arXiv:2301.01066v1 [math.NA] 3 Jan 2023

关于热方程 Crank-Nicolson格式正性与压缩性的新见解*

I. Higueras[1], T. Roldán[1]

[1]纳瓦拉公立大学先进材料与数学研究所 电子邮件:
higueras@unavarra.es, teo@unavarra.es。

摘要

本文研究 Crank-Nicolson 方法应用于具有齐次狄利克雷边界条件的扩散方程时的数值正性及其在无穷范数下的压缩性。为此，我们用三类类切比雪夫多项式表示放大矩阵，并得到了保持所需定性性质的必要且充分的界。对于每个空间网格，我们给出需要求解的方程以及包含这些界的区间；因此，可以通过二分法轻松求得这些界。此外，本文着重指出了数值正性与压缩性之间的差异。文献中也有其他作者研究过这一问题，我们的研究重现了一些已知结果。本文的方法为该问题提供了新的见解，补充了现有研究全貌，也可用于研究其他问题的定性性质。

关键词：正性、最大范数压缩性、单调性、*Crank-Nicolson*、热方程

1 引言

我们研究一维热方程的数值解

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,, \quad x \in [0,1],\, t \geq 0\,, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in [0,1]\,. \tag{1.3}$$

其中，(1.3) 中的 u_0 是定义在 $[0,1]$ 上的给定函数。为简便起见，本文后续部分考虑扩散项 $d = 1$ 。线性抛物型方程的解 $u(x,\ t)$

*研究项目 PID2019-109045GB-C31 由西班牙国家研究署科学与创新部资助。

问题 (1.1)-(1.3) 具有若干与物理模型相关的定性性质。特别是，该问题保持正性，即对于 $t \geq 0$,

$$u_0(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,t) \geq 0\,, \tag{2}$$

且解随时间单调递减，即对于 $t_2 \geq t_1 \geq 0$,

$$\max_{0\leq x\leq 1} |u(t_2,x)| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |u(t_1,x)|\,. \tag{3}$$

为了获得具有物理意义的数值近似，离散化过程中应保持性质 (2)–(3)。本文考虑 Crank-Nicolson (CN) 方法，这是一种线法方法：先在空间上采用二阶中心有限差分，再采用二阶时间步进方法。对 (1.1)–(1.3) 进行空间离散，采用二阶中心有限差分和网格宽度 $h = 1/(m+1)$，可得到如下形式的半离散线性微分系统

$$w'(t) = B_h w(t)\,, \qquad w(0) = w_0\,, t \geq 0\,, \tag{4}$$

其中， B_h 是一个维数为 m的矩阵，具有保持正性的性质，且其解单调递减（按最大范数衡量）（详情见第2节）。接下来，采用一种时间步进方法得到数值近似 $w_n \approx w(t_n)$, 其中 $t_n = n\tau$，而 τ 是所用的恒定时间步长。本文考虑如下形式的近似

$$w_n = A_m\, w_{n-1}\,, n \geq 0\,, \tag{5}$$

其中， w_0 是一个已知值， A_m 是一个维数为 m 的矩阵，其取决于时间步进方法。特别地，对于Runge-Kutta方法， $A_m = \phi(\tau B_h)$，其中 ϕ 是该格式的稳定函数。

关于正性和单调递减时间步进格式的分析已有大量参考文献（例如，参见 [21, 26, 14, 16, 11, 4, 8, 12, 2, 6, 18]；另见 [26, 6, 13]及其中的参考文献）。根据具体背景，单调递减方法也称为压缩的、SSP（强稳定性保持）或TVD（总变差递减）格式（例如，参见 [23, 21, 14, 8, 4, 6]）。在这种情况下，可以得到如下形式的步长限制

$$\tau \leq C\,\tau_{_{FE}}\,, \tag{6}$$

其中， C 表示该时间步进方法的单调性阈值因子（也称为SSP-系数、绝对单调半径、压缩半径等）（例如，参见[15, 27, 5, 23, 4]）， $\tau_{_{FE}}$ 表示使用前向Euler格式求解特定常微分方程问题时，给定定性性质所对应的步长限制（例如，参见 [23, 第 379], [8, 页、第 201], [6, 页，第52—53]页）。特别地，对于问题（4），对于正性和压缩性，均有 $\tau_{_{FE}} = h^2/2$（例如，参见 [26, 第 22]页）；对于前向欧拉法，有 $C = 1$ （详见第2节）。注意，采用这种方法时，步长限制（6）对于具有相同 $\tau_{_{FE}}$ 的所有线性系统都是相同的，并且对于某些问题而言，这并不是一个尖锐界。

一种广为人知的时间步进方法是 θ方法，其定义为

$$w_n = (I - \theta\tau B_h)^{-1}(I + (1-\theta)\tau B_h) w_{n-1}\,, \qquad \theta \in [0,1]\,. \tag{7}$$

注意，此方法可理解为先采用前向欧拉法进行$(1-\theta)\tau$步，再采用后向欧拉格式进行 $\theta\tau$步的复合方法。特别地，当$\theta = 1/2$时，可得到克兰克–尼科尔森格式。将 θ方法应用于线性问题时，其绝对单调半径为 $C_\theta = 1/(1-\theta)$ [9]。因此，在以下限制条件下，可以保证数值正性和压缩性（见 [26,第 135]页）

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2(1-\theta)}\,.$$

然而，若仔细考察式 (7) 中的迭代矩阵 A_m ，可以得到更精确的界。不同作者研究了采用 θ方法求解问题 (1.1)-(1.3) 时正性和单调性的数值保持（例如，参见 [16, 11, 2]）。在 [2, 第 72], 页，作者证明数值解为正当且仅当

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1-\sqrt{1-\theta}}{\theta(1-\theta)}\,, \tag{8}$$

而在 [16, 注 7.1] 和 [11, 第 456]页中，则证明了数值解为压缩的当且仅当

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{2-\theta}{4(1-\theta)^2}\,. \tag{9}$$

下文中，我们用 $s = \tau/h^2$ 表示 CFL 系数。 [16] 中的压缩性结果是针对纯初值问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = d\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R},\, t \ge 0\,,\\ &u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

特别地，压缩性的界 (9) 对所有 $m \ge 1$ [16, 定理 4.1] [11]均成立。界 $\tau/h^2 \le 2/3$ 也已在 [3, 定理 1] 中通过分析 CN方法的稳定性得到。在 [2] 和 [11] 中，相关结果基于维数为 m的逆矩阵 $(I-\theta\tau B_h)^{-1}$ 的形状，其矩阵元素可用双曲函数 [20]表示；针对 m的每个取值都得到了步长限制，且界 (9) 对所有 m均成立。

本文的贡献

本文采用的方法是将式 (5) 中 CN方法的迭代矩阵A_m 表示为三类多项式 $P_n(x)$、 $C_n(x)$ 和 $U_n(x)$；这三类多项式分别由迭代式 (26)、(28) 和 (33) 定义。特别地， $U_n(x)$ 是第二类切比雪夫多项式。在这三种情况下，迭代过程相同，但采用了不同的初始值。这一形式体系为该问题提供了新的见解，使我们能够改进文献中的一些结果。

本文的贡献如下。关于正性，对于任意数量的网格点 m，我们得到：

1. Crank-Nicolson 方法当且仅当 $s = \tau/h^2 \in (0,\ s_m^{(p)}]$，且 $s_m^{(p)}$ =1/(双曲余弦 $\omega_m^{(p)} - 1$) 时为正，其中 $\omega_m^{(p)}$是方程 (18) 的唯一正根。该根

位于窄区间 (对数$(2+\sqrt{2})$，对数$(2+\sqrt{3})] \approx (1.22795,\ 1.31696]$) 内。因此，通过使用二分法求解 (18)，即可轻松计算 $\omega_m^{(p)}$。命题 2 展示了界 $s_m^{(p)}$与多项式 $P_n(x)$ 之间的联系。表 1 列出了一些 $s_m^{(p)}$的值。

2. 界序列 $(s_m^{(p)})$ 严格单调递增，且所有项均位于区间 $[1, 2(2-\sqrt{2}))$。因此，细化空间网格（保持 s 不变）时，CN方法不保持正性。

3. 在极限情形下，当 m 趋于无穷大时，我们得到已知的正性界 $s \lesssim 1.17$（[13, 第 126],[2, 表）。

关于压缩性，对于任意数量的网格点 m （见图 3），我们计算了$\|A_m(s)\|_\infty$ 的值，并得到：

1. Crank-Nicolson 方法是压缩的，当且仅当 $s = \tau/h^2 \in (0, s_m^{(c)}]$，其中$s_m^{(c)} = \infty$ 适用于 $m = 1,2,3$。对于 $m \geq 4$，$s_m^{(c)} = 1/(双曲余弦\ \omega_m^{(c)} - 1)$，其中 $\omega_m^{(c)}$是方程 (21) 或 (22) 的唯一正根，具体取决于m的奇偶性。此根位于区间 $[对数\ ((3+\sqrt{5+\sqrt{-2+6\sqrt{5}}})/4), 对数\ 3) \approx (0.767197, 1.09861]$。因此，通过二分法求解 (21) 或 (22)，即可轻松计算出 $\omega_m^{(c)}$。表 2 和表 3 分别列出了 m为奇数和偶数时 $s_m^{(p)}$ 的一些取值。其中一些取值也可见图 3。

2. $\|A_m(s)\|_\infty < 1$ 对于 $s \in (0, s_m^{(c)})$ 和 $\|A_m(s_m^{(c)})\|_\infty = 1$ （见图 3），这与线性系统 (10) 的性质 (14) 相似。

3. 对于 $m \geq 4$，序列 $(s_m^{(c)})$ 严格单调递减，所有项均位于区间 $(3/2, 1+\sqrt{5}]$ 内。因此，在细化空间网格（保持 s 不变）时，CN方法保持压缩性。

4. 在极限情形下，当 m 趋于无穷大时，我们得到已知的压缩性界，$\tau/h^2 \leq 3/2$见 Th. 4.1(Q3)；Section 7.1], [11, Eq. (14)]。

