arXiv:2301.01073v1 [math.AP] 3 Jan 2023

斯托克斯流最优轮廓的自由间断方法

¨Dorin Bucur、Antonin Chambolle、Alessandro Giacomini 和 MICKAEL NAHON

Abstract. 本文研究满足 Navier 边界条件的斯托克斯流中浸没的障碍物。我们证明，在所有具有给定体积且表面积受控的形状中，存在一个阻力最小的障碍物，并具有正则性；同时考虑到这些形状可能自然形成余维 1 的几何特征。我们在自由间断问题的框架下证明其存在性，并得到有界变形特殊函数空间中的一个松弛解（SBD）。在二维情形下，我们证明该解是经典解。

Contents

1. 引言 1 2. 符号与预备知识 5 2.1. 基本符号 5 2.2. 有界变差函数与有限周长集 6 2.3. 有界变形函数 6 3. 斯托克斯流体中的障碍物与阻力最小化 7 3.1. 障碍物周围的流动 7 3.2. 阻力 8 3.3. 优化问题 9 4. 形状优化问题的松弛表述及主要结果 10 5. SBD 中的一些技术结果 12 5.1. 浸入结果 12 5.2. 不可穿透约束的闭性 13 5.3. SBD 15 中表面能的一个下半连续性结果 6. 极小化子的存在性：定理 4.8 的证明 21 7. 二维极小化子的正则性：定理 4.10 的证明 23 7.1. 平滑引理 24 7.2. 格里菲斯能量拟极小化子的正则性 30 7.3. 定理 4.10 的证明 36 7.4. 关于问题“强”表述的一些评论 37 参考文献 39

1. Introduction

考虑一个障碍物 $E \subset \mathbb{R}^d$（在实际应用中为 $d = 2,3$），它位于一个（有限）通道 Ω 中，黏度系数为 $\mu > 0$ 的流体在其中流动。假设流动是定常且不可压缩的，且相应的速度场 u 在通道壁面上等于常向量 V_∞。障碍物 E 受到一个力，该力在 V_∞ 方向上的分量记为 $Drag(E)$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 49Q10, 76D07, 76D55, 35R35.*Key words and phrases.* 自由间断问题，斯托克斯流，纳维边界条件，阻力。

通常称为阻力。进一步假设流体的速度满足 $\Omega \setminus E$ 中的斯托克斯方程，并在 ∂E 上满足纳维边界条件，则阻力的表达式（相差一个乘法常数）为

$$Drag(E) = 2\mu \int_{\Omega\setminus E} |e(u)|^2 \, dx + \beta \int_{\partial E} |u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}, \tag{1.1}$$

其中 $e(u) := \frac{1}{2}(Du + (Du)^*)$ 表示 u 的对称梯度，而 $\beta > 0$ 是摩擦系数（详情请参见第 3.2 小节）。

我们旨在从所有具有给定体积且表面积受控的障碍物 E 中，找出阻力最小者。具体而言，我们考察此类最优障碍物的存在性及其定性性质。只要对可行障碍物施加严格的几何约束（例如凸性、一致锥条件等），存在性问题就不太重要，因为这些约束可能掩盖自然出现的某些特征。事实上，若完全不限制障碍物的几何形状，就能观察到一些被刚性几何约束所阻碍的定性行为。我们的这一问题正是如此：最优障碍物（我们证明其存在，且不施加任何几何或拓扑约束）大致上可能由一个具有给定体积的物体与若干维数为 $d-1$ 的曲面片组成。这些曲面不占体积，但计入总表面积 $\mathcal{H}^{d-1}(\partial E)$，当然也会对流动产生重大影响。

对表面积和体积施加惩罚后，我们感兴趣的模型问题可以写为

$$\min_E \left\{ Drag(E) + c\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) + f(|E|) \right\},$$

其中 $c > 0$ 和 $f : (0, |\Omega|) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个下半连续函数。粗略地说，涉及周长和体积的项可以看作建造障碍物E所需付出的代价，而函数 f有以下两种相关选择：

$$f(m) = +\infty 1_{\{m \neq m_0\}} \text{ for some } m_0 \in (0, |\Omega|), \text{ or } f(m) = -\lambda m \text{ for some } \lambda > 0.$$

