arXiv:2301.01072v1 [math.AP] 3 Jan 2023

具有非对称增长条件的分裂型变分问题

Michael Bildhauer 和 Martin Fuchs

摘要

[1] 分裂型变分问题

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i(\partial_i w)\,\mathrm{d}x \to \min$$

在假设具有超线性增长条件的情况下进行研究

$$h_i(t) \le f_i''(t) \le H_i(t)$$

其中，h_i、H_i: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$、$i = 1$、.....、$n$为适当的函数，用于刻画能量密度的增长与椭圆性。这里的主要特点是，对于较大的 $|t|$，不假设存在诸如 $h_i(t) \approx h_i(-t)$和 $H_i(t) \approx H_i(-t)$这样的对称行为。

在上述较弱假设下，我们利用带有某些负指数幂权的 Caccioppoli 型不等式，证明局部极小化子 $u \in L^\infty(\Omega)$的 $|\nabla u|$ 具有高阶可积性。

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界 Lipschitz 区域，并考虑变分积分

$$J[w] := \int_\Omega f\big(\nabla w\big)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

分裂型，即

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad f(Z) = \sum_{i=1}^{n} f_i(Z_i) \tag{1.2}$$

[1]AMS 学科分类：49N60，49N99，35J45 关键词：分裂型变分问题，非对称增长条件，非一致椭圆性

其中严格凸函数 f_i: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 属于 $C^2(\mathbb{R})$ 类, $i = 1$、.....、 n，并且满足一些适当的超线性增长和椭圆性条件。

问题 (1.1)、(1.2) 是非一致椭圆变分问题的一个原型。众所周知, $D^2 f$ 的最大特征值与最小特征值之比，是证明解的正则性的关键量（例如参见 [1], [2], [3]）。读者可以在近期论文 [4] 中找到一份详尽综述，其中涵盖了非一致椭圆变分问题的不同情形。此处不再赘述，相关的一系列参考文献见该论文。

在 [4], 第 1.3 节中，作者讨论了一般的增长条件。粗略地说，这意味着能量密度 f 受到如下意义下的控制:

$$g(|Z|)|\xi|^2 \le D^2 f(Z)(\xi,\xi)\,, \quad |D^2 f(Z)| \le G(|Z|)\,, \tag{1.3}$$

其中, $g(t)$、 $G(t)$是适当的函数: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$。随后，在对 g、 G作出适当假设的条件下, [4]给出了一种正则性理论的一般方法。

我们的这篇短文源于这样一个观察：在 (1.2) 中，并没有明显理由要求函数 f_i满足某种对称性；也就是说，一般而言，我们有 $f_i(t) \neq f_i(-t)$。作为一个模型情形，我们只考虑 ($q_i^{\pm} \ge 1$,$i = 1, \ldots, n$)

$$f_i(t) \approx |t|^{q_i^-} \quad \text{if} \quad t \ll -1\,, \qquad f_i(t) \approx |t|^{q_i^+} \quad \text{if} \quad t \gg 1\,. \tag{1.4}$$

那么，对于 $t \ll 1$ 和 $t \gg 1$，函数 f_i 的行为都恰如 $|t|$的一致幂次。然而，幂次 q_i^-出现在（1.3）的左端，而右端则需要q_i^+ 。

这促使我们研究模型情形（1.2），并在较弱的假设下建立解的正则性结果

$$h_i(t) \le f_i''(t) \le H_i(t) \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1.5}$$

其中函数 h_i、 H_i满足适当条件: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$、 $i = 1$、 $\ldots n$。

研究分裂型变分问题解的正则性还面临另一个相当微妙的困难：在 [5] 中，作者考虑了如下形式的变分积分（$1 \le k < n$）

$$I[w,\Omega] = \int_\Omega \Big[f(\partial_1 w, \ldots, \partial_k w) + g(\partial_{k+1} w, \ldots, \partial_n w) \Big]\, \mathrm{d}x\,, \tag{1.6}$$

其中, f 和 g 分别具有 p 和 q增长（p, $q > 1$）。于是，根据 [5], 定理 1.1, 有界解的正则性得以成立，而无需

任何进一步的、将 p与 q联系起来的条件。证明逐步展开，之所以成立，是因为能量密度分解为两部分。如果如（1.2）所假设的那样，能量密度分解为两个以上的分量，那么处理指数时就必须更加谨慎，并且需要作出一些更严格（但仍相当宽松）的假设。从这个意义上说，[5]中的注释 1.3 可能有些误导。我们指出，如（1.6）所假设的那样，将能量密度分解为两个分量的结构也见于 [6] 及相关论文中。

下文中，我们考虑定义在能量类上的变分积分 (1.1)、(1.2)

$$E_f(\Omega) := \left\{ w \in W^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega f(\nabla w)\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

我们关注属于 $E_f(\Omega)$ 的局部极小化子 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$，即满足

$$\int_\Omega f(\nabla u)\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega f(\nabla w)\,\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

对所有满足 $\operatorname{spt}(u-w) \Subset \Omega$ 的 $w \in E_f(\Omega)$，均有。

记号。我们始终用 $q_i^+ > 1$、$q_i^- > 1$、$1 \le i \le n$ 表示实指数，并对固定的 $1 \le i \le n$ 令

$$\underline{q}_i := \min\{q_i^\pm\}\,, \quad \overline{q}_i := \max\{q_i^\pm\}\,. \tag{1.8}$$

此外，令

$$\Gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad \Gamma(t) = 1 + t^2\,.$$

