}{2}$ 一致张量

对任意张量都采用相同的步骤。例如，若$T \in \mathcal{L}^1_2(E)$，则用对偶记号表示为 $T^i{}_{jk} = T(e^i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$，并且

$$T = \sum_{i,j,k=1}^{n} T^i{}_{jk} \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k, \quad \text{and} \quad T(\ell, \vec{u}, \vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} T^i{}_{jk} \ell_i u^j w^k. \tag{Q.17}$$

Q.4 外张量积

设 $T_1 \in \mathcal{L}^{r_1}_{s_1}(E)$ 和 $T_2 \in \mathcal{L}^{r_2}_{s_2}(E)$。它们的张量积是由下式定义的张量 $T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{L}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(E)$:

$$(T_1 \otimes T_2)(\ell_{1,1}, ..., \ell_{2,1}, ..., \vec{u}_{1,1}, ..., \vec{u}_{2,1}, ...) := T_1(\ell_{1,1}, ..., \vec{u}_{1,1}, ...) T_2(\ell_{2,1}, ..., \vec{u}_{2,1}, ...). \tag{Q.18}$$

特殊情况：当 $\lambda \in \mathcal{L}^0_0(E) = \mathbb{R}$ 且 $T \in \mathcal{L}^r_s(E)$ 时，

$$\lambda \otimes T = T \otimes \lambda := \lambda T \in \mathcal{L}^r_s(E). \tag{Q.19}$$

示例 Q.1 设 $T_1, T_2 \in \mathcal{L}^1_1(E)$。量化：设 $T_1 = \sum_{i,j=1}^n (T_1)^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$ 且设 $T_2 = \sum_{k,m=1}^n (T_2)^k_m \vec{e}_k \otimes e^m$；则 $T_1 \otimes T_2 = \sum_{i,j,k,m=1}^n (T_1)^i_k (T_2)^j_m \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^k \otimes e^m \in \mathcal{L}^2_2(E)$。 ∎

备注 Q. **2** $T_1 \widetilde{\otimes} T_2 = \sum_{i\,j\,k\,m=1}^n T_1{}^i_j \, T_2{}^k_m \vec{e}_i \otimes e^j \otimes \vec{e}_k \otimes e^m \in$ 替代定义：$\mathcal{L}(E^*, E, E^*, E; \mathbb{R})$。借助自然典范同构 $\widetilde{J}: \mathcal{L}(E^*, E, E^*, E; \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(E^*, E^*, E, E; \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2_2(E)$（定义为 $\widetilde{J}(\widetilde{T}) = T$其中$\sim T(\ell, m, \vec{v}, \vec{w}) = T(\ell, \vec{v}, m, \vec{w})$），我们便回到了先前的定义。 ∎

Q.5 缩并

Q.5.1 线性形式与向量的缩并

设 $\ell \in \mathcal{L}^0_1(E) = E^*$ 和 $\vec{w} \in E$。它们的缩并为

$$\ell(\vec{w}) \overset{\text{linearity}}{=} \ell.\vec{w} \overset{\text{noted}}{=} \vec{w}.\ell. \tag{Q.20}$$

取一组基 $(\vec{e}_i)$ 及其对偶基 (π_{ei})，$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i \pi_{ei}$ 和 $\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{e}_i$ 给出

$$\ell.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \ell_i w_i = [\ell]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}} = \sum_{i=1}^{n} w_i \ell_i = \vec{w}.\ell = \mathrm{Tr}(\vec{w} \otimes \ell), \tag{Q.21}$$

其中，Tr 是目标迹算子 $\mathrm{Tr}: \mathcal{L}(E; E) \simeq \mathcal{L}^1_1(E) \to \mathbb{R}$ (定义为 $\mathrm{Tr}(\vec{e}_i \otimes \pi_{ej}) = \delta^i_j$)。对偶记号：$\ell.\vec{w} = \sum_{i=1}^n \ell_i w^i$，且满足爱因斯坦求和约定。

练习 Q.3 利用坐标变换公式证明，(Q.21) 中的计算 $\ell.\vec{w}$ 所得结果与基的选择无关。

答案。令 P为基变换矩阵。因此 $[\vec{w}]_{new} = P^{-1}.[\vec{w}]_{old}$和 $[\ell]_{new} = [\ell]_{old}.P$，参见 (A.28)，于是$[\ell]_{new}.[\vec{w}]_{new} = ([\ell]_{old}.P)$。$(P^{-1}.[\vec{w}]_{old}) = [\ell]_{old}.(P.P^{-1}).[\vec{w}]_{old} = [\ell]_{old}[\vec{w}]_{old} (= \ell.\vec{w})$。 ∎

Q.5.2 一个 $\binom{1}{1}$ 张量与向量的缩并

令 $\ell \in E^*$ 和 $\vec{u} \in E$。初等张量 $\vec{w} \otimes \ell \in \mathcal{L}^1_1(E)$ 与 $\vec{u}$ 的缩并定义为:

$$(\vec{w} \otimes \underbrace{\ell).\vec{u}}_{\text{contraction}} = (\ell.\vec{u})\vec{w}. \tag{Q.22}$$

因此，如果 $(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基，(π_{ei}) 是对偶基，且 $T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \vec{e}_i \otimes \pi_{ej} \in \mathcal{L}^1_1(E)$ 和 $\vec{u} = \sum_{j=1}^n u_j \vec{e}_j \in E$，那么

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij} \vec{e}_i \otimes e^j \quad \Longrightarrow \quad T.\vec{u} = \sum_{i,j=1}^{n} T_{ij} u^j_j \vec{e}_i \tag{Q.23}$$

因为 $\pi_{ej}(\vec{u}) = u_j$。对偶记号：$T.\vec{u} = \sum_{i,j=1}^n T^i_j u^j \vec{e}_i$。

那么，利用自然典范同构 $(\mathcal{L}^1_1(E) = \mathcal{L}(E, E^*;\mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(E; E)$，见 (T.7)，由 $L.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n L_{ij}\vec{e}_i$ 定义的任意自同态 $L \in \mathcal{L}(E;E)$，为了便于计算，可以写成

$$\widetilde{L} = \sum_{i,j=1}^n L_{ij}\vec{e}_i \otimes \pi_{ej} \overset{\text{noted}}{=} L, \quad \text{which means} \quad L.\vec{u} \overset{(Q.22)}{=} \sum_{i=1}^n L_{ij}u_j\vec{e}_i \tag{Q.24}$$

当 $\vec{u} = \sum_i u_j\vec{e}_j$ 时，由于 $\pi_{ej}(\vec{u}) = u_j$。对偶记号：$L = \sum_{i\,,\,j=1}^n L^i{}_j\vec{e}_i \otimes e^j$。

Q.5.3 一致张量的缩并

更一般地，两个张量的缩并（若有意义）根据 (Q.20) 定义如下：令 $T_1 \in \mathcal{L}^{r_1}_{s_1}(E)$,$T_2 \in \mathcal{L}^{r_2}_{s_2}(E)$，$\ell \in E^*$ 和 $\vec{u} \in E$。

定义 Q.4 $T_1 \otimes \ell \in \mathcal{L}^{r_2}_{s_2+1}(E)$ 和 $\vec{u} \otimes T_2 \in \mathcal{L}^{r_2+1}_{s_2}(E)$ 的客观缩并是张量 $(T_1 \otimes \ell)$。$(\vec{u} \otimes T_2) \in \mathcal{L}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}$，其定义为

$$(T_1 \otimes \underbrace{\ell}).(\underbrace{\vec{u}}\otimes T_2) := (\ell.\vec{u})\, T_1 \otimes T_2. \tag{Q.25}$$

特别是 $(T_1 \otimes \ell)\,.\vec{u} = (\ell.\vec{u})\ T_1$（如 (Q.22) 中所示），以及 $\ell.(\vec{u} \otimes T_2) = (\ell.\vec{u})\ T_2$。

$T_1 \otimes \vec{u} \in \mathcal{L}^{r_2+1}_{s_2}(E)$ 和 $\ell \otimes T_2 \in \mathcal{L}^{r_2}_{s_2+1}(E)$ 的客观缩并是张量 $(T_1 \otimes \vec{u})\,.(\ell \otimes T_2) \in \mathcal{L}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}$，其定义为

$$(T_1 \otimes \vec{u}).(\ell \otimes T_2) = (\vec{u}.\ell)\, T_1 \otimes T_2 \quad (= (\ell.\vec{u})\, T_1 \otimes T_2). \tag{Q.26}$$

以基 $(\vec{e}_i)$ 进行量化，以下示例可避免使用繁琐的记号：

示例 Q.5 设 $T \in \mathcal{L}^1_1(E) = \mathcal{L}^1_{0+1}(E)$，$T = \sum_{i\,,\,j=1}^n T^i_j\vec{e}_i \otimes e^j$。由 $\vec{w} \in E \sim E^{**} = \mathcal{L}^1_0(E)$，$\vec{w} = \sum_{j=1}^n w^j\vec{e}_j$，式 (Q.25) 得出 $T.\vec{w} \in \mathcal{L}^1_0(E) \sim E$ 以及

$$T.\vec{w} = \sum_{i,j=1}^n T^i_j w^j\vec{e}_i, \quad \text{i.e.} \quad [T.\vec{w}]_{|\vec{e}} = [T]_{|\vec{e}}.[\vec{w}]_{|\vec{e}} \quad \text{(column matrix)}. \tag{Q.27}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）事实上，$T.\vec{w} = \sum_{i\,,\,j,\,k=1}^n T^i_j w^k(\vec{e}_i \otimes e^j).\vec{e}_k = \sum_{i\,,\,j,\,k=1}^n T^i_j w^k\vec{e}_i(e^j.\vec{e}_k) = \sum_{i\,,\,j,\,k=1}^n T^i_j w^k\vec{e}_i(\delta^j_k) = \sum_{i\,,\,j=1}^n T^i_j w^j\vec{e}_i$。令 $\ell \in E^* = \mathcal{L}^0_1(E)$，$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$，则 (Q.25) 给出 $\ell.T \in \mathcal{L}^0_1(E) = E^*$ 和

$$\ell.T = \sum_{i,j=1}^n \ell_i T^i_j e^j, \quad \text{i.e.} \quad [\ell.T]_{|\vec{e}} = [\ell]_{|\vec{e}}.[T]_{|\vec{e}} \quad \text{(row matrix)}. \tag{Q.28}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）事实上 $\ell.T = (\sum_{i=1}^n \ell_i e^i)$。$(\sum_{j\,,\,k=1}^n T^k_j\vec{e}_k \otimes e^j) = \sum_{i\,,\,j,\,k=1}^n \ell_i T^k_j(e^i.\vec{e}_k)\, e^j = \sum_{i\,,\,j=1}^n \ell_i T^i_j e^j$。 ∎

例 Q.6 设 $S, T \in \mathcal{L}^1_1(E)$, $S = \sum_{i\,,k=1}^n S^i_k\vec{e}_i \otimes e^k$ 和 $T = \sum_{j\,,k=1}^n T^k_j\vec{e}_k \otimes e^j$。则 n

$$S.T = \sum_{i,j,k=1}^n S^i_k T^k_j\vec{e}_i \otimes e^j, \quad \text{i.e.} \quad [S.T]_{|\vec{e}} = [S]_{|\vec{e}}.[T]_{|\vec{e}} \tag{Q.29}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）事实上 $S.T = (\sum_{i\,,k=1}^n S^i_k\vec{e}_i \otimes e^k).(\sum_{j\,,m=1}^n T^m_j\vec{e}_m \otimes e^j) = \sum_{i\,,j,k,m=1}^n S^i_k T^m_j\vec{e}_i(e^k.\vec{e}_m) \otimes e^j = \sum_{i\,,j,k=1}^n S^i_k T^k_j\vec{e}_i \otimes e^j$。 ∎

例 Q.7 设 $T \in \mathcal{L}^1_2(E)$, $T = \sum_{i\,,j,k=1}^n T^i_{jk}\vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k$，以及 $\vec{u}, \vec{w} \in E \sim \mathcal{L}^1_0(E)$，$\vec{w} = \sum_{i=1}^n w^i\vec{e}_i$ 和 $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u^i\vec{e}_i$。那么

$$T.\vec{w} = \sum_{i,j,k=1}^n T^i_{jk}w^k\vec{e}_i \otimes e^j \in \mathcal{L}^1_1(E), \quad \text{and} \quad (T.\vec{w}).\vec{u} = \sum_{i,j,k=1}^n T^i_{jk}w^k u^j\vec{e}_i \overset{\text{noted}}{=} T(\vec{u}, \vec{w}). \tag{Q.30}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）所以 $[T.\vec{w}]_{|\vec{e}} = [\sum_{k=1}^n T^i_{jk}w^k]_{\,i=1,\ldots,j=1\,\ldots\,n}{}_{,,}$。并且对于 $\ell \in E^*$、$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i e^i$,

$$((T.\vec{w}).\vec{u}).\ell = \sum_{i,j,k=1}^n T^i_{jk}w^k u^j\ell_i = T(\ell, \vec{u}, \vec{w}) = \ell.T(\vec{u}, \vec{w}) = \ell.(T.\vec{w}).\vec{u}. \tag{Q.31}$$

∎

Q.5.4 一致张量的客观双重缩并

定义 Q.8 设 $S,T \in \mathcal{L}_1^1(E)$。再设 $(\vec{e}_i)$ 是 E 中的一组基，(e^i) 是其对偶基，$S = \sum_{i\ ,j=1}^{n} S^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$以及 $T = \sum_{i\ ,j=1}^{n} T^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$。$S$和 T的双客观缩并 $S \ \textcircled{:}\ T$定义为

$$S \ \textcircled{:}\ T = \sum_{i,j=1}^{n} S^i_j T^j_i. \tag{Q.32}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）

命题 *Q.9* $S \ \textcircled{:}\ T$ 在（*Q.32*）中定义的 T 是一个不变性：它是内自同态 L_S、$L_T \in \mathcal{L}(E;\ E)$ 的迹 $Tr(L_S \circ L_T)$，这些内自同态自然且典范地与 S 和 T 相关联（对于所有 $(\vec{u},\ \ell) \in E \times E^*$，分别由 $\ell.L_S.\vec{u} := S(\ell,\ \vec{u})$ 和 $\ell.L_T.\vec{u} := T(\ell,\ \vec{u})$ 给出）。因此，实数值 $\sum_{i\ ,j=1}^{n} S^i_j T^j_i$ 无论选定何种基 $(\vec{e}_i)$，都具有相同的实数值。（逐项矩阵乘法 $S:T = \sum_{i\ ,j=1}^{n} S^i_j T^i_j$ 则并非如此，参见下一节 *§ Q.5.5* 和示例 *Q.13*。）

证明。设 $(\vec{a}_i)$ 和 $(\vec{b}_i)$ 是两个基，$P = [P^i_j]$ 是从 $(\vec{a}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵，即对所有 j，$\vec{b}_j = \sum_{i=1}^{n} P^i_j \vec{a}_i$。设 $Q = [Q^i_j] := P^{-1}$。那么 $b^i = \sum_{i=1}^{n} Q^i_j a^i$。设 $S = \sum_{ij} (S_a)^i_j \vec{a}_i \otimes a^j = \sum_{ij} (S_b)^i_j \vec{b}_i \otimes b^j$。因此 $[(S_b)^i_j] = P^{-1}.[(S_a)^i_j].P$（与自同态相对应的张量的基变换公式），即对所有 i,j，$(S_b)^i_j = \sum_{km} Q^i_k (S_a)^k_m P^m_j$。同理，$T$。因此 $\sum_{i,j} (S_b)^i_j (T_b)^j_i = \sum_{i,j,k,m,\alpha,\beta} Q^i_k (S_a)^k_m P^m_j Q^j_\alpha (T_a)^\alpha_\beta P^\beta_i = \sum_{i,j,k,m,\alpha,\beta} (S_a)^k_m (T_a)^\alpha_\beta P^\beta_i Q^i_k P^m_j Q^j_\alpha = \sum_{k,m,\alpha,\beta} (S_a)^k_m (T_a)^\alpha_\beta \delta^\beta_k \delta^m_\alpha = \sum_{k,m} (S_a)^k_m (T_a)^m_k$。 ∎

定义 Q.10 更一般地，一致张量的客观双重缩并 $S \ \textcircled{:}\ T$，可在适用时通过连续两次应用客观简单缩并得到。

例如，$T_1 \otimes \ell_{1,\ 1} \otimes \ell_{1,\ 2}$ 以及 $\vec{u}_{2,\ 1} \otimes \vec{u}_{2,\ 2} \otimes T_2$ 给出

$$\begin{aligned}(T_1 \otimes \ell_{1,1} \otimes \underbrace{\ell_{1,2}).(\vec{u}_{2,1}}_{\text{first}} \otimes \vec{u}_{2,2} \otimes T_2) &= (\ell_{1,2}.\vec{u}_{2,1})(T_1 \otimes \underbrace{\ell_{1,1}) \otimes (\vec{u}_{2,2}}_{\text{second}} \otimes T_2) \\ &= (\ell_{1,2}.\vec{u}_{2,1})(\ell_{1,1}.\vec{u}_{2,2})\, T_1 \otimes T_2.\end{aligned} \tag{Q.33}$$

例 Q.11 设 $S \in \mathcal{L}_2^1(E)$、$T \in \mathcal{L}_1^2(E)$、$S = \sum_{i\ ,\ j,\ k=1}^{n} S^i_{jk} \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^j$、$T = \sum_{\alpha\ ,\ \beta,\ \gamma=1}^{n} T^{\alpha\beta}_\gamma \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes e^\gamma$。则

$$S.T = \sum_{i,j,k,\beta,\gamma=1}^{n} S^i_{jk} T^{k\beta}_\gamma \vec{e}_i \otimes e^j \otimes \vec{e}_\beta \otimes e^\gamma, \quad \text{and} \quad S \ \textcircled{:}\ T = \sum_{i,j,k,\gamma=1}^{n} S^i_{jk} T^{kj}_\gamma \vec{e}_i \otimes e^\gamma. \tag{Q.34}$$

（满足爱因斯坦求和约定。） ∎

习题 Q.12 若 $S \in \mathcal{L}(E,\ F;\ \mathbb{R})$、$T \in \mathcal{L}(F,\ G;\ \mathbb{R})$ 和 $U \in \mathcal{L}(G,\ E;\ \mathbb{R})$，则证明

$$S \ \textcircled{:}\ (T.U) = (S.T) \ \textcircled{:}\ U = (U.S) \ \textcircled{:}\ T \quad \text{(circular permutation)}. \tag{Q.35}$$

答案。如果 $S = \sum S^i_j \vec{a}_i \otimes b^j$、$T = \sum T^i_j \vec{b}_i \otimes c^j$ 和 $U = \sum U^i_j \vec{c}_i \otimes a^j$，那么 $T.U = \sum T^i_k U^k_j \vec{b}_i \otimes a^j$，因此 $S \ \textcircled{:}(T.U) = \sum S^i_m T^m_k U^k_i$，并且 $S.T = \sum S^i_k T^k_j \vec{a}_i \otimes c^j$，所以 $(S.T) \ \textcircled{:}\ U = \sum S^i_k T^k_m U^m_i$。第二个等号则是利用了 $\textcircled{:}$ 的对称性，即 $(S.T) \ \textcircled{:}\ U = U \ \textcircled{:}(S.T) = (U.S) \ \textcircled{:}\ T$，结合前面的计算可得。 ∎

我们以相同的方式定义客观三重缩并（连续三次应用简单缩并）。例如，利用 (Q.34) 可得

$$S \ \textcircled{\vdots}\ T = \sum_{i,j,k=1}^{n} S^i{}_{jk} T^{kj}{}_i. \tag{Q.36}$$

（满足爱因斯坦求和约定。）

Q.5.5 非客观双重缩并：双矩阵缩并

工程师经常使用由（逐项乘法）定义的二阶张量的双矩阵缩并：若 $S=[S_{ij}]=[S^i_j]$ 和 $T=[T_{ij}]=[T^i_j]$，则

$$S:T:=\sum_{i,j=1}^{n}S_{ij}T_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}S^i_jT^i_j\overset{\text{noted}}{=}\mathrm{Tr}(S.T^T). \tag{Q.37}$$

爱因斯坦的约定 不满足，因此对于相关自同态，结果依赖观察者 :