许多类似的优化问题都在“无滑移”边界条件下得到研究，即满足 $u = 0$ at ∂E的流动。在体积约束以及关于一条平行于流动方向的轴的先验对称性假设下，[33] 研究了光滑曲面上的最小阻力问题。[28], 同样在对称性假设下，猜想三维情形中的最优轮廓是两端尖锐、端角为 120 度的长旋转椭球。在相同的对称性背景下，我们还提及 [31]的细长体近似。另请参阅 Šverák [32] 的论文，其中证明了二维情形下最优障碍物的存在性，并假设障碍物的连通分支数不超过给定数量（特别是该数量可以等于 1）。该证明本质上是二维的，无法推广到高维情形。

纳维边界条件带来了许多新的挑战，例如，障碍物中可能出现使阻力最小化的低维结构，而在无滑移条件下则不存在这种现象。纳维边界条件可视为障碍物边界上的部分黏附，也可作为障碍物具有粗糙边界且满足完全滑移时的流动的极限渐近得到。更准确地说，正如 [13] 中所证明的，在边界上具有适当尺度关系的周期性微结构，在极限下可由纳维边界条件建模。在高于二维的空间中，还必须考虑微结构更复杂的几何形状；这些形状在极限下会产生一个各向异性因子，使流动偏向某些方向。此外，无穷小的边界扰动也可能显著改变满足纳维边界条件的斯托克斯方程的解；而在存在无滑移边界条件时，解仍然

稳定。关于这些现象的分析以及纳维边界条件在物理模型中的适用性讨论，请参阅 [8] 。

对于固定的障碍物 E，关于纳维条件的摩擦参数 β 对阻力进行最小化（从物理角度来说，即针对边界上的微观结构进行最小化）这一问题，已在 [5], 中针对斯托克斯流和纳维–斯托克斯流进行了研究。对于斯托克斯流，阻力随摩擦参数增大；而对于纳维–斯托克斯方程，一个重要的观察结果是，阻力关于参数 β 的单调性并不成立。因此，本文给出的斯托克斯流结果，预计不能直接推广到纳维–斯托克斯方程。

与利普希茨障碍物 E 相关联的定常速度场，在可容许速度类中被证明可通过变分刻画为式 (1.1) 右端项的极小化者

$$\mathcal{V}^{\mathrm{reg}}_{E,V_\infty}(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega\setminus E):\mathrm{div}u=0,\ u_{|\partial E}\cdot\nu_E=0,\ u_{|\partial\Omega}=V_\infty\right\}$$

（更多细节见第3.1小节中的（3.4）），我们可以通过让速度场也以显式形式参与其中，方便地重新表述该极小化问题

$$\min_{E,u\in\mathcal{V}^{\mathrm{reg}}_{E,V_\infty}(\Omega)}\left\{2\mu\int_{\Omega\setminus E}|e(u)|^2\,dx+\beta\int_{\partial E}|u|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}+c\mathcal{H}^{d-1}(\partial E)+f(|E|)\right\}. \tag{1.2}$$

本文的首要目标是为问题（1.2）找到合适的松弛，使我们能够证明极小化子的存在，而无需对集合 E 的正则性或拓扑施加任何先验约束。

为避免对障碍物 E 施加不自然的几何限制，鉴于（1.2）中出现的第三项，自然的做法是令其在有限周长集的类中变化（见第2.2小节），并以约化边界 ∂^*E 取代拓扑边界。

为了恰当地描述具有极狭窄尖刺的障碍物——这些尖刺在极限下退化为（$d-1$）-曲面，且无法通过约化边界加以考虑——方便的做法是考虑在 E 之外可能不连续的可容许速度场（见第3.3小节）。由于（1.2）中显式涉及对称梯度 $e(u)$，可容许速度的一个自然函数空间是有界变形函数空间 SBD。能量的自然松弛形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(E,u):=&2\mu\int_{\Omega\setminus E}|e(u)|^2\,dx+\beta\int_{\partial^*E}|u^+|^2\,d\mathcal{H}^{d-1}+\beta\int_{J_u\setminus\partial^*E}[|u^+|^2+|u^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1}\\&+c\mathcal{H}^{d-1}(\partial^*E)+2c\mathcal{H}^{d-1}(J_u\setminus\partial^*E)+f(|E|),\end{aligned} \tag{1.3}$$

其中， u 在 E中几乎处处取零，而 J_u 表示 u 的不连续集， $u^\pm$ 是 u 在 ∂^*E 和 J_u 上的迹（根据定向的选择，迹 u^- 在 ∂^*E 上消失，而 u^+ 位于外侧）。