本文的结果完善并改进了文献中的一些结果 [2, 11]。根据方程 (18) 和 (21)-(22) 以及相关区间，使用二分法可以轻松计算任意 m 值对应的 $s_m^{(p)}$和 $s_m^{(c)}$。此外，我们得到了用于计算 $s_m^{(c)}$ 的方程，适用于 m 的奇数值和偶数值；而在 [11], 中，$s_m^{(c)}$的界仅针对 m 的偶数值给出。我们的方法还得到了 $s_3^{(c)}$ 的正确值。图 1 展示了热问题 (1) 中 CN 方法的正性与压缩性之间的差异：如果该格式对于给定网格 m具有正性，那么对于任意网格也具有压缩性。

本文的研究范围

本文其余部分安排如下。第2节介绍 CN 离散化过程，并给出本节所用的符号和定义。第3节展示本文的主要结果，即：定理1和定理2；表 1 给出了正性的上界

$s_m^{(p)}$；表 2 和表 3 给出了压缩性的上界 $s_m^{(c)}$（奇数和偶数情形）；图 1 展示了数列（$s_m^{(p)}$）和（$s_m^{(c)}$）。第3节还给出了一个示例。第4节总结全文，并提出未来工作的思路。主要结果的证明见第6节。此前，第5节介绍了一些技术性材料，这些材料是第6节证明所需的。

2 热方程的 Crank-Nicolson 方法

本文考虑 Crank-Nicolson 方法，这是一种线法方法：先在空间上采用二阶中心有限差分，再采用二阶时间步进方法。使用二阶中心有限差分和网格宽度 $h = 1/(m + 1)$ 对热方程 (1) 进行空间离散，可得到半离散线性微分系统

$$w'(t) = B_h w(t)\,, \qquad w(0) = w_0\,,\, t \geq 0\,, \tag{10}$$

其中 $B_h = (d/h^2)$ tridiag$(1, -2, 1)$ 是一个维数为 m, $w(t) \approx (u(x_i, t))_{i=1}^m$,$w_0 = (u_0(x_i))_{i=1}^m$ 的矩阵，且 $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, m$ 为网格点。

由于扩散问题 (1.1)-(1.3) 保持正性 (2) 且单调递减 (3)，为了获得具有这些定性性质的数值近似，问题 (10) 也应保持正性，并且在最大范数下是压缩的。

一个初值问题

$$w'(t) = f(t, w(t)), \qquad w(t_0) = w_0\,,\, t \geq 0\,, \tag{11}$$

如果 $w_0 \geq 0$，则称其保持正性（简称为正），即 $w(t) \geq 0$ 对 $t \geq 0$成立，其中不等式应按分量理解。若问题 (11) 的解 $w(t)$ 满足

$$\|w(t_2)\|_\infty \leq \|w(t_1)\|_\infty \quad \text{for } t_2 \geq t_1 \geq 0\,.$$

众所周知，线性问题

$$w'(t) = Aw(t)\,, \qquad w(t_0) = w_0\,,\, t \geq 0\,, \tag{12}$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times m$ 矩阵，当且仅当对所有 $i \neq j$ [13,都有 $a_{ij} \geq 0$ 时，该问题为正。定理 7.2]。(10) 中的矩阵 B_h 满足此条件，因此问题 (10) 为正。注意，其他空间离散方法并不保持正性；事实上，正性的要求存在一个阶数障碍（$q \leq 2$） [13, p。 119]。

利用矩阵 A的对数范数这一概念，可以证明线性问题 (12) 的解具有压缩性。这个概念是分析常微分方程解增长的极其有用的工具，因为它可以取负值。问题 (12) 的解具有如下形式： $w(t) = e^{At}w(0)$。若考虑一个向量范数及其从属矩阵范数，二者均记作 $\|\cdot\|$，则

$$\|w(t)\| = \|e^{tA}w(0)\| \leq \|e^{tA}\|\,\|w(0)\|\,, \tag{13}$$

当且仅当 $\|e^{tA}\| \leq 1$ 时，才能得到压缩性。给定集合

$$\mathcal{M} = \left\{\delta \in \mathbb{R} \,|\, \|e^{tA}\| \leq e^{t\delta}\,, t \geq 0\right\},$$

可以证明， $\mu_{\|\cdot\|}[A] =$min($\mathcal{M}$)，其中 $\mu_{\|\cdot\|}[A]$ 表示矩阵 A 在范数 $\|\cdot\|$ [22, 下的对数范数（对数范数的定义和性质参见命题 2.1]，例如 [22, 24, 1] 及其中的参考文献）。

由 (13) 和$\mathcal{M}$的定义，我们得到以下不等式

$$\|w(t)\| \le e^{t\mu_{\|\cdot\|}[A]} \|w(0)\|, \quad t \ge 0, \qquad \|e^{tA}\| \le e^{t\,\mu_{\|\cdot\|}[A]} \quad t \ge 0.$$

因此，若 $\mu_{\|\cdot\|}A] \le 0$，零解稳定，且$\|e^{tA}\| \le 1$ 对 $t \ge 0$成立；若 $\mu_{\|\cdot\|}[A] < 0$，则零解指数稳定，且$\|e^{tA}\| < 1$ 对 $t > 0$ [22, p. 634], [16, p. 2]成立。

对于最大范数，矩阵 $A = (a_{ij})$ 的对数范数为

$$\mu_\infty[A] = \max_{1\le i\le n} \left(a_{ii} + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

特别地，对于 (10) 中的矩阵 B_h，由于

$$a_{ii} + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \begin{cases} -1, & i = 1, m, \\ 0, & i = 2, \ldots, m-1, \end{cases}$$

我们得到 $\mu_\infty[B_h] = 0$，因此

$$\|e^{tB_h}\|_\infty \le 1, \qquad t \ge 0, \tag{14}$$

这保证问题 (10) 在最大范数下是压缩的，即

$$\|w(t)\|_\infty \le \|w(0)\|_\infty, \quad t \ge 0.$$

Crank-Nicolson 方法中采用恒定时间步长 τ 的时间步进过程给出如下迭代

$$w_n = \phi(\tau B_h) w_{n-1}, \quad n \ge 1,$$

其中

$$\phi(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z} \tag{15}$$

是该时间积分器的稳定函数。下文中，我们将维数为 m 的 Crank-Nicolson 迭代矩阵记为 $A_m = \phi(\tau B_h)$，即

$$A_m = \left(I_m - \tfrac{\tau}{2}B_h\right)^{-1}\left(I_m + \tfrac{\tau}{2}B_h\right) = \begin{pmatrix} 1+s & -\frac{s}{2} & & \\ -\frac{s}{2} & 1+s & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{s}{2} \\ & & -\frac{s}{2} & 1+s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-s & \frac{s}{2} & & \\ \frac{s}{2} & 1-s & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{s}{2} \\ & & \frac{s}{2} & 1-s \end{pmatrix}. \tag{16}$$

注意，式 (16) 中对应于半步前向欧拉法和半步后向欧拉法的两个矩阵是可交换的，这是因为系统 (10) 是线性的。此外，可以分别分析前向欧拉法和后向欧拉法的正性与压缩性，从而研究相应的性质。

尽管对系统 (10) 应用后向欧拉法时，正性与压缩性不受限制，但前向欧拉法的正性与压缩性限制为 $s \le 1$。对于问题 (10)，这一正性步长限制并不精确； [13, p.126] 中的数值实验表明，当 $s \lesssim 1.17$ 时可以获得数值正性。正如上文所指出的，更仔细地考察式 (7) 或 (16) 中的迭代矩阵 A_m ，可以得到更精确的界。

3 主要结果

本节给出本文关于 m 维系统 (10) 在正性和最大范数压缩性方面的步长限制的主要结果。证明需要先介绍一些关于矩阵 A_m 结构的预备知识，详见第6节。

在以下定理中，矩阵 A_m 的正性是指该矩阵的所有矩阵元素均为非负；类似地，矩阵 A_m 在最大范数下的压缩性是指$\|A_m\|_\infty \le 1$。

定理 1. （*Crank–Nicolson* 方法的正性）

1. 对于 $m \in \mathbb{N}$，*(16)* 中的矩阵 $A_m(s)$ 为正，当且仅当

$$s \le s_m^{(p)} := \frac{1}{\cosh \omega_m^{(p)} - 1}\,, \tag{17}$$

其中 $\omega_m^{(p)} \in$ (对数(2 + √2),对数(2 +√3)] 是方程的唯一正根

$$\coth(m\omega)\sinh\omega = 3\cosh\omega - 4\,. \tag{18}$$

2. 序列 $(s_m^{(p)})$ 严格单调递增，且所有项均位于窄区间 $[1, 2(2-\sqrt{2}))$. 因此，在细化空间网格（保持 s 不变）时，*Crank–Nicolson* 方法保持正性。

备注 1。

1. 序列 $(s_m^{(p)})$ 递增收敛至极限值 $s_\infty^{(p)} := 2(2-\sqrt{2})$（见表 1 和图 1）。 [2] 中也通过其他方法得到了该值。因此，如果

$$s < s_\infty^{(p)} = 2(2-\sqrt{2}) \approx 1.17\,, \tag{19}$$

那么存在一个自然数 m_0 ，使得对于 $m \ge m_0$ 的任意取值，矩阵 A_m 都是正定的。

2. 由于 $\omega_m^{(p)} \in$ (log(2 +√2)， log(2 + √3)] ≈(1。22795， 1.31696]，可以通过二分法轻松计算出一个近似值。

下方的表 1 展示了方程 (18) 的根 $\omega_m^{(p)}$，以及不同 m 取值下，保证 (17) 正性的 CFL 限制 $s_m^{(p)}$。

m	$\omega_m^{(p)}$	$x_m^{(p)} = \text{双曲余弦}\,\omega_m^{(p)}$	$s_m^{(p)} = 1/(x_m^{(p)} - 1)$
1	对数$(2+\sqrt{3})$	2	1
2	1.23590	$1+\sqrt{3}/2 \approx 1.86603$	$2/\sqrt{3} \approx 1.15470$
3	1.22864	1.85464	1.17009
4	1.22801	1.85365	1.17144
⋮	⋮	⋮	⋮
7	1.22795	1.85355	1.17157
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	对数$(2+\sqrt{2})$	$(6+\sqrt{2})/4$	$2(2-\sqrt{2}) \approx 1.171572875$