回顾 (1.4)、(1.5) 中概述的思路，我们用 h_i 和 H_i、$i = 1$、.....、n 表示函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$，它们满足：存在正常数 $\underline{a}_i$、$\overline{a}_i$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{a}_i \Gamma^{\frac{q_i^- - 2}{2}}(|t|) & \text{if } t < -1 \\ \underline{a}_i \Gamma^{\frac{q_i^+ - 2}{2}}(|t|) & \text{if } t > 1 \end{array}\right\} \le h_i(t) \tag{1.9}$$

and

$$H_i(t) \le \begin{cases} \overline{a}_i \Gamma^{\frac{q_i^- - 2}{2}}(|t|) & \text{if } t < -1 \\ \\ \overline{a}_i \Gamma^{\frac{q_i^+ - 2}{2}}(|t|) & \text{if } t > 1 \end{cases}. \tag{1.10}$$

作为一般性假设，我们考虑属于 $C^2(\mathbb{R})$ 类的函数 $f_i\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$，$i = 1$，...，$n$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$

$$h_i(t) \le f_i''(t) \le H_i(t) \tag{1.11}$$

并注意到 (1.11) 立即推出对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，其中常数为 $b_i > 0$

$$|f_i'(t)| \le b_i \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{\frac{q_i^- - 1}{2}}(|t|) \text{ if } t < -1 \\ \\ \Gamma^{\frac{q_i^+ - 1}{2}}(|t|) \text{ if } t > 1 \end{array} \right\}. \tag{1.12}$$

此外，对于所有 $i = 1$、.....、 n，我们得到常数 $\underline{c}_i$、 $\overline{c}_i > 0$

$$\underline{c}_i \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{\frac{q_i^-}{2}}(|t|) \text{ if } t < -1 \\ \\ \Gamma^{\frac{q_i^+}{2}}(|t|) \text{ if } t > 1 \end{array} \right\} \le f_i(t) \le \overline{c}_i \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{\frac{q_i^-}{2}}(|t|); \text{if } t < -1 \\ \\ \Gamma^{\frac{q_i^+}{2}}(|t|) \text{ if } t > 1 \end{array} \right\}. \tag{1.13}$$

采用上述记号，我们的主要结果如下。

定理 1.1. 假设对于 $i = 1$、.....、 n，函数 f_i: $\mathbb{R} \to [0, \infty)$ 属于 $C^2(\mathbb{R})$ 类，并满足 (1.11)，其中 h_i、 H_i 如 (1.9)、(1.10) 中所给。

采用记号 (1.8)，我们还假设对于每个固定的 $1 \le i \le n$

$$\overline{q}_j \;<\; 2\underline{q}_i + 2 \qquad \textit{for all} \qquad i < j \le n\,, \tag{1.14}$$

$$\overline{q}_j \;<\; 3\underline{q}_i + 2 \qquad \textit{for all} \qquad 1 \le j < i\,. \tag{1.15}$$

若 $u \in L^\infty(\Omega) \cap E_f(\Omega)$ 表示 (1.1)、(1.2) 的一个局部极小值，即 o f

$$J[w] = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n f_i(\partial_i w) \right] \mathrm{d}x\,,$$

则存在一个实数 $\delta > -1/2$，使得对于每个 $1 \le i \le n$

$$\int_B f_i(\partial_i u) \Gamma^{1+\delta}(|\partial_i u|) \eta^{2k} \,\mathrm{d}x \le c\,. \tag{1.16}$$

注 1.1. 如下文注 5.1 和注 5.2 所述，我们在以下意义上恢复了 *[5]* 的结果：在 $n = 2$ （或相关情形）下，(1.14) 和 (1.15) 是多余的，并且

$$q_1^+ = q_1^-\,, \quad q_2^+ = q_2^-\,.$$

定理 1.1 描述了我们所考虑的典型情形。不过，证明并不局限于这一特定情形，因此得到下文定理 2.1 中陈述的推广版本。

在第 3 节中，我们简要概述了通过希尔伯特–哈阿尔解进行正则化的过程；第 4 节则给出了第 5 节迭代过程所需的主要不等式。由此完成定理 2.1 的证明，进而完成定理 1.1 的证明。

2 f 的精确假设

适用的更大一类能量密度由以下假设给出。

假设 2.1。能量密度 f,

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\,,\quad f(Z)=\sum_{i=1}^{n}f_i(Z_i)\,,$$

在（1.2）中引入，假定满足以下条件。

i) 函数 f_i: $\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $i=1,\ldots,n$ 属于 $C^2(\mathbb{R})$ 类，且对所有 $t\in\mathbb{R}$，有 $f_i''(t)>0$。

对于 $1\le i\le n$，我们假设其具有超线性增长，即

$$\lim_{t\to\pm\infty}|f_i'(t)|=\infty$$

且至多具有多项式增长，即存在某个 $s>0$，使得当 $|t|$ 足够大时

$$f_(t)\le c|t|^s\quad with\ a\ finte\ constant\ c\,.$$

ii) 对于具有指数 $\delta_i\ge 0$、$\theta_i\ge 0$ 的 $i\in\{1,\ldots,n\}$，满足

$$\theta_i<1-\delta_i \tag{2.1}$$

我们假设，对于所有充分大的 $|t|$

$$c_1\Gamma^{1-\delta_i}(|t|)f_i''(t)\ \le\ f_i(t)\ \le\ c_2f_i''(t)\Gamma^{1+\theta_i}(|t|)\,, \tag{2.2}$$

$$|f_i'(t)|^2\ \le\ c_3f_i''(t)f_i(t)\Gamma^{\theta_i}(|t|)\,, \tag{2.3}$$

其中 c_1、c_2 和 c_3 表示正常数。

iii) 我们令

$$\Gamma^{\frac{q_i^{\pm}}{2}}(t)=\left\{\begin{array}{l}\Gamma^{\frac{q_i^{-}}{2}}(|t|)\ if\ t<0\\[2ex]\Gamma^{\frac{q_i^{+}}{2}}(|t|)\ if\ t\ge 0\end{array}\right\}.$$