在此框架下，全局障碍物由 $E\cup J_u$给出，因此也包含低维部分，即 $J_u\setminus\partial^*E$：粗略地说，对于最优速度，这些不连续区域会生成（$d-1$）曲面，它们对应于最优障碍物中无体积的低维子集。

可容许速度必须与障碍物相切，这意味着不仅 u 与 ∂^*E相切，而且两个迹 $u^\pm$ 也沿着跳跃集 J_u 与法向量 ν_u 正交。Navier 曲面项的贡献自然计入了 $u^\pm$所给出的两侧贡献。关于周长项，我们将低维部分计算两次，因为我们把松弛障碍物视为正则障碍物的极限，使得 $J_u\setminus\partial^*E$ 的点对应于正则障碍物中塌缩到低维结构上的薄部分。我们也可以把周长项

看作构造障碍物所需付出的代价，并改为只保留 $\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E \cup J_u)$，而论文的主要结论不会受到影响。

松弛优化问题可视为关于 (E, u) 的极小化问题，它兼具 E 经典几何问题的特征，并与针对u的自由不连续问题相结合；其曲面项取决于迹，而迹须满足适当的相切约束和边界条件。

本文的首个主要结果（定理 4.8）涉及松弛泛函 $\mathcal{J}$ 在可容许构型类中的极小化子的存在性（精确定义见定义 4.1）。

为证明该问题适定，我们必须面对以下主要困难：

（a）在问题的自然弱收敛下，速度在 $\partial^* E \cup J_u$ 上满足的不可穿透约束的闭性；（b）以下形式能量的下半连续性

$$\int_{J_u} [|u^+|^2 + |u^-|^2]\, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{1.4}$$

与纳维条件相关。

（a）点是能量下半连续性结果的推论

$$\int_{J_u} \left[|u^+ \cdot \nu_u| + |u^- \cdot \nu_u|\right]\, d\mathcal{H}^{d-1}$$

该结果通过采用 Friedrich、Perugini 和 Solombrino [26] 关于SBD 上泛函的近期下半连续性结果，在定理 5.2 中得到了证明。

（b）点的能量在处理涉及罗宾边界条件的形状优化问题时，自然会出现在标量情形中（例如参见 [7, 11, 10, 12]）；通过考察截面，很容易看出它具有下半连续性。向量值 SBD 情形中的下半连续性结果由定理 5.4 给出，无法依靠简单的截面论证；而这种论证只能得到如下形式能量的下半连续性

$$\int_{J_u} \left[|u^+ \cdot \xi|^2 + |u^- \cdot \xi|^2\right] |\xi \cdot \nu_u|\, d\mathcal{H}^{d-1}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 与 $|\xi| = 1$：为了得到（1.4），在 ξ 中进行优化似乎无法在维数为 $d \geq 3$ 时实现。因此，我们采用一种不同的策略，基于放大论证，通过沿足够多的方向对向量量 $u^{\pm}$ 进行控制来重构它们（详见第 5.3 小节）：这样我们便能处理更一般的如下形式的能量密度$\phi(u^+) + \phi(u^-)$，其中 ϕ 是一个下半连续函数。

本文的第二个主要结果（见定理 4.10）涉及（1.3）的松弛极小化子的正则性。若体积惩罚函数 f 是 Lipschitz 函数，且问题处于二维情形，我们证明，对于 $\mathcal{J}$ 的一个极小化子 (E, u)，最优障碍物 $E \cup J_u$ 是一个闭集，而最优速度 u 在障碍物之外是一个光滑的 Sobolev 函数，从而在某种程度上恢复了该问题的经典设定。更确切地说，我们证明

$$\mathcal{H}^1(\Omega \cap \overline{\partial^* E \cup J_u} \setminus (\partial^* E \cup J_u)) = 0, \tag{1.5}$$

因此，最优障碍物可以描述为这样的闭集：它是 Ω $\setminus \overline{\partial^* E \cup J_u}$ 中那些 u 不恒等于零的连通分支之补集。

证明（1.5）的技术思路源于德乔治、Carriero 和 Leaci 关于 Mumford-Shah问题的开创性结果 [22], ，其中证明的关键是通过

反证紧性论证获得的衰减估计。对于向量值问题，类似但显然更为复杂的策略被用于 Griffith断裂问题： [18] （针对二维情形），以及 [15]（针对高维情形）。在断裂问题中，关键的紧性结果依赖于这样一种可能性：可以用一个在 H^1 中局部受控的 Sobolev函数，去逼近一个 $u \in SBD$（$[-1,1]^d$）场，且其跳跃集很小（借助经典的 Korn 不等式）。