例 Q.13 设 $(\vec{e}_i)$ 是一个基，设 $S\in\mathcal{L}(E;E)$ 由 $[S]_{\vec{e}}=\begin{pmatrix}0&4\\2&0\end{pmatrix}$ 给出（因此 $S.\vec{e}_1=2\vec{e}_2$ 和 $S.\vec{e}_2=4\vec{e}_1$）。那么双矩阵缩并（Q.37）为

$$S:S=[S]_{\vec{e}}:[S]_{\vec{e}}=4*4+2*2=20. \tag{Q.38}$$

基变换：设 $\vec{b}_1=\vec{e}_1$ 和 $\vec{b}_2=2\vec{e}_2$。从 $(\vec{e}_i)$ 到 $(\vec{b}_i)$ 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$。因此

$[S]_{\vec{b}}=P^{-1}.[S]_{\vec{e}}.P=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&8\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8\\1&0\end{pmatrix}$。因此

$$S:S=[S]_{\vec{b}}:[S]_{\vec{b}}=8*8+1*1=65\neq 20. \tag{Q.39}$$

与双客观缩并进行比较：$[S]_{\vec{e}}\ \underline{0}..[S]_{\vec{e}}=4*2+2*4=16=[S]_{\vec{b}}\ \underline{0}..\ [S]_{\vec{b}}=S\ \underline{0}..\ S$(与观察者无关的结果 $=$ 客观结果)。

因此，如果需要客观性，使用 $S:S$ (双矩阵缩并) 是荒谬的：请记住，英尺是航空领域的国际垂直单位，因此使用双**客观的** 缩并至关重要，而使用双矩阵缩并可能会造成致命后果（真的）。另请参阅火星气候轨道器探测器坠毁事件。 ∎

练习 Q.14 设 $S\in\mathcal{L}^0_2(E)$（例如度量），设 $(\vec{a}_i)$ 为以英尺为单位的欧几里得基，$(\vec{b}_i)=(\lambda\vec{a}_i)$ 为与之对应、以米为单位的欧几里得基（单位变换）。求 $[S]_{|\vec{a}}:[S]_{|\vec{a}}$ 和 $[S]_{|\vec{b}}:[S]_{|\vec{b}}$ 并比较。（由于 S 和 T 不兼容，因此这里无法进行简单客观缩并和双客观缩并。）

答案。设 $S=\sum_{i\ ,j=1}^{n}S_{a,ij}a^i\otimes a^j=\sum_{i\ ,j=1}^{n}S_{b,ij}b^i\otimes b^j$。由于 $(\vec{b}_i)=(\lambda\vec{a}_i)$，我们有 $b^i=\frac{1}{\lambda}a^i$。因此 $\sum_{i\ ,j=1}^{n}S_{a,ij}a^i\otimes a^j=\sum_{i\ ,j=1}^{n}S_{a,ij}\lambda^2b^i\otimes b^j$，所以 $\lambda^2S_{a,ij}=S_{b,ij}$。因此

$$[S]_{|\vec{b}}:[S]_{|\vec{b}}=\sum_{i,j=1}^{n}(S_{b,ij})^2=\lambda^4\sum_{i,j=1}^{n}(S_{a,ij})^2=\lambda^4[S]_{|\vec{a}}:[S]_{|\vec{a}}, \tag{Q.40}$$

有了 $\lambda^4\geq 100$：差别很大，不是吗? ∎

Q.6 克罗内克（缩并）张量、迹

定义 Q.15 克罗内克张量是由下式定义的 $\binom{1}{1}$ 一致张量 $\delta\in\mathcal{L}^1_1(E)$

$$\forall(\ell,\vec{u})\in E^*\times E,\quad \underline{\underline{\delta}}(\ell,\vec{u}):=\ell.\vec{u}. \tag{Q.41}$$

相对于基 $(\vec{e}_i)$ 的克罗内克符号是如下定义的实数，其中称 (π_{ei}) 为对偶基：

$$\delta_{ij}:=\delta(\pi_{ei},\vec{e}_j)=\left\{\begin{array}{l}1\text{ if }i=j,\\0\text{ if }i\neq j,\end{array}\right\}\quad\text{i.e.}\quad \underline{\underline{\delta}}:=\sum_{i=1}^{n}\pi_{ei}\otimes e^i,\quad [\underline{\underline{\delta}}]=[\delta_j]=[I] \tag{Q.42}$$

（无论基为何，都是单位矩阵）。对偶记号：$\delta^i_j:=\delta(e^i,\ \vec{e}_j)$，$\delta:=\sum_{i=1}^{n}\vec{e}_i\otimes e^i$ 和 $[\delta]=[\delta^i_j]$。

定义 Q.16 一致张量 $T\in\mathcal{L}^1_1(E)$ 的迹为

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}(T)=\underline{\underline{\delta}}\ \underline{\theta}\ T\quad(=\mathrm{Tr}(L_T)) \tag{Q.43}$$

（通过自然典范同构 $T\in\mathcal{L}^1_1(E)\ \simeq L_T\in\mathcal{L}(E;E)$ 给出，该同构为 $T(\ell,\vec{v}):=\ell.L_T.\vec{v}$）。

因此，$\widetilde{\mathrm{Tr}}(T)=\sum_{i=1}^{n}T^i{}_i$。特别是，$\widetilde{\mathrm{Tr}}(\delta)=n$，并且当 $\vec{v}=\sum_i v^i\vec{e}_i$ 和 $\underline{\underline{\ell}}=\sum_j\ell_je^j$ 时，$\widetilde{\mathrm{Tr}}(\vec{v}\otimes\ell)=\sum_i v^i\ell_i=\ell.\vec{v}$。

R 张量，在 $T^r_s(U)$

R.1 引言，模，导数

设 A 和 B 为任意集合，并设 $\mathcal{F}(A;B)$ 为函数 $A \to B$ 的集合。“加号”内运算和“点号”外运算定义如下：对于所有 f，$g \in \mathcal{F}(A;B)$，所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及所有 $p \in A$，

$$\begin{cases} (f+g)(p) := f(p) + g(p), & \text{and} \\ (\lambda.f)(p) := \lambda\, f(p), & \lambda.f \overset{\text{noted}}{=} \lambda f. \end{cases} \tag{R.1}$$

因此，$(\mathcal{F}(A;\ B)\ +, ., \mathbb{R})$ 是域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间（参见任何基础课程），称为 $\mathcal{F}(A;\ B)$。

但是，域 $\mathbb{R}$ “太小”，无法定义一种张量，它可以被视为“满足坐标系变换规则的线性工具”：

例 R.1 基本反例：导数。设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集。导数 d：$\vec{w} \in C^1(U;\ \vec{\mathbb{R}}^n) \to d\vec{w} \in C^0(U;\ \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}}^n;\ \vec{\mathbb{R}}^n))$ 是 $\mathbb{R}$-线性的：特别地，对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，$d(\lambda\vec{w}) = \lambda(d\vec{w})$.....

.....但 d 不满足坐标变换规则，见 (S.35)。S
o a derivation it 不是张量 (it is a “喷射”，见 Abraham–Marsden [1]).
事实上，T要成为张量的一个要求是，例如对于 $T = \vec{w}$这个向量场：对于所有 $\varphi \in C^\infty(U;\ \mathbb{R})$，以及所有 $\vec{w} \in \Gamma(U)$（C^∞-向量场），

$$T(\varphi\vec{w}) = \varphi\, T(\vec{w}). \tag{R.2}$$

而

$$d(\varphi\vec{w}) \neq \varphi\, d(\vec{w}), \quad \text{because} \quad d(\varphi\vec{w}) = \varphi\, d\vec{w} + d\varphi.\vec{w}. \tag{R.3}$$

因此，基本的 $\mathbb{R}$-线性要求“对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，$T.(\lambda\vec{w}) = \lambda(T.\vec{w})$”不足以刻画张量：必须将 $\mathbb{R}$-线性替换为 $C^\infty(U;\ \mathbb{R})$-线性，参见 (R.2)。

因此，我们必须将域 $\mathbb{R}$ 上的实向量空间 $(V,\ +,\ ,\ \mathbb{R})$ 替换为环 $C^\infty(U;\ \mathbb{R})$ 上的“模”$(V,\ +,\ ,\ C^\infty(U;\ \mathbb{R}))$；这主要意味着对所有 $\lambda = \varphi \in C^\infty(U;\ \mathbb{R})$ 考虑 (R.1)。备注：模的用法与向量空间的用法非常相似，但逆函数的用法除外：所有实数 $\lambda \neq 0$ 在 $\mathbb{R}$ 中都有乘法逆元（即 $\frac{1}{\lambda}$），但函数 $f \in C^\infty(U;\ \mathbb{R})$，满足“$f \neq 0$ 且 f 在某一点处为零”，在 $C^\infty(U;\ \mathbb{R})$ 中没有乘法逆元。 ∎

R.2 函数场与向量场

经典力学框架： U 是仿射空间 $\mathcal{E}$ 中的一个开集，其关联向量为 E。张量的定义是在固定时间 t 下给出的（涉及空间变量）。如前所述，方法先定性，再通过一组基（$\vec{e}_i(p)$）及其对偶基（$\pi_{ei}(p)$）$=(e^i(p))$进行定量描述，适用于任意 $p \in \mathcal{E}$。

R.2.1 函数场

设 $f \in C^\infty(U;\ \mathbb{R})$为一个函数。其关联函数场为

$$\widetilde{f} : \begin{cases} U & \to U \times \mathbb{R} \\ p & \to \widetilde{f}(p) := (p; f(p)), \end{cases} \tag{R.4}$$

~和 p称为基点。因此，$\mathrm{Im} f = \{(p;\ f(p)) :\ p \in U\}$是 f的图像。定义 n:

$$T^0_0(U) := \{\widetilde{f} : f \in C^\infty(U;\mathbb{R})\} = \{\text{field of functions}\} = \text{the set of } \tbinom{0}{0} \text{ type tensor on } U, \tag{R.5}$$

或 U上的零阶张量集合。为使书写简洁，采用简略记号：

$$\widetilde{f}(p) \overset{\text{noted}}{=} f(p), \quad \text{and} \quad T^0_0(U) \overset{\text{noted}}{=} C^\infty(U;\mathbb{R}), \tag{R.6}$$

但请记住基点（没有普适性礼物）。
在 $T^0_0(U)$ 中，~对于所有满足 $f(p) =(p;\ f(p))$ 且 $\widetilde{g}(p) =(p;\ g(p))$ 的 $f, \widetilde{g} \in T^0_0(U)$，内部和定义为 ，

$$(\widetilde{f} + \widetilde{g})(p) := (p; (f+g)(p)) \quad (= (p; f(p) + g(p))), \tag{R.7}$$

环 $C^\infty(U;\ \mathbb{R})$ 上的外部乘法定义为：对于所有 $\varphi \in C^\infty(U;\ \mathbb{R})$,

$$(\varphi\widetilde{f})(p) := (p; (\varphi f)(p)) \quad (= (p; \varphi(p) f(p))) \tag{R.8}$$

(th基点 p保持不变）。因此，$(T^0_0(U)\ +,\ 。)$ 是环 $C^\infty(U;\ \mathbb{R})$ 上的模。

R.2.2 向量场

设 $\vec{w} \in C^\infty(U,\ E)$ 是一个向量值函数（至少是利普希茨连续的，以获得积分曲线，参见柯西–利普希茨定理）。相应的向量场为

$$\widetilde{\vec{w}} : \begin{cases} U & \to U \times E \\ p & \to \widetilde{\vec{w}}(p) = (p; \vec{w}(p)). \end{cases} \tag{R.9}$$

因此 $\mathrm{Im}\ \widetilde{\vec{w}} = \{(\ \sim p;\ \vec{w}(p)) :\ p \in U\}$ 是 $\vec{w}$的图像，而 $\vec{w}$ 的定义说明，向量 $\vec{w}(p)$必须绘制在处 p (基点)。宽松的简写记号：

$$\widetilde{\vec{w}}(p) \overset{\text{noted}}{=} \vec{w}(p) \quad \text{instead of } \widetilde{\vec{w}}(p) = (p; \vec{w}(p)). \tag{R.10}$$

这简化了记号，但要记住基点。令

$$\Gamma(U) :=\ \text{the set of vector fields on } U. \tag{R.11}$$

更准确地说，我们将采用以下关于向量场的完整定义（参见 Abraham–Marsden [1]）：向量场由曲线的切向量构成。它适用于非平面曲面，更一般地说，适用于微分流形。

R.3 微分形式

基本概念是向量场。第一层建立在微分形式之上（微分形式“测量向量场”）：

定义 R.2 设 $\alpha \begin{cases} U & \to E^* \\ p & \to \alpha \end{cases}(p)$（因此 $\alpha(p)$ 是 p 处的线性形式）。相应的微分形式（也称为 1-形式）是由下式定义的“线性形式域”：

$$\widetilde{\alpha} : \begin{cases} U & \to U \times E^* \\ p & \to \widetilde{\alpha}(p) = (p; \alpha(p)) \quad (= \text{“a pointed linear form at } p\text{”}). \end{cases} \tag{R.12}$$

并且 p称为基点，而 $\mathrm{Im}\widetilde{\alpha} = \{(p;\ \alpha(p)) :\ p \in U\}$ 是 α的图像。

因此，若 $\widetilde{\alpha} \in \Omega^1(U)$（微分形式）且 $\vec{w} \in \Gamma(U)$（向量场），则 $\widetilde{\alpha}.\vec{w} \in T_0^0(U)$（标量值函数域）满足

$$\widetilde{\alpha}.\widetilde{\vec{w}} : \begin{cases} U & \to U \times \mathbb{R} \\ p & \to (\widetilde{\alpha}.\widetilde{\vec{w}})(p) = (p; (\alpha.\vec{w})(p)) = (p; \alpha(p).\vec{w}(p)) \ \in U \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{R.13}$$

简记为：

$$\widetilde{\alpha}(p) \overset{\text{noted}}{=} \alpha(p), \quad \text{instead of } \widetilde{\alpha}(p) = (p; \alpha(p)), \tag{R.14}$$

但请牢记基点。并且

$$\Omega^1(U) :=\ \text{the set of differential forms } U. \tag{R.15}$$

R.4 张量

引入第二层覆盖结构，其中包含张量。张量是“定义在向量场和微分形式上的函数”（它们“度量向量场和微分形式”）。

令 $r, s \in \mathbb{N},\ r+s \geq 1$，并令 T: $\begin{cases} U & \to \mathcal{L}^r_s(E)\ (p) \\ p & \to T \end{cases}$（因此，对每个 p，$T(p)$ 都是一个一致的 $\binom{r}{s}$ 张量，参见 (Q.3.1))。并考虑相应的函数

$$\widetilde{T} : \begin{cases} U & \to U \times \mathcal{L}^r_s(E) \\ p & \to \widetilde{T}(p) = (p; T(p)) \end{cases} \tag{R.16}$$

滥用简写记号：

$$\widetilde{T}(p) \overset{\text{noted}}{=} T(p) \quad \text{instead of } \widetilde{T}(p) = (p; T(p)), \tag{R.17}$$

但请记住基点。

定义 R.3 （Abraham–Marsden [1]。） $\widetilde{T}$是型为 $\binom{r}{s}$ 的张量，当且仅当 T是 $C^\infty(U;\mathbb{R})$-多重线性的（而不仅仅是$\mathbb{R}$-多重线性的），也就是说，对于所有 $f\in C^\infty(U;\mathbb{R})$、所有适用的 $z_1,\ z_2$向量场或可微形式，以及所有 $p\in U$，

$$\begin{cases} T(p)(...,z_1(p)+z_2(p),...)=T(p)(...,z_1(p),...)+T(p)(...,z_2(p),...), & \text{and}\\ T(p)(...,f(p)z_1(p),...)=f(p)\,T(p)(...,z_1(p),...), \end{cases} \tag{R.18}$$

简写为

$$\begin{cases} T(...,z_1+z_2,...)=T(...,z_1,...)+T(...,z_2,...), & \text{and}\\ T(...,fz_1,...)=f\,T(...,z_1,...). \end{cases} \tag{R.19}$$

And

$$T^r_s(U):=\ \text{the set of } \tbinom{r}{s} \text{ type tensors on } U. \tag{R.20}$$

（回顾： $T^0_0(U):=C^\infty(U;\mathbb{R})$ 是函数场的集合，参见（R.4）。）

备注 R.4 微分几何课程中的定义：张量是流形上某个丛的截面。对于经典力学，定义 R.3 给出了一个等价的定义。

R.5 第一个例子

R.5.1 型 $\binom{0}{1}$ 张量 $=$ 微分形式

若 $T\in T^0_1(U)$，则 $T(p)\in E^*$，因此 $T=\alpha\in\Omega^1(U)$ 是微分形式： $T^0_1(U)\subset\Omega^1(U)$。

逆命题：微分形式 $\alpha\in\Omega^1(U)$ 是否定义了 $\binom{0}{1}$型张量于 U 上？是：我们需要验证 (R.18)，这显然成立。因此 $\alpha\in T^0_1(U)$，所以 $\Omega^1(U)\subset T^0_1(U)$。

Thus

$$T^0_1(U)=\Omega^1(U). \tag{R.21}$$

R.5.2 型 $\binom{1}{0}$ 张量（与向量场相认同）

设 $T\in T^0_1(U)$，则 $T(p)\in\mathcal{L}^1_0(E)=\mathcal{L}(E^*;\mathbb{R})=E^{**}$ 对所有 $p\in U$ 均成立。因此，借助自然典范同构 $E^{**}\simeq E$， $T(p)$ 可与向量相认同，故 $T^0_1(U)\subset\Gamma(U)$。C

反过来：向量场 $\vec{w}\in\Gamma(U)$ 是否在 U 上定义了一个 $\binom{1}{0}$型张量？是的：我们需要验证 (R.18)，这显而易见。因此 $\Gamma(U)\subset T^1_0(U)$。

Thus

$$T^1_0(U)\simeq\Gamma(U). \tag{R.22}$$

R.5.3 一个度量是 $\binom{0}{2}$ 张量

设 $T\in T^0_2(U)$，因此对所有 $p\in U$， $T(p)\in\mathcal{L}^0_2(E)$，并且对所有 $\vec{u}$， $T(\vec{u},\ \vec{w})\in T^0_0(U)\,\vec{w}\in\Gamma(U)$。

定义 R.5 g 上的度量是 U 上的 $\binom{0}{2}$ 型张量，并且对于所有 $p\in E$, $g(p)$ $=$记作 g_p，它是 E上的内积。

R.6 $\binom{1}{1}$张量，与自同态场的对应

设 $T\in T^1_1(U)$，因此对所有 $p\in U$， $T(p)\in\mathcal{L}^1_1(E)$，且 $T(\alpha,\vec{w})\in T^0_0(U)$，对所有 $\alpha\in\Omega^1(U)$ 和 $\vec{w}\in\Gamma(U)$（因此对所有 p，$T(p)(\alpha(p)\ \vec{w}(p))\in\mathbb{R}$）。

U上的关联自同态场为 $\widetilde{L}_T$: $\begin{cases} U\ \to U\times\mathcal{L}\\ p\ \to\widetilde{L}_T\ p \end{cases}(E;\ E)(\ )=(p,L_T(p))\Bigg\}$，其中 $L_T(p)$ 通过自然典范同构 $\mathcal{L}(E;\ E)\simeq\mathcal{L}(E^*,E;\mathbb{R})=\mathcal{L}^1_1(E)$ 与 $T(p)$ 对应，该同构由下式给出

$$\forall\ell\in E^*,\ \forall\vec{w}\in E,\quad \ell.(L_T(p).\vec{w})=T(p)(\ell,\vec{w}). \tag{R.23}$$

R.7 非定常张量

令 $t\in[t_1,t_2]\subset\mathbb{R}$。设 $(T_t)^{t\in[t_1,t_2]}$是一族 $\binom{r}{s}$ 张量，参见 (R.16)。那么 $T\colon\ t\to T(t):=T_t$称为非定常张量。非定常张量的集合也记为 $T^r_s(U)$。例如，欧拉速度场是一个 $\binom{1}{0}$ 非定常向量场。

S 微分、其梯度与散度

S.1 微分

函数微分的定义与观察者无关：所有观察者的定义都相同（定性而言：不需要任何人为工具，例如基或内积）。

S.1.1 框架

经典框架： $\mathcal{E}$ 是与向量空间 E 和 F相关联的 $\mathcal{F}$ 仿射空间， $||.||_E$ 和 $||.||_F$是 E和 F中的范数，使得（E， $||.||_E$）和（F， $||.||_F$）是完备的（我们需要“当 $h \to 0$时仍留在该空间中的极限”）。 U是 $\mathcal{E}$中的一个开集，且 Φ：$\left\{ \begin{array}{l} U \to \mathcal{F} \\ p \to p_{\mathcal{F}} = \Phi \end{array} \right\}$ (p) 是一个函数。如适用， $\mathcal{E}$和/或 $\mathcal{F}$ 可替换为 E 和/或 F。（这些定义可以推广到流形。）提醒：

定义 S.1 设 $p \in U$。如果相对于所考虑的范数，函数 Φ 在 p处满足 $\Phi(q) \underset{q \to p}{\longrightarrow} \Phi(p)$，则称其在 p处连续，即 $||\Phi(q) - \Phi(p)||_F \longrightarrow_{||q-p||_E \to 0} 0$，也写作（朗道记号）：在 p附近，

$$\Phi(q) = \Phi(p) + o(1), \tag{S.1}$$

称为“ Φ 在 p附近的零阶泰勒展开”。换句话说：

$\forall \varepsilon > 0$、 $\exists \eta > 0$ 使得： $\forall q \in \mathcal{E}$ 使得： $||q - p||_E < \eta$，我们有 $||\Phi(q) - \Phi(p)||_F < \varepsilon$。

而 $C^0(U; \mathcal{F})$是所有在每个 $p \in U$处都连续的函数的集合。

S.1.2 方向导数与微分（与观察者无关）

设 $p \in U$、 $\vec{u} \in E$，并设 $f: \mathbb{R} \to \mathcal{F}$ 定义如下：

$$f(h) := \Phi(p + h\vec{u}) \tag{S.2}$$

定义 S.2 函数 Φ 在 p 处沿方向 $\vec{u}$ 可微，当且仅当 f 在 0 处可导，即当且仅当极限 $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(p+h\vec{u}) - \Phi(p)}{h}$ $=$记作 $d\Phi(p)(\vec{u})$存在于 F中，即当且仅当在 p附近，

$$\Phi(p + h\vec{u}) = \Phi(p) + h\, d\Phi(p)(\vec{u}) + o(h), \tag{S.3}$$

称为 Φ 在 p 处沿 $\vec{u}$ 方向的一阶泰勒展开的方程（这是 f 在 p附近的一阶泰勒展开）。

然后， $d\Phi(p)(\vec{u})$称为 Φ 在 p 处沿 $\vec{u}$方向的方向导数。

并且，如果对于所有 $\vec{u} \in E$， $d\Phi(p)(\vec{u})$都存在（在 F中），那么称 Φ 在 p处盖托可微 .