表 1：式 (18) 的根 $\omega_m^{(p)}$以及保证正性的式 (17) 中的 CFL 限制 $s_m^{(p)}$。

接下来，我们给出无穷范数下压缩性的结果。注意，矩阵 A_m 的对称性使得 $\|A_m\|_\infty = \|A_m\|_1$, ，因此该结果对 1-范数同样成立。

定理 2. （*Crank–Nicolson* 方法的压缩性）

1. 对于 $m \in \{1,2,3\}$，式 (16) 中的矩阵 $A_m(s)$ 在最大范数下对任意 $s > 0$ 值均为压缩的。

2. 对于 $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$，当且仅当满足以下条件时，式 (16) 中的矩阵 $A_m(s)$ 在最大范数下为压缩的

$$s \leq s_m^{(c)} := \frac{1}{\cosh \omega_m^{(c)} - 1}\,, \tag{20}$$

其中 $\omega_m^{(c)} \in [\text{对数}\,((3+\sqrt{5}+\sqrt{-2+6\sqrt{5}})/4), \text{对数}\,3) \approx [0.767197, 1.09861)$ 是方程的唯一正根

$$2\sinh\frac{(m-1)\omega}{4}\,\sinh\frac{(m+1)\omega}{4} = \sinh\frac{\omega}{2}\,\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}\,, \tag{21}$$

若 m 为奇数，或方程

$$\sinh^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\sinh\frac{m\omega}{2}\left(\sinh\frac{(m+2)\omega}{2} - \sinh\frac{m\omega}{2}\right) = \sinh\omega\,\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}\sinh\frac{m\omega}{4}\sinh\frac{(m-2)\omega}{4}\,, \tag{22}$$

如果 m 是偶数。

3. 序列$(s_m^{(c)})$ 严格单调递减，且所有项均位于区间 $(3/2, 1+\sqrt{5}\,]$内。因此，在加密空间网格时（保持 s 不变），*Crank–Nicolson* 方法不保持压缩性。

备注 2。 序列 $(s_m^{(c)})$ 递减收敛至极限值 $s_\infty^{(c)} := 3/2$ （见图1和图3）。因此，对于所有 m , 矩阵 $A_m(s)$ 是压缩的，当且仅当$s \in (0,\ 3/2]$。对于无限矩阵，界 $s_\infty^{(c)} := 3/2$ 已通过不同的方法在 [3, 16]中得到。

表 2 和表 3 给出了无穷范数下压缩性所对应的 (20) 中的 CFL 限制 $s_m^{(c)}$。表 2（奇数情形）和表 3（偶数情形）中的数值分别由方程 (21) 和 (22) 得到。注意，方程 (21) 的根 $\omega_m^{(c)}$（奇数情形）和方程 (22) 的根 $\omega_m^{(c)}$（偶数情形）都递增收敛至极限值 log 3。因此，这些根位于狭窄区间 $[\log((3+\sqrt{5}+\sqrt{-2+6\sqrt{5}})/4),\ \log 3) \approx [0.767197, 1.09861)$ 内，可用二分法轻松求得。~~表 2 和表 3~~ 中所示的数值是在使用二分法迭代 10 次后得到的。

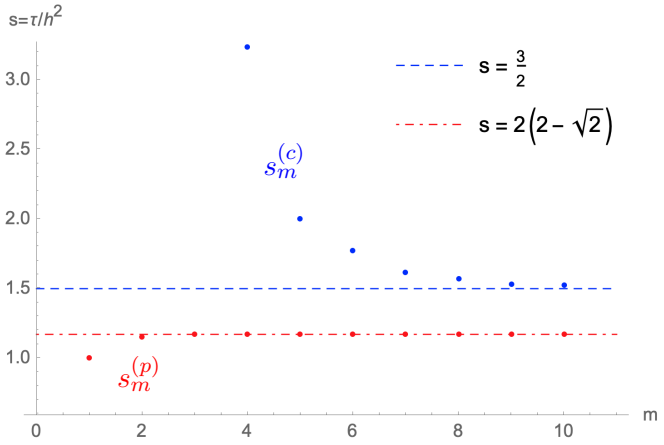

图 1：正性和压缩性对 CFL 系数 s 的限制下的数列 $s_m^{(p)}$和 $s_m^{(c)}$。

推论1。 考虑采用 *Crank-Nicolson* 方法对 m维问题(10) 进行数值积分。若该方法在给定 *CFL* 系数下具有正性，则它在无穷范数和 *1* 范数下也具有压缩性。

证明。 由定理1和定理2可直接得出。 □

如下一个简单示例所示，前一个推论的逆命题并不成立：压缩性得以保持，而正性却遭到破坏。

例1。 考虑式 (1) 中初始函数为

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < x < \frac{7}{8}, \\ 1 & \text{for } \frac{7}{8} \le x < 1, \end{cases}$$

在 t=0时于 $x = 7/8$ 和 $x = 1$ 处产生间断。采用步长为 $h = 1/8$的二阶中心差分，可得到近似值 $\omega(t) = (\omega^1(t) \ldots, \omega^7(t)) \approx (u(x_1,t) \ldots, u(x_7,t))$。对 $\tau = 0.025$ 应用一次 Crank-Nicolson步， $w_1 = A_7\, w_0$，得到向量$w_1 \approx \omega(\tau)$

$$w_1 = (0.0013, 0.0041, 0.0120, 0.0356, 0.1019, 0.2961, -0.1397), \tag{23}$$

其中， A_7 是情形 $m = 7$ 下式 (16) 中的 Crank-Nicolson 迭代矩阵， w_0 是初始剖面 $w_0 =$ (0,0,0,0,0,0,1)。注意， $\|w_1\|_\infty = 0.2961 < \|w_0\|_\infty = 1$。

在此例中，CFL 系数 $s = \tau/h^2 = 1.6$ 大于正性界$s_7^{(p)} = 1.17157$ （见表 1），但小于压缩性界 $s_7^{(c)} = 1.61803$ （见表 2）。因此，压缩性得以保持，而我们无法保证正性。实际上，正如式 (23) 中的向量 w_1 所示，负性并未保持。

m	$\omega_m^{(c)}$	$x_m^{(c)} = \cos\omega_m^{(c)}$	$s_m^{(c)} = 1/(x_m^{(c)} - 1)$
3			∞
5	$2\cos^{-1}\frac{1}{2} \approx 0.962424$	$3/2$	2
7	$\log\frac{\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}\right)}{2} \approx 1.06131$	$(1+\sqrt{5})/2$	$(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.61803$
9	1.08707	1.65139	1.53518
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	$\log 3 \approx 1.09861$	$5/3$	$3/2$

表 2：(21) 的正根及压缩性的界（奇数情形）。

m	$\omega_m^{(c)}$	$x_m^{(c)} = \cos\omega_m^{(c)}$	$s_m^{(c)} = 1/(x_m^{(c)} - 1)$
4	$\log\left(\frac{1}{4}(3+\sqrt{5}+\sqrt{-2+6\sqrt{5}})\right)$ ≈ 0.767197	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})$ ≈ 1.30902	$1+\sqrt{5}$ ≈ 3.23607
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.09110	1.65669	1.52278
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	1.09855	1.66658	1.5002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	$\log 3 \approx 1.09861$	$5/3$	$3/2$

表 3：方程 (22) 的正根及压缩性界（偶数情形）。

4 结论与未来工作

本文研究了使用 Crank-Nicolson 方法求解具有狄利克雷边界条件的热方程 (1) 时的 CFL 限制。对于任意空间离散参数 m，我们得到了正性界 $s_m^{(p)}$和压缩性界 $s_m^{(c)}$。为得到这些界，我们用一些类切比雪夫多项式 (26,28,33) 表示了 Crank-Nicolson 迭代矩阵 A_m。我们针对特定情形 $\theta = 1/2$，得到了 θ-方法 (7) 的界；按照相同思路，也可以得到参数取其他值时的类似界。

我们已经看到，矩阵 A_m 的正性由多项式 $P_m(x)$ 的最大根决定，并给出了一个窄区间，以便找到该根。类似地，我们也考察了这些多项式来分析压缩性，并且

给出了一个窄区间来确定相应的界，涵盖奇数和偶数情形。

据我们所知，文献中此前尚未使用过多项式 $P_n(x)$和 $C_n(x)$。这一思路的优势可用于证明其他问题的定性性质。此外，这种方法也可用于热方程 (1.1) 的其他离散化方案 [10]。

5 主要结果证明的预备材料

本节介绍证明本文主要结果所需的符号、定义和一些结论。在第5.1小节中，我们将克兰克-尼科尔森迭代矩阵 (16) 表示为有理函数。这些函数借助一些类切比雪夫多项式 U_m、P_m 和 C_m即可轻松写出。在第5.2小节中，我们给出这些多项式的定义，并补充一些将在第6节证明中用到的结论。

5.1 克兰克-尼科尔森矩阵 A_m 的有理函数表示 s

直接计算 (16) 中乘积 $(I_m - \frac{\tau}{2}B_h)^{-1}(I_m + \frac{\tau}{2}B_h)$，即可得到矩阵 A_m 的矩阵元素的有理函数表达式，其中涉及的多项式可递归求得。这些简化后的闭式表达式将有助于求得正性和压缩性的界。

Exa例 2。 对于 $m = 3$，直接计算式 (16) 中的对称矩阵 A_3 可得 es

$$A_3(s) = \begin{pmatrix} \frac{2+2s-2s^2-s^3}{2+6s+5s^2+s^3} & \frac{2s}{2+4s+s^2} & \frac{s^2}{2+6s+5s^2+s^3} \\ \frac{2s}{2+4s+s^2} & \frac{2-s^2}{2+4s+s^2} & \frac{2s}{2+4s+s^2} \\ \frac{s^2}{2+6s+5s^2+s^3} & \frac{2s}{2+4s+s^2} & \frac{2+2s-2s^2-s^3}{2+6s+5s^2+s^3} \end{pmatrix}.$$