并假设 f_i, $i=1,\ldots,n$ 满足.....，其中正常数 c_4,c_5 满足.....，且当 $|t|$ 充分大时 .....

$$c_4\Gamma^{\frac{q_i^{\pm}}{2}}(|t|)\le f_i(t)\le c_5\Gamma^{\frac{q_i^{\pm}}{2}}(|t|)\,. \tag{2.4}$$

注 2.1. i) 若 f_i 是幂增长函数，例如 $f_i(t) = (1+t^2)^{p_i/2}$，其中 $p_i > 1$ 固定，则有

$$c\Gamma(|t|)f_i''(t) \le f_i(t) \le c\Gamma(|t|)f_i''(t)\,,$$

即 (2.2)。(1.9)–(1.13) 给出的非对称模型情形也同样如此。

ii) 由凸性可知（例如参见 *[7],* 练习 1.5.9，第 53 页），(2.3) 的右端和 (1.13) 的右端蕴含 (2.4)。

iii) 条件 (2.1) 在形式上对应于标准 (p,q) 情形中的条件 $q < p+2$（例如参见 *[8],* 第 5 章及其中引用的参考文献）。

iv) 假设 2.1, *iii)* 不失一般性地作出。事实上，根据 $f_i'' > 0$，我们知道对于任意 $i \in \{1,\dots,n\}$，函数 f_i' 都是递增函数；并且由假设 2.1, *i)*，令

$$s^+ := \inf_s \lim_{t\to\infty} \frac{f'(t)}{t^s} < \infty\,, \quad s^- := \inf_s \lim_{t\to-\infty} \frac{|f'(t)|}{|t|^s} < \infty\,.$$

那么，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，我们可以令 (2.4) 的右端取指数 $s^\pm + 1 + \varepsilon$，左端取指数 $s^\pm + 1 - \varepsilon$。按照定理 2.1 的证明过程，我们不失一般性地可以假设 (2.4) 成立。

定理 2.1. 假设满足假设 2.1。采用上述记号，我们进一步假设，对于每个固定的 $1 \le i \le n$

$$\overline{q}_j \;<\; \frac{2\underline{q}_i(1-\delta_i)}{1+2\theta_i} + 2(1-\delta_i) \qquad \textit{for all} \qquad i < j \le n\,, \tag{2.5}$$

$$\overline{q}_j \;<\; \frac{2}{1+2\theta_i}\left[\frac{\underline{q}_i}{2}(1-\delta_i)\Big[2+\frac{1}{1-\delta_i}\Big] - \theta_i(1+\overline{q}_j)\right] + 2(1-\delta_i)$$
$$\textit{for all} \qquad 1 \le j < i\,. \tag{2.6}$$

若 $u \in L^\infty(\Omega) \cap E_f(\Omega)$ 表示 (1.1)、(1.2) 的一个局部极小值，即

$$J[w] = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n f_i(\partial_i w)\right] \mathrm{d}x\,,$$

则存在一个实数 $\delta > -1/2$，使得对于每个 $1 \le i \le n$

$$\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\delta}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \le c\,. \tag{2.7}$$

备注 2.2。特别地，我们注意到，当 δ_i, θ_i 足够小时，(2.5)、(2.6) 化简 *(1.15)* 为 (1.14)。

3 关于正则化的一些说明

我们首先需要进行正则化过程，以确保下文给出的表达式有定义。我们按照 [5] 的第2节，并固定一个球 $D \Subset \Omega$。若 u 表示满足 (1.7) 意义下的局部极小值，且 $\varepsilon > 0$ 足够小，则我们考虑 u 关于半径 ε的光滑化 $(u)_\varepsilon$ 。我们考虑狄利克雷问题

$$\int_D \sum_{i=1}^n f_i(\partial_i w)\,\mathrm{d}x \to \min$$

在所有具有边界数据（u）$_\varepsilon$的利普希茨映射$\overline{D} \to \mathbb{R}$ 中。根据例如 [9], ，该问题存在唯一的（希尔伯特-哈阿尔）解 u_ε 。

正如 [5] 引理2.1和引理2.2中所述，我们得到：

引理3.1。设 $\underline{q} := \min^{1\le i\le n} \underline{q}_i$

i) 我们有 $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad in\, W^{1,\underline{q}}(D)\,, \qquad \int_D \sum_{i=1}^n f_i(\partial_i u_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \to \int_D \sum_{i=1}^n f_i(\partial_i u)\,\mathrm{d}x\,.$$

ii) 存在一个有限常数 $c > 0$ ，其不依赖于 ε ，使得

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \le c\,.$$

iii) 对任意 $\alpha < 1$ ，我们有 $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(D) \cap W^{2,2\,\mathrm{loc}}(D)$。

接下来我们按如下方式论证：考虑 (1.1)、(1.2) 的一个局部极小值 u ，以及使泛函取极小值的逼近序列 $\{u_\varepsilon\}$

$$J[w, D] := \int_D \sum_{i=1}^n f_i(\partial_i w_i)\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