在我们的情形中，我们采用类似的近似过程，但还必须处理两个额外约束：不可压缩性以及跳跃处的不可穿透性。从技术角度来看，这会带来问题，因为 [18] 中的界限不足以确保向量场保持无散，而 [15] 中的方法会产生新的跳跃，其上不可穿透约束未必能预先得到满足。然而，当限于二维时，[15] 的方法能得到更强的结果，因此这两个约束都可以得到处理。

本文组织如下。第2节我们固定记号，并回顾有关有限周长集、有界变形函数以及紧集 Hausdorff 收敛的一些基本事实。第3节将精确阐述阻力优化问题。第4节详细说明该问题在有限周长障碍物及有界变形速度场这一族中的松弛，并陈述本文的主要结果，包括（任意维数下）极小化子的存在性及其二维正则性。极小化子存在性的证明见第 6 节，该证明基于第 5 节汇集的若干关于 SBD 函数的技术性结果；正则性结果则在第 7 节证明。

2. Notations and Preliminaries

2.1. 基本记号。若 $E \subseteq \mathbb{R}^d$，我们用 $|E|$ 表示其 d 维 Lebesgue测度，并用$\mathcal{H}^{d-1}(E)$表示其（$d-1$）维豪斯多夫测度：精确定义参见 [23, 第 2] 章；这里回顾一下，对于足够规则的集合， $\mathcal{H}^{d-1}$ 与通常的面积测度一致。此外，我们用 E^c 表示 E的补集，用 1_E 表示其示性函数，即当$x \in E$时， $1_E(x)$ 为 $=1$ ；否则， $1_E(x)$ 为 $=0$ 。另外，如果 $\overline{E_1} \subset E_2$，我们称 $E_1 \Subset E_2$ 。最后，我们用 $Q_{x,r} \subseteq \mathbb{R}^d$ 表示中心为 x 、边长为 r的立方体：当 $x=0$时，简记为 Q_r。

若 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 是开集且 $1 \le p \le +\infty$，我们用 $L^p(A)$表示A 上 p可积函数构成的通常函数空间，其范数记为 $\|\cdot\|_p$。 $W^{1,p}(A)$表示由 $L^p(A)$中梯度（按分布意义理解）属于 $L^p(A;\mathbb{R}^d)$的函数构成的索博列夫空间。最后，给定有限维酉空间 Y，我们用 $\mathcal{M}_b(A;Y)$表示 A上的 Y值 Radon测度空间；该空间可与 A 上在边界处消失的 Y值连续函数空间的对偶空间等同。

我们将 $M^{d\times m}$ 记作取值于 $\mathbb{R}$ 的 $d\times m$ 矩阵集合：当 $d=m$ 时，我们将 $d\times d$ 对称矩阵的子空间记作 $\mathbf{M}^{d\times d}_{sym}$。对于 $a\in\mathbb{R}^d$ 和 $b\in\mathbb{R}^m$，我们将满足下式的 $M^{d\times m}$ 中的元素记作 $a\otimes b$

$$(a\otimes b)_{ij} = a_i b_j,$$

而当 a、$b\in\mathbb{R}^d$ 时，我们将满足下式的 $\mathbf{M}^{d\times d}_{sym}$ 中的矩阵记作 $a\odot b$

$$(a\odot b)_{ij} = \frac{a_i b_j + a_j b_i}{2}.$$

给定满足 $|\xi|=1$ 的 $\xi\in\mathbb{R}^d$，我们将经过原点且与 ξ 正交的超平面记作 $\xi^\perp$。若 $E\subseteq\mathbb{R}^d$，则令

$$E^\xi := \pi_{\xi^\perp}(E), \tag{2.1}$$

其中 π 表示正交投影，而对于 $y\in\xi^\perp$，我们定义

$$E^\xi_y := \{t\in\mathbb{R} : y+t\xi\in E\}. \tag{2.2}$$

2.2. 有界变差函数与有限周长集。若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是开集，我们称 $u \in BV(\Omega;\mathbb{R}^m)$，若 $u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 且其分布意义下的导数是 Ω 上的有限拉东测度，即 $Du \in \mathcal{M}_b(\Omega;M^{d\times m})$。$BV(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 称为 Ω 上取值于 $\mathbb{R}^m$ 的有界变差函数空间，在范数 $\|u\|_{BV(\Omega;\mathbb{R}^m)} := \|u\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)} + \|Du\|_{\mathcal{M}_b(\Omega;M^{d\times m})}$ 下构成一个巴拿赫空间。我们称 $|Du|(\Omega) := \|Du\|_{\mathcal{M}_b(\Omega;M^{d\times m})}$ 为 u的全变差。关于该空间的全面论述，请参阅 [1] BV。