请记住，$s = \tau/h^2$ 表示 CFL 系数。若考虑新的变量 $x = 1 + 1/s$，这个矩阵可以写得更加简洁。注意，当 $s > 0$ 时，$x > 1$。借助一类新的多项式 $U_n(x)$、$P_n(x)$ 和 $C_n(x)$，我们可以将 $A_3(x)$ 写成

$$A_3(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x^3-4x^2+1}{2x^3-x} & \frac{2(x-1)}{2x^2-1} & \frac{x-1}{2x^3-x} \\ \frac{2(x-1)}{2x^2-1} & \frac{2x^2-4x+1}{2x^2-1} & \frac{2(x-1)}{2x^2-1} \\ \frac{x-1}{2x^3-x} & \frac{2(x-1)}{2x^2-1} & \frac{2x^3-4x^2+1}{2x^3-x} \end{pmatrix} = \frac{1}{U_3(x)} \begin{pmatrix} P_3(x) & C_2(x) & C_1(x) \\ C_2(x) & C_1(x)+P_3(x) & C_2(x) \\ C_1(x) & C_2(x) & P_3(x) \end{pmatrix}.$$

注意到，$A_3(x)$ 仅用 $U_3(x)$、$P_3(x)$、$C_1(x)$ 和 $C_2(x)$ 表示。下一小节将给出这些多项式 $U_n(x)$、$P_n(x)$ 和 $C_n(x)$ 的定义及全部细节。在此之前，我们将这个简单示例中的思路推广到矩阵 $A_m(x)$ 的更一般情形，其中 m 可取任意值，不过需要区分奇数情形和偶数情形。

命题 1. 矩阵 $A_m(x)$ 可以用多项式 $U_m(x)$、 $P_m(x)$ 和$C_n(x)$、 $n=1$、.....、 $m-1$表示。如果 m 是奇数，*Crank–Nicolson* 矩阵可化简为

$$A_m(x)=\frac{1}{U_m}\begin{pmatrix} P_m & C_{m-1} & \dots & C_{\frac{m+1}{2}} & \dots & C_2 & C_1 \\ C_{m-1} & P_m+C_{m-2} & \dots & C_{\frac{m-1}{2}}+C_{\frac{m+3}{2}} & \dots & C_1+C_3 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{\frac{m+1}{2}} & C_{\frac{m-1}{2}}+C_{\frac{m+3}{2}} & \dots & P_m+\sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1} & \dots & C_{\frac{m-1}{2}}+C_{\frac{m+3}{2}} & C_{\frac{m+1}{2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_2 & C_1+C_3 & \dots & C_{\frac{m-1}{2}}+C_{\frac{m+3}{2}} & \dots & P_m+C_{m-2} & C_{m-1} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{\frac{m+1}{2}} & \dots & C_{m-1} & P_m \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中所有多项式均在 $x=1+1/s$ 处求值。若 m 是偶数，我们写作

$$A_m(x)=\frac{1}{U_m}\begin{pmatrix} P_m & C_{m-1} & \dots & C_{\frac{m+2}{2}} & C_{\frac{m}{2}} & \dots & C_2 & C_1 \\ C_{m-1} & P_m+C_{m-2} & \dots & C_{\frac{m}{2}}+C_{\frac{m+4}{2}} & C_{\frac{m-2}{2}}+C_{\frac{m+2}{2}} & \dots & C_1+C_3 & C_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{\frac{m+2}{2}} & C_{\frac{m}{2}}+C_{\frac{m+4}{2}} & \dots & P_m+\sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} C_{2n} & \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} C_{2n-1} & \dots & C_{\frac{m-2}{2}}+C_{\frac{m+2}{2}} & C_{\frac{m}{2}} \\ C_{\frac{m}{2}} & C_{\frac{m-2}{2}}+C_{\frac{m+2}{2}} & \dots & \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} C_{2n-1} & P_m+\sum_{n=1}^{\frac{m-2}{2}} C_{2n} & \dots & C_{\frac{m}{2}}+C_{\frac{m+4}{2}} & C_{\frac{m+2}{2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_2 & C_1+C_3 & \dots & C_{\frac{m-2}{2}}+C_{\frac{m+2}{2}} & C_{\frac{m}{2}}+C_{\frac{m+4}{2}} & \dots & P_m+C_{m-2} & C_{m-1} \\ C_1 & C_2 & \dots & C_{\frac{m}{2}} & C_{\frac{m+2}{2}} & \dots & C_{m-1} & P_m \end{pmatrix}. \tag{25}$$

证明。 由 (16) 中乘积 $(I_m-\frac{\tau}{2}B_h)^{-1}(I_m+\frac{\tau}{2}B_h)$ 的计算，以及对下一小节中定义的多项式 $U_n(x)$、 $P_n(x)$ 和 $C_n(x)$、 $n=1,\dots,m-1$ 的使用，可直接得出。

□

注意， $A_m(x)$ 是双对称的，也就是说，它关于两条对角线均对称。这意味着 $A_m(x)$ 也是中心对称的。因此，矩阵元素 a_{ij} 满足 $a_{ij}=a_{n-i+1,n-j+1}$，其中 $1\le i,j\le n$。因此，若 m 为奇数，矩阵 A_m 中不同矩阵元素的数量为 $1+3+5+\dots+m=(m+1)^2/4$；若 m 为偶数，该数量为 $2+4+6+\dots+m=(m/2+1)m/2$。例如，例 2 中矩阵 A_3 的不同元素有 4 个，而下文例 3 中矩阵 A_4 的不同元素有 6 个。

还要注意，矩阵 $A_m(x)$中每个元素a_{ij} 的分子都是若干多项式 $P_n(x)$、 $C_n(x)$、 $n=1$、.....、 $m-1$之和，而该和中的多项式个数等于 $\min\{i,j,m-i+1,m-j+1\}$。多项式 $U_n(x)$、 $P_n(x)$和$C_n(x)$的性质将使我们能够以相当简单的方式分析 Crank–Nicolson 方法的正性和压缩性。下一节将研究这些性质。

例 3。 在例 2 中，我们考虑了奇数情形 $m=3$。这里，为求完整起见，我们考虑偶数情形 $m=4$。直接计算（16）中的对称矩阵 A_4 可得

$$A_4(s)=\frac{1}{u_4(s)}\begin{pmatrix} p_4(s) & 4s\big(4{+}8s{+}3s^2\big) & 8s^2(1{+}s) & 4s^3 \\ 4s\big(4{+}8s{+}3s^2\big) & 16{+}32s{+}4s^2{-}16s^3{-}5s^4 & 16s(1{+}s)^2 & 8s^2(1{+}s) \\ 8s^2(1{+}s) & 16s(1{+}s)^2 & 16{+}32s{+}4s^2{-}16s^3{-}5s^4 & 4s\big(4{+}8s{+}3s^2\big) \\ 4s^3 & 8s^2(1{+}s) & 4s\big(4{+}8s{+}3s^2\big) & p_4(s) \end{pmatrix},$$

其中 $p_4(s)=-5s^4-24s^3-4s^2+32s+16$ 和 $u_4(s)=5s^4+40s^3+84s^2+64s+16$。现在，借助变量 $x=1+1/s$，我们可以写成

$$A_4(x)=\frac{1}{U_4(x)}\begin{pmatrix} P_4(x) & C_3(x) & C_2(x) & C_1(x) \\ C_3(x) & P_4(x)+C_2(x) & C_1(x)+C_3(x) & C_2(x) \\ C_2(x) & C_1(x)+C_3(x) & P_4(x)+C_2(x) & C_3(x) \\ C_1(x) & C_2(x) & C_3(x) & P_4(x) \end{pmatrix}.$$

请注意，偶数情形有两条中央行，而奇数情形只有一条。

5.2 多项式 U_n、 P_n 和 C_n

本节定义新的多项式 $P_n(x)$和 $C_n(x)$。结合第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$ [7, 17, 19], ，我们可以用一种简便的方式表示 Crank-Nicolson 矩阵 $A_m(x)$。此外，本节还给出了一些关于这些多项式的结果，尤其关注它们的根的分布。第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$属于一大类正交多项式，已有许多研究探讨其零点的性质 [7, 17]。然而，多项式$P_n(x)$和 $C_n(x)$并不属于这类正交多项式；据我们所知，目前尚无关于它们的根的研究。

第二类切比雪夫多项式

次数为 $n\geq 0$ 的第二类切比雪夫多项式定义为

$$U_n(x)=\frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sin(\arccos x)},\quad x\in[-1,1]\,,$$

或者，用角变量表示为 ω, $U_n(\cos\omega)=\sin((n+1)\omega)/\sin\omega$, $\omega\in[0,\pi]$。这些多项式也可以通过递推关系定义，适用于 $x\in\mathbb{R}$ 的任意取值

$$\begin{aligned} U_0(x)&=1\,,\\ U_1(x)&=2x\,,\\ U_n(x)&=2x\,U_{n-1}(x)-U_{n-2}(x)\,. \end{aligned}\tag{26}$$

递推关系 (26) 可以用维数为 n 的三对角矩阵 tridiag(1， $2x$，1) 的行列式来表示。

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & & \\ 1 & 2x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2x \end{vmatrix} \tag{27}$$

回想一下，每个多项式 $U_n(x)$ 有 n 个根 $x_i^n = \cos(i\pi/(n+1))$，$i = 1, \ldots, n$，位于区间 $[-1, 1]$ 内。这些根在角变量 $\omega = \arccos x$ 中均匀分布，该角变量的取值范围为区间 $[0, \pi]$。注意，式（26）中定义的多项式 $U_n(x)$ 在 $x > 1$ 时为正。

多项式 P_n

如果改变递推关系（26）中的前两个元素，则可以定义一个新的多项式族

$$\begin{aligned} P_0(x) &= -1\,, \\ P_1(x) &= 2x - 4\,, \\ P_n(x) &= 2x\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $P_n(x)$ 表示次数为 n 的多项式。在这种情况下，递推关系（28）也可以用一个维数为 n 的矩阵的行列式来表示。

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 2x-4 & -1 & & & \\ 1 & 2x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2x & 1 \\ & & & 1 & 2x \end{vmatrix}. \tag{29}$$