关于数据 $(u)_\varepsilon$。特别地，我们有一个局部 $J[w, D]$-极小化子的序列。我们将下一节的先验结果应用于 u_ε ，定理 1.1 即由引理3.1 在 $\varepsilon \to 0$ 处取极限得到。

4 一般不等式

本节的主要结果是命题 4.2，它不依赖于特定的结构 (1.9)。

我们将采用以下 Caccioppoli不等式的变体，该变体最初由 [10] 引入。关于涉及负指数幂的 Caccioppoli型不等式，我们还请参阅 [11] 的第 6 节，特别是命题6.1。

引理 4.1. 固定 $l \in \mathbb{N}$，并假设 $\eta \in C_0^\infty(D)$, $0 \le \eta \le 1$。若我们考虑变分泛函的一个局部极小值 $u \in W^{1,\infty}_{\text{局部}}(D) \cap W^{2,2}_{\text{局部}}(D)$

$$I[w] = \int_D g(\nabla w)\,\mathrm{d}x$$

其能量密度为 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 属于 C^2 类，且满足对所有 Y、$Z \in \mathbb{R}^n$, $D^2g(Z)(Y,Y) > 0$，则对任意固定的 $i \in \{1,\dots,n\}$，有

$$\begin{aligned}\int_D & D^2g(\nabla u)\big(\nabla\partial_i u, \nabla\partial_i u\big)\eta^{2l}\Gamma^\beta(|\partial_i u|)\,\mathrm{d}x \\ &\le c\int_D D^2g(\nabla u)(\nabla\eta,\nabla\eta)\eta^{2l-2}\Gamma^{1+\beta}(|\partial_i u|)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对任意 $\beta > -1/2$。

在本文的其余部分，我们始终考虑一个固定的球 $B = B_{2r}(x_0) \Subset D$。采用这一记号，我们有如下辅助命题。

命题 4.1. 假设我们有假设 2.1 的 $i)$，并令 $\eta \in C_0^\infty(B)$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ 在 $B_r(x_0)$ 上，$|\nabla\eta| \le c/r$。此外，我们假设 $u \in L^\infty(D) \cap W^{1,\infty}_{\text{局部}}(D) \cap W^{2,2}_{\text{局部}}(D)$。

那么，对于固定的 $\gamma \in \mathbb{R}$，当所有 $k > 0$ 足够大且对于 $i = 1,\dots,n$ 时，我们有起始不等式（不对 i 求和）

$$\begin{aligned}&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\ &\le\ c\Bigg[1 + \int_B |\partial_i\partial_i u|\Gamma^\gamma(|\partial_i u|) f_i(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \int_B |\partial_i\partial_i u|\,|f_i'|(\partial_i u)\,\Gamma^{\frac12+\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\Bigg] \qquad (4.1)\end{aligned}$$

注4.1. i) 命题 4.1 的证明思路基于利用 u 的有界性进行分部积分。Choe *[12],* 已经采用过这种拟设，其中所有相关量都依赖于 $|\nabla u|$。这里主要的新特点是使用能量密度 f，它不依赖于 ∇u 的模。

ii) 我们注意到，证明命题 4.1 时并不需要 u 具有极小化性质。

命题 4.1 的证明。固定 $i \in \{1,\dots,n\}$ 后，我们利用分部积分得到

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_B |\partial_i u|^2 f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x + \int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_B u\partial_i\Big[\partial_i u f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\Big]\,\mathrm{d}x + \int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\le c\int_B |\partial_i\partial_i u|\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|) f_i(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_B |\partial_i\partial_i u|\,|\partial_i u|\,|f_i'|(\partial_i u)\,\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_B |\partial_i u| f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k-1}|\partial_i\eta|\,\mathrm{d}x + \int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&= I_{1,i} + I_{2,i} + I_{3,i} + I_{4,i}\,. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

在 (4.2) 中，我们讨论 $I_{3,\ i}$：当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，我们估计

$$\begin{aligned}
I_{3,i} &\le \int_B |\partial_i u| f_i^{\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{\frac{\gamma}{2}}(|\partial_i u|)\eta^{k} f_i^{\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{\frac{\gamma}{2}}(|\partial_i u|)\eta^{k-1}|\nabla\eta|\,\mathrm{d}x \\
&\le \varepsilon\int_B |\partial_i u|^2 f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}dx \\
&\quad + c(\varepsilon, r)\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

(4.3) 右端的第一个积分被吸收到左端

(4.2) 中，即

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\le\ I_{1,i}+I_{2,i}+c(\varepsilon,r)\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad+\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\le\ I_{1,i}+I_{2,i}+c(\varepsilon,r)\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

讨论剩余的积分时，我们回想起函数 $f_i(t)\Gamma^{1+\gamma}(|t|)$ 至多具有多项式增长，因此可以对函数 $\varphi(t)=f_i(t)\Gamma^{\gamma}(|t|)$ 和 $\psi(t):=f_i(t)\Gamma^{1+\gamma}(|t|)$ 应用下文的辅助引理4.2，从而存在某个 $\rho>0$，使得对所有 $t\in\mathbb{R}$

$$f_i(t)\Gamma^{\gamma}(|t|)\le c\big[f_i(t)\Gamma^{1+\gamma}(|t|)\big]^{\frac{1}{\rho}}+c\,. \qquad (4.5)$$

利用 (4.5)，当 $\tilde\varepsilon>0$ 充分小时，对于 $k>\rho^*=\rho/(\rho-1)$，我们估计

$$\begin{aligned}
&c(\varepsilon,r)\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\le\ c(\varepsilon,r)\int_B \big[f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma}(|\partial_i u|)\big]^{\frac{1}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho^*}-2}\,\mathrm{d}x+c \\
&\quad\le\ \tilde\varepsilon\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x+c(\tilde\varepsilon,\varepsilon,r)\int_B \eta^{2(k-\rho^*)}\,\mathrm{d}x+c\,. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