练习 S.3 证明：如果 Φ 在 p 处盖托可微，则 $d\Phi(p)$是均匀的，即对于所有 $\vec{u} \in E$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{R}$， $d\Phi(p)(\lambda\vec{u}) = \lambda\, d\Phi(p)(\vec{u})$。

答案。 $\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(p+h(\lambda\vec{u})) - \Phi(p)}{h} \overset{p = \lambda}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(p+\lambda h\vec{u}) - \Phi(\lambda p)}{\lambda h} \overset{p = \lambda}{=} \lim_{k \to 0} \frac{\Phi(p+k\vec{u}) - \Phi(p)}{k}$。 ∎

定义 S.4 如果 Φ 是盖托可微的，并且此外 $d\Phi(p)$在 p处是线性且连续的，那么Φ 被称为在 p 处可微（或称在 p处弗雷歇可微）。因此

$$\Phi(q) = \Phi(p) + h\, d\Phi(p).\overrightarrow{pq} + o(||\overrightarrow{pq}||_E), \tag{S.4}$$

因为此时对于所有 $\vec{u} \in E$，有 $d\Phi(p)(\vec{u}) =$记作 $d\Phi(p).\vec{u}$（线性性）。

而仿射函数 $aff_p: q \to aff_p(q) := \Phi(p) + d\Phi(p).\overrightarrow{pq}$ 是 Φ 在 p处的仿射近似。（因此， aff_p 的图像是 Φ 在 p处的切平面。）

定义 S.5 Φ：如果 $U \to \mathcal{F}$ 在 U 中可微，当且仅当 Φ 在所有 $p \in U$处都可微。则其微分是映射

$$d\Phi : \left\{ \begin{array}{l} U \to \mathcal{L}(E; F) \\ p \to d\Phi(p). \end{array} \right. \tag{S.5}$$

以及 $C^1(U; \mathcal{F})$ 可微函数的集合 ψ 使得 $d\Phi \in C^0 \quad (U; \mathcal{L}(E; F))$.

而 $C^2(U; \mathcal{F})$ 是由可微函数组成的集合 ψ，使得 $d\Phi \in C^1(U; \mathcal{L}(E; F))$.

... 并且 $C^k(U; \mathcal{F})$ 是由满足 $d\Phi \in C^{k-1}(U; \mathcal{L}(E; F))$ 的可微函数 ψ 构成的集合。 ..

命题 S.6 微分（或导数）算子 $d:\left\{\begin{array}{l} C^1(U;\mathcal{F}) \to C^0\ U\ \mathcal{L}\ E\ F \\ \Phi \to d\Phi \end{array}\right\}(;(;))$ 是

$\mathbb{R}$-线性（“导数是线性的”）。

证明。 $d(\Phi+\lambda\Psi)(p).\vec{u} = \lim_{h\to 0}\frac{(\Phi+\lambda\Psi)(p+h\vec{u})-(\Phi+\lambda\Psi)(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(p+h\vec{u})-\Phi(p)+\lambda\Psi(p+h\vec{u})-\lambda\Psi(p)}{h}$ $= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(p+h\vec{u})-\Phi(p)}{h} + \lambda\lim_{h\to 0}\frac{\Psi(p+h\vec{u})-\Psi(p)}{h} = d\Phi(p).\vec{u} + \lambda d\Psi(p).\vec{u} = (d\Phi(p) + \lambda d\Psi(p)).\vec{u}$ 对所有 p和 $\vec{u}$均成立，因此 $d(\Phi+\lambda\Psi) = d\Phi + \lambda d\Psi$ 对所有 $\lambda\in\mathbb{R}$和 Φ均成立， $\Psi\in C^1(U;\mathcal{F})$。

练习 S.7 证明：如果 $f\in C^1(U;\mathbb{R})$（标量值）且 $\Phi\in C^1(U;\mathcal{F})$，那么对于所有 $\vec{u}\in E$，

$$d(f\Phi).\vec{u} = (df.\vec{u})\Phi + f(d\Phi.\vec{u}) \tag{S.6}$$

（同时我们也写作 $d(f\Phi) = \Phi\otimes df + f\,d\Phi$，以便用于缩并规则）。

答案。

$$\begin{aligned} d(f\Phi)(p).\vec{u} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{u})\Phi(p+h\vec{u}) - f(p)\Phi(p)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{u})\Phi(p+h\vec{u}) - f(p)\Phi(p+h\vec{u})}{h} + \frac{f(p)\Phi(p+h\vec{u}) - f(p)\Phi(p)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{u}) - f(p)}{h}(\Phi(p)+o(1)) + \lim_{h\to 0} f(p)\frac{\Phi(p+h\vec{u}) - \Phi(p)}{h} \\ &= (df(p).\vec{u})\Phi(p) + f(p)(d\Phi(p).\vec{u}). \end{aligned} \tag{S.7}$$

张量的写法：$d(f\Phi).\vec{u} = (\Phi\otimes df).\vec{u} + (f\,d\Phi).\vec{u}$，依据缩并规则可得 $(\Phi\otimes df).\vec{u} = (df.\vec{u})\Phi$，$(f\,d\Phi).\vec{u} = f(d\Phi.\vec{u})$。 ∎

备注 S.8 在微分几何中，切映射的定义如下，见定义 S.4：

$$T\Phi:\left\{\begin{array}{l} U\times E \to \mathcal{F}\times F \\ (p,\vec{u}) \to T\Phi(p,\vec{u}) = (\Phi(p), d\Phi(p).\vec{u}). \end{array}\right. \tag{S.8}$$

两个点 p (输入)和 $\Phi(p)$（输出）是基点，两个向量 $\vec{u}$ (输入)和$d\Phi(p).\vec{u}$ （输出）是初始向量及其经 Φ 推前所得的向量。 ∎

S.1.3 二阶微分的记号

设 $\Phi\in C^2(U;\mathcal{F})$; 因此 $d\Phi\in C^1(U;\mathcal{L}(E;F))$, 因此 $d(d\Phi)\in C^0(U;\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)))$; 所以，对于 $p\in U$和 $\vec{u}\in E$，有 $d(d\Phi)(p).\vec{u} = \lim_{h\to 0}\frac{d\Phi(p+h\vec{u})-d\Phi(p)}{h}\in\mathcal{L}(E;F)$, 且当 $\vec{v}\in E$时，有 $(d(d\Phi)(p).\vec{u}).\vec{v}\in F$。

定义 S.9 双线性映射 $d^2\Phi(p)\in\mathcal{L}(E,E;F)$ 定义为

$$d^2\Phi(p)(\vec{u},\vec{v}) = (d(d\Phi)(p).\vec{u}).\vec{v}, \tag{S.9}$$

由于自然典范同构 $L\in\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)) \leftrightarrow T_L\in\mathcal{L}(E,E;F)$ 由 $T_L(\vec{u}_1,\vec{u}_2) = (L(\vec{u}_1).\vec{u}_2$ 对所有 $\vec{u}_1,\vec{u}_2\in E$ 均成立；因此 $L =$已注明T_L，因此 $d(d\Phi) =$已注明$d^2\Phi(p)\in\mathcal{L}(E,E;F)$。

This 给出了 Φ （假设为 C^2）在 p 沿方向 $\vec{u}$附近的通常二阶泰勒展开：

$$\Phi(p+h\vec{u}) = \Phi(p) + h\,d\Phi(p).\vec{u} + \frac{h^2}{2}d^2\Phi(p)(\vec{u},\vec{u}) + o(h^2) \tag{S.10}$$

（$= f$在 $h=0$附近的二阶泰勒展开：$h\to f(h) = \Phi(p+h\vec{u})$，参见（S.2））。And Sch施瓦茨定理指出，当 Φ为 C^2时，$d^2\Phi(p)$是对称的，即 $d^2\Phi(p)(\vec{u},\vec{v}) = d^2\Phi(p)(\vec{v},\vec{u})$.

S.2 一个基与第 j阶偏导数

定义 S.10 设 $\Phi\in C^1(U;\mathcal{F})$、$\vec{u}\in\Gamma(U)$（一个向量场）以及 $p\in U$。Φ在 p沿 $\vec{u}$的导数定义为

$$\partial_{\vec{u}}\Phi(p) := d\Phi(p).\vec{u}(p) \quad (= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(p+h\vec{u}(p)) - \Phi(p)}{h}\in F). \tag{S.11}$$

这定义了沿 $\vec{u}$的方向导数算子：

$$\partial_{\vec{u}}:\left\{\begin{array}{l} C^1(U;\mathcal{F}) \to C^0(U;F) \\ \Phi \to \partial_{\vec{u}}(\Phi) := d\Phi.\vec{u}, \quad \text{i.e.} \quad \partial_{\vec{u}}(\Phi)(p) := d\Phi(p).\vec{u}(p). \end{array}\right. \tag{S.12}$$

（And $\partial_{\vec{u}}(\Phi)(p) =$注意到$\vec{u}(\Phi)(p)$在微分几何中得益于 $E\simeq E^{**}$，其给出 $\partial_{\vec{u}}\simeq\vec{u}$。）

特别地，如果 $(\vec{e}_i(p))$ 是 p 处的一个基，那么 Φ 在 p 处的第 j 个偏导数是 $\partial_{\vec{e}_j}\Phi(p)$ =注意到 $\partial_j\Phi(p)$（沿着 $\vec{e}_j$的导数），而第 j 个方向导数算子为

$$\partial_j : \begin{cases} C^1(U;\mathcal{F}) \to C^0(U;F) \\ \Phi \to \boxed{\partial_j\Phi := d\Phi.\vec{e}_j}, \quad \text{i.e.} \quad \partial_j(\Phi)(p) := d\Phi(p).\vec{e}_j(p). \end{cases} \tag{S.13}$$

（在微分几何中 $\partial_j\Phi$ =记作 $\vec{e}_j(\Phi)$，因此 $\vec{e}_j(\Phi)(p) := d\Phi(p).\vec{e}_j(p)$。）

S.3 应用 1：实值函数

S.3.1 标量值函数的微分（客观的）

此处 Φ 记作= $f: \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ p \to f(p) \end{cases}$ 是一个 C^1 标量值函数，因此 $df \in \Omega^1(U)\cap C^0(U;E^*)$（一种 C^0 微分形式）。

所以对所有 $p\in U$， $df(p)\in E^*$，并且对所有 $\vec{u}\in E$， $df(p).\vec{u} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h\vec{u})-f(p)}{h} \in \mathbb{R}$。

练习 S.11 证明：若 f， $g\in C^1(U;\mathbb{R})$，则（乘积的导数）

$$d(fg) = (df)g + f(dg), \tag{S.14}$$

也就是说，对于所有 $\vec{w}\in\Gamma(U)$， $d(fg).\vec{w} = (df.\vec{w})g + f(dg.\vec{w})$。

答案。$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{w})g(p+h\vec{w})-f(p)g(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{w})g(p+h\vec{w})-f(p)g(p+h\vec{w})}{h} + \lim_{h\to 0} f(p)\frac{g(p+h\vec{w})-g(p)}{h}$，计算中只需要对 f和 g作一阶（仿射）近似：我们得到的结果与仿射函数 $f(x) = a_0+a_1x$和 $g(x) = b_0+b_1x$相同，它们给出 $(fg)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)x + a_1b_1x^2$，进而得到 $(fg)'(x) = a_0b_1+a_1b_0 + 2a_1b_1x$，这确实等于 $(f'g+fg')(x) = a_1(b_0+b_1x) + (a_0+a_1x)b_1$。 ∎

S.3.2 量化

设 $(\vec{e}_i(p))$ 是 p 处的一组基。因此 $\partial_j f(p) =^{(S.13)} df(p).\vec{e}_j(p)$ $(=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h\vec{e}_j(p))-f(p)}{h})$，并记为

$$\partial_j f(p) \overset{\text{noted}}{=} f_{|j}(p). \tag{S.15}$$

因此，设 $(\pi_{ei}(p))$ 是基 $(\vec{e}_i(p))$ 的对偶基，并设 $f_{|j}(p) := \pi_{ei}(p).df(p)$（基 $(\pi_{ei}(p))$ 下 $df(p)$ 的第 j 个分量），则有

$$df = \sum_{j=1}^n f_{|j}\pi_{ej}, \quad \text{and} \quad [df(p)]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} f_{|1}(p) & \dots & f_{|n}(p) \end{pmatrix} \quad \text{(row matrix)}. \tag{S.16}$$

因此 $df.\vec{u} = \sum_{j=1}^n f_{|j}u_j = [df]_{|\vec{e}}.[\vec{u}]_{|\vec{e}}$当 $\vec{u}(p) = \sum_i u_i(p)\vec{e}_i(p)$。特别地，对于笛卡尔基，$(\pi_{ei}(p))$ =记作 (dx_j)，且 $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j$。

对偶记号： $\pi_{ei} = e^i$, $\vec{u} = \sum_{j=1}^n u^j\vec{e}_j$, $df = \sum_{j=1}^n f_{|j}\,e^j$, $df.\vec{u} = \sum_{j=1}^n f_{|j}u^j$，以及在笛卡尔基下的 $\pi_{ei} = dx^i$ 和 $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$。

Ex练习 S.12 证明：$(fg)_{|j} = f_{|j}\,g + f\,g_{|j}$当 f， g： $U\to\mathbb{R}$是 C^1 标量值函数。

答案。应用 (S.7)：此处 $d(fg) = g\,df + f\,dg$，即对所有 j， $d(fg).\vec{e}_j = (df.\vec{e}_j)\,g + f\,(dg.\vec{e}_j)$。 ∎

并且 $df(p)\in E^*$满足线性形式的协变基变换公式，即，若 $(\vec{a}_i(p))$ 和 $(\vec{b}_i(p))$ 是 p处的两个基，且 $P(p)$ 是从 $(\vec{a}_i(p))$ 到 $(\vec{b}_i(p))$ 的过渡矩阵，则 $[df(p)]_{|\vec{b}} =^{(A.28)} [df(p)]_{|\vec{a}}.P(p)$，简言之：

$$[df]_{|\vec{b}} = [df]_{|\vec{a}}.P \quad \text{(covariance formula)}. \tag{S.17}$$

S.3.3 通过内积与微分相关联的（主观）梯度

设 $f \in C^1(U;\mathbb{R})$（一个标量值函数）。任选一个内积 $(\cdot,\cdot)_g$ 于 E .

定义 S.13 f 在 $p \in U$ 处相对于 $(\cdot,\cdot)_g$ 的共轭梯度 $\mathbf{grad}_g f(p)$，也称为 f 在 p 处的 $(\cdot,\cdot)_g$-共轭梯度，是线性形式 $df(p) \in E^*$ 的 $(\cdot,\cdot)_g$-黎斯表示向量：

$$\vec{\mathrm{grad}}_g f(p) := \vec{R}_g(df(p)). \tag{S.18}$$

即向量 $\mathbf{grad}_g f(p) \in E$ 由下式刻画，参见 (F.2)：

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \boxed{df(p).\vec{u} = (\vec{\mathrm{grad}}_g f(p), \vec{u})_g} = \vec{\mathrm{grad}}_g f(p) \bullet_g \vec{u}. \tag{S.19}$$

基本原理： 一位使用英尺为单位的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_a$ 的英国观察者，与一位使用米为单位的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_b$ 的法国观察者，拥有相同的微分 df （其定义独立于任何测量单位）；但他们的梯度并不 相同：

$$\vec{\mathrm{grad}}_b f \overset{(F.12)}{=} \lambda^2 \vec{\mathrm{grad}}_a f \quad \text{with} \quad \lambda^2 > 10. \tag{S.20}$$

差别很大的向量，不是吗？“梯度向量”强烈依赖于所选的内积。忘记这一事实会导致诸如火星气候轨道器探测器坠毁这样的事故，参见备注 A.14。

主观的一阶泰勒展开： 如果存在并使用内积 $(\cdot,\cdot)_g$，那么一阶泰勒展开 (S.3) 给出

$$f(p+h\vec{u}) = f(p) + h\,(\vec{\mathrm{grad}}_g f(p), \vec{u})_g + o(h) \qquad (= f(p) + h\,\vec{\mathrm{grad}}_g f(p) \bullet_g \vec{u} + o(h)). \tag{S.21}$$

这一点再次至关重要（我们坚持这一点）：

- 内积并不总是存在（或能作为有意义的工具使用），参见 § B.3.2（热力学）；因此，对于一个 C^1 函数，梯度并不总是存在（这与微分不同）。
- $df(p)$ 是线性形式（协变），而 $\mathbf{grad}_g f(p)$ 是向量（逆变）。特别是，基变换公式有所不同，参见 (A.28)：

$$[df]_{|new} = [df]_{|old}.P, \quad \text{while} \quad [\vec{\mathrm{grad}}_g]_{|new} = P^{-1}.[\vec{\mathrm{grad}}_g]_{|old}. \tag{S.22}$$

- df 不能与 $\mathbf{grad} f$（两者相同吗？）等同。（请记住：E 和 E^* 之间不存在自然的典范同构。）微分 df 也称为“协变梯度”，而与之相关的任何梯度向量也称为“相对于某个内积的逆变梯度”。

等距欧几里得框架： 如果可以为所有观察者指定同一个欧几里得点积（英尺？米？），那么 $\vec{\mathbf{grad}}_g f =$ 记作 $\vec{\mathbf{grad}} f = \vec{\nabla} f$，并将 (S.19) 写为 $df.\vec{u} = \vec{\mathbf{grad}} f \bullet \vec{u} = \vec{\nabla} f \bullet \vec{u}$ （等距框架）。

练习 S.14 由 $[g]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 给出的笛卡尔基 $(\vec{e}_i)$ 和 $(\cdot,\cdot)_g$。求 $[df]_{|\vec{e}}$ 和 $[\vec{\mathbf{grad}}_g f]_{|\vec{e}}$。

答案。 $[df]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$（行矩阵），而 (S.19) 给出 $[\vec{\mathbf{grad}}_g f]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ 1 \\ 2\,\frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$（列矩阵 $\neq [df]^T$）。 ∎