在下面的命题中，我们分析每个多项式 $P_n(x)$ 的根。在第6节给出的证明中，以下事实很重要：每个多项式 $P_n(x)$ 都可以用第二类切比雪夫多项式表示

$$P_n(x) = 2U_{n-2}(x) - 4U_{n-1}(x) + U_n(x)\,. \tag{30}$$

通过将行列式 (29) 用行列式 (27) 表示，并利用递推关系 (26)，即可得到这一等式。

命题 2. 在(28) 中定义的多项式 $P_n(x)$ 在区间 $(-1, 1)$内恰有 $n-1$ 个根：x_i^n，$i = 1, \ldots, n-1$；此外，在区间$(\frac{6+\sqrt{2}}{4}, 2]$内还有一个孤立根 $x_n := x_n^n$。此外，该孤立根为 $x_n =$双曲余弦 ω_n，其中 ω_n 是下列方程的唯一根

$$\coth(n\omega) = \frac{3\cosh\omega - 4}{\sinh\omega}\,, \qquad \omega \in (0, \infty)\,. \tag{31}$$

此外，$x_1 = 2$，孤立根序列(x_n) 递减并收敛于极限值 $x_\infty = (6 + \sqrt{2})/4$。

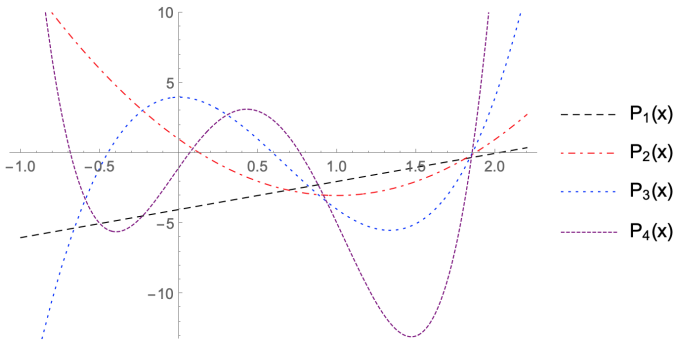

图 2：多项式 $P_n(x)$ $n = 1, \ldots\ldots, 4$。每个多项式在区间 $(\frac{6+\sqrt{2}}{4}, 2])$ 内都有一个孤立根。

如证明中所示（见第 6.3 节），对于 n的任意取值，方程 (31) 的唯一根 ω_n位于区间 $(\omega_\infty, \omega_1] = (\log(2+\sqrt{2}), \log(2+\sqrt{3})]$。因此，多项式 $P_n(x)$ 的孤立根 $x_n = \cosh \omega_n$ 位于窄区间 $(\frac{6+\sqrt{2}}{4}, 2]$。根的位置确定得较为准确后，就很容易用任何数值方法求得该根。表 1 展示了使用二分法经过 10 步后得到的一些根。

多项式 C_n

次数为 n 的多项式 C_n 定义如下

$$C_n(x) = P_n(x) + U_n(x)\,, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{32}$$

其中，P_n 是上文定义的次数为 n 的多项式，U_n 是次数为 n 的第二类切比雪夫多项式。因此，C_n 的所有性质都源于这个定义，包括其递归定义

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 0\,, \\ C_1(x) &= 4(x-1)\,, \\ C_n(x) &= 2x\,C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)\,. \end{aligned} \tag{33}$$

注意，递推公式 (33) 与 P_n 的公式 (28) 和 U_n 的公式 (26) 相同，只是初始值 C_0 和 C_1 不同。与前面的情形一样，值得将 $C_n(x)$ 写成行列式的形式

$$C_n(x) = \begin{vmatrix} 4(x-1) & 0 & & & \\ 1 & 2x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2x & 1 \\ & & & 1 & 2x \end{vmatrix}. \tag{34}$$

命题 3. 每个多项式 $C_n(x)$ 在区间 $(-1,1)$内恰有 $n-1$ 个根：x_i^n、$i = 1$、……、$n-1$，以及另一个孤立根 $x_n = 1$。

证明。 使用行列式 (34) 即可直接得到

$$C_n(x) = 4(x-1)U_{n-1}(x) \tag{35}$$

因此，多项式 C_n 的根为孤立根 $x_n = 1$，以及次数为 $n-1$ 的第二类切比雪夫多项式的 $n-1$ 个根。 □

推论 2. 若 $x > 1$，则 $C_n(x) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$。

证明。 由前面的命题可直接得出。 □

在下面的引理中，我们给出多项式 $C_n(x)$的一些技术性质，这些性质将在第6节中用到。

引理 3. 对于 (32) 或 (33) 中定义的次数为 n 的多项式 C_n，以下性质成立：

1. $C_n(1) = 0$，$\forall n \in \mathbb{N}$ *2.* $C_n(x) = 2U_{n-2}(x) - 4U_{n-1}(x) + 2U_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *3.* 若 $x > 1$，则 $0 < C_n(x) \le C_{n+1}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *4.* 若 $x > 1$，则 $2C_n(x) \le C_{n-1}(x) + C_{n+1}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

证明。 第 1 部分显而易见。利用关系式 (30) 和定义 (32)，第 2 部分也显而易见。

为了证明第 3 部分，如 $x > 1$，我们将 $x =$ 双曲余弦 ω 代入 (35)，得到

$$C_n(\cosh\omega) = \frac{4(\cosh\omega - 1)\sinh(n\omega)}{\sinh\omega} > 0\,. \tag{36}$$

由于 $\sinh\omega$ 是递增函数，因此 $\sinh(n\omega) < \sinh((n+1)\omega)$，从而$C_n(x) \le C_{n+1}(x)$。

最后，为了证明第 4 部分，由于

$$\sinh((n-1)\omega) + \sinh((n+1)\omega) = 2\cosh\omega\sinh(n\omega) \ge 2\sinh(n\omega)\,,$$

对于 $x > 1$，我们可以再次利用 (36)，得到 $2C_n(x) \le C_{n-1}(x) + C_{n+1}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$。 □

6 第 3 节和第 5 节定理的证明

本节给出本文主要结果的证明。

6.1 Crank-Nicolson 方法的正性

回顾一下，Crank Nicolson 方法为正，当且仅当矩阵A_m (24)-(25)中的所有元素均为正。下面的引理简化了定理 1 的证明。

引理 4. 若 $x > 1$，则矩阵 $A_m(x)$ (24)-(25) 中的所有元素均为非负，当且仅当多项式 $P_m(x)$ 为非负。

证明. 回想一下，对于 $x > 1$，多项式 $U_n(x)$ 为正。对于 $x > 1$，多项式 $C_n(x)$ 也为正（见推论 2）。因此，所有非对角元素均为正。

对于对角元素 $A_m^{(i,i)}(x)$，若多项式 $U_n(x)$ 和 $C_n(x)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均为正，则

$$\min_i A_m^{(i,i)}(x) = A_m^{(1,1)}(x) = A_m^{(m,m)}(x) = \frac{P_m(x)}{U_m(x)}.$$

因此，对 $A_m(x)$ 中元素正性的分析可归结为多项式 $P_m(x)$ 的正性。

□

定理 1 的证明

1. 根据引理 4，我们只需研究多项式 $P_m(x)$ 在 $x > 1$ 时的正性。根据命题 2，$P_m(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内恰有 $m-1$ 个根，此外，在区间 $(\frac{6+\sqrt{2}}{4}, 2)$ 内还有一个孤立实根 $x_m^{(p)} =$ 双曲余弦$(\omega_m^{(p)})$，其中 $\omega_m^{(p)}$ 是方程 (31) 的唯一根，也就是方程 (18) 的唯一根。由于 $x = 1 + 1/s$，因此 CFL 系数为 $s = 1/(x-1)$，从而得到不等式 (17)。

2. 在极限情形下，命题 2 给出了极限值 $x_\infty^{(p)} = (6+\sqrt{2})/4$。因此，对于 CFL 系数，我们得到界 $s_\infty^{(p)} = 1/(x_\infty^{(p)} - 1) = 2(2-\sqrt{2})$，并由此得到不等式 (19)。

□

6.2 Crank-Nicolson 方法的压缩性。

在写出定理 2 的证明之前，我们需要两个技术引理。在下面的引理 5 中，我们用多项式 $U_n(x)$、$P_n(x)$ 和 $C_n(x)$计算矩阵 $A_m(x)$ 的最大范数。随后，在引理 6 中，我们得到压缩性条件 $\|A_m\|_\infty \le 1$ 所需的不等式。与正性分析不同，在压缩性分析中有必要区分奇偶情形。

引理 5。

1. 如果 $m \ge 3$ 是自然数中的奇数，那么 *Crank-Nicolson* 矩阵的最大范数为

$$\|A_m\|_\infty = \frac{1}{U_m}\left(|P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| + 2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}}\sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}} C_{2n+i}\right). \tag{37}$$

2. 如果 $m \ge 2$ 是自然偶数，那么 *Crank-Nicolson* 矩阵的范数为

$$\|A_m\|_\infty = \frac{1}{U_m}\left(|P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} C_n + \sum_{n=1}^{m/2} C_{2n-1}\right). \tag{38}$$

证明。注意，（37）中的范数是由 A_m （奇数情形）中央行各元素之和得到的，而（38）中的范数是由各元素之和得到的

偶数情形下任一对称中心行。为得到这一结果，我们将证明以下不等式

$$\sum_{j=1}^{m}|A_m^{(i,j)}| \le \sum_{j=1}^{m}|A_m^{(i+1,j)}|\,, \quad i=1,\dots,\tfrac{m-1}{2}(\text{odd case})\ \tfrac{m-2}{2}(\text{even case}).$$

为简便起见，我们将 A_m^i 记作总和 $\sum_{j=1}^{m}|A_m^{(i,j)}|U_m$。注意到，矩阵 (24-25) 的对称性使得 $A_m^i = A_m^{m+1-i}$, $i=1\,,\dots,(m-1)/2$（奇数情形）或$i=1\,,\dots,m/2$（偶数情形）。接下来，我们将证明

$$\begin{aligned} A_m^1 \le A_m^2 \le \cdots \le A_m^{\frac{m-1}{2}} \le A_m^{\frac{m+1}{2}} \qquad & (\text{odd case}) \\ A_m^1 \le A_m^2 \le \cdots \le A_m^{\frac{m-2}{2}} \le A_m^{\frac{m}{2}} = A_m^{\frac{m+2}{2}} \qquad & (\text{even case}) \end{aligned}$$