我们称 $u \in SBV(\Omega;\mathbb{R}^m)$，若 $u \in BV(\Omega;\mathbb{R}^m)$ 且其分布导数可写为以下形式

$$Du = \nabla u\,dx + (u^+ - u^-)\otimes \nu_u \mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_u,$$

其中，$\nabla u \in L^1(\Omega;M^{d\times m})$ 表示 u 的近似梯度，J_u 表示 u 的近似跳跃集，u^+ 和 u^- 是 u 在 J_u 上的迹，而 $\nu_u(x)$ 是 J_u 在 x 处的法向量。

注意，若 $u \in SBV(\Omega;\mathbb{R}^m)$，则 Du 的奇异部分集中在 J_u 上；J_u 是一个可数 $\mathcal{H}^{d-1}$-可求 rectifiable 集：存在一个集合 E，使得 $\mathcal{H}^{d-1}(E) = 0$，并且存在一个由 C^1 子流形组成的序列 $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$，这些子流形位于 $\mathbb{R}^d$ 中，且满足 $J_u \subseteq E \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$。

如果 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ 满足 $|E| < +\infty$，且 $1_E \in BV(\mathbb{R}^d)$，则称其具有有限周长。E的周长定义为

$$Per(E) = |D1_E|(\mathbb{R}^d).$$

事实证明，

$$D1_E = \nu_E \mathcal{H}^{d-1}\lfloor \partial^* E, \qquad Per(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E),$$

其中，$\partial^* E$ 称为 E的约化边界，ν_E 是相应的内近似法向量（参见[1, 第 3.5]节）。我们有 $\partial^* E \subseteq \partial E$，但拓扑边界通常可能远大于约化边界。若 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ 是开且有界的，并且满足 $\mathcal{H}^{d-1}(A) < +\infty$，则 A 具有有限周长，且 $Per(A) \le \mathcal{H}^{d-1}(\partial A)$。

2.3. 有界变形函数。若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是开集，则称 $u \in BD(\Omega)$ 满足 $u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$，且其对称梯度 $Eu := \frac{Du + (Du)^*}{2}$ 在分布意义下是 Ω 上的有限拉东测度，即 $Eu \in \mathcal{M}_b(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{sym})$。$BD(\Omega)$称为 Ω 上有界变形函数空间。关于该空间 BD的主要性质，请参见 [30, 29] 。

我们将使用 $BD(\Omega)$ 的一个子空间，称为有界变形特殊函数空间，该空间由 [2] 引入。我们称 $u \in SBD(\Omega)$ 若满足 $u \in BD(\Omega)$，且其对称分布导数可写为以下形式

$$Eu = e(u)\,dx + (u^+ - u^-)\odot \nu_u \mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_u,$$

其中，$e(u) \in L^1(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{sym})$ 表示 u 的近似对称梯度，J_u 表示 u 的近似跳跃集，u^+ 和 u^- 是 u 在 J_u 上的迹，而 $\nu_u(x)$ 是 J_u 在 x 处的法向量。与有界变差函数的情形一样，J_u 是一个 $\mathcal{H}^{d-1}$-可数可整流集。

We 我们将使用 [3 中证明的以下紧性与下半连续性结果].