不等式 (4.4) 和 (4.6) 完成了命题的证明：将 (4.6) 右端的第一个积分吸收到 (4.4) 的左端即可。

□

下面给出辅助引理的一个初等证明。

引理 4.2. 对于 $m\in\mathbb{N}$，我们考虑函数 $\varphi,\psi\colon\ \mathbb{R}^m\to[0,\infty)$，使得对某个 $\tau>0$ 及所有 $X\in\mathbb{R}^m$，有 $\psi(X)\le c\Gamma^{\tau}(|X|)$。假设存在某个 $\varepsilon>0$，使得对所有 $X\in\mathbb{R}^n$

$$\varphi(X)\le c\Gamma^{-\varepsilon}(|X|)\psi(X)\,.$$

那么存在一个实数 $\rho>1$ 和一个常数 $C>0$，使得

$$\varphi(X)\le\big[\psi(X)\big]^{\frac{1}{\rho}}+C\,.$$

证明。令 $\delta := \varepsilon/\tau$，即对所有 $X \in \mathbb{R}^m$

$$1 + \psi^\delta \le 1 + \Gamma^\varepsilon \le 2\Gamma^\varepsilon \,,$$

因此，根据假设

$$\begin{aligned} \varphi(X) &\le c\big[1+\psi^\delta(X)\big]^{-1}\psi(X) \\ &\le \left\{ \begin{array}{ll} c & \text{if} \quad \psi^\delta(X) \le 1 \\ c\psi^{1-\delta}(X) & \text{if} \quad \psi^\delta(X) > 1 \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

取 $\rho = 1/(1-\delta)$，引理即得。 □

借助命题 4.1，我们现在证明本节的主要不等式。

命题 4.2. 假设满足假设 2.1，并令 $\eta \in C_0^\infty(B), 0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ 在 $B_r(x_0)$, $|\nabla\eta| \le c/r$上。此外，假设$u \in L^\infty(D) \cap W^{1,\,\infty}{}_{\text{局部}}(D) \cap W^{2,\,2}{}_{\text{局部}}(D)$ 是 (3.1) 的局部极小值。

对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们选取满足 $\theta_i < \varepsilon_i < 1 - \delta_i$ 的 ε_i（回忆 (2.1)），并令 $\gamma_i + \varepsilon_i =: \beta_i$，其中下文始终假设 $\beta_i > -1/2$。

那么，对于任意充分大的实数 $k > 0$，我们有

$$\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \le c\sum_{j\neq i}\int_B f_j''(\partial_j u)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\,. \quad (4.7)$$

证明。回顾起始不等式（4.1），

$$\int_B f_i(\nabla u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \le c\Big[1 + I_{1,i} + I_{2,i}\Big]\,, \quad (4.8)$$

其中固定 $i \in \{1, \dots, n\}$。对于固定的 β_i，我们如上进行估计

$$\begin{aligned} I_{1,i} &= \int_B |\partial_i\partial_i u| f_i''^{\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{\frac{\beta_i}{2}}(|\partial_i u|)(f_i'')^{-\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{-\frac{\beta_i}{2}}(|\partial_i u|) \\ &\qquad \cdot\Gamma^{\gamma_i}(|\partial_i u|) f_i(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\ &\le c\int_B f_i''(\partial_i u)|\partial_i\partial_i u|^2\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + c\int_B (f_i'')^{-1}(\partial_i u)\Gamma^{\gamma_i-\varepsilon_i}(|\partial_i u|) f_i^2(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.9) 右端的第二个积分借助 (2.2) 的右端处理，同时还使用引理 4.2（回忆 $\varepsilon_i > \theta_i$）

$$\begin{aligned}
&\int_B (f_i'')^{-1}(\partial_i u)\Gamma^{\gamma_i-\varepsilon_i}(|\partial_i u|)f_i^2(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_B \Big[f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i-(\varepsilon_i-\theta_i)}(|\partial_i u|)\Big]\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_B \Big[f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\Big]^{\frac{1}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho^*}}\,\mathrm{d}x + c \\
&\leq \varepsilon\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon, r)\,. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

吸收项后，至此已证明（利用 (4.8) - (4.10)）

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\leq c\left[1 + \int_B f_i''(\partial_i u)|\partial_i\partial_i u|^2\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x + I_{2,i}\right]. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

考虑 $I_{2,\ i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$。令 $\beta_i > -1/2$ 如上所述，则有

$$\begin{aligned}
I_{2,i} &= \int_B |\partial_i\partial_i u| f_i''^{\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{\frac{\beta_i}{2}}(|\partial_i u|)(f_i'')^{-\frac{1}{2}}(\partial_i u)\Gamma^{-\frac{\beta_i}{2}}(|\partial_i u|) \\
&\qquad \cdot\Gamma^{\frac{1}{2}+\gamma_i}(|\partial_i u|)|f_i'|(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\leq c\int_B f_i''(\partial_i u)|\partial_i\partial_i u|^2\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + c\int_B (f_i'')^{-1}(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i-\varepsilon_i}(|\partial_i u|)|f_i'|^2(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