S.4 应用 2：坐标系基与克里斯托费尔符号 s

（处理协变性时必不可少。）

S.4.1 坐标系与坐标系基

在笛卡尔空间 $\mathbb{R}^n$ 中，考虑一个（开）集 $U_{\mathrm{par}} = \{\vec{q} \in]a_1,\ b_1[\times\ldots\times]a_n,\ b_n[\}$，称为参数集；再考虑一个开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，称为几何位置集，并考虑一个 C^2-微分同胚 $\Psi : \vec{q} \in U_{\mathrm{par}} \to p \in U$，称为坐标系。

设 $(\vec{a}_i)$ 为参数空间的典范基，设 $\vec{q} = \sum_i q_i \vec{a}_i \in U_{\mathrm{par}}$ （q_i 称为参数）。例如，参见 § 6.6.2 中的极坐标系，其中 $\vec{q} = (q_1,\ q_2) = (r,\ \theta)$。

Ψ 为微分同胚，在任意 $p=\Psi(\vec{q})$ 处，$\in U$ 向量

$$\vec{a}_{i*}(p) := d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_i \tag{S.23}$$

在 E 处构成一组基，而 $(\vec{a}_{i*}(p))$ 称为 p处的坐标系基。其在 p 处的对偶基由线性形式 $dq_i(p)$ 构成，因此对于所有 i，j，

$$dq_i(p).\vec{a}_{j*}(p) = \delta_i^j. \tag{S.24}$$

对偶记号：$dq^i(p).\vec{a}_{j*}(p) = \delta_j^i$ 对于所有 i，j。

S.4.2 标量值函数微分的参数表达式

给定坐标系 Ψ，定义在 U上的标量值函数 f：$\left\{\begin{matrix} U & \to \mathbb{R} \\ p & \to f \end{matrix}(p)\right\}$可用函数 $g=f\circ\Psi$：$\left\{\begin{matrix} U_{\text{par}} & \to \mathbb{R} \\ \vec{q} & \to g \end{matrix}(\vec{q})\right.$：$= f(p)$ 表示，其中 $p=\Psi(\vec{q})$ $\Big\}$定义在 U_{par}上，而 g称为 f的参数表达式。因此

$$dg(\vec{q}) = df(p).d\Psi(\vec{q}) \quad \text{when} \quad p=\Psi(\vec{q}), \tag{S.25}$$

特别是，

$$\frac{\partial g}{\partial q_j}(\vec{q}) := dg(\vec{q}).\vec{a}_j = df(p).d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j = df(p).\vec{a}_{j*}(p) \overset{\text{noted}}{=} \frac{\partial f}{\partial q_j}(p). \tag{S.26}$$

警告，请注意： f 是 p的函数，而不是 $\vec{q}$的函数；记号 $\frac{\partial f}{\partial q_j}(p)$表示：$= \partial_{(f\circ\Psi)}\,\partial q_j\,(\vec{q})$，其中 $p=\Psi(\vec{q})$，仅此而已。

因此，$(dq_j(p))$是点 p处坐标基$(\vec{a}_{i*}(p))$的对偶基，

$$df(p) \overset{(S.26)}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j}(p)\, dq_j(p). \tag{S.27}$$

对偶记号：$df(p) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q^j}(p)\ \underline{dq^j}(p)$。

备注 S.15 请注意这些可能自相矛盾的记号：

1- 在 U_{par} 中，笛卡尔基$(\vec{a}_i)$的对偶基(π_{ai})是一个一致基（与 $\vec{q}$无关）.....而且（几乎）从不写作(dq_i).....

2- 实际上，$(dq_i(p))$ 是几何空间中 $(\vec{a}_{i*}(p))$ 的对偶基的专用名称.....注意这些记号！例如，对于极坐标 $(dq_1(p)\ \ dq_2(p))$，$= (dr(p)\ \ d\theta(p))$ 是 p 处极坐标系基 $(\vec{a}_{1*}(p)\ \ \vec{a}_{2*}(p))$ 的对偶基，参见 (6.6.2)。

练习 $\vec{}_i\vec{a}_i = \sum_i x_{b,\ i}b_i$。证明 **S.16 </style}基 () 和 () 位于 。向量 表示为，**：

$$\vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i,\ \ \forall i \implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_{b,i}} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_{a,i}}} \quad \text{or} \quad \frac{\partial f}{\partial x_{a,i}} = \frac{\partial f}{\partial(\lambda x_{a,i})}. \tag{S.28}$$

(单位变换公式。) 对偶记号：$\frac{\partial f}{\partial x_b^j} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_a^j}$。

答案。 $df(p).\vec{b}_j(p) = \lambda df(p).\vec{a}_j(p)$（ $df(p)$ 的线性性）可写为（S.28）。（或者此处用 $[df]_{|\vec{b}} = [df]_{|\vec{a}}.P\ \ P=\lambda I$ 。）

练习 S.17 $[df]_{|\vec{b}} = [df]_{|\vec{a}}.P$，参见 (S.17)，即 $\frac{\partial f}{\partial x_b^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_a^i}P_j^i$也记作

$$\frac{\partial f}{\partial x_b^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_a^i}\frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^j}. \tag{S.29}$$

Why?

答案。简答。 $[\vec{x}]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[\vec{x}]_{|\vec{a}}$，即 $[\vec{x}]_{|\vec{a}} = P.[\vec{x}]_{|\vec{b}}$，这意味着 $[\vec{x}]_{|\vec{a}}([\vec{x}]_{|\vec{b}}) = P.[\vec{x}]_{|\vec{b}}$，即

$$\begin{pmatrix} x_a^1(x_b^1,...,x_b^n) \\ \vdots \\ x_a^1(x_b^1,...,x_b^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n P_j^1 x_b^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n P_j^n x_b^j \end{pmatrix}, \quad \text{thus} \quad \frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^j}(x_b^1,...,x_b^n) = P_j^i, \ \forall i,j. \tag{S.30}$$

因此，(S.29) 表示

$$\frac{\partial f}{\partial x_b^j}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_a^i}(p)\frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^j}(x_b^1,...,x_b^n) \quad \text{thus} \quad = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_a^i}(p)\, P_j^i, \tag{S.31}$$

如 (S.17) 所示。

详细答案。 设 O 是 U 中的一个点（原点）。若 $p \in U$，令 $\vec{x} = \overrightarrow{Op} = \sum_{i=1}^n x_a^i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n x_b^i \quad \vec{b}_i$。

这定义了函数 $[\vec{x}]_{|\vec{a}}$： $[\vec{x}]_{|\vec{b}} \to [\vec{x}]_{|\vec{a}}([\vec{x}]_{|\vec{b}})$，并且有 $[\vec{x}]_{|\vec{a}}([\vec{x}]_{|\vec{b}}) = P.[\vec{x}]_{|\vec{b}}$（基变换公式）。接着令 f_a， f_b： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 由 $f_a([\vec{x}]_{|\vec{a}}) := f(p)$ 和 $f_b([\vec{x}]_{|\vec{b}}) := f(p)$ 定义。（注意： f_a 和 f_b 的定义域并不相同：它们是不同的）。

因此，当 $[\vec{x}([\vec{x}]_{|\vec{b}})]_{|\vec{a}} = P.[\vec{x}]_{|\vec{b}}$ 时， $f_a([\vec{x}]_{|\vec{a}}) = f_b([\vec{x}]_{|\vec{b}})\,(= f(p))$，所以 $(f_a \circ [\vec{x}]_{|\vec{a}})([\vec{x}]_{|\vec{b}}) = f_b([\vec{x}]_{|\vec{b}})$。因此 $\frac{\partial (f_a \circ [\vec{x}]_{|\vec{a}})}{\partial x_b^i}([\vec{x}]_{|\vec{b}}) = \frac{\partial f_b}{\partial x_b^i}([\vec{x}]_{|\vec{b}})$，所以 (S.29) 的含义是

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_a}{\partial x_a^j}([\vec{x}]_{|\vec{a}})\frac{\partial x_a^j}{\partial x_b^i}([\vec{x}]_{|\vec{b}}) = \frac{\partial f_b}{\partial x_b^i}([\vec{x}]_{|\vec{b}}). \tag{S.32}$$

问题： 为什么要引入 f_a 和 f_b （而不只是保留 f）？

答案： 因为向量不只是一组分量（不只是一個矩阵），而且 $\overrightarrow{Op}$ 不能简化为一个由分量组成的矩阵（究竟是哪一个： $[\vec{x}]_{|\vec{a}}$? $[\vec{x}]_{|\vec{b}}$? ）。这里， f 是作用于点 p 上的函数（独立于参考系），而 f_a 和 f_b 是作用于矩阵上的函数（取决于参考系的选择）：定义域不同，因此函数 f、 f_a 和 f_b 也不同。

S.4.3 克里斯托费尔符号

为便于阅读和使用，我们采用对偶记号。

定义 S.18 在坐标系基 $(\vec{e}_i(p))$ 中（此前称为 $(\vec{a}_{i*}(p))$），克里斯托费尔符号 $\gamma_{jk}^i(p) \in \mathbb{R}$ 是向量 $d\vec{e}_k(p).\vec{e}_j(p)$ 的分量，即 $d\vec{e}_k(p).\vec{e}_j(p) = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk}^i(p)\vec{e}_i(p)$，因此

$$\boxed{d\vec{e}_k.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{jk}^i \vec{e}_i}, \quad \text{or} \quad d\vec{e}_j.\vec{e}_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k \vec{e}_k. \tag{S.33}$$

（因此，设 $(e^i(p))$ 为 $(\vec{e}_i(p))$ 的对偶基，则 $\gamma_{jk}^i := e^i.d\vec{e}_k.\vec{e}_j$；进行缩并计算时，$d\vec{e}_k = \sum_{ij} \gamma_{jk}^i \vec{e}_i \otimes e^j$。）

（在笛卡尔框架中，克里斯托费尔符号为零。）

（流形上的微分几何：$\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{jk}^i \vec{e}_i$，即 $\gamma_{jk}^i = e^i.\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_k$ 是联络 ∇的分量；曲面 $\mathbb{R}^n$ 上的通常联络是黎曼联络，在这种情况下， $\nabla_{\vec{e}_j}\vec{e}_k$ 是相对于欧几里得点积将 $d\vec{e}_k.\vec{e}_j$ 正交投影到曲面上的结果。）

例如，关于极坐标系，参见备注 6.12， $d\vec{e}_2.\vec{e}_2 = -r\vec{e}_1$，因此 $\gamma_{22}^1 = -r$ 和 $\gamma_{22}^2 = 0$。

Ex习题 S.19 证明：如果 $(\vec{e}_i(p))$ 是 C^2 坐标系的坐标系基， n:

$$\forall i,j,\ d\vec{e}_i.\vec{e}_j = d\vec{e}_j.\vec{e}_i \quad (= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^i \partial q^j}), \quad \text{and} \quad \forall i,j,k,\ \gamma_{ji}^k = \gamma_{ij}^k \quad \text{(symmetry for lower indices)}. \tag{S.34}$$

答案. $\vec{e}_i(p) = (\vec{e}_i \circ \Psi)(\vec{q}) =^{(S.23)} d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_i$ 可得 $d(\vec{e}_i \circ \Psi)(\vec{q}).\vec{a}_j = d(d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_i).\vec{a}_j$，因此 $d\vec{e}_i(\Psi(\vec{q})).d\Psi(\vec{q}).\vec{a}_j = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial \Psi}{\partial q^j} = \frac{\partial}{\partial q^j}\frac{\partial \Psi}{\partial q^i}$(依据施瓦茨定理，因为 Ψ 是 C^2) $= d\vec{e}_j.\vec{e}_i =$已注明$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^i \partial q^j}$，因此 $\sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^n \gamma_{ji}^k \vec{e}_k$。

练习 S.20 考虑在 p 处的两个坐标系基 $(\vec{a}_i(p))$ 和 $(\vec{b}_i(p))$， $P(p) = [P_j^i(p)]$ 是从 $(\vec{a}_i(p))$ 到 $(\vec{b}_i(p))$ 的变换矩阵，且 $Q = P^{-1}$。使用一般记号 $d\vec{e}_k.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{jk,\ e}^i \vec{e}_i$，证明克里斯托费尔符号的基变换公式：

$$\gamma_{jk,b}^i = \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^n Q_\lambda^i P_j^\mu P_k^\nu \gamma_{\mu\nu,a}^\lambda + \sum_{\lambda,\mu=1}^n Q_\lambda^i P_j^\mu (dP_k^\lambda.\vec{a}_\mu) \quad (= \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^n Q_\lambda^i P_j^\mu P_k^\nu \gamma_{\mu\nu,a}^\lambda + \sum_{\lambda=1}^n Q_\lambda^i (dP_k^\lambda.\vec{b}_j)). \tag{S.35}$$

（由于项 $\sum_{\mu\nu} Q_\lambda^i P_j^\mu (dP_k^\lambda.\vec{a}_\mu)$，导数不是张量。）

答案. $\vec{b}_k\ p\ =\sum_\nu P_k^\nu\ p\ \vec{a}_\nu\ p$ $d\vec{b}_k.\vec{b}_j\ =\sum_\nu dP_k^\nu.\vec{b}_j\ \vec{a}_\nu+\sum_\nu P_k^\nu\ d\vec{a}_\nu.\vec{b}_j\ =\sum_{\mu\nu}P_j^\mu\ dP_k^\nu.\vec{a}_\mu\ \vec{a}_\nu+()()()$ $\sum_{\mu\nu}P_k^\nu P_j^\mu\ d\vec{a}_\nu.\vec{a}_\mu$ $b^i=\sum_\lambda Q_\lambda^i a^\lambda$
得出 ()()()(); 而且，因此

$$\gamma^i_{jk,b}=b^i.d\vec{b}_k.\vec{b}_j=\sum_{\lambda\mu\nu}Q^i_\lambda P^\mu_j(dP^\nu_k.\vec{a}_\mu)a^\lambda.\vec{a}_\nu+\sum_{\lambda\mu\nu}Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_k a^\lambda.(d\vec{a}_\nu.\vec{a}_\mu)=\sum_{\lambda\mu}Q^i_\lambda P^\mu_j(dP^\lambda_k.\vec{a}_\mu)+\sum_{\lambda\mu\nu}Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_k\gamma^\lambda_{\mu\nu,a},$$

因此（S.35）。 ∎

S.5 应用 3：向量场的微分

此处 $F=E=\vec{\mathbb{R}}^n$, $\Phi=$记作 $\vec{w}\in\Gamma(U)$ 是一个向量场。因此 $d\vec{w}(p)\in\mathcal{L}(E;E)$，且对所有 $\vec{u}\in\Gamma(U)$, $d\vec{w}.\vec{u}$都是 E中的一个向量场，由 $(d\vec{w}.\vec{u})(p)=d\vec{w}(p).\vec{u}(p)=$极限$_{h\to0}\frac{\vec{w}(p+h\vec{u}(p))-\vec{w}(p)}{h}$ $\in E$给出。

量化： $(\vec{e}_i(p))$ 是 E中 p 处的一组基。称 $w_i(p)\in\mathbb{R}$ 为 $\vec{w}(p)$ 的分量，即 $\vec{w}(p)=\sum_{i=1}^n w_i(p)\vec{e}_i(p)$。并称 $w_{i|j}(p)$ 为 $d\vec{w}(p)$ 的分量（ E中的自同态）：

$$\vec{w}=\sum_{i=1}^n w_i\vec{e}_i,\quad d\vec{w}.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n w_{i|j}\vec{e}_i,\quad [d\vec{w}]_{|\vec{e}}=[w_{i|j}]\quad\text{(Jacobian matrix)}.\tag{S.36}$$

以及用于缩并计算的张量记号：$(\pi_{ei}(p))$ 为对偶基，

$$d\vec{w}=\sum_{i,j=1}^n w_{i|j}\vec{e}_i\otimes\pi_{ej}.\tag{S.37}$$

对偶性记号：$\vec{w}=\sum_{i=1}^n w^i\vec{e}_i$, $d\vec{w}.\vec{e}_j=\sum_{i\ ,j=1}^n w^i_{|j}\vec{e}_i$, $[d\vec{w}]_{|\vec{e}}=[w^i_{|j}]$, 以及 $d\vec{w}=\sum_{i\ ,j=1}^n w^i_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$.

在笛卡 尔基中： 这里 $(\vec{e}_i)$ 是均匀的，因此 $\vec{w}(p)=\sum_{i=1}^n w_i(p)\vec{e}_i$ 给出 $d\vec{w}(p).\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n(dw_i(p).\vec{e}_j)\vec{e}_i$, 因此 (S.36) g ives

$$w_{i|j}=\frac{\partial w_i}{\partial x_j}(p)\overset{\text{noted}}{=}w_{i,j},\quad\text{so}\quad[d\vec{w}]_{|\vec{e}}=[\frac{\partial w_i}{\partial x_j}].\tag{S.38}$$

对偶记号： $w^i_{|j}=\frac{\partial w^i}{\partial x^j}$和 $[d\vec{w}]_{|\vec{e}}=[\frac{\partial w^i}{\partial x^j}]$。 ——

坐标系基：采用 § S.4 中描述的坐标系以及便于阅读（和使用）的对偶记号。 $\vec{w}(p)=\sum_{i=1}^n w^i(p)\vec{e}_i(p)$ 给出，对于所有 j,

$$d\vec{w}.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n(dw^i.\vec{e}_j)\vec{e}_i+\sum_{i=1}^n w^i(d\vec{e}_i.\vec{e}_j)\quad(=\sum_{i=1}^n w^i_{|j}\vec{e}_i).\tag{S.39}$$

（用于缩并的张量记号： $d\vec{w}=\sum_i\vec{e}_i\otimes dw^i+\sum_i w^i\,d\vec{e}_i=\sum_{ij}w^i_{|j}\vec{e}_i\otimes e^j$。）

并且 $\sum_i w^i(d\vec{e}_i.\vec{e}_j)\overset{(S.33)}{=}\sum_{ik}w^i\gamma^k_{ji}\vec{e}_k=\sum_{ik}w^k\gamma^i_{jk}\vec{e}_i$，因此，对于所有 i, j,

$$\boxed{w^i_{|j}=\frac{\partial w^i}{\partial q^j}+\sum_{k=1}^n w^k\gamma^i_{jk}}\quad\text{where}\quad\frac{\partial w^i}{\partial q^j}:=dw^i.\vec{e}_j.\tag{S.40}$$

（$\frac{\partial w^i}{\partial q^j}:=dw^i.\vec{e}_j$ 是标量值函数 w^i 沿第 j 条坐标线的导数）。
（特别是，若 $\vec{w}=\vec{e}_\ell=\sum_i\delta^i_\ell\vec{e}_i$，我们便得到 $d\vec{e}_\ell.\vec{e}_j=\sum_i 0\vec{e}_i+\sum_{ik}\delta^k_\ell\gamma^i_{jk}\vec{e}_i=\sum_i\gamma^i_{j\ell}\vec{e}_i$，参见 (S.33)。）

习题 S.21 结合习题 S.20 和 $\vec{w}=\sum_{i=1}^n u^i\vec{a}_i=\sum_n v^i\vec{b}_i$，通过计算验证（$d\vec{w}$ 是一个不依赖于任何基定义的自同态）：

$$[d\vec{w}]_{|\vec{b}}=P^{-1}.[d\vec{w}]_{|\vec{a}}.P,\quad\text{i.e.}\quad v^i_{|j}=\sum_{k,\ell=1}^n Q^i_k u^k_{|\ell}P^\ell_j.\tag{S.41}$$

答案。 $\vec{b}_j=\sum_\ell P^\ell_j\vec{a}_\ell$对于所有 i、 $Q=P^{|1}$和 $[\vec{w}]_{|\vec{b}}=Q.[\vec{w}]_{|\vec{a}}$，均有 $v^i=\sum_k Q^i_k u^k$ 对于所有 i。

笛卡尔基： $dv^i.\vec{b}_j=d(\sum_k Q^i_k u^k).(\sum_\ell P^\ell_j\vec{a}_\ell)=\sum_{k\ell}Q^i_k(du^k.\vec{a}_\ell)P^\ell_j$，证毕（这里的 Q^i_k 是均匀的，即与 p 无关）。