定理 2.1. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个开、有界且具有利普希茨边界的集合，并设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $SBD(\Omega)$ 中的一个序列，满足

$$\sup_n \left[|Eu_n|(\Omega) + \|u_n\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|e(u_n)\|_{L^p(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{sym})} + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})\right] < +\infty$$

因此 我 $p > 1$。那么存在 $u \in SBD(\Omega)$ 和一个子序列 $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，使得 t

$$u_{n_k} \to u \qquad \textit{strongly in } L^1(\Omega;\mathbb{R}^d),$$

$$e(u_{n_k}) \rightharpoonup e(u) \qquad \textit{weakly in } L^p(\Omega;\mathrm{M}^{d\times d}_{sym}),$$

and

$$\mathcal{H}^{d-1}(J_u) \le \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_{n_k}}).$$

我们还需要了解 SBD-函数截面的一些性质。若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是开集且 $u \in SBD(\Omega)$，考虑 Ω_y^ξ 上由下式给出的标量函数

$$\hat{u}_y^\xi(t) := u(y + t\xi) \cdot \xi \tag{2.3}$$

以及集合

$$J_u^\xi := \{x \in J_u : (u^+(x) - u^-(x)) \cdot \xi \neq 0\} \tag{2.4}$$

以下结果成立（见 [2]）。

定理 2.2（ SBD-函数的一维截面）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为开集， $\xi \in \mathbb{R}^d$ 满足$|\xi| = 1$，且令 $u \in SBD(\Omega)$。则对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $y \in \Omega^\xi$，有

$$\hat{u}_y^\xi \in SBV(\Omega_y^\xi)$$

with

$$(\hat{u}_y^\xi)'(t) = (e(u)\xi \cdot \xi)(y + t\xi) \qquad \text{for a.e. } t \in \Omega_y^\xi$$

and

$$J_{\hat{u}_y^\xi} = (J_u^\xi)_y^\xi.$$

3. Obstacles in Stokes fluids and drag minimization

在本节中　下面我们说明定常流中浸没障碍物的阻力问题。

3.1. 障碍物周围的流动。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个具有利普希茨边界的有界开集，并设 $V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ 是一个无散向量场。给定一个具有利普希茨边界的开集 $E \Subset \Omega$，考虑黏性不可压缩流体绕 E 的定常流，其中 $\partial\Omega$ 上的边界条件为 V，而 ∂E 上满足纳维边界条件。更准确地说，若 $u : \Omega \setminus E \to \mathbb{R}^d$ 是速度场，我们要求以下条件成立。

(a) 不可压缩性：$\operatorname{div} u = 0$ 在 $\Omega \setminus E$ 中。

(b) 边界条件：我们有

$$u = V \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上，以及不可穿透条件 } u \cdot \nu = 0 \text{ 在 } \partial E \text{ 上，}$$

其中 ν 表示 E的外法向量。

(c) 平衡：考虑应力

$$\sigma := -pI_d + 2\mu e(u), \tag{3.1}$$

其中 $\mu > 0$ 为黏度参数， $e(u)$为 u 的对称梯度（也记作$D(u)$）， p 为压力，我们要求

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \qquad \text{in } \Omega \setminus E. \tag{3.2}$$

(d) 障碍物上的纳维条件：我们有

$$(\sigma\nu)_\tau = \beta u \qquad \text{on } \partial E,$$

其中 $\beta > 0$ 为摩擦参数，$(\sigma\nu)_\tau$ 表示力 $\sigma\nu$的切向分量。定常流具有如下变分刻画： u 是能量的极小化者

$$\mathcal{E}(u) := 2\mu \int_{\Omega \setminus E} |e(u)|^2 \, dx + \beta \int_{\partial E} |u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \tag{3.3}$$

在（足够光滑的）可容许场这一类中

$$\mathcal{V}_{E,V}^{\mathrm{reg}}(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega \setminus E; \mathbb{R}^d) : v \text{ satisfies points (a) and (b)}\}, \tag{3.4}$$

其中， $\mathcal{H}^{d-1}$ 表示（$d-1$）维豪斯多夫测度，在足够光滑的集合上可化为面积测度。事实上，如果 u 是一个极小化者，且 φ 是一个容许变分，使得 $\varphi = 0$在 $\partial\Omega$上，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu \int_{\Omega\setminus E} e(u) : e(\varphi)\, dx + \beta \int_{\partial E} u\cdot\varphi\, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= 2\mu \int_{\Omega\setminus E} e(u) : \nabla\varphi\, dx + \beta \int_{\partial E} u\cdot\varphi\, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= -2\mu \int_{\Omega\setminus E} \operatorname{div} e(u)\cdot\varphi\, dx + \int_{\partial E} [-2\mu e(u)\nu + \beta u]\cdot\varphi\, d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned}$$