右端 (4.12) 中的第一个积分已出现在 (4.11) 中

第二个积分则利用 (2.3) 和引理 4.2 处理（回顾 $\varepsilon_i > \theta_i$）

$$\begin{aligned}
&\int_B (f_i'')^{-1}(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i-\varepsilon_i}(|\partial_i u|)|f_i'|^2(\partial_i u)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq \int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i-(\varepsilon_i-\theta_i)}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq \int_B \Big[f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\Big]^{\frac{1}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho^*}}\,\mathrm{d}x + c \\
&\quad\leq \varepsilon\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x + c(\varepsilon, r) \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

并且再次吸收右端的积分。

总之，借助 (4.12) 和 (4.13)，(4.11) 对于 $i = 1, \ldots, n$ 意味着

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq c\left[1 + \int_B f_i''(\partial_i u)|\partial_i\partial_i u|^2\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\right]. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

讨论 (4.14) 的右端时，我们应用引理 4.1，其中令 $f(Z) = \sum_{j=1}^n f_j(Z_j)$ 并固定 $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i''(\partial_i u)|\partial_i\partial_i u|^2\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq c\int_B D^2 f(\nabla u)\big(\partial_i\nabla u, \partial_i\nabla u\big)\Gamma^{\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq c\int_B D^2 f(\nabla u)\big(\nabla\eta, \nabla\eta\big)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leq c(r)\sum_{j=1}^n\int_B f_j''(\partial_j u)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\,. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

对于 (4.15) 右端的 $j = i$，我们现在应用

(2.2) 的左端，并再次应用引理 4.2，得到结果（回忆 $\delta_i+\varepsilon_i<1$）

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i''(\partial_i u)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\gamma_i+\delta_i+\varepsilon_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x\\
&\leq \int_B \Big[f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\Big)\Big]^{\frac{1}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho}}\eta^{\frac{2k}{\rho^*}-2}\,\mathrm{d}x+c\\
&\leq \varepsilon\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x+c(\varepsilon,r)\,. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

注意，(4.16) 右端的积分可以吸收到 (4.14) 的左端中。这就证明了命题 4.2。 □

5 迭代

我们先给出一个初等命题，回顾并联系问题中的相关参数。

命题 5.1. 取上述的 $q_i^{\pm}$, $\underline{q}_i$, $\overline{q}_i$, δ_i, θ_i, β_i, γ_i, ε_i, $i=1,\dots,n$，并进一步令 $\vartheta_i=:1-\delta_i$ 且

$$\omega_i^{\pm}:=\frac{q_i^{\pm}}{2}+\gamma_i\,,\quad i\in\{1,\dots,n\}\,.$$

固定 $\tau\geq 0$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$，并选择 γ_i，使得（$M>0$ 表示任意一个固定数）

$$1+\gamma_i<\left\{\begin{array}{cc}\dfrac{\underline{q}_i\vartheta_i}{2}\dfrac{2+\tau}{\overline{q}_j-2\vartheta_i}-\varepsilon_i\vartheta_i\dfrac{\tau+\overline{q}_j/\vartheta_i}{\overline{q}_j-2\vartheta_i} & \text{if}\ \ \overline{q}_j>2\vartheta_i\\ M & \text{if}\ \ \overline{q}_j\leq 2\vartheta_i\end{array}\right\}. \qquad (5.1)$$

由此可得（对于 $q_j^{\pm}$ 和 $q_i^{\pm}$ 的任意组合）

$$q_j^{\pm}\frac{1+\beta_i}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}<2\vartheta_i\frac{1+\frac{q_i^{\pm}}{2}+\gamma_i}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}+\tau\vartheta_i\,, \qquad (5.2)$$

证明。在 $\overline{q}_j>2\vartheta_i$ 的情形下，我们注意到

$$1+\gamma_i<\frac{\underline{q}_i\vartheta_i}{2}\frac{2+\tau}{\overline{q}_j-2\vartheta_i}-\varepsilon_i\vartheta_i\frac{\tau+\overline{q}_j/\vartheta_i}{\overline{q}_j-2\vartheta_i}\,,$$

这等价于

$$(1+\gamma_i)\big[\overline{q}_j - 2\vartheta_i\big] < \underline{q}_i\vartheta_i + \tau\left[\frac{\underline{q}_i\vartheta_i}{2} - \varepsilon_i\vartheta_i\right] - \varepsilon_i\overline{q}_j\,.$$

将其写成如下形式

$$\overline{q}_j(1+\beta_i) < 2\vartheta_i\left[1+\gamma_i+\frac{\underline{q}_i}{2}\right] + \tau\vartheta_i\left[\frac{\underline{q}_i}{2} - \varepsilon_i\right]$$

并回想一下，根据定义有 $\omega_i^{\pm} - \beta_i = (q_i^{\pm}/2) - \varepsilon_i$，我们便得到一个等价的不等式

$$\overline{q}_j\frac{1+\beta_i}{\omega_i^{\pm}-\beta_i} < 2\vartheta_i\frac{1+\frac{\underline{q}_i}{2}+\gamma_i}{\omega_i^{\pm}-\beta_i} + \tau\vartheta_i\frac{\underline{q}_i - 2\varepsilon_i}{q_i^{\pm}-2\varepsilon_i}\,. \quad \square$$

到目前为止，由于我们采用的特殊拟设依赖于 t 而非 $|t|$，因此无需假设 q_i^+ 与 q_i^- 之间存在任何关系。

为完成定理 2.1 的证明，尚需处理 (4.7) 右端的混合项。当然，此时已无法再针对固定的 i 运用结构条件进行论证，也就是说，不能再假设 $q_i^{\pm}$ 彼此分离，且各自位于互不相交的区域中。