坐标系基： $v^i=\sum_\lambda Q^i_\lambda u^\lambda$ 给出 $dv^i.\vec{b}_j=\sum_\lambda (dQ^i_\lambda.\vec{b}_j)u^\lambda+\sum_\lambda Q^i_\lambda(du^\lambda.\vec{b}_j)$；因此

$$v^i_{|j}\overset{(S.33)}{=}dv^i.\vec{b}_j+\sum_k v^k\gamma^i_{jk,b}$$
$$=\sum_{\lambda\mu}u^\lambda P^\mu_j(dQ^i_\lambda.\vec{a}_\mu)+\sum_{\lambda\mu}Q^i_\lambda P^\mu_j(du^\lambda.\vec{a}_\mu)+\sum_{k\lambda\mu\nu}(Q^k_\lambda u^\lambda)Q^i_\nu P^\mu_j(dP^\nu_k.\vec{a}_\mu)+\sum_{k\omega\lambda\mu\nu}(Q^k_\omega u^\omega)Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_k\gamma^\lambda_{\mu\nu,a}$$

并且 $Q^k_\omega P^\lambda_k=\delta^\lambda_\omega$ 给出 $(dQ^k_\omega.\vec{a}_\mu)P^\lambda_k+Q^k_\omega(dP^\lambda_k.\vec{a}_\mu)=0$，因此第三项为

$$\sum_{k\lambda\mu\nu}u^\lambda Q^i_\nu P^\mu_j Q^k_\lambda(dP^\nu_k.\vec{a}_\mu)=-\sum_{k\lambda\mu\nu}u^\lambda Q^i_\nu P^\mu_j P^\nu_k(dQ^k_\lambda.\vec{a}_\mu)=-\sum_{\lambda\mu}u^\lambda P^\mu_j(dQ^i_\lambda.\vec{a}_\mu),$$

它与第一项抵消：因此 $v^i_{|j}=\sum_{\lambda\mu}Q^i_\lambda P^\mu_j(du^\lambda.\vec{a}_\mu)+\sum_{\lambda\mu\nu}u^\nu Q^i_\lambda P^\mu_j\gamma^\lambda_{\mu\nu}=\sum_{\lambda\mu}Q^i_\lambda u^i_{|j}P^\mu_j$，即 (S.41)。 ∎

S.6 应用4：微分形式的微分

这里假设 $F=\mathbb{R},\Phi=$记作 $\ell\in\Omega^1(U)$（微分形式） $C^1,p\in U$，因此 $\ell(p)\in E^*$。其在 p沿方向 $\vec{u}$的微分为 $d\ell(p).\vec{u}=\lim_{h\to0}\frac{\ell_{(p+h\vec{u})}-\ell(p)}{h}\in E^*$.并且 $(d\ell(p).\vec{u}).\vec{v}=\lim_{h\to0}\frac{\ell_{(p+h\vec{u}).\vec{v}}-\ell_p.\vec{v}}{h}\in\mathbb{R}$()对所有 $\vec{u},\vec{v}\in E$均成立。

量化： $(\pi_{ei}(p)$是对偶基。

称 $\ell_i(p)$ 为 $\in\mathbb{R}$ $\ell(p)$ 的分量，即 $\ell(p)=\sum_{i=1}^n\ell_i(p)\pi_{ei}(p)$。并称 $\ell_{i|j}(p)$ 为 $d\ell(p)$ 的分量 $\in\mathcal{L}(E;E^*)$:

$$\ell=\sum_{i=1}^n\ell_i\pi_{ei},\quad d\ell.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\ell_{i|j}\pi_{ei},\quad [d\ell]_{|\vec{e}}=[\ell_{i|j}]. \tag{S.42}$$

用于缩并的张量记号：$d\ell=\sum_{i\ ,\ j=1}^n\ell_{i|j}\pi_{ei}\otimes\pi_{ej}$.

对偶记号：$\ell=\sum_i\ell_ie^i$、 $d\ell.\vec{e}_j=\sum_{i=1}^n\ell_{i|j}e^i$、 $[d\ell]_{|\vec{e}}=[\ell_{i|j}]$ 和 $d\ell=\sum_{i\ ,\ j=1}^n\ell_{i|j}e^i\otimes e^j$。**在笛卡尔基中：** 这里 $(\vec{e}_i)$ 是均匀的，因此

$$\ell_{i|j}=\frac{\partial\ell_i}{\partial x_j}(p)\overset{\text{noted}}{=}\ell_{i,j},\quad\text{so}\quad [d\ell]_{|\vec{e}}=[\frac{\partial\ell_i}{\partial x_j}]. \tag{S.43}$$

对偶记号： $\ell_{i|j}=d\ell_i.\vec{e}_j=\frac{\partial\ell_i}{\partial x^j}$ 和 $[d\ell]_{|\vec{e}}=[\frac{\partial\ell_i}{\partial x^j}]$。 ——

在坐标系基中： 使用对偶记号和克里斯托费尔符号:

$$\boxed{de^i.\vec{e}_j=-\sum_{k=1}^n\gamma^i_{jk}e^k}. \tag{S.44}$$

， $e^i.\vec{e}_k=\delta^i_k$ 给出 $(de^i.\vec{e}_j).\vec{e}_k+e^i.(d\vec{e}_k.\vec{e}_j)=0$，因此 $(de^i.\vec{e}_j).\vec{e}_k=-e^i.\sum_\ell\gamma^\ell_{jk}\vec{e}_\ell=-\gamma^i_{jk}$。Thus 确实

$$\boxed{\ell_{i|j}=\frac{\partial\ell_i}{\partial q^j}-\sum_{k=1}^n\ell_k\gamma^k_{ji}}\quad\text{where}\quad\frac{\partial\ell_i}{\partial q^j}(p):=d\ell_i(p).\vec{e}_i(p). \tag{S.45}$$

确实， $\ell=\sum_i\ell_ie^i$ 给出 $d\ell.\vec{e}_j=\sum_i(d\ell_i.\vec{e}_j)e^i+\sum_i\ell_i(de^i.\vec{e}_j)=\sum_i(d\ell_i.\vec{e}_j)e^i-\sum_{ik}\ell_i\gamma^i_{jk}e^k$。

S.7 应用 5：(1,1) 阶张量的微分

考虑一个 C^1 $\binom{1}{1}$张量 τ： $\left\{\begin{array}{l}U\to\mathcal{L}\\ p\to\tau\end{array}\right.(E^*,E;\ \mathbb{R})\ (p)\Big\}$。其微分 $d\tau$： $\left\{\begin{array}{l}U\to\mathcal{L}\\ p\to d\tau\end{array}\right.(E;\ \mathcal{L}(E^*,E;\ \mathbb{R}))\ (p)\Big\}$定义为 $d\tau(p).\vec{u}=\lim_{h\to0}\frac{\tau_{(p+h\vec{u})}-\tau(p)}{h}\in\mathcal{L}(E^*,E;\ \mathbb{R})$，因此 $(d\tau(p).\vec{u})(\ell,\vec{v})=\lim_{h\to0}\frac{\tau_{(p+h\vec{u})}(\ell,\vec{v})-\tau(p)(\ell,\vec{v})}{h}(\in\mathbb{R})$，对所有 $\vec{u}$、$\vec{v}\in E$ 和 $\ell\in E^*$均成立。

量化（对偶记号）：基（$\vec{e}_i$（p）） 位于 Eat p，对偶基（e^i（p）），称 τ^i_j（p）为 τ（p）的分量，称 $\tau^i_{j|k}$（p）为 $d\tau$（p）的分量：

$$\underline{\tau}=\sum_{ij}\tau_{ij}\vec{e}_i\otimes e^j,\quad\boxed{d\underline{\tau}.\vec{e}_k=\sum_{i,j=1}^n\tau^i_{j|k}\vec{e}_i\otimes e^j}. \tag{S.46}$$

张量记号，用于缩并： $d\tau=\sum_{i\ ,j,k=1}^n\tau^i_{j|k}\vec{e}_i\otimes e^j\otimes e^k$.

（经典 记号： $\tau=\underline{\underline{\sum_{ij}\tau_{ij}\vec{e}_i\otimes\pi_{ej}}}$、 $d\tau.\vec{e}_k=\sum_{ij}\tau_{ij|k}\vec{e}_i\otimes\pi_{ej}$ 和 $d\tau=\underline{\underline{\sum_{ijk}\tau_{ij|k}\vec{e}_i\otimes\pi_{ej}\otimes\pi_{ek}}}$.）

笛卡尔基： $d\tau\ (p)\ .\vec{e}_k = \sum_{ij}\ (d\tau^i_j\ (p)\ .\vec{e}_k)\ \vec{e}_i \otimes e^j$，所以

$$\tau^i_{j|k} = \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^k} \overset{\text{noted}}{=} \tau^i_{j,k} \quad (:= d\tau^i_j.\vec{e}_k). \tag{S.47}$$

坐标系基： $\tau(p) = \sum_{i,j=1}^n \tau^i_j(p)\vec{e}_i(p) \otimes e^j(p)$ 对所有 k,

$$\begin{aligned} d\tau.\vec{e}_k &= \sum_{ij}(d\tau^i_j.\vec{e}_k)\vec{e}_i \otimes e^j + \sum_{ij}\tau^i_j(d\vec{e}_i.\vec{e}_k) \otimes e^j + \sum_{ij}\tau^i_j\vec{e}_i \otimes (de^j.\vec{e}_k) \\ &= \sum_{ij}(d\tau^i_j.\vec{e}_k)\vec{e}_i \otimes e^j + \sum_{ij\ell}\tau^i_j\gamma^\ell_{ki}\vec{e}_\ell \otimes e^j - \sum_{ij\ell}\tau^i_j\gamma^j_{k\ell}\vec{e}_i \otimes e^\ell \\ &= \sum_{ij}(d\tau^i_j.\vec{e}_k)\vec{e}_i \otimes e^j + \sum_{ij\ell}\tau^\ell_j\gamma^i_{k\ell}\vec{e}_i \otimes e^j - \sum_{ij\ell}\tau^i_\ell\gamma^\ell_{kj}\vec{e}_i \otimes e^j \end{aligned} \tag{S.48}$$

thus

$$\boxed{\tau^i_{j|k} = \frac{\partial \tau^i_j}{\partial q^k} + \sum_{\ell=1}^n \tau^\ell_j\gamma^i_{k\ell} - \sum_{\ell=1}^n \tau^i_\ell\gamma^\ell_{kj}} \quad \text{where} \quad \frac{\partial \tau^i_j}{\partial q^k} := d\tau^i_j.\vec{e}_k. \tag{S.49}$$

（向量场带有 $+$ 符号，参见 (S.40)；微分形式带有 $-$ 符号，参见 (S.45)。）

练习 S.22 若 $\vec{u} \in E, \ell \in E^*$，则对于初等 $\binom{1}{1}$ 张量 $\tau = \vec{u} \otimes \ell$，证明：

$$d(\vec{u} \otimes \ell).\vec{e}_k = (d\vec{u}.\vec{e}_k) \otimes \ell + \vec{u} \otimes (d\ell.\vec{e}_k), \quad \text{and} \quad (\vec{u} \otimes \ell)^i_{j|k} = u^i_{|k}\ell_j + u^i\ell_{j|k}, \tag{S.50}$$

当 $\vec{u} = \sum_i u^i\vec{e}_i$, $\ell = \sum_j \ell_j e^j$, $d\vec{u}.\vec{e}_k = \sum_i u^i_{|k}\vec{e}_i$, $d\ell.\vec{e}_k = \sum_j \ell_{j|k}e^j$ 时。

答案. $\tau = \vec{u} \otimes \ell = \sum_{ij}\tau^i_j\vec{e}_i \otimes e^j$。其中 $\tau^i_j = u^i\ell_j$，且 $d\tau.\vec{e}_k = \sum_{i,j=1}^n \tau^i_{j|k}\vec{e}_i \otimes e^j$ 其中 $\tau^i_{j|k} = (u^i\ell_j)_{|k} = u^i_{|k}\ell_j + u^i\ell_{j|k} \equiv (\vec{u} \otimes \ell)^i_{j|k}$。因此（类似于乘积的推导）：

$$\begin{aligned} d(\vec{u} \otimes \ell)(p).\vec{e}_k(p) &= \lim_{h\to 0}\frac{(\vec{u} \otimes \ell)(p+h\vec{e}_k(p)) - (\vec{u} \otimes \ell)(p)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) \otimes \ell(p+h\vec{e}_k(p)) - \vec{u}(p) \otimes \ell(p)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) \otimes \ell(p+h\vec{e}_k(p)) - \vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) \otimes \ell(p)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) \otimes \ell(p) - \vec{u}(p) \otimes \ell(p)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(\vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) \otimes (\frac{\ell(p+h\vec{e}_k(p)) - \ell(p)}{h}) + \lim_{h\to 0}(\frac{\vec{u}(p+h\vec{e}_k(p)) - \vec{u}(p)}{h}) \otimes \ell(p) \\ &= \vec{u}(p) \otimes (d\ell(p).\vec{e}_k(p)) + (d\vec{u}(p).\vec{e}_k(p)) \otimes \ell(p), \end{aligned}$$

thus (S.50)$_1$。由此可得 $d(\vec{u} \otimes \ell).\vec{e}_k = (\sum_i u^i\vec{e}_i) \otimes (\sum_j \ell_{j|k}e^j) + (\sum_i u^i_{|k}\vec{e}_i) \otimes (\sum_j \ell_j e^j)$，因此 (S.50)$_2$。 ∎

S.8 向量场的散度：不变性

$\Gamma(U)$ 是 U 中的 C^1 向量场集合，$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(E; E) \to \mathbb{R}$ 是迹算子。

定义 S.23 散度算子定义为

$$\mathrm{div} := \mathrm{Tr} \circ d : \begin{cases} \Gamma(U) & \to C^0(U; \mathbb{R}) \\ \vec{w} & \to \mathrm{div}\vec{w} := \mathrm{Tr}(d\vec{w}), \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{div}\vec{w}(p) := \mathrm{Tr}(d\vec{w}(p)). \end{cases} \tag{S.51}$$

（因此 $\mathrm{div}\ \vec{w}(p)$ 是自同态 $d\vec{w}(p)$ 的迹。）

Tr 和 d 是线性的，因此 $\mathrm{div} = \mathrm{Tr} \circ d$ 是 $\mathbb{R}$-线性的（由两个 $\mathbb{R}$-线性映射复合而成）。

命题 S.24 向量场的散度是客观的（是不变的）：对所有观察者而言数值相同，是内禀于 $\vec{w}$ 的客观量。

证明。 微分和迹是客观的。（或者计算：$\vec{w} = \sum_i u^i\vec{a}_i = \sum_i v^i\vec{b}_i$ 得出 $v^i_{|j} = \sum_{k\ell} Q^i_k u^k_{|\ell} P^\ell_j$，见（S.41），因此 $\sum_i v^i_{|i} = \sum_{ik\ell} P^\ell_i Q^i_k u^k_{|\ell} = \sum_{k\ell}\delta^\ell_k u^k_{|\ell} = \sum_k u^k_{|k}$。） ∎

量化： $\vec{w} \in \Gamma(U)$，$(\vec{e}_i)$ 是一个基，$\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_i\vec{e}_i$ 采用经典记号，并且 $w_{i|j}(p)$ 是向量 $d\vec{w}(p).\vec{e}_j(p)$ 在基 $(\vec{e}_i(p))$ 中的分量。因此

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^n w_{i|i}}. \tag{S.52}$$

对偶记号：$\vec{w} = \sum_{i=1}^n w^i\vec{e}_i$，$d\vec{w}.\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n w^i_{|j}\vec{e}_i$，$[d\vec{w}]_{|\vec{e}} = [w^i_{|j}]$，散度 $\vec{w} = \sum_{i=1}^n w^i_{|i}$。

笛卡尔基 $(\vec{e}_i)$（经典记号）： $dw_i.\vec{e}_j =$记为 $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ 和 ——

$$w_{i|j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}, \quad \text{thus} \quad \mathrm{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \tag{S.53}$$

坐标系基 $(\vec{e}_i)$（对偶记号）：利用克里斯托费尔符号，参见 (S.33)，(S.40) 得到

$$w^i_{|i} = \frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^{n} w^k \gamma^i_{ik}, \quad \text{thus} \quad \mathrm{div}\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w^i}{\partial q^i} + \sum_{i,k=1}^{n} w^k \gamma^i_{ik}. \tag{S.54}$$

练习 S.25 证明:

$$\mathrm{div}(f\vec{w}) = df.\vec{w} + f\,\mathrm{div}\vec{w}. \tag{S.55}$$

答案。 $d(f\vec{w}) = \vec{w} \otimes df + f\,d\vec{w}$，因此 $\mathrm{Tr}(d(f\vec{w})) = \mathrm{Tr}(\vec{w} \otimes df) + \mathrm{Tr}(f\,d\vec{w}) = df.\vec{w} + f\mathrm{Tr}(d\vec{w})$。如果你愿意，可以使用坐标系。 ∎

注 S.26 如果 α 是一个微分形式，如果 $(\vec{e}_i)$ 是一个基，(e^i) 是它的对偶基，并且如果 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i$，那么 $d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i|j} e^i \otimes e^j$，其中 $\alpha_{i|j} := \vec{e}_i.d\alpha.\vec{e}_j$。无法像 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i|i}$ 那样为 $d\alpha$ 定义客观迹：结果取决于基的选择（不满足爱因斯坦求和约定；例如，使用欧几里得基时，结果取决于长度单位的选择：英尺？米？）。因此，微分形式的客观（或内禀）散度毫无意义。 ∎

S.9 二阶张量的客观散度

要为二阶 $\binom{1}{1}$ 张量 $\tau \in T^1_1(U)$ 定义客观散度，在 (S.46) 中，我们必须将一个 $\widetilde{\ }$ 可接受指标与“微分指标 k”缩并。因此别无选择：将 i 和 k 缩并，得到 $\mathrm{div}\tau := \sum_{i,j=1}^{n} \tau^i_{j|i} e^j$。我们从以下内容开始:

定义 S.27 设 $\vec{u} \in \Gamma(U)$ 和 $\ell \in \Omega^1(U)$ 为 C^1。初等 $\widetilde{\ }$ 张量 $\vec{u} \otimes \ell \in T^1_1(U)$ 的客观散度是微分形式 $\binom{1}{1}$ $\mathrm{div}(\vec{u} \otimes \ell) \in \Omega^1(U)$，定义为

$$\widetilde{\mathrm{div}}(\vec{u} \otimes \ell) = (\mathrm{div}\vec{u})\ell + d\ell.\vec{u}, \tag{S.56}$$

$\widetilde{\ }$ 即，对所有 $\vec{w} \in E$，定义为 $\mathrm{div}(\vec{u} \otimes \ell).\vec{w} = (\mathrm{div}\vec{u})(\ell.\vec{w}) + (d\ell.\vec{w})\vec{u}$。客观散度算子 $\widetilde{\mathrm{div}} : \begin{cases} T^1_1(U) \to \Omega^1(U) \\ \tau \rightrightarrows \widetilde{\mathrm{div}}\tau \end{cases}$ 是定义在初等张量上的线性映射，其定义见 (S.56)。

量化: $(\vec{e}_i)$ 是一组基，(e^i) 是其对偶基，$\vec{u} = \sum_i u^i \vec{e}_i$, $\ell = \sum_j \ell_j e^j$。因此 $\vec{u} \otimes \ell = \sum_{ij} u^i \ell_j \vec{e}_i \otimes e^j$，由 (S.50)-(S.56) 得

$$\widetilde{\mathrm{div}}(\vec{u} \otimes \ell) = \sum_{i,j=1}^{n} (u^i_{|i}\ell_j + \ell_{j|i}u^i) e^j. \tag{S.57}$$

$\widetilde{\ }$ 因此，对于初等张量 $\tau = \vec{u} \otimes \ell$, $\tau = \sum_{ij} \tau^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$，且 $d\tau.\vec{e}_k = \sum_{ijk} \tau^i_{j|k} \vec{e}_i \otimes e^j$ 和 $\mathrm{div}(\tau) = \sum_{ij} \tau^i_{j|i} e^i$，其中 $\tau^i_{j|k} = u^i_{|k}\ell_j + u^i\ell_{j|k}$，此处取 $\tau^i_j = u^i\ell_j$，且 $\tau^i_{j|k} = u^i_{|k}\ell_j + u^i\ell_{j|k}$，因此 $\tau^i_{j|i} = u^i_{|i}\ell_j + u^i\ell_{j|i}$。 $\widetilde{\ }$ 于是，根据 div 的线性性，对于所有张量 $\tau \in T^1_1(U)$，结合 (S.46)，有:

$$\boxed{\widetilde{\mathrm{div}}\underline{\underline{\tau}} = \sum_{i,j=1}^{n} \tau^i_{j|i} e^j}, \quad \text{i.e.} \quad [\widetilde{\mathrm{div}}\underline{\underline{\tau}}]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \sum_i \tau^i_{1|i} & \dots \sum_i \tau^i_{n|i} \end{pmatrix} \tag{S.58}$$