特别地，选取在 Ω 内具有紧支撑的 $\varphi \setminus E$，我们有

$$2\mu \operatorname{div} e(u) = \nabla p$$

对于某个压力场 p：因此 $\sigma := -pI_d + 2\mu e(u)$ 满足条件 (c) 的 (3.2)。

由于 容许函数 φ 与 ∂E 相切，最优性条件化简为

$$0 = \int_{\partial E} [-2\mu e(u)\nu + \beta u]\cdot\varphi\, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial E} [-\sigma\nu + \beta u]\cdot\varphi\, d\mathcal{H}^{d-1}. \tag{3.5}$$

注意， ∂E 上的每个切向量场 η 都可以延拓为 Ω 上的无散向量场 $\setminus E$，且该场在 $\partial\Omega$ 上为零，因此它是某个容许变分 φ 的迹：事实上，任何在 $\partial\Omega$ 上为零的延拓 W 的散度均值为零，因此考虑 W_1，其中 $\operatorname{div} W_1 = \operatorname{div} W$，且其在 $W_1 = 0$ 上以及 $\partial\Omega$ 上为零（例如，由 [6, 定理 IV.3.1]) 可保证其存在），所需的延拓为 $W - W_1$。我们得出，最优性条件 (3.5) 给出了点 (b) 的纳维条件。

3.2. 阻力。现在假设外部向量场 V等于一个常向量 $V_\infty \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$，即障碍物 E 浸没在均匀流中。假设流动在 E附近受到扰动，取值为u，则障碍物受到一个力，该力在方向 V_∞ 上的分量为

$$Drag(E) := \int_{\partial E} \sigma\nu\cdot\frac{V_\infty}{|V_\infty|}\, d\mathcal{H}^{d-1},$$

这称为沿流动方向作用于 E 的阻力。

我们断言

$$Drag(E) = \frac{1}{|V_\infty|}\mathcal{E}(u), \tag{3.6}$$

其中， $\mathcal{E}(u)$ 是式 (3.3) 中定义的能量。利用 σ 是对称且无散度的这一事实（因此向量场 σV_∞ 也无散度），并且 $u = V_\infty$ 在 Ω 上，我们可以写成

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} \sigma\nu\cdot V_\infty\, d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_{\partial E} \sigma V_\infty\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Omega} \sigma V_\infty\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial\Omega} \sigma u\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Omega\setminus E} \operatorname{div}(\sigma u)\, dx + \int_{\partial E} \sigma u\cdot\nu\, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\Omega\setminus E} \sigma : \nabla u\, dx + \int_{\partial E} \sigma\nu\cdot u\, d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

再次利用 σ 的对称性、 u 无散度以及本构方程 (3.1)，可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus E} \sigma : \nabla u\, dx &= \int_{\Omega\setminus E} \sigma : e(u)\, dx = \int_{\Omega\setminus E} (-p\, I_d + 2\mu e(u)) : e(u)\, dx \\ &= \int_{\Omega\setminus E} (-p \operatorname{div} u + 2\mu |e(u|^2)\, dx = 2\mu \int_{\Omega\setminus E} |e(u)|^2\, dx, \end{aligned}$$

另一方面，鉴于 ∂E 满足纳维条件，且 u 与障碍物相切

$$\int_{\partial E} \sigma\nu \cdot u \, d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial E} (\sigma\nu)_\tau \cdot u \, d\mathcal{H}^{d-1} = \beta \int_{\partial E} |u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

代入 (3.7)，即可得到 (3.6)。

3.3. 优化问题。设 $c > 0$，并令 $f\colon (0, |\Omega|) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为一个下半连续函数，且不恒等于 $+\infty$。我们关注以下优化问题：

$$\min_E \left\{ Drag(E) + c\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) + f(|E|) \right\}.$$

因此，我们感兴趣的是寻找一种使阻力最小化的障碍物最优形状，同时对其周长和体积进行惩罚。

鉴于第 3.2 小节中对阻力所建立的能量刻画，我们可以将该问题表述为在各对 (E, u) 中进行的极小化问题，其中 u 是属于 (3.4) 中定义的族 $\mathcal{V}_E^{\mathrm{reg}}$，$V_\infty(\Omega)$ 的速度场：