在本节余下部分中，我们假设定理 2.1 的假设均成立。

考虑集合 $U \subset \Omega$ 和一个 C^1-函数 $v\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$。对任意 $i \in \{1,\dots,n\}$，令

$$U \cap [\partial_i v \geq 0] =: U_i^+[v] =: U_i^+\,, \qquad U \cap [\partial_i v < 0] =: U_i^-[v] =: U_i^-\,,$$

特别地 u 可以写成不相交并

$$U = U_i^+ \cup U_i^-\,.$$

且对每个 $1 \leq i \leq n$。

使用这一记号，并回顾命题 4.2 和式 (2.2) 的左端

我们对每个 $1 \le i \le n$ 都有

$$\begin{aligned}
&\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\le\ c\sum_{j\neq i}\int_B f_j''(\partial_j u)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\le\ c\sum_{j\neq i}\int_B f_j(\partial_j u)\Gamma^{\delta_i-1}(|\partial_j u|)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

固定 $i \in \{1,\dots,n\}$。对于任意 $j \in \{1,\dots,n\}$，我们令

$$\kappa_i^{\pm} = \frac{1+\omega_i^{\pm}}{1+\beta_i}, \qquad \hat{\kappa}_i^{\pm} = \frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}.$$

这就得到了固定 $1 \le i \le n$ 且 $\varepsilon > 0$ 充分小时的情形（注意，球 B 按照函数 $\partial_i u$ 分为两部分）

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i}\int_B f_j(\partial_j u)\Gamma^{\delta_i-1}(|\partial_j u|)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\le c\ \sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\int_{B_{i,\pm}}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)\Gamma^{\delta_i-1}(|\partial_j u|)\Gamma^{1+\beta_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k-2}\,\mathrm{d}x \\
&\le\ \sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\Bigg[\varepsilon\int_{B_{i,\pm}}\Gamma(|\partial_i u|)^{1+\omega_i^{\pm}}\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\quad +c(\varepsilon)\int_{B_{i,\pm}}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|)\,\mathrm{d}x\Bigg]. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

由 (2.4)，当 $|\partial_i u|$ 充分大时，我们在 $B_{i,\pm}$ 上有 $\Gamma(|\partial_i u|)^{q_i^{\pm}/2} \le c f_i(\partial_i u)$，因此根据 $\omega_i^{\pm}$ 的定义

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\int_{B_{i,\pm}}\Gamma(|\partial_i u|)^{1+\omega_i^{\pm}}\eta^{2k}\,\mathrm{d}x \\
&\le (n-1)\varepsilon\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{1+\gamma_i}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x + c
\end{aligned}$$

并且，按照惯例，右端的积分可以吸收到 (5.3 中).

最后，我们将借助迭代过程证明，对于每个$1 \le i \le n$

$$\sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\int_{B_{i,\pm}} \big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}} \Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|)\,\mathrm{d}x \le c\,, \tag{5.5}$$

由此完成定理 1.1 的证明。

事实上，假设选取 $\vartheta_i = 1-\delta_i$ 时 (5.1) 成立。那么我们可以应用命题 5.1，由 (5.2) 可知，在 $\overline{q} > 2\vartheta_i$ 的情况下

$$\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}+(\delta_i-1)\frac{\tau}{2}}(|\partial_j u|) \le c\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{-\frac{1+\beta_i}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}\,.$$

因此我们得到

$$\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}\Gamma^{(\delta_i-1)}} \Gamma^{\frac{1+\omega^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|) \le c\big(1+f_j(\partial_j u)\big)\Gamma^{(1-\delta_i)\frac{\tau}{2}}(|\partial_j u|)\,。 \tag{5.6}$$

在 $\overline{q}_j \le 2\vartheta_i$ 的情况下，我们有

$$-(1+f_j(\partial_j u) \le c\Gamma^{1-\delta_i}(|\partial_j u|)\,,$$

因此

$$\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|) \le c$$

并且 (5.6) 也成立。

我们注意到，不等式 (5.6) 关于指标 j 是一致表述的，而符号 $\pm$ 仅与 $\partial_i u$ 有关。

不等式 (5.6) 是以下迭代的主要工具，该迭代将导出结论 (5.5)。

$\underline{i=1.}$

取 $\gamma_i > -1/2+\theta_i$ 充分接近 $-1/2+\theta_i$，若有，则 (5.1) 在取 $\tau = 0$ 时成立

$$\overline{q}_j < \frac{2\underline{q}_i(1-\delta_i)}{1+2\theta_i} + 2(1-\delta_i) \qquad \text{for all} \qquad 2 \le j \le n\,, \tag{5.7}$$

而且 (5.7) 正是针对 $i=1$ 的假设 (2.5)。

由 (5.1) 可推出针对 $i=1$ 的 (5.6)，而针对 $i=1$ 且对所有 $2\le j\le n$，取 $\tau=0$ 即可由 (5.6) 得出 (5.5)。

$$\sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\int_{B_i,\pm}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_1^{\pm}}{\omega_1^{\pm}-\beta_1}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_1^{\pm}}{\omega_1^{\pm}-\beta_1}}(|\partial_j u|)$$

$$\le c\int_B\big(1+f_j(\partial_j u)\big)\,\mathrm{d}x\le c\,. \tag{5.8}$$

回到 (5.3) 和 (5.4)，代入 (5.8)，并利用 $1+\gamma_i>1/2$，我们得到

$$\int_B f_1(\partial_1 u)\Gamma^{\frac12}(|\partial_1 u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\le c\,. \tag{5.9}$$