$\widetilde{\ }$ （行矩阵，因为散度 τ 是一个微分形式）。也就是说，我们在 (S.46) 中对 i 和 k 进行了缩并。

$\widetilde{\ }$ （经典记号：散度 $\tau := \sum_{i,j=1}^{n} \tau_{ij|i} \pi_{ej}$，即 [散度 $\tau]_{|\vec{e}} = \begin{pmatrix} \sum_i \tau_{i1|i} & \dots \sum_i \tau_{in|i} \end{pmatrix}$。）因此

$$\begin{aligned} &\text{Cartesian bases: } \widetilde{\mathrm{div}}\underline{\underline{\tau}} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^i} e^j, \\ &\text{Coord. sys. bases: } \widetilde{\mathrm{div}}\underline{\underline{\tau}} = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \tau^i_j}{\partial q^i} + \sum_{k=1}^{n} \tau^k_j \gamma^i_{ik} - \sum_{k=1}^{n} \tau^k_i \gamma^i_{kj} \Big) e^j. \end{aligned} \tag{S.59}$$

$\widetilde{\ }$ 确实如此：由 $\tau = \sum_j (\sum_i \tau^i_j \vec{e}_i) \otimes e^j = \sum_j \vec{w}_j \otimes e^j$ 其中 $\vec{w}_j = \sum_i \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^i} \vec{e}_i$，散度的线性性可得 $\widetilde{\ }$ 散度 $\tau = \sum_j$ $\widetilde{\ }$ 散度$(\vec{w}_j \otimes e^j)$；因此，由 (S.56) 得：1- 笛卡尔基：散度 $\vec{w}_j = \sum_i \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^i}$ 和 $de^j = 0$ 可得 $\widetilde{\ }$ 散度 $\tau =$ ——

$\sum_j \sum_i \frac{\partial \tau^i_j}{\partial x^i} e^j = \sum_{ij} \tau^i_{j,\ i} e^j$，因此 (S.59)$_1$；以及 2- 坐标系基：散度 $\vec{w}_j =^{(S.54)} \sum_i \frac{\partial \tau^i_j}{\partial q^i} + \sum_{ik} \underline{\tau^k_j} \gamma^i_{ik}$和 $de^j.\vec{w}_j = \sum_k \tau^k_j de^j.\vec{e}_k = \sum_k \tau^k_j(-\sum_i \gamma^j_{ki} e^i)$，因此 $\sum_j de^j.\vec{w}_j = -\sum_{ijk} \tau^k_j \gamma^j_{ki} e^i = -\sum_{ijk} \tau^k_i \gamma^i_{kj} e^j$，由此 (S.59)$_2$。

练习 S.28 证明：若 $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ 且 $\tau = \sum_{i,\ j=1}^n \tau^i_j \vec{e}_i \otimes e^j \in T^1_1(U) \cap C^1$ 则

$$\widetilde{\mathrm{div}}(f\underline{\tau}) = df.\underline{\tau} + f\,\widetilde{\mathrm{div}}\underline{\tau}. \tag{S.60}$$

答案。 $f\tau = \sum_{ij} f\tau^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$给出 $d(f\tau) = \sum_{ijk} (f\tau^i_j)_{|k} \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k = \sum_{ijk} (f_{|k}\tau^i_j + f\tau^i_{j|k}) \vec{e}_i \otimes e^j \otimes e^k$，因此 $\widetilde{\text{散度}}(f\tau) = \sum_{ij} (f_{|i}\tau^i_j + f\tau^i_{j|i}) e^j$；并且 $df.\underline{\tau} + f\,\widetilde{\text{散度}}\tau = \sum_{ij} f_{|i}\tau^i_j e^j + f\sum_{ij} \tau^i_{j|i} e^j$。 ∎

练习 S.29 证明：若 $\tau \in T^1_{\underline{1}}(U)$ 且 $\vec{w} \in \Gamma(U)$，则

$$\boxed{\mathrm{div}(\underline{\tau}.\vec{w}) = \widetilde{\mathrm{div}}(\underline{\tau}).\vec{w} + \underline{\tau} \,\overset{\cdot}{0}\, d\vec{w}}. \tag{S.61}$$

Answer。 $\tau = \sum_{ij} \tau^i_j \vec{e}_i \otimes e^j$和 $\vec{w} = \sum_i w^i \vec{e}_i$给出 $\tau.\vec{w} = \sum_{ij} \tau^i_j w^j \vec{e}_i$，因此 $\mathrm{div}(\tau.\vec{w}) = \sum_{ij} \tau^i_{j|i} w^j + \tau^i_j w^j_{|i}$。 ∎

练习 S.30 若 $\tau \in T^1_1(U)$，请通过分量计算验证（因为 $\mathrm{div}(\tau)$ 是客观的）：

$$[\widetilde{\mathrm{div}}(\underline{\tau})]_{|b} = [\widetilde{\mathrm{div}}(\underline{\tau})]_{|a}.P \quad \text{(covariance formula)}, \tag{S.62}$$

其中 P 是从基 $(\vec{a}_i)$ 到基 (b_i) 的过渡矩阵。

答案。设 $\tau = \sum_{ij} \sigma^i_j \vec{a}_i \otimes a^j = \sum_{ij} \tau^i_j \vec{b}_i \otimes b^j$，则 $\tau^i_j = \sum_{\lambda\mu} Q^i_\lambda \sigma^\lambda_\mu P^\mu_j$。

1- 笛卡尔基：$\sum_i \tau^i_{j|i} = \sum_i d\tau^i_j.\vec{b}_i = \sum_i d(\sum_{\lambda\mu} Q^i_\lambda \sigma^\lambda_\mu P^\mu_j)$。$(\sum_\nu P^\nu_i.\vec{a}_\nu) = \sum_{i\lambda\mu\nu} Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_i (d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\nu) = \sum_{\lambda\mu\nu} \delta^\nu_\lambda P^\mu_j\, d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\nu = \sum_{\lambda\mu} P^\mu_j\, d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\lambda = \sum_\mu \sum_\lambda \sigma^\lambda_{\mu|\lambda}\, P^\mu_j$ $(\ )(\ )(\ )$，如所需。

2- 坐标系基：$\sum_i \tau^i_{j|i} =^{(S.59)} \sum_i d\tau^i_j.\vec{e}_i + \sum_{i\ell} \tau^\ell_j \gamma^i_{i\ell,\ b} - \sum_{i\ell} \tau^i_\ell \gamma^\ell_{ij,\ b}$（其中 j固定）；With

$$\begin{aligned}
\sum_i (d\tau^i_j.\vec{b}_i) &= \sum_{i\lambda\mu} Q^i_\lambda\, (d\sigma^\lambda_\mu.\vec{b}_i)\, P^\mu_j + \sum_{i\lambda\mu} (dQ^i_\lambda.\vec{b}_i)\, \sigma^\lambda_\mu\, P^\mu_j + \sum_{i\lambda\mu} Q^i_\lambda\, \sigma^\lambda_\mu\, (dP^\mu_j.\vec{b}_i) \\
&= \sum_{i\lambda\mu\nu} Q^i_\lambda P^\mu_j P^\nu_i (d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\nu) + \sum_{i\lambda\mu\nu} \sigma^\lambda_\mu\, P^\mu_j P^\nu_i (dQ^i_\lambda.\vec{a}_\nu) + \sum_{i\lambda\mu\nu} \sigma^\lambda_\mu\, Q^i_\lambda P^\nu_i (dP^\mu_j.\vec{a}_\nu) \\
&= \sum_{\lambda\mu} P^\mu_j (d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\lambda) - \sum_{i\lambda\mu\nu} \sigma^\lambda_\mu\, P^\mu_j Q^i_\lambda (dP^\nu_i.\vec{a}_\nu) + \sum_{\lambda\mu} \sigma^\lambda_\mu\, (dP^\mu_j.\vec{a}_\lambda)
\end{aligned}$$

因为 $P^\nu_i Q^i_\lambda = \delta^\nu_\lambda$给出 $P^\nu_i (dQ^i_\lambda.\vec{a}_\nu) - Q^i_\lambda (dP^\nu_i.\vec{a}_\nu)$。并且，根据 (S.35),

$$\begin{aligned}
\sum_{i\ell} \tau^\ell_j \gamma^i_{i\ell,b} &= \sum_{i\ell} (\sum_{\lambda\mu} Q^\ell_\lambda \sigma^\lambda_\mu P^\mu_j)(\sum_{\alpha\beta\omega} Q^i_\alpha P^\beta_i P^\omega_\ell \gamma^\alpha_{\beta\omega,a} + \sum_{\alpha\beta} Q^i_\alpha P^\beta_i (dP^\alpha_\ell.\vec{a}_\beta)) \\
&= \sum_{\lambda\mu\alpha} \sigma^\lambda_\mu P^\mu_j \gamma^\alpha_{\alpha\lambda,a} + \sum_{\ell\lambda\mu\alpha} \sigma^\lambda_\mu Q^\ell_\lambda P^\mu_j (dP^\alpha_\ell.\vec{a}_\alpha),
\end{aligned} \tag{S.63}$$

and

$$\begin{aligned}
-\sum_{i\ell} \tau^i_\ell \gamma^\ell_{ij,b} &= -\sum_{i\ell} (\sum_{\lambda\mu} Q^i_\lambda \sigma^\lambda_\mu P^\mu_\ell)(\sum_{\alpha\beta\omega} P^\alpha_i P^\beta_j Q^\ell_\omega \gamma^\omega_{\alpha\beta,a} + \sum_{\alpha\omega} P^\alpha_i Q^\ell_\omega (dP^\omega_j.\vec{a}_\alpha)) \\
&= -\sum_{\lambda\mu\beta} \sigma^\lambda_\mu P^\beta_j \gamma^\mu_{\lambda\beta,a} - \sum_{\lambda\mu} \sigma^\lambda_\mu (dP^\mu_j.\vec{a}_\lambda).
\end{aligned} \tag{S.64}$$

因此 $\sum_i \tau^i_{j|i} = \sum_{\lambda\mu} P^\mu_j (d\sigma^\lambda_\mu.\vec{a}_\lambda) + \sum_{\lambda\mu\alpha} \sigma^\lambda_\mu P^\mu_j \gamma^\alpha_{\alpha\lambda,\ a} - \sum_{\lambda\mu\beta} \sigma^\lambda_\mu P^\beta_j \gamma^\mu_{\lambda\beta,\ a} = \sum_{\lambda\mu} P^\mu_j \sigma^\lambda_{\mu|\lambda}$ 如所期望。 ∎

S.9.1 二阶零张量的散度

设 $\tau \in T^2_0(U)$ 和 $\tau = \sum_{i,\ j=1}^n \tau^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$，因此 $d\tau = \sum_{i,\ j,\ k=1}^n \tau^{ij}_{\ \ |k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes e^k$；那么可以定义两个客观散度：将 k 与 i缩并，或将 k 与 j缩并。（此时满足爱因斯坦求和约定。）

S.9.2 0 2 阶张量的散度

设 $\tau = \sum_{i,\ j=1}^n \tau_{ij} e^i \otimes e^j \in T^0_2(U)$。因此 $d\tau = \sum_{i,\ j,\ k=1}^n \tau_{ij|k} e^i \otimes e^j \otimes e^k$，且没有可供缩并的指标来满足爱因斯坦求和约定：不存在（0,2）张量的客观散度。

S.10 欧几里得框架与张量的“经典散度”（主观）

设 $\underline{\underline{\sigma}}$ 是任意类型的二阶 C^1 张量。观察者选择一个（笛卡尔）欧几里得基 $(\vec{e}_i)$，并将 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 称为相应的欧几里得点积。他将 σ_{ij} 称为 σ 的分量，例如写作$\sigma.\vec{e}_j = \sum_i \sigma_{ij}\vec{e}_i$。

定义 S.31（经典力学中的通常散度。）相对于基（$\vec{e}_i$）的 σ 的散度 $\mathrm{div}\sigma$ 是列矩阵（不是向量）

$$\mathrm{div}_e\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x^j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x^j} \end{pmatrix} \overset{\text{noted}}{=} \mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} \quad \text{(a matrix)}. \tag{S.65}$$

(Ta取 $[\sigma]_{|e} = [\sigma_{ij}]$ 的“行向量”的散度，以构成“列向量” $[\mathbf{div}_e\sigma]$。）

命题 S.32 在（*S.67*）中所谓的“向量”$\mathrm{div}\sigma$并不是向量：它不满足基变换公式：如果（$\vec{a}_i$）和（$\vec{b}_i$）是基，如果 P 是从（$\vec{a}_i$）到（$\vec{b}_i$）的过渡矩阵，如果 $[\sigma]_{|\vec{a}} = [A_{ij}]$和 $[\sigma]_{|\vec{b}} = [B_{ij}]$分别是相对于（$\vec{a}_i$）和（$\vec{b}_i$）的 $\underline{\underline{\sigma}}$ 的散度，并分别记为$\mathrm{div}_a\sigma$ 和$\mathrm{div}_b\sigma$，那么一般而言，既不适用逆变基变换公式，也不适用协变基变换公式：

$$\textit{neither} \quad [\mathrm{div}_b\underline{\underline{\sigma}}]_{|\vec{b}} \neq P^{-1}.[\mathrm{div}_a\underline{\underline{\sigma}}]_{|\vec{a}} \quad \textit{nor} \quad [\mathrm{div}_b\underline{\underline{\sigma}}]^T_{|\vec{b}} = [\mathrm{div}_a\underline{\underline{\sigma}}]^T_{|\vec{a}}.P \tag{S.66}$$

（与（*S.62*）比较）。因此，（*S.67*）中给出的散度σ 既不是逆变向量，也不是协变向量（它只是一个依赖于观察者的矩阵）。

证明。考虑简单情形 $\vec{b}_i = \lambda\vec{a}_i$，对所有 i、$\lambda > 1$：过渡矩阵 $P = \lambda I$，以及 $P^{-1} = \frac{1}{\lambda}I$。

对于一个 $\binom{1}{1}$ 张量：$\sigma = \sum_{ij}(\sigma_b)^i_j\vec{b}_i \otimes b^j = \sum_{ij}(\sigma_a)^i_j\vec{a}_i \otimes a^j$，$[\sigma]_{|\vec{b}} = P^{-1}.[\sigma]_{|\vec{a}}.P = \frac{1}{\lambda}.[\sigma]_{|\vec{a}}.\lambda = [\sigma]_{|\vec{a}}$，即 $(\sigma_a)^i_j = (\sigma_b)^i_j$ 对所有 i, j。因此，（S.67）给出散度$_b\sigma = \sum_{ij}(d(\sigma_b)^i_j.\vec{b}_j)\vec{b}_i = \sum_{ij}(d(\sigma_a)^i_j.(\lambda\vec{a}_j))(\lambda\vec{a}_i) = \lambda^2$散度$_a\sigma$.因此 $[$散度$_b\sigma]_{|\vec{b}} \neq P^{-1}.[$散度$_b\sigma]_{|\vec{a}}$ 以及 $[$散度$_b\sigma]^T_{|\vec{b}} \neq [$散度$_a\sigma]^T_{|\vec{a}}.P$。

对于一个 $\binom{0}{2}$ 张量：$\sigma = \sum_{ij}\sigma_{b,ij}b^i \otimes b^j = \sum_{ij}\sigma_{a,ij}a^i \otimes a^j$，以及 $[\sigma]_{|\vec{b}} = P^T.[\sigma]_{|\vec{a}}.P = \lambda^2[\sigma]_{|\vec{a}}$，即$\sigma_{b,ij} = \lambda^2\sigma_{a,ij}$ 对所有 i, j。因此，(S.67) 给出散度$_b\sigma = \sum_{ij}(d\sigma_{b,ij}.\vec{b}_j)\vec{b}_i = \lambda^2\sum_{ij}(d\sigma_{a,ij}.(\lambda\vec{a}_j))(\lambda\vec{a}_i) = \lambda^4$散度$_a\sigma$.因此 $[$散度$_b\sigma]_{|\vec{b}} \neq P^{-1}.[$散度$_b\sigma]_{|\vec{a}}$ 以及 $[$散度$_b\sigma]^T_{|\vec{b}} \neq [$散度$_a\sigma]^T_{|\vec{a}}.P$。

对于一个 $\binom{2}{0}$ 张量：$\sigma = \sum_{ij}\sigma_b^{ij}\vec{b}_i \otimes \vec{b}_j = \sum_{ij}\sigma_a^{ij}\vec{a}_i \otimes \vec{a}_j$，且 $[\sigma]_{|\vec{b}} = P^{-T}.[\sigma]_{|\vec{a}}.P^{-1} = \frac{1}{\lambda^2}[\sigma]_{|\vec{a}}$，即$\sigma_b^{ij} = \frac{1}{\lambda^2}\sigma_a^{ij}$对于所有 i，j。因此 (S.67) 给出 散度$_b\sigma = \sum_{ij}(d\sigma_b^{ij}.\vec{b}_j)\vec{b}_i = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{ij}(d\sigma_a^{ij}.(\lambda\vec{a}_j))(\lambda\vec{a}_i)$ =散度$_a\sigma$.因此 $[$散度$_b\sigma]_{|\vec{b}} \neq P^{-1}.[$散度$_b\sigma]_{|\vec{a}}$ 且 $[$散度$_b\sigma]^T_{|\vec{b}} \neq [$散度$_a\sigma]^T_{|\vec{a}}.P$。∎

备注：(S.65) 可以写成

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{ij}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\vec{E}_i \tag{S.67}$$

其中，$(\vec{E}_i)$ 是 $\mathcal{M}_{n1}$ 列向量空间 $n*1$ 中的典范基。

T 自然典范同构

T.1 线性映射的伴随

§ A.12 的设定：E 和 F 是向量空间，$E^* = \mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ 和 $F^* = \mathcal{L}(F;\mathbb{R})$ 是它们的对偶空间，而线性映射 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;F)$ 的伴随是由下式典范定义的线性映射 $\mathcal{P}^* \in \mathcal{L}(F^*;E^*)$

$$\forall \ell \in F^*, \quad \mathcal{P}^*(\ell) := \ell \circ \mathcal{P}, \quad \text{written} \quad \mathcal{P}^*.\ell = \ell.\mathcal{P} \tag{T.1}$$

（点记号 $\mathcal{P}^*(\ell)$ =记作$\mathcal{P}^*.\ell$和 $\ell\circ\mathcal{P}$ =记作$\ell.\mathcal{P}$，因为 ℓ 和 $\mathcal{P}^*$ 是线性的），即，对于所有 $(\ell,\ \vec{u}) \in F^*\times E$，

$$\mathcal{P}^*(\ell)(\vec{u}) = \ell(\mathcal{P}(\vec{u})), \quad \text{written} \quad (\mathcal{P}^*.\ell).\vec{u} = \ell.\mathcal{P}.\vec{u}. \tag{T.2}$$

解释：如果 $\mathcal{P}$ 是向量场的推前，那么 $\mathcal{P}^*$ 就是微分形式的拉回，见注释 7.5。特别地，它将通过 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}_i(E;F)$ 来解释（线性且可逆的 $=$观察者变换）。

T.2 同构 $E \simeq E^*$ 永远不是自然的（永远不客观）

两个观察者 A 和 B 考虑一个线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\, E^*)$；令 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;E)$ 为观察者变换自同态。为了协同工作，A 和 B （“自然地”）考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E^* \\ \mathcal{P}\downarrow & & \uparrow\mathcal{P}^* \\ E & \xrightarrow[L]{} & E^* \end{array} \qquad \begin{array}{l} \leftarrow \text{considered by observer } A \\ \\ \leftarrow \text{considered by observer } B \end{array} \tag{T.3}$$

定义 T.1（Spivak [17]。）线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;E^*)$ 是自然的，当且仅当对于所有 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;E)$，图表 (T.3) 交换：

$$L \in \mathcal{L}(E;E^*) \text{ is natural} \iff \forall \mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;E),\ \mathcal{P}^* \circ L \circ \mathcal{P} = L. \tag{T.4}$$

（在这种情况下，如果 A 用图表上方那条线计算 $L.\vec{u}$，而 B 用下方那条线计算，那么他们很容易核对结果，因为这里 $L.\vec{u} = (\mathcal{P}^* \circ L \circ \mathcal{P}).\vec{u}$。）

问题： 是否存在一个自同态 L，使得对于所有观察者变换，图表 (T.3) 都交换？也就是说，我们是否有

$$\exists ? L \in \mathcal{L}(E;E),\ \forall \mathcal{P} \in \mathcal{L}_i(E;E),\quad \mathcal{P}^* \circ L \circ \mathcal{P} = L\ ? \tag{T.5}$$

答案： 始终不（若 $L \neq 0$）：

定理 em T.2 一个（非零）线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\, E^*)$ 不是自然的：若 $L \in \mathcal{L}(E;E^*) - \{0\}$，那么

$$\exists \mathcal{P} \in \mathcal{L}_i(E;E) \quad s.t. \quad L \neq \mathcal{P}^* \circ L \circ \mathcal{P}. \tag{T.6}$$

Pr明。（Spivak [17]。）只需证明该命题对 $E = \vec{\mathbb{R}}$ 成立。令 $L \in \mathcal{L}(\vec{\mathbb{R}};\, (\vec{\mathbb{R}})^*)$，$L \neq 0$.