因此，$\|A_m\|_\infty$ 可由中央行（奇数情形）中各元素之和得到，也可由任意两条中央行（偶数情形）中各元素之和得到。

回顾一下，对于具有正的非对角元素的给定矩阵 A ，以下等式显然成立

$$\|A\|_\infty = \max_i\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|\right) = \max_i\left(|a_{ii}| + \sum_{j\ne i}a_{ij}\right)\,. \tag{39}$$

In 在我们的情形中， $C_n(x) \ge 0$ 对于 $x \ge 1$ 成立（见命题 3）。因此，所有非对角元m素均为非负，我们可以使用 (39) 计算$\|A_m\|_\infty$。对于矩阵 (24) 或 (25) 的第一行和第二行，

我们得到以下各和

$$A_m^1 = |P_m| + \sum_{i=1}^{m-1} C_i\,, \qquad A_m^2 = |P_m + C_{m-2}| + \sum_{1}^{m-1} C_i + \sum_{2}^{m-1} C_i - C_{m-2}\,.$$

然后，消去各项后，差值 $A_m^1 - A_m^2$ 为

$$A_m^1 - A_m^2 = |P_m| - |P_m + C_{m-2}| - \sum_{2}^{m-1} C_i + C_{m-2}\,.$$

在项 $|P_m|$中加上再减去 C_{m-2} ，可得

$$\begin{aligned} A_m^1 - A_m^2 &\le |P_m + C_{m-2}| + C_{m-2} - |P_m + C_{m-2}| - \sum_{2}^{m-1} C_i + C_{m-2} \\ &= 2C_{m-2} - \sum_{2}^{m-1} C_i \le C_{m-3} + C_{m-1} - \sum_{2}^{m-1} C_i = -\sum_{2}^{m-4} C_i - C_{m-2} \le 0\,, \end{aligned}$$

其中我们使用了引理 3 中第 (4) 项的 $2C_{m-2} \le C_{m-3} + C_{m-1}$。注意，引理 3 中的性质 (3) 使我们最终可以写出

$$A_m^1 - A_m^2 \le -\sum_{2}^{m-3} C_i \le 0\,. \tag{40}$$

对差值 $A_m^2 - A_m^3$ 采用相同的方法，消去各项，并在项 $|P_m + C_{m-2}|$ 中加上再减去 C_{m-4} 后，我们得到以下不等式

$$A_m^2 - A_m^3 \le 2C_{m-4} - \sum_3^{m-2} C_i \,.$$

再次按顺序使用引理 3 中的性质 (4) 和 (3)，即可写出一个与 (40) 类似的不等式

$$A_m^2 - A_m^3 \le C_{m-5} + C_{m-3} - \sum_3^{m-2} C_i \le -\sum_3^{m-4} C_i \le 0 \,.$$

对于奇数情形和偶数情形，证明过程都与前面相同，直到最后一步：此时我们得到中央行（奇数情形）或两条中央行（偶数情形）。接下来需要考虑两种不同情形:

1. 如果 m 是奇数，最后一步是研究差值 $A_m^{\frac{m-1}{2}} - A_m^{\frac{m+1}{2}}$，其中 $A_n^{\frac{m-1}{2}}$ 表示中央行中各元素的和。消去各项后，可以写成

$$A_m^{\frac{m-1}{2}} - A_m^{\frac{m+1}{2}} = |P_m + \sum_{n=2}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| + C_1 - |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| - C_{\frac{m+1}{2}}$$

在项 $|P_m + \sum_{n=2}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}|$ 中加上并减去 C_1，得到

$$\begin{aligned} A_m^{\frac{m-1}{2}} - A_m^{\frac{m+1}{2}} &\le |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| + 2C_1 - |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| - C_{\frac{m+1}{2}} \\ &= 2C_1 - C_{\frac{m+1}{2}} \le C_0 + C_2 - C_{\frac{m+1}{2}} = C_2 - C_{\frac{m+1}{2}} \le 0 \,, \end{aligned}$$

这里用到了引理 3 中性质 (4) 的 $2C_1 \le C_0 + C_2$。

因此，如果 $m \ge 3$ 是奇数，A_m^i 的最大值在中央行 $A_m^{\frac{m+1}{2}}$ 处取得，由此可得

$$\|A_m\|_\infty = \frac{A_m^{\frac{m+1}{2}}}{U_m} = \frac{1}{U_m}\left(|P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}} C_{2n-1}| + 2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}} C_{2n+i}\right) .$$

2. 如果 m 是偶数，那么就没有中央行，而是有两条对称的中央行 $A_m^{\frac{m}{2}}$ 和 $A_m^{\frac{m}{2}}$，最大值在这两行中的任意一行取得。现在，在证明的最后一步，如果 $m \ge 4$，我们必须写出差值 $A_m^{\frac{m}{2}} - A_m^{\frac{m}{2}}$。注意，对于简单情形 $m = 2$，有 $A_m^1 = A_m^2$。消去各项后，我们可以写成

$$A_m^{\frac{m-2}{2}} - A_m^{\frac{m}{2}} = |P_m + \sum_{n=2}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| + C_2 - |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| - C_{\frac{m}{2}} - C_{\frac{m+2}{2}}$$

在项 $|P_m + \sum_{n=2}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}|$ 中加上并减去 C_2，我们得到

$$A_m^{\frac{m-2}{2}} - A_m^{\frac{m}{2}} \le |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| + 2C_2 - |P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| - C_{\frac{m}{2}} - C_{\frac{m+2}{2}}$$
$$= 2C_2 - C_{\frac{m}{2}} - C_{\frac{m+2}{2}} \le C_1 + C_3 - C_{\frac{m}{2}} - C_{\frac{m+2}{2}} \le 0\,,$$

其中我们用到了引理 3 中的性质 (4) $2C_2 \le C_1 + C_3$。

因此，若 m 是偶数，则 A_m^i 的最大值在第$_m$行取得 A_m^2，由此可得

$$\|A_m\|_\infty = \max_i \left(|a_{ii}| + \sum_{j\neq i} a_{ij}\right) = \frac{1}{U_m}\left(|P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}| + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} C_n + \sum_{n=1}^{m/2} C_{2n-1}\right) \quad \square$$

一旦我们用多项式 U_m、P_m 和 C_m 表示矩阵 A_m 的最大范数，就可以在能够解出相应不等式 $\|A_m\|_\infty \le 1$ 的情况下，得到任意 m 值下压缩性的界 $s_m^{(c)}$。下一个引理将证明这一点。图 3 绘出了若干 m取值下的 $\|A_m(s)\|_\infty$，并且还标出了若干压缩性界 $s_m^{(c)}$。

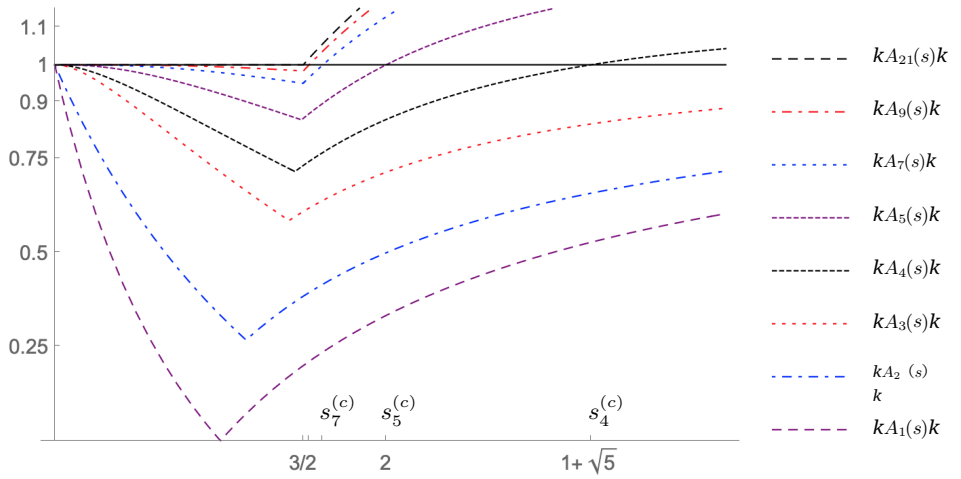

图 3：$\|A_m(s)\|$ 在 $m \in \{1,2,3,4,5,7,9,21\}$取不同值时的情形。当 $m \in \{1,2,3\}$时，所有 $s > 0$均满足$\|A_m(s)\| < 1$。当 $m \ge 4$时，$\|A_m(s)\|$ 在 $s_m^{(c)}$处截断直线 $s = 1$。序列$(s_m^{(c)})$严格单调递减，所有项均位于区间 $(3/2, 1+\sqrt{5}\,]$内。

引理 6.

1.（奇数情形）如果 m 是自然奇数，那么 *Crank–Nicolson* 矩阵的最大范数为

$$\|A_m\|_\infty \le 1 \iff \frac{2\sinh\frac{(m-1)\omega}{4}\sinh\frac{(m+1)\omega}{4}}{\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}} \le \sinh\frac{\omega}{2}$$

其中 $\omega =$ 反双曲余弦$(1+1/s)$。在极限情况下，当 $m\to\infty$ 时，当且仅当以下条件成立时才具有压缩性

$$e^{-\omega/2}\le \sinh\frac{\omega}{2} \tag{41}$$

2.（偶数情形）如果 m 是自然偶数，那么我们有

$$\|A_m\|_\infty\le 1 \iff \frac{\sinh\frac{m\omega}{2}\left(\sinh\frac{(m+2)\omega}{2}-\sinh\frac{m\omega}{2}\right)}{\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}\sinh\frac{m\omega}{4}\sinh\frac{(m-2)\omega}{4}}\ge\frac{\sinh\omega}{\sinh^2\frac{\omega}{2}}$$

取极限，当 $m\to\infty$ 时，当且仅当满足以下条件时，才具有压缩性

$$2\left(-1+e^{\omega}\right)\ge\frac{\sinh\omega}{\sinh^2\frac{\omega}{2}} \tag{42}$$

如果 $\omega>0$，则不等式 (41) 和 (42) 等价，并且当且仅当 $\omega\ge\log 3$ 时成立。对于变量 s，这等价于已知的限制 $s\le 3/2$。