注 5.1. 在 *[5]* 中，我们有 $\delta_i=\theta_i=0$, $i=1,2$，且不失一般性，考虑情形 $p=q_2\le q_1=q$。此外，$\overline{q}_j=\underline{q}_j=q_j$, $j=1,2$。在此情形下，我们显然有 (5.7)。

$\underline{1<i\le n}$。

假设除 (5.7) 外，我们还有（再次比较 (2.5)）

$$\overline{q}_j<\overline{q}_j<\frac{2\underline{q}_i(1-\delta_i)}{1+2\theta_i}+2(1-\delta_i)\qquad\text{for}\qquad i+1\le j\le n\,. \tag{5.10}$$

采用推导 (5.8) 时相同的论证，我们对所有 $i+1\le j\le n$ 有

$$\sum_{j>i}\sum_{\pm}\int_{B_i,\pm}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|)\le c\,. \tag{5.11}$$

此外，我们假设通过迭代，对 $1\le j<i$ 有 (5.9)，即

$$\int_B f_j(\partial_j u)\Gamma^{\frac12}(|\partial_j u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\le c\,,\quad 1\le j<i\,. \tag{5.12}$$

然后，我们选取 $\tau=(1-\delta_i)^{-1}$，回到 (5.1)。对于与 $-1/2+\theta_i$ 充分接近的 $\gamma_i>-1/2+\theta_i$ 和 γ_i，我们得到条件

$$\overline{q}_j<\frac{2}{1+2\theta_i}\left[\frac{\underline{q}_i}{2}(1-\delta_i)\Big[2+\frac{1}{1-\delta_i}\Big]-\theta_i(1+\overline{q}_j)\right]+2(1-\delta_i)\,, \tag{5.13}$$

$1\le j<i$，而（5.13）正是条件（2.6）。

由（5.1）可再次得到（5.6），此时 $\tau=(1-\delta_i)^{-1}$，因此

$$\sum_{j<i}\sum_{\pm}\int_{B_i,\pm}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_i^{\pm}}{\omega_i^{\pm}-\beta_i}}(|\partial_j u|)\,\mathrm{d}x$$

$$\le c\sum_{j<i}\int_B\big(1+f_j(\partial_j u)\big)\Gamma^{\frac12}(|\partial_j u|)\,\mathrm{d}x\le c\,, \tag{5.14}$$

由 (5.11) 和 (5.14) 可得

$$\sum_{j\neq i}\sum_{\pm}\int_{B_i,\pm}\big(1+f_j(\partial_j u)\big)^{\frac{1+\omega_1^{\pm}}{\omega_1^{\pm}-\beta_1}}\Gamma^{(\delta_i-1)\frac{1+\omega_1^{\pm}}{\omega_1^{\pm}-\beta_1}}(|\partial_j u|)\le c\,, \tag{5.15}$$

与情形 $i=1$ 完全相同地可知

$$\int_B f_i(\partial_i u)\Gamma^{\frac12}(|\partial_i u|)\eta^{2k}\,\mathrm{d}x\le c\,, \tag{5.16}$$

因此，利用 (5.16)，我们在 (5.13) 的迭代中推进一步。由此完成定理 1.1 的证明。 □

注 5.2. 使用注 5.1 中的记号，在 *[5]* 所讨论的情形下，条件 (5.1) 化为

$$1+\gamma_1<\frac{q}{2}\frac{3}{p-2}$$

鉴于

$$\frac{q}{2}\frac{3}{p-2}\ge\frac{q}{2}\frac{3}{q-2}>\frac32$$

我们可以选择 $\gamma_1=1/2$，而无需对 p 和 q 之间的关系施加任何条件，因此，*[5]* 中给出的结果可立即作为推论得出。

参考文献

[1] Giaquinta, M. 增长条件与正则性：一个反例。Manuscripta Math., 59(2):245–248, 1987年。[2] Marcellini, P. 非标准增长条件下变分法积分泛函极小化子的正则性。Arch. Rational Mech. Anal., 3:267–284, 1989年。[3] Marcellini, P. 一类无增长条件椭圆方程组的处处正则性。Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 23(1):1–25, 1996年。

[4] Beck, L.; Mingione, G. Lipschitz界与非一致椭圆性。纯粹与应用数学通讯，LXXIII:944–1034, 2020年。[5] Bildhauer, M.; Fuchs, M.; Zhong, X. 分裂型变分积分标量局部极小化子的正则性理论。比萨高等师范学院科学类年刊 (5), 6(3):385–404, 2007年。[6]Breit, D. 关于次二次增长的分裂型变分问题的一则注记。巴塞尔数学档案，94(5):467–476, 2010年。[7] Dacorogna, B. 变分法导论。帝国学院出版社，伦敦，第3版, 2015年。[8] Bildhauer, M. 凸变分问题：线性、近线性及各向异性增长条件，数学讲义第1818卷。施普林格，柏林，2003年。[9] Massari, U., Miranda, M. 余维一极小曲面，北荷兰数学研究第91卷。北荷兰出版公司, 阿姆斯特丹，1984年。[10] Bildhauer, M.; Fuchs, M. 具有线性增长条件的分裂型变分问题。J. Math. Sci. (N.Y.), 数学分析问题，第105号, 250(2):45–58, 2020年。[11] Bildhauer, M.; Fuchs, M. 变分积分极小化子的整体正则性：二维分裂型问题及其向一般各向异性情形的推广。椭圆抛物方程杂志，8(2):853–884, 2022年。[12] Choe, H.J. 具有非标准增长的某些泛函的极小化子的内部行为。非线性分析，19(10):933–945, 1992年。