令 $(\vec{a}_1)$ 为 $\vec{\mathbb{R}}$ 中的一个基（由 A 选取）。令 $(\vec{b}_1)$ 为 $\vec{\mathbb{R}}$ 中的一个基（由 B 选取）。

考虑由 $\mathcal{P}(\vec{a}_1) = \vec{b}_1$（观察者变换）定义的 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}_i(\vec{\mathbb{R}};\, \vec{\mathbb{R}})$，并令 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得 $\vec{b}_1 = \lambda \vec{a}_1$。那么 (T.1) 给出 $\mathcal{P}^*(\ell)(\vec{a}_1)$：$= \ell(\mathcal{P}(\vec{a}_1)) = \ell(\vec{b}_1) = \ell(\lambda \vec{a}_1) = \lambda \ell(\vec{a}_1)$，因此对所有 $\ell \in (\vec{\mathbb{R}})^*$，$\mathcal{P}^*(\ell) = \lambda \ell$。

因此，当 $\lambda^2 \neq 1$ 时，$\mathcal{P}^*(L(\mathcal{P}(\vec{a}_1))) = \mathcal{P}^*(L(\lambda \vec{a}_1)) = \lambda \mathcal{P}^*(L(\vec{a}_1)) = \lambda^2 L(\vec{a}_1) \neq L(\vec{a}_1)$。例如，$\mathcal{P} = 2I$ 给出 $L \neq \mathcal{P}^* \circ L \circ \mathcal{P} (= 4L)$，因此（T.6）：非零线性映射 $E \to E^*$ 不可能是自然的。 ∎

例 T.3 考虑 E，使得 $\dim E = 1$，并考虑线性映射 $L \in \mathcal{L}(E;\, E^*)$，它将一组基（$\vec{a}_1$）映射到其对偶基（$\pi_{a1}$），因此 L 由 $L.\vec{a}_1 := \pi_{a1}$ 定义。

问题：若（b_1）是另一组基，$\lambda \neq \pm 1$ 和 $b_1 = \lambda \vec{a}_1$（测量单位变换），那么 $L.b_1 = \pi_{b1}$ 吗？也就是说，L 也会将（b_1）映射到其对偶基吗？

答案：不是。事实上，$\vec{b}_1 = \lambda \vec{a}_1$ 给出 $\pi_{b1} = \frac{1}{\lambda}\pi_{a1}$，因此 $L.\vec{b}_1 = \lambda L.\vec{a}_1 = \lambda \pi_{a1} = \lambda^2 \pi_{b1} \neq \pi_{b1}$，因为 $\lambda^2 \neq 1$。换言之：L 不是自然的，参见 (T.6)。

另一种表述：设 L_A 和 L_B 由 $L_A.\vec{a}_j = \pi_{aj}$ 定义，并且对所有 j，都有 $L_B.b_j = \pi_{bj}$。再假设，对所有 j，都有 $\vec{b}_j = \lambda \vec{a}_j$。那么，当 $\lambda^2 \neq 1$ 时，$L_A.\vec{b}_j = \lambda L_A.\vec{a}_j = \lambda \pi_{aj} = \lambda^2 \pi_{bj} = \lambda^2 L_B.\vec{b}_j \neq L_B.\vec{b}_j$，也就是说，当 $\lambda^2 \neq 1$ 时，$L_A \neq L_B$：将一个基映到其对偶基的算子不是自然的。 ∎

例 T.4 设 $(\cdot,\ \cdot)_g$ 是 $E = \vec{\mathbb{R}}^n$ 上的一个内积。设 $\vec{R}_g \in \mathcal{L}(E^*;\, E)$ 为里斯表示映射，即由 $\vec{R}_g(\ell) = \vec{\ell}_g$ 定义，其中 $\vec{\ell}_g$ 由 $(\vec{\ell}_g,\ \vec{v})_g = \ell.\vec{v}$ 定义，对所有 $\vec{v} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ 均成立，参见 (F.3)。

问题：它是 R_g 自然的吗？

答案：不是。考虑图表 $\left(\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{R_g} & E \\ \mathcal{P}^*\downarrow & & \uparrow\mathcal{P} \\ E^* & \longrightarrow & E \end{array}\right)$，其中 $\mathcal{P} = \lambda I$、$\lambda \neq \pm 1$。那么 $\mathcal{P}^* = \lambda I$，并且 R_g

$\mathcal{P}.\vec{R}_g.\mathcal{P}^*.\ell = \lambda^2 \vec{R}_g.\ell \neq \vec{R}_g.\ell$ 给出 $\mathcal{P}.\vec{R}_g.\mathcal{P}^* \neq \vec{R}_g$：因此 $\vec{R}_g$ 不是自然的，参见 (T.6)。（你也可以考虑带有 $L = \vec{R}_g^{-1}$ 的图表 (T.3)。）

另一种表述：考虑两个不同的欧几里得点积 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$（例如，分别以英尺和米为单位构造）。因此 $(\cdot,\cdot)_h = \lambda^2 (\cdot,\cdot)_g$，其中 $\lambda^2 \neq 1$。令 $\vec{R}_g, \vec{R}_h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n*};\, \mathbb{R}^n)$ 为相对于 $(\cdot,\cdot)_g$ 和 $(\cdot,\cdot)_h$ 的里斯算子，也就是说，$\vec{R}_g.\ell = \vec{\ell}_g$ 和 $\vec{R}_h.\ell = \vec{\ell}_h$ 由 $\ell.\vec{v} = (\vec{\ell}_g, \vec{v})_g = (\vec{\ell}_h, \vec{v})_h$ 给出，对所有 $\vec{v} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ 均成立。由 (F.11) 可知 $\vec{\ell}_h = \lambda^2 \vec{\ell}_g$，因此 $\vec{R}_h = \lambda^2 \vec{R}_g \neq \vec{R}_g$，因为 $\lambda^2 \neq 1$：里斯表示算子并非自然的（它依赖观察者）。 ∎

T.3 自然典范同构 $E \simeq E^{**}$

两位观察者 A 和 B 考虑同一个线性映射 $L \in \mathcal{L}(E; E^{**})$（其中 $E^{**} = (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*; \mathbb{R})$）。他们希望合作，于是“自然地”考虑图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E^{**} \\ {\scriptstyle\mathcal{P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{P}^{**}} \\ E & \xrightarrow[L]{} & E^{**} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \leftarrow \text{considered by observer } A \\ \\ \leftarrow \text{considered by observer } B \end{array} \tag{T.7}$$

其中，$\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E; E)$ 是一个线性微分同胚，$\mathcal{P}^* \in \mathcal{L}(E^*; E^*)$ 是它的伴随，由 $\mathcal{P}^*(\ell) = \ell \circ \mathcal{P}$ 给出（参见 (T.1)）；而 $\mathcal{P}^{**} \in \mathcal{L}_i(E^{**}; E^{**})$ 是 $\mathcal{P}^*$ 的伴随，因此由 $\mathcal{P}^{**}(u) = u \circ \mathcal{P}^*$ 给出，对所有 $u \in E^{**}$ 均成立（参见 (T.1)），也就是说，$\mathcal{P}^{**}$ 对所有 $(\ell, u) \in E^* \times E^{**}$ 均由下式给出：

$$(\mathcal{P}^{**}(u))(\ell) = u(\ell \circ \mathcal{P}), \quad \text{i.e.} \quad (\mathcal{P}^{**}.u).\ell = u.(\ell.\mathcal{P}). \tag{T.8}$$

问题： 是否存在一个自然的线性映射 $L \in \mathcal{L}(E; E^{**})$?
答案： 是（下一个命题的一个特例）：

命题 T.5 典范同构

$$\mathcal{J}_E : \begin{cases} E \ \to E^{**} \\ \vec{u} \ \to u = \mathcal{J}_E(\vec{u}) \quad \textit{defined by} \quad \mathcal{J}_E(\vec{u})(\ell) := \ell.\vec{u}, \quad \forall \ell \in E^*, \end{cases} \tag{T.9}$$

是自然的，也就是说，F 是另一个有限维向量空间，图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{J}_E} & E^{**} \\ {\scriptstyle\mathcal{P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{P}^{**}} \\ F & \xrightarrow[\mathcal{J}_F]{} & F^{**} \end{array} \quad \textit{written} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathcal{J}} & E^{**} \\ {\scriptstyle\mathcal{P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{P}^{**}} \\ F & \xrightarrow[\mathcal{J}]{} & F^{**} \end{array} \tag{T.10}$$

对所有 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(E;\ F)$都交换，即

$$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{L}(E; F), \quad \mathcal{P}^{**} \circ \mathcal{J}_E = \mathcal{J}_F \circ \mathcal{P}, \quad \textit{and we write} \quad E \simeq E^{**}. \tag{T.11}$$

因此我们可以使用明确的记号（与观察者无关）

$$\mathcal{J}(\vec{u}) \overset{\text{noted}}{=} \vec{u}, \quad \textit{and} \quad \mathcal{J}(\vec{u}).\ell \overset{\text{noted}}{=} \vec{u}.\ell \quad (= \ell.\vec{u}). \tag{T.12}$$

（并且 $u = \mathcal{J}(\vec{u})$ 是沿方向 $\vec{u}$ 的导子。）

证明。 (Spivak [17].) 显然，$\mathcal{J}_E$ 是线性且为双射（E 是有限维的）：它是一个同构。于是，对于所有 $\ell \in F^*$ 和所有 $\vec{u} \in E$，$(\mathcal{P}^{**} \circ \mathcal{J}_E(\vec{u}))(\ell) \overset{(T.8)}{=} \mathcal{J}_E(\vec{u})(\ell.\mathcal{P}) \overset{(T.9)}{=} (\ell \circ \mathcal{P})(\vec{u}) = \ell(\mathcal{P}(\vec{u})) \overset{(T.9)}{=} \mathcal{J}_F(\mathcal{P}(\vec{u}))(\ell)$，因此，对于所有 $\vec{u} \in E$，$\mathcal{P}^{**} \circ \mathcal{J}_E(\vec{u}) = \mathcal{J}_F(\mathcal{P}(\vec{u}))$，所以 $\mathcal{P}^{**} \circ \mathcal{J}_E = \mathcal{J}_F \circ \mathcal{P}$。 ∎

命题 T.6 （$\mathcal{J}_E$的刻画。） $\mathcal{J}_E$ 将任意一组基$(\vec{a}_i)$ 映射为其双对偶基。（这是预期结果，因为 $\mathcal{J}_E(\vec{u})$ 是沿 $\vec{u}$ 方向的方向导数，无论 $\vec{u}$为何。）

证明。 设$(\vec{a}_i)$是一组基，(π_{ai})是其对偶基（定义为：对于所有 i, j，$\pi_{ai}.\vec{a}_j = \delta_{ij}$）。那么由（T.9）可得，对于所有 i, j，$\mathcal{J}_E(\vec{a}_j).\pi_{ai} = \pi_{ai}.\vec{a}_j = \delta_{ij}$，因此$(\mathcal{J}_E(\vec{a}_j))$是$(\pi_{ai})$的对偶基，即是$(\vec{a}_i)$的双对偶基；这对所有基均成立：对于所有 i, j，$\mathcal{J}_E(\vec{b}_j).\pi_{bi} = \pi_{bi}.\vec{b}_j = \delta_{ij}$。 ∎

T.4 自然典范同构 $\mathcal{L}(E;\ F) \simeq \mathcal{L}(F^*, E; \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(E^*;\ F$ $^*)$

E, F, A, B 是有限维向量空间。考虑典范同构

$$\mathcal{J}_{EF} : \begin{cases} \mathcal{L}(E; F) \ \to \mathcal{L}(F^*, E; \mathbb{R}) \\ \qquad L \ \to \widetilde{L} = \mathcal{J}_{EF}(L) \quad \text{where} \quad \widetilde{L}(\ell, \vec{u}) := \ell.L.\vec{u}, \quad \forall (\ell, \vec{u}) \in F^* \times E. \end{cases} \tag{T.13}$$

设 $\mathcal{P}_1\in\mathcal{L}_i(E;A)$ 和 $\mathcal{P}_2\in\mathcal{L}(F;B)$，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E;F) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{EF}} & \mathcal{L}(F^*,E;\mathbb{R})\\ \mathcal{I}_{\mathcal{P}}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}\\ \mathcal{L}(A;B) & \underset{\mathcal{J}_{AB}}{\longrightarrow} & \mathcal{L}(B^*,A;\mathbb{R})\end{array}\tag{T.14}$$

其中

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(L)=\mathcal{P}_2.L.\mathcal{P}_1^{-1}\quad\text{and}\quad\widetilde{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}(\widetilde{L})(b,\vec{a})=\widetilde{L}(b.\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a})\quad\forall(b,\vec{a})\in B^*\times A.\tag{T.15}$$

~($\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$和 $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$分别是线性映射 $L\in\mathcal{L}(E;F)$和双线性形式 $L\in\mathcal{L}(F^*,E;\mathbb{R})$的推前。)

命题 T.7 典范同构 $\mathcal{J}_{EF}$ 是自然的，也就是说，对于所有 $\mathcal{P}_1\in\mathcal{L}_i(E,A)$ 以及所有 $\mathcal{P}_2\in\mathcal{L}(F,B)$，图表 *(T.14)* 都交换：

$$\widetilde{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}\circ\mathcal{J}_{EF}=\mathcal{J}_{AB}\circ\mathcal{I}_{\mathcal{P}},\quad\text{and}\quad\mathcal{L}(E;F)\overset{natural}{\simeq}\mathcal{L}(F^*,E;\mathbb{R}).\tag{T.16}$$

因此 $\mathcal{L}(E^*;F^*)\overset{natural}{\simeq}\mathcal{L}(E;F)$。

证明。$\mathcal{J}_{AB}(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(L))(b,\vec{a})\overset{(T.13)}{=}b.\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(L).\vec{a}\overset{(T.15)}{=}b.(\mathcal{P}_2.L.\mathcal{P}_1^{-1}).\vec{a}=(b.\mathcal{P}_2).L.(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a})\overset{(T.13)}{=}\mathcal{J}_{EF}(L)(b.\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a})\overset{(T.15)}{=}\widetilde{\mathcal{I}_{\mathcal{P}}}(\mathcal{J}_{EF}(L))(b,\vec{a})$，对于所有 $L\in\mathcal{L}(E;F)$、$b\in B^*$、$\vec{a}\in A$ 都成立，因此有 (T.16)。

Thus $\mathcal{L}(E^*;F^*)\overset{(T.16)}{\simeq}\mathcal{L}((F^*)^*,E^*;\mathbb{R})\overset{(T.11)}{\simeq}\mathcal{L}(F,E^*;\mathbb{R})\overset{(T.16)}{\simeq}\mathcal{L}(E^{**};F)\overset{(T.11)}{\simeq}\mathcal{L}(E;F)$. ▪

考虑典范同构（定义双线性映射的转置）

$$\mathcal{K}_{EF}:\left\{\begin{array}{rl}\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})&\to\mathcal{L}(F,E;\mathbb{R})\\ T&\to\mathcal{K}_{EF}(T)\end{array}\right\},\quad\mathcal{K}_{EF}(T)(\vec{u},\vec{v}):=T(\vec{v},\vec{u}),\quad\forall(\vec{u},\vec{v})\in E\times F,\tag{T.17}$$

以及由 $Z_{AB}(T)(\vec{a},\vec{b}):=T(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a},\mathcal{P}_2^{-1}.\vec{b})$ 定义的 $Z_{AB}\in\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})\to\mathcal{L}(A,B;\mathbb{R})$，对所有 $(\vec{a},\vec{b})\in A\times B$ 均成立。

命题 T.8 典范同构 $\mathcal{K}_{EF}$ 是自然的：对所有 $(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)\in\mathcal{L}_i(E;A)\times\mathcal{L}(F;B)$，图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{K}_{EF}} & \mathcal{L}(F,E;\mathbb{R})\\ \downarrow & & \downarrow Z_{BA}\\ \mathcal{L}(A,B;\mathbb{R}) & \underset{\mathcal{K}_{AB}}{\longrightarrow} & \mathcal{L}(B,A;\mathbb{R})\end{array}$$

交换：$\mathcal{L}(E,F;\mathbb{R})\overset{natural}{\simeq}\mathcal{L}(F,E;\mathbb{R})$。

证明。$\mathcal{K}_{EF}(Z_{AB}(T))(\vec{b},\vec{a})=Z_{AB}(T)(\vec{a},\vec{b})=T(\mathcal{P}_2^{-1}.\vec{b},\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a})$，并且 $Z_{BA}(\mathcal{K}_{EF}(T))(\vec{a},\vec{b})=\mathcal{K}_{EF}(T)(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a},\mathcal{P}_2^{-1}.\vec{b})=T(\mathcal{P}_2^{-1}.\vec{b},\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a})$，因此 $\mathcal{K}_{AB}\circ Z_{AB}=Z_{BA}\circ\mathcal{K}_{EF}$。 ▪

T.5 Nat然典范同构 $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))\simeq\mathcal{L}(E,\ E;F)\simeq\mathcal{L}(F^*,\ E,\ E;\mathbb{R}$)

对于二阶导数 $d(d\vec{u})\simeq d^2\vec{u}$以及，在 $\vec{u}\in T_0^1(U)$ 的情况下，记号 $d\vec{u}\in T_1^1(U)$，那么 $d^2\vec{u}\in T_2^1(U)$，....., $d^k\vec{u}\in T_k^1(U)$，.....