证明。

1. 请记住，在奇数情形下，(37) 中的范数由 A_m 的中央行各元素之和得到。在这种情况下，中央$_{m-1}$行 $P_m+\sum_{n=1}^{2}C_{2n-1}$ 的对角元素可以写成闭式

$$P_m+\sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}}C_{2n-1}=-U_m+\sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}}C_{2n-1}=-\frac{\sinh((m+1)\omega)}{\sinh\omega}+\frac{4(x-1)\sinh^2\frac{(m+1)\omega}{2}}{\sinh^2\omega},$$

其中我们进行了 $P_m=C_m-U_m$ 的变换，并考虑了角变量$\omega=$ 反双曲余弦 x。对于 m 的任意取值，该对角元素的唯一正根 ω_m 位于区间 (log 3,log$(2+\sqrt{3})$] 内。通过关于变量 $s=$(双曲余弦 $\omega-1)^{-1}$ 的简化方程，可以很容易地求得此根

$$\sqrt{1+2s}=2\tanh\frac{(1+m)\operatorname{arccosh}(1+1/s)}{2}.$$

对于该变量，唯一正根 s_m 位于区间 $[1,3/2)$。注意，根序列 (s_m)递增并收敛于极限值 $s_\infty=3/2$。当$_{m-1}s\in$ (0, s_m)时，对角元素 $P_m+\sum_{n=1}^{2}C_{2n-1}$ 为正，并且由 (37) 易得$\|A_m\|_\infty<1$。

$_{m-1}$另一方面，当 $s\in[s_m,\infty)$时，我们有 $P_m+\sum_{n=1}^{2}C_{2n-1}\le 0$，并且由 (37)，压缩性的不等式为

$$\|A_m\|_\infty=\frac{1}{U_m}\left(-P_m-\sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}}C_{2n-1}+2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}}\sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}}C_{2n+i}\right)\le 1.$$

这等价于

$$-\sum_{n=1}^{\frac{m-1}{2}}C_{2n-1}+2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}}\sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}}C_{2n+i}\le C_m,$$

or

$$\sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} C_{2n-1} - 2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}} C_{2n+i} \geq 0\,.$$

由于 $x > 1$，在角变量 $\omega = $反双曲余弦 $x > 0$ 中，我们可以写成 C_m(双曲余弦 ω) $=$ 4($x-1$) 双曲正弦($m\omega$)/双曲正弦 ω。因此，前一个不等式可化简为

$$\sum_{n=1}^{\frac{m+1}{2}} \sinh((2n-1)\omega) - 2\sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{m-(2i+1)}{2}} \sinh((2n+i)\omega) \geq 0\,.$$

如果我们使用展开式 $\sum_k$sinh($k\omega$)、$\sum_k$sinh($2k\omega$) 和$\sum_k$ sinh(($2k-1$)ω)的闭式公式，那么可以将前面的不等式写成

$$\frac{4(x-1)\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}}{\sinh^2\omega}\left(\sinh\frac{(m+1)\omega}{2} - 2\frac{\sinh\frac{(m-1)\omega}{4}\sinh\frac{(m+1)\omega}{4}}{\sinh\frac{\omega}{2}}\right) \geq 0\,.$$

并且，对于 $x > 1$，当且仅当以下条件成立时，这才成立

$$\frac{2\sinh\frac{(m-1)\omega}{4}\sinh\frac{(m+1)\omega}{4}}{\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}} \leq \sinh\frac{\omega}{2}\,. \tag{43}$$

这样，对于 m 的任意取值，当且仅当 $\omega \geq \omega_m^{(c)}$ 时，便有压缩性，其中$\omega_m^{(c)}$是相应等式方程的唯一正根。最后，回到变量 s，当且仅当 $s \leq s_m^{(c)}$ 时，便有压缩性:
$= 1/$(双曲余弦 $\omega_m^{(c)} - 1$)。
计算式 (43) 中的极限，当 $m \to \infty$ 时，当且仅当以下条件成立，便有压缩性

$$e^{-\omega/2} \leq \sinh\frac{\omega}{2}\,.$$

并且，当且仅当 $\omega \geq$ log 3 时，这才成立。这等价于 $x =$ 双曲余弦 $\omega \geq 5/3$ 或 $s \leq 3/2$。

2. 在偶数情形下，式 (38) 中的范数由两个中央对称行中任意一行的元素之和得到。任意一条中央行中的对角元素 $P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}$ 可写成闭式

$$P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n} = -U_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} C_{2n} = -\frac{\sinh((m+1)\omega)}{\sinh\omega} + \frac{4(x-1)\sinh\frac{m\omega}{2}\sinh\frac{(m+2)\omega}{2}}{\sinh^2\omega}\,,$$

其中 $\omega =$ 反双曲余弦 x 和 $x = 1 + 1/s$。同样，这个中心对角元素的唯一正根 s_m 位于区间 $[1, 3/2)$ 内。对于任意 m 的值，都可以通过简化方程轻松求得该根

$$\sqrt{1+2s} = 4\,\frac{\sinh\frac{m\omega}{2}\sinh\frac{(m+2)\omega}{2}}{\sinh((m+1)\omega)}\,.$$

注意，根序列 $(s_m)_m$ 递增地收敛到极限值$s_\infty = 3/2$。当 $s \in (0, s_m)$ 时，对角元素 $P_m + \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n}$ 为正，并且，

由 (38) 可轻易得到 $\|A_m\|_\infty < 1$。另一方面，当 $s \in [s_m, \infty)$ 时，对角元素为负，并且，由 (38) 得到的压缩性不等式为

$$\|A_m\|_\infty = \tfrac{1}{U_m}\left(-P_m - \sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} C_n + \sum_{n=1}^{m/2} C_{2n-1}\right) \le 1\,.$$

这等价于

$$-\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}-1} C_{2n} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} C_n + \sum_{n=1}^{m/2} C_{2n-1} \le C_m\,,$$

or

$$\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} C_{2n} - \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} C_n - \sum_{n=1}^{m/2} C_{2n-1} \ge 0\,.$$

与奇数情形一样，现在我们可以利用角变量 ω 来化简前面的不等式。

$$\sum_{n=1}^{\frac{m}{2}} \sinh(2n\omega) - \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{n=1+i}^{m-i} \sinh(n\omega) - \sum_{n=1}^{m/2} \sinh((2n-1)\omega) \ge 0\,.$$

最后，利用展开式 $\sum_k \sinh(k\omega)$、$\sum_k \sinh(2k\omega)$ 和 $\sum_k \sinh((2k-1)\omega)$ 的闭式公式，可以将不等式化简为

$$\tfrac{4(x-1)}{\sinh\omega}\left(\frac{\sinh\frac{m\omega}{2}}{\sinh\omega}\left(\sinh\tfrac{(m+2)\omega}{2} - \sinh\tfrac{m\omega}{2}\right) - \frac{\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}\sinh\frac{m\omega}{4}\sinh\frac{(m-2)\omega}{4}}{\sinh^2\frac{\omega}{2}}\right) \ge 0\,.$$

并且，对于 $x > 1$，当且仅当以下条件成立时，该结论成立：

$$\frac{\sinh\frac{m\omega}{2}\left(\sinh\frac{(m+2)\omega}{2} - \sinh\frac{m\omega}{2}\right)}{\sinh\frac{(m+1)\omega}{2}\sinh\frac{m\omega}{4}\sinh\frac{(m-2)\omega}{4}} \ge \frac{\sinh\omega}{\sinh^2\frac{\omega}{2}}\,. \tag{44}$$

这样，对于 m 的任意取值，当且仅当 $\omega \ge \omega_m^{(c)}$时，压缩性成立，其中 $\omega_m^{(c)}$是式（44）中相应等式方程的唯一正根。最后，回到变量 s，当且仅当 $s \le 1/(\text{双曲余弦}\,\omega_m^{(c)} - 1)$ 时，压缩性成立。

计算式（44）中的极限，当 $m \to \infty$时，当且仅当以下条件成立，压缩性才成立：

$$2\left(-1 + e^{\omega}\right) \ge \frac{\sinh\omega}{\sinh^2\frac{\omega}{2}}\,.$$

当且仅当 $\omega \ge$ 对数 3 时，这才成立。这就是 $x =$ 双曲余弦 $\omega \ge 5/3$ 或 $s \le 3/2$。 □

定理 2 的证明

1. 对于 $m \in \{1,2,3\}$，证明很直接。

2. 对于 $m \in \mathbb{N},\ m > 3$，由前述引理可直接得出证明。关于变量 $s = 1/(\text{双曲余弦}\,\omega - 1)$ 的压缩性不等式为

$$s \le s_m^{(c)} := \frac{1}{\cosh \omega_m^{(c)} - 1}$$

其中，$\omega_m^{(c)}$是方程（43）的唯一正根（若 m 为奇数），或是方程（44）的唯一正根（若 m 为偶数）。

3. 这也可由前面的引理直接推出。在极限情况下，当 $m \to \infty$时，由（43）得到不等式（41），由（44）得到不等式（42）。当 $\omega > 0$时，这两个不等式（41）和（42）等价；它们成立当且仅当 $\omega \ge \log 3$。在变量 s 下，这等价于已知的限制 $s \le 3/2$。 □

6.3 其余结果的证明

命题 2 的证明

我们将证明分为两部分：$x \in (-1,\ 1)$ 的情形和 $x > 1$的情形。

1. 若 $x \in (-1,\ 1)$，则角变量 $\omega = \arccos\ x$, $\omega \in (0,\ \pi)$，且等式（30）使我们可以将多项式 P_m 写成闭式：

$$P_m(\cos\omega) = \frac{2\sin((m-1)\omega) - 4\sin(m\omega) + \sin((m+1)\omega)}{\sin\omega} \tag{45}$$

如果我们将分子中的所有角都化为角 $m\omega$，则可写为

$$= \frac{(3\cos\omega - 4)\sin(m\omega)}{\sin\omega} - \cos(m\omega)\,, \tag{46}$$

然后，由式 (46) 可得，区间 $(0,\ \pi)$ 内 $P_m(\cos\omega)$ 的根就是方程的根

$$\tan(m\omega) = \frac{\sin\omega}{3\cos\omega - 4}\,, \quad \omega \in (0,\pi)\,. \tag{47}$$