考虑典范同构

$$\mathcal{J}_{12E}:\left\{\begin{array}{rl}\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))&\to\mathcal{L}(E,E;F)\\ T_1&\to T_2=\mathcal{J}_{12E}(T_1)\end{array}\right\},\quad\mathcal{J}_{12E}(T_1)(\vec{u}_1,\vec{u}_2):=T_1(\vec{u}_1).\vec{u}_2\in F,\quad\forall\vec{u}_1,\vec{u}_2\in E,\tag{T.18}$$

以及典范同构

$$\mathcal{J}_{23E}:\left\{\begin{array}{rl}\mathcal{L}(E,E;F)&\to\mathcal{L}(F^*,E,E;\mathbb{R})\\ T_2&\to\mathcal{J}_{23E}(T_2)=T_3\end{array}\right\},\quad T_3(\ell,\vec{u},\vec{v}):=\ell.T_2(\vec{u}_1,\vec{u}_2),\quad\forall\vec{u}_1,\vec{u}_2\in E,\ \forall\ell\in F^*.\tag{T.19}$$

命题 T。9 $\mathcal{J}_{12}$ 和 $\mathcal{J}_{23}$ 是自然的。因此，$\mathcal{J}_{23}\circ\mathcal{J}_{12}$ 是自然的。

证明。 1- 我们需要证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F)) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{12E}} & \mathcal{L}(E,E;F) \\ Z_{AB}\downarrow & & \downarrow Y_{AB} \\ \mathcal{L}(A;\mathcal{L}(A;B)) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{12A}} & \mathcal{L}(A,A;B) \end{array} \quad \text{where} \quad \begin{array}{l} Z_{AB}(T_1)(\vec{a}_1).\vec{a}_2 := T_1(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1).(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2), \\ Y_{AB}(T_2)(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = T_2(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2), \end{array} \tag{T.20}$$

（“推前”）对于所有 $\vec{a}_1,\vec{a}_2 \in A$ 和 $L_{AB} \in \mathcal{L}(A;\ B)$.
令 $T_1 \in \mathcal{L}(E;\ \mathcal{L}(E;\ F))$。我们有$\mathcal{J}_{12A}(Z_{AB}(T_1))(\vec{a}_1).\vec{a}_2 = Z_{AB}(T_1)(\vec{a}_1).\vec{a}_2 = T_1($
$\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1).(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2)$，并且 $Y_{AB}(\mathcal{J}_{12E}(T_1))(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = \mathcal{J}_{12E}(T_1)(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2) = T_1$
$(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1).(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2)$，因此 $\mathcal{J}_{12A}\circ Z_{AB} = Y_{AB}\circ\mathcal{J}_{12E}$，因此 $\mathcal{J}_{12}$ 是自然的。

2- 我们需要证明下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,E;F) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{23E}} & \mathcal{L}(F^*,E,E;\mathbb{R}) \\ Z_{AB}\downarrow & & \downarrow Y_{AB} \\ \mathcal{L}(A,A;B) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{23A}} & \mathcal{L}(B^*,A,A;\mathbb{R}) \end{array} \quad \text{where} \quad \begin{array}{l} \ell_B.Z_{AB}(T_2)(\vec{a}_1,\vec{a}_2) := (\ell_B.\mathcal{P}_2).T_2(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2), \\ Y_{AB}(T_3)(\ell_B,\vec{a}_1,\vec{a}_2) = T_3(\ell_B.\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2), \end{array} \tag{T.21}$$

(the “push-f 全部 ds) for a $\vec{a}_1,\vec{a}_2 \in A$ an 向前 $\ell_B \in B^*$
。设 $T_2 \in \mathcal{L}(E,E;\ F)$。我们有$\mathcal{J}_{23A}(\ell_B, Z_{AB}(T_2)(\vec{a}_1,\vec{a}_2)) = \ell_B.Z_{AB}(T_2)(\vec{a}_1,\vec{a}_2) = (\ell_B.\mathcal{P}_2)$
$.T_2(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2)$，并且$Y_{AB}(\mathcal{J}_{23A}(T_2))(\ell_B,\vec{a}_1,\vec{a}_2) = \mathcal{J}_{23A}(T_2)(\ell_B.\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2)$
$= \ell_B.\mathcal{P}_2.T_2(\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_1,\mathcal{P}_1^{-1}.\vec{a}_2)$，因此 $\mathcal{J}_{23A}\circ Z_{AB} = Y_{AB}\circ\mathcal{J}_{23E}$，故 $\mathcal{J}_{23}$ 是自然的。 ∎

U 分布简述：一种协变概念

完整的介绍请参阅 Laurent Schwartz 的书籍。在连续介质力学中，设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，对于有限能量函数的空间 L^2(Ω) 及其子空间，分布为虚功率提供了一种协变表述，正如 Germain 所采用的那样。

U.1 定义

通常记号：设 $p \in [1,\infty[$ （例如，有限能量函数的 $p=2$），并设

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(x)|^p\, d\Omega < \infty\} \quad \text{and} \quad ||f||_p = (\int_\Omega |f(x)|^p\, d\Omega)^{\frac{1}{p}}, \tag{U.1}$$

函数空间，其中 $|f|^p$ 勒贝格可积，且 $||.||_p$ 为其通常范数。则 (L^p(Ω) $||.||_{L^p}$) 是一个巴拿赫空间（完备赋范空间）。并设

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \sup_{x\in\Omega}(|f(x)|) < \infty\}, \quad \text{and} \quad ||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega}(|f(x)|), \tag{U.2}$$

勒贝格可测有界函数空间，且 $||.||_\infty$ 为其通常范数。则 (L^∞(Ω) $||.||_{L^\infty}$) 是一个巴拿赫空间（完备赋范空间）。

定义 U.1 若 $f \in \mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$，则其支集是集合

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x\in\Omega : f(x)\neq 0\}} = \text{the closure of } \{x\in\Omega : f(x)\neq 0\} \tag{U.3}$$

= 在该集合上，研究 f 才有意义。

必须取闭包：例如，若 Ω $=]0,\ 2\pi[$ 且对所有 $x\in\omega$，$f(x) = \sin x$，则 $\{x\in\Omega :\ f(x)\neq 0\} =]0,\ \pi[\cup]\pi,\ 2\pi[$；而点 π 是一个值得关注的点，因为 sin 在其附近会变化：$f'(\pi) = \cos(\pi) = -1 \neq 0$；因此，考虑的是闭包 supp($f$) $:=]0,\ \pi[\cup]\pi,\ 2\pi[= [0,2\pi]$。

定义 U.2 （施瓦茨记号，D 是 C之后的字母：）令

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}) \text{ s.t. supp}(\varphi) \text{ is compact in } \Omega\}. \tag{U.4}$$

例如，$\Omega = \mathbb{R}$, $\varphi(x) := e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ 若 $x \in]-1,1[$ 而 $\varphi(x) := 0$ 其他地方： $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$，且 $\mathrm{supp}(\varphi) = [-1,1]$。并且 $\mathcal{D}(\Omega)$ 是一个向量空间，对于任意 $p \in [1,\infty[$，它在 $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ 中稠密。

定义 U.3 Ω 中的分布是一个线性 $\mathcal{D}(\Omega)$-连续[3] 函数

$$T : \begin{cases} \mathcal{D}(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ \varphi & \to T(\varphi) \overset{\text{noted}}{=} \langle T, \varphi \rangle \end{cases} \tag{U.5}$$

Ω 中分布的空间记作 $\mathcal{D}'(\Omega)$（ $\mathcal{D}(\Omega)$ 的对偶空间）。

记号 $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\,\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \varphi \rangle$ 表示线性函数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 与向量 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 之间的“对偶配对” = “协变–逆变配对”。

定义 U.4 定义 设 $f \in L^p(\Omega)$。与 f 相关联的正则分布 $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 定义为

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, d\Omega, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{U.6}$$

So T_f是一个密度为 $dm_f(x) = f(x)\ d\Omega$ 的测量工具，即 $T_f(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x)\ dm_f(x)$。

定义 U.5 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。在 x_0 处的狄拉克测度是分布 T 记作$= \delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$，其定义为：对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0), \quad \text{i.e.} \quad \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0). \tag{U.7}$$

而且 δ_{x_0} 不是正则分布（δ_{x_0} 不是密度测度）：不存在可积函数 f使得 $T_f = \delta_{x_0}$。解释： δ_{x_0} 对应一个理想测量装置：在 x_0 处精度完美（在 x_0处给出精确值 $\varphi(x_0)$）。在现实中， δ_{x_0} 是 T_{f_n} 的理想近似，其中 f_n 例如由 $f_n(x) = n1_{[x_0, x_0+\frac{1}{n}]}$（绘图）给出：对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$， $T_{f_n}(\varphi) \longrightarrow_{n\to\infty} \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$。

定义的推广： 在 (U.5) 中， $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ 被 $C_c^\infty(\Omega;\vec{\mathbb{R}}^n)$ 取代。因此，若考虑一个基 $(\vec{e}_i)$，则 $\vec{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega;\vec{\mathbb{R}}^n)$ 表示为 $\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \varphi^i \vec{e}_i$ ，其中对于所有 i， $\varphi^i \in \mathcal{D}(\Omega)$。

例 U.6 功率：设 $\alpha : \Omega \to T_1^0(\Omega)$ 为一个微分形式。则由 $P(\vec{v}) = \int_\Omega \alpha.\vec{v}\, d\Omega$ 定义的 $P = T_\alpha$ 给出了与向量场 $\vec{v}$ 相关的虚功率（力学和热力学）。

U.2 分布的导数

设 O 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一点（一个原点）。若 $p \in \mathbb{R}^n$，且 $(\vec{e}_i)$ 是 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中的一个基，令 $\vec{x} = \overrightarrow{Op} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$。

定义 U.7 分布 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 的导数$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 是分布 $\in \mathcal{D}'(\Omega)$，其定义如下：对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}(\varphi) := -T(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}), \quad \text{i.e.} \quad \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle := -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle. \tag{U.8}$$

（$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 确实是一个分布：容易验证。）

例 U.8 若 $T = T_f$ 是正则分布，且 $f \in C^1(\Omega)$，则 $\partial(T_f)/\partial x_i = T_{(\frac{\partial f}{\partial x_i})}$。事实上，对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$， $\partial(T_f)/\partial x_i(\varphi) = -T_f(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d\Omega = +\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi(x)\, d\Omega + \int_\Gamma 0\, d\Gamma$，因为 φ 在 $\Gamma = \partial\Omega$ 上消失（ φ 的支集是 Ω 中的紧集），因此对所有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$， $\partial(T_f)/\partial x_i(\varphi) = T_{(\frac{\partial f}{\partial x_i})}(\varphi)$。

例 U.9 考虑 Heaviside 函数（单位阶跃函数） $H_0 := 1_{\mathbb{R}_+}$ 及其对应的分布 T_{H_0}。那么 $\langle (T_{H_0})', \varphi \rangle := -\langle T_{H_0}, \varphi' \rangle = -\int_\Omega H_0 \langle \delta_0, \varphi \rangle$ $\varphi \in \mathcal{D}$ $\mathbb{R}$ $T_{H_0}{}' = \delta_0$ $H_0' = \delta_0$ $\mathcal{D}'$ $)\varphi'(\ )$

$dx = -\int_0^\infty \varphi'(\ )\ dx = \varphi(0)$ 对任意 $(\ )$ 均成立，因此 $(\ )$。写成 (Ω) 中的等式时，它并非函数之间的等式，因为 H_0 作为函数在 0 处不可导，而 δ_0 不是函数；这是分布之间的等式：记号 H_0' 只能用于计算 $H_0'(\varphi)$ $(= \langle H_0', \varphi \rangle := -\langle H_0, \varphi' \rangle)$。

[3] $\mathcal{D}(\Omega)$ 中 T 的连续性定义如下：1- 序列 $(\varphi_n)_{\mathbb{N}^*}$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中向函数 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 收敛于 $\mathcal{D}(\Omega)$，当且仅当存在紧集 $K \subset \Omega$，使得对所有 n，$\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$；并且对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和所有 i_j， $\| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} - \frac{\partial^k \varphi_n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$；2- T 在 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ 上连续，当且仅当对于任意序列 $(\varphi_n)_{\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ 在 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中， $T(\varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$。

U.3 希尔伯特空间 $H^1(\Omega)$

U.3.1 动机

考虑帽函数 $\Lambda(x)\begin{cases} = x+1 \\ \text{若 } x\in[-1,0], = 1-x \\ \text{若 } x\in[0,1], = 0 \\ \text{否则} \end{cases}$ (

图示)。应用有限元方法时，众所周知，如果使用积分（如果使用虚功率原理，即需要计算平均值），那么可以将帽函数 Λ 的导数视为通常意义下的导数，也就是说，在通常计算 Λ' 有意义的点处，即

$$\Lambda'(x)\begin{cases} = 1 \text{ if } x\in]-1,0[, \\ = -1 \text{ if } x\in]0,1[, \\ = 0 \text{ if } x\in\mathbb{R}-\{-1,0,1\} \end{cases} \tag{U.9}$$

（图示）。

问题： Λ' 在 -1，0，1处未定义（函数 Λ 在 -1，0，1处不可导）；

问题： 那么，使用（U.9）进行“常规”计算 $I=\int_{\mathbb{R}}\Lambda'(x)\varphi(x)\,dx$ 能得到正确结果吗？（这并非一个简单的问题：例如，如果用 $H_0=1_{\mathbb{R}_+}$ 代替 Λ，我们就会得到荒谬的结果 $H_0'=0$，之所以荒谬，是因为 $H_0'=\delta_0$。）

答案： 是：

1- 考虑与 Λ 相关联的正则分布 T_Λ，参见 (U.6)；2- 然后考虑 $(T_\Lambda)'$，参见 (U.8)：我们得到 $\langle (T_\Lambda)', \varphi\rangle \overset{U.8}{=} -\langle T_\Lambda,\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}}\Lambda)(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0}\Lambda(x)\varphi'(x)\,dx - \int_0^1\Lambda(x)\varphi'(x)\,dx = +\int_{-1}^{0}1_{]-1,0[}(x)\varphi(x)\,dx + \int_0^1 1_{]0,1[}\varphi(x)\,dx$，对任意 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$；3- 因此 $(T_\Lambda)'=T_f$，其中 $f=1_{]-1,0[}+1_{]0,1[}$，也就是说 $(T_\Lambda)'$ 是一个正则分布。在分布框架中，它被命名为 $f=\Lambda'$，即对于计算 $\langle\Lambda',\varphi\rangle := \langle (T_\Lambda)', \text{其中 } \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$（值为 $=\int_{\mathbb{R}}f(x)\varphi(x)\,dx$）。

U.3.2 $H^1(\Omega)$的定义

在许多应用中，空间 $C^1(\Omega;\mathbb{R})$ 太小了（例如，对于上面的 Λ 函数）；我们需要一个更大的空间，其中函数可以以“较弱的意义”求导，也就是在分布意义下求导。考虑 $\mathbb{R}^n$中的一个基：

定义 U.10 Sobolev空间 $H^1(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的子空间，由广义导数属于 $L^2(\Omega)$的函数构成：

$$H^1(\Omega)=\{v\in L^2(\Omega):\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\ \forall i=1,...,n\}. \tag{U.10}$$

常用简写记法：$H^1(\Omega)=\{v\in L^2(\Omega):\vec{\text{grad}}v\in L^2(\Omega)^n\}$。

因此，要检验 $v\in H^1(\Omega)$，即使 $\frac{\partial v}{\partial x_i}$不存在经典意义下的导数（见上面的帽函数 Λ），你需要：

1- 考虑其对应的正则分布 T_v，2- 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中计算 $\frac{\partial T_v}{\partial x_i}$，3- 并且如果对于所有 i，都存在 $f_i\in L^2(\Omega)$，使得 $\frac{\partial T_v}{\partial x_i}=T_{f_i}$，那么 $v\in H^1(\Omega)$。

4- 然后，在 Lebesgue积分中使用时，将 f_i记作 $\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}$，其中 $\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx$，$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$。例如，$\Lambda\in H^1(\mathbb{R})$，因为 $(T_\Lambda)'=T_f$，其中 $f=1_{]-1,0[}+1_{]0,1[}\in L^2(\mathbb{R})$；而 $(T_\Lambda)'=$记作$\Lambda'(=f)$，用于分布语境（积分计算）中。

令 $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ 和 $||.||_{L^2}$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 中通常的内积和范数，即

$$(u,v)_{L^2}=\int_\Omega u(x)v(x)\,d\Omega,\quad \text{and}\quad ||v||_{L^2}=\sqrt{(v,v)_{L^2}}=(\int_\Omega v(x)^2\,d\Omega)^{\frac{1}{2}}. \tag{U.11}$$

$(L^2(\Omega),(\cdot,\cdot)_{L^2})$ 是一个希尔伯特空间。于是，对所有 $u,v\in H^1(\Omega)$，定义

$$(u,v)_{H^1}=(u,v)_{L^2}+\sum_{i=1}^n(\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2},\quad \text{and}\quad ||v||_{H^1}=(v,v)_{H^1}^{\frac{1}{2}}. \tag{U.12}$$

那么 $(H^1(\Omega),(\cdot,\cdot)_{H^1})$ 是一个希尔伯特空间（Riesz–Fisher定理）。

在 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中，配备欧几里得点积 $(\cdot,\ \cdot)_g$，并取 $(\cdot,\ \cdot)_g$-正交归一基，

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (\vec{\text{grad}}u, \vec{\text{grad}}v)_{L^2}. \tag{U.13}$$

U.3.3 子空间 $H_0^1(\Omega)$ 及其对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$

假设 Ω 的边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 是正则的。令

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v_{|\Gamma} = 0\}. \tag{U.14}$$

那么 $(H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1})$ 是一个希尔伯特空间。

更一般地（不对 Γ 作任何正则性假设），$H_0^1(\Omega) := \mathcal{D}(\Omega)^{H^1} = \mathcal{D}(\Omega)$ 在 $(H^1(\Omega)\ ||.||_{H^1})$ 中的闭包：$\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的这个闭包使得可以使用分布框架。

记号：$H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间是空间

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))' = \mathcal{L}(H_0^1(\Omega);\mathbb{R}) \tag{U.15}$$

配备 了（通常的）范数 $||T||_{H^{-1}} := \sup|T(v)|$。并且（对偶配对），如果 $v \in H_0^1(\Omega)$ 是 $^{||v||_{H_0^1}=1}$ d

$T \in H^{-1}(\Omega)$，那么

$$T(v) \overset{\text{noted}}{=} \langle T, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \overset{\text{noted}}{=} \langle T, v\rangle. \tag{U.16}$$

定理 **定理 U.11** （ $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$。）一个分布 T 属于 $H^{-1}(\Omega)$ 当且仅当

$$\exists (f,\vec{g}) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)^n \quad s.t. \quad T = f - \text{div}\vec{g}\ \ (\in \mathcal{D}'(\Omega)), \tag{U.17}$$

也就是说，对所有 $v \in H_0^1(\Omega)$，

$$\langle T, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega f v\, d\Omega + \int_\Omega dv.\vec{g}\, d\Omega. \tag{U.18}$$

并且，如果Ω 有界，那么我们可以选择 $f = 0$。此外，若 $\vec{g} \in H^1(\Omega)^n$，则

$$\langle T, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \text{div}\vec{g}(x)v(x)\,dx. \tag{U.19}$$

（事实上，我们只需要 $\vec{g} \in H_{\text{div}}(\Omega) = \{\vec{g} \in L^2(\Omega)^n : \text{散度}\vec{g} \in L^2(\Omega)\}$。）

证明。例如，参见 Brezis [4]。 ∎

对于具有诺伊曼边界条件的边值问题，我们接下来需要 $(H^1(\Omega))'$ $H^1(\Omega)$ 的对偶空间。$(H^1(\Omega))'$ 的刻画：我们仍有 (U.18)，但必须用下式替换 (U.17) 或 (U.19)，其中在 $\vec{\mathbb{R}}^n$ 中使用欧几里得点积，参见 Brezis [4],

$$\langle T, v\rangle_{(H^1)',H^1} = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx - \int_\Omega \text{div}\vec{g}(x)v(x)\,dx + \int_\Gamma \vec{g}(x)\bullet\vec{n}(x)\,v(x)\,dx. \tag{U.20}$$

参考文献

[1] Abraham R., Marsden J.E.: 力学基础，第二版. Addison-Wesley, 1985.[2] Arnold V.I.: 常微分方程. Editions Mir, 1974.[3] Arnold V.I.: 经典力学的数学方法. 第二版，Springer，1989.[4] Brézis H.: 泛函分析、索博列夫空间与偏微分方程. Springer, 2011.[5] Cartan H.: 微分形式. Hermann 1967.[6] Cartan H.: 微分学课程. Hermann 1990.[7]Forest 等：连续介质力学。巴黎矿业学院。2020。http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/poly/MMC2020web.pdf[8] Germain P.: 连续介质力学课程。第一卷：一般理论. Masson. Paris. 1973.[9] Germain P.: 连续介质力学中的虚功率法。第二部分：微观结构。《SIAM应用数学杂志》，第25卷，第3期（1973年11月），第556–575页。[10] Hughes T.J.R., Marsden J.E.: 流体力学简明课程。Publish or Perish, 1976.[11] Le Dret Hervé: 弹性力学中的数学方法，*DEA*课程讲义，*2003–2004*。皮埃尔与玛丽·居里大学。[12] Marsden J.E., Hughes T.J.R.: 弹性力学的数学基础. 多佛出版社，1993.[13] 麦克斯韦：《电磁学论》，克拉伦登出版社丛书，1873年。[14] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.: 引力. W.H. Freeman and Cie, 1973[15]Petropoulos M.: 广义相对论。一课半讲引力。https://gargantua.polytechnique.fr/siatel-web/linkto/mICYYYTEsNY[16] Sadd Martin H.: 弹性：理论、应用与数值方法. 爱思唯尔，2005.[17] Spivak M.: 微分几何综合导论，第一卷. Publish or Perish, Inc. 1979.[18] Strang G.: 线性代数引言. 第5版。Wellesley - Cambridge Press 2016.[19] Truesdell C., Noll W.: 力学非线性场论. Springer, 2004.[20] http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/force-de-coriolis.xml, 2018.