右侧的函数，$f(\omega) := \sin\ \omega/(3\cos\ \omega - 4)$，在区间 $[0,\pi]$内连续且有界。它在区间 $(0,\ 2\arctan(1/\sqrt{7}))$ 内递减，在区间 $(2\ \arctan(1/\sqrt{7})\ \pi)$ 内递增。其最大值 $f(0) = f(\pi) = 0$在边界处取得，而最小值为 $f(2\arctan(1/\sqrt{7})) = -1/\sqrt{7}$（见图4）。因此，我们可以断定 $\tan(m\omega)$ 与函数 $f(\omega)$ 相交 $m-1$ 次，因而在区间 $(0,\pi)$ 内有 $m-1$ 个根 $0 < \omega_{m-1}^m < \omega_{m-2}^m < \cdots < \omega_1^m < \pi$。现在回到变量 $x = \cos\omega$，我们可以断定多项式 $P_m(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有 $m-1$ 个根 $x_i^m = \cos\ \omega_i^m$。由于余弦函数在区间 $(0,\pi)$ 内递减，我们可以将 $m-1\ (x)$ 的根写为

$$-1 < x_1^m < x_2^m < \cdots < x_{m-1}^m < 1\,.$$

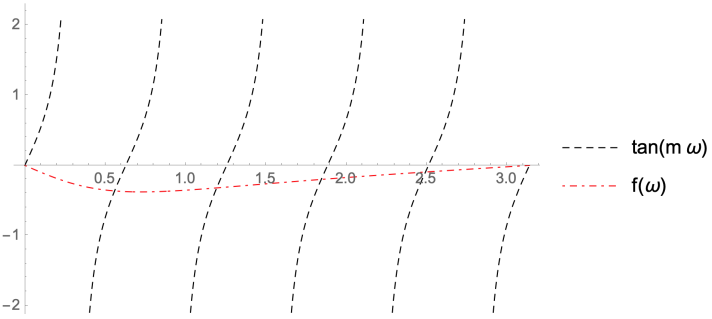

图 4：方程（47）的根 $0 < \omega_{m-1}^m < \omega_{m-2}^m < \cdots < \omega_1^m < \pi$，

2. 若 $x > 1$，我们考虑变量 $\omega =$ 反双曲余弦 x, $\omega \in (0, \infty)$。同样，借助等式 (30)，我们可以将多项式 P_m 写成闭式：

$$P_m(\cosh(\omega)) = \frac{2\sinh((m-1)\omega) - 4\sinh(m\omega) + \sinh((m+1)\omega)}{\sinh\omega} \tag{48}$$

$$= \frac{(3\cosh\omega - 4)\sinh(m\omega)}{\sinh\omega} - \cosh(m\omega)\,, \tag{49}$$

与前一种情况一样，我们将分子改写为关于角 $m\omega$ 的形式。然后，根据（49），P_m(双曲余弦(ω)) 在 $(0, \infty)$ 内的根就是方程的根

$$\coth(m\omega) = \frac{3\cosh\omega - 4}{\sinh\omega}\,, \qquad \omega \in (0, \infty)\,. \tag{50}$$

右侧的函数 $g(\omega) :=$ (3 双曲余弦 $\omega - 4$)/ 双曲正弦 ω 在区间 $(0, \infty)$ 内连续递增，趋于极限值 3。左侧，对于任意 m 的取值，函数双曲余切$(m\omega)$ 连续递减，趋于极限值 1（见图5）。因此，我们可以断定，对于任意 m 的取值，方程（50）在区间 $(0, \infty)$ 内有唯一根 ω_m。现在，回到变量 $x =$ 双曲余弦 ω，可以断定多项式 $P_m(x)$ 在区间 $(1, \infty)$ 内有唯一根 $x_m =$ 双曲余弦 ω_m。

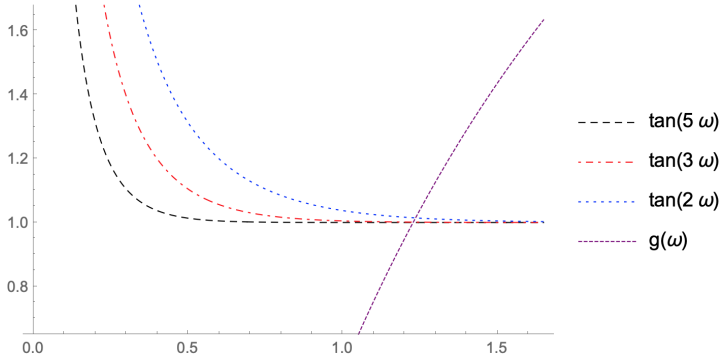

图5：方程（50）的左侧和右侧

当 m 趋于无穷大时，对于任意 $\omega > 0$ 的取值，我们有 $\coth(m\omega) \searrow 1$。因此，由（50）可知，根序列（$\omega_m$）递减收敛于极限值 $\omega_\infty = \log(2 + \sqrt{2})$，它是极限方程的正解

3 双曲余弦 $\omega - 4 =$双曲正弦 ω。现在，以变量 $x =$双曲余弦 ω 表示，我们可以断定，每个多项式 $P_m(x)$ 在区间 (1，∞) 内都有一个正根 $x_m =$双曲余弦 ω_m。由于双曲余弦函数在区间 (0，∞) 内递增，根序列（x_m）递减收敛于极限值 $x_\infty = (6+\sqrt{2})/4$。

$$x_\infty = \cosh \omega_\infty = \cosh \log(2+\sqrt{2}) = (6+\sqrt{2})/4 \approx 1.85355\,. \qquad \square$$

参考文献

[1] Desoer, C. 和 Haneda, H. 矩阵的度量：分析电路分析计算机算法的工具。*IEEE* 电路理论汇刊 *19*, 5 (1972), 480–486.

[2] Faragó, I., Korotov, S. 和 Szabó, T. 离散非定常热方程在一维和二维情形下的非负性保持。*Aplimat*-应用数学杂志 *3*, 2 (2010), 61.[3] Faragó, I. 和 Palencia, C. 改进 Crank–Nicolson 格式在一维热方程最大范数下的稳定性常数估计。《应用数值数学》*42*, 1-3 (2002), 133–140.[4] Ferracina, L. 和 Spijker, M. N. 一般龙格–库塔方法中总变差递减性质的步长限制。*SIAM* 数值分析杂志 *42*, 3 (2004), 1073–1093.[5] Gottlieb, S. 和 Gottlieb, L.-A. J. 线性常系数算子的龙格–库塔时间离散方法的强稳定保持性质。《科学计算杂志》*18*, 1 (2003), 83–109.[6] Gottlieb, S., Ketcheson, D. I. 和 Shu, C.-W. 强稳定保持龙格–库塔方法和多步时间离散。世界科学出版社，2011.[7] Gross, J. L., Mansour, T., Tucker, T. W. 和 Wang, D. G. 多项式序列的根几何 II：类型 (1, 0)。《数学分析与应用杂志》*441*, 2 (2016), 499–528.[8] Higueras, I. 关于强稳定保持时间离散方法。《科学计算杂志》*21*, 2 (2004), 193–223.[9] Higueras, I. 和 Roldán, T. 复合龙格–库塔格式的强稳定保持性质。《科学计算杂志》*80*, 2 (2019), 784–807.

[10] Higueras, I. 和 Roldán, T. Crank-Nicolson 方法应用于周期扩散问题时的正性与压缩性。*arXiv* (2022)。

[11] Horváth, R. 一维热方程数值解的最大范数压缩性。《应用数值数学》*31*，4 (1999), 451–462。

[12] Horváth, Z. 关于Runge–Kutta方法的正性步长阈值。《应用数值数学》*53*, 2-4 (2005), 341–356.

[13]Hundsdorfer, W. 和 Verwer, J. 《时变对流-扩散-反应方程的数值解》。施普林格，2003。[14] Kraaijevanger, J. Runge-Kutta方法的压缩性。*BIT* 数值数学 *31*, 3 (1991), 482–528。[15] Kraaijevanger, J. F. B. M. Runge-Kutta方法的压缩性。*BIT* 数值数学 *31*, 3 (1991), 482–528。[16]Kraaijevanger, J. F. B. M. 热方程离散格式的最大范数压缩性。《应用数值数学》*9*, 6 (1992), 475–492。[17] Liu, L. L. 和 Wang, Y. 仅含实零点的多项式序列的统一方法。应用数学进展 *38*, 4 (2007), 542–560。[18] Nüßlein, S.、Ranocha, H. 和 Ketcheson, D. I. 保正自适应Runge–Kutta方法。应用数学与计算科学通讯 *16*, 2 (2021), 155–179。[19] Qi, F.、Cernanová, V. 和 Semenov, Y. S. 一些与中心 Delannoy 数、切比雪夫多项式和斐波那契多项式有关的三对角行列式。布加勒斯特理工大学科学通报 *A*辑：应用数学与物理 *81*, 1 (2019), 123–136。[20] Rózsa, P. 线性代数及其应用。Muszaki Konyvkiado，（匈牙利语），1976。[21] Shu, C.-W. 全变差递减时间离散。*SIAM* 数值与统计计算杂志 *9*, 6 (1988), 1073–1084。[22] Söderlind, G. 对数范数：历史与现代理论。*BIT* 数值数学 *46*, 3 (2006), 631–652。[23] Spijker, M. N. 初值问题数值解中单步方法稳定性的步长限制。计算数学 *45*, 172 (1985), 377–392。[24] Ström, T. 关于对数范数。*SIAM* 数值分析杂志 *12*, 5 (1975), 741–753。[25] Szabó, T. 一些离散化偏微分方程的定性性质与可靠的燃料电池建模。博士论文，厄特沃什·罗兰大学，布达佩斯，匈牙利，2011。[26] Thomée, V. 线性抛物型方程的有限差分方法。数值分析手册 *1* (1990), 5–196。载于：P. Ciarlet、J. Lions（编），《数值分析手册》第1卷，1990，北荷兰，阿姆斯特丹。[27] Van de Griend, J. 和 Kraaijevanger, J. 初值问题数值解中出现的有理函数的绝对单调性。数值数学 *49*, 4 (1986), 413–424.

[28] Wang, D. G. 和 Zhang, J. 正系数多项式序列的根几何 III：类型 (1，1)。*arXiv* 预印本 *arXiv:1712.06105* (2017)。