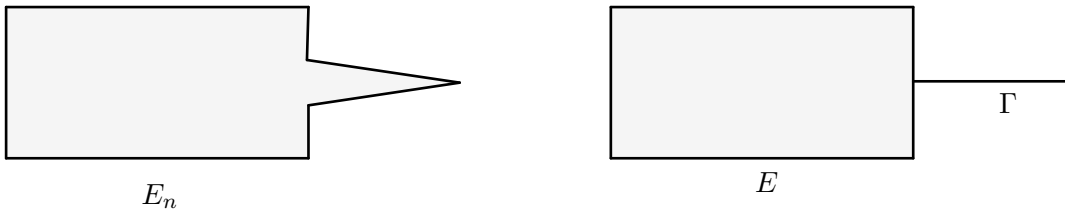
$$\min_{E, u \in \mathcal{V}_{E,V_\infty}^{\mathrm{reg}}(\Omega)} \left\{ \frac{2\mu}{|V_\infty|} \int_{\Omega \setminus E} |e(u)|^2 \, dx + \frac{\beta}{|V_\infty|} \int_{\partial E} |u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} + c\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) + f(|E|) \right\}.$$

将所有常数设为 1，并用如第 3.1 小节所述的给定无散度速度向量场 V 替换 V_∞ 后，上述阻力最小化问题便是以下形状优化问题的一个特例

$$\min_{E, u \in \mathcal{V}_{E,V}^{\mathrm{reg}}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega \setminus E} |e(u)|^2 \, dx + \int_{\partial E} |u|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} + \mathcal{H}^{d-1}(\partial E) + f(|E|) \right\}. \tag{3.8}$$

如果我们希望对该问题应用变分法的直接法，即通过考察极小化序列 $(E_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$来求得极小化者，那么以下考虑是很自然的。

(a) 由于该问题涉及 E 的周长，序列 $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在有限周长集族中相对紧（见第2节）。(b) 关于速度，自然会发现，考虑不连续的向量场也是合适的。事实上，如果 $u_n \to u$ 在某种意义下成立，并且 ∂E_n 在某些区域塌缩，形成一个位于极限集 E 之外的曲面 Γ，那么极限速度场 u 通常会在 Γ 处出现不连续性。



因此，我们预计曲面积分中会出现一个与纳维条件相关的额外项，其至少为

$$\int_{\Gamma \setminus \partial E} [|u^+|^2 + |u^-|^2] \, d\mathcal{H}^{d-1},$$

其中 $u^\pm$ 是 Γ两侧的两个迹。

上述讨论得以将问题 (3.8) 表述为一个松弛版本：其中 E 在包含于 Ω 的有限周长集族中变化，而与之关联的可容许速度场族 u 自然包含于有界变形特殊函数空间 $SBD(\Omega)$ 中（见第2节）。

在第 4 节中，我们将对这一弱设定下的问题给出精确表述，从而保证最优解的存在，并特别说明在此背景下，$\partial\Omega$ 上以及障碍物上的边界条件应如何重新表述。

4. A relaxed formulation of the shape optimization problem and statements of themain results

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为开且有界、具有利普希茨边界的区域，并设 $V \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ 为无散向量场。为便于处理边界条件，考虑一个开且有界的 $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^d$，使得 $\Omega \Subset \Omega'$。

下面的定义讨论松弛设定下可容许构型的类。

定义 4.1（可容许障碍物—速度构型类 $\mathcal{A}(V)$）。若 (E,u) 是外部速度 V 的可容许构型，我们记作 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$；此时，$E \subset\subset \Omega$ 是一个有限周长集，而

$$u \in SBD(\Omega') \cap L^2(\Omega';\mathbb{R}^d)$$

使得在 E 上几乎处处满足 $u = 0$，并且满足以下条件。

(a) 流动无散度：在 Ω' 中，按照分布的意义有 $\operatorname{div} u = \underline{0}$。(b) 外边界条件：

在 $\Omega' \setminus \Omega$ 上几乎处处有 $u = V$。(c) 障碍物上的不可穿透条件：

$$u^{\pm} \cdot \nu = 0 \ \ on\ \partial^* E \cup J_u,$$

其中 ν 表示可求 rectifiable 集 $\partial^* E \cup J_u$ 的法向量。

注 4.2. 本框架中的可容许速度与此前引入的族 $\mathcal{V}^{\mathrm{reg}}_{E\,V,}(\Omega)$（见 (3.4)）中的可容许速度之间的关键区别在于，它们可能在 E 之外存在不连续性。在新的设定下，全局障碍物定义为

$$E \cup J_u$$

即它可能包含 $(d-1)$ 维部分。

给定 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$，关于 u 在 $\partial^* E$ 上的迹，我们用 u^+ 表示沿外法向量 ν_E 方向的迹，因此在 $\partial^* E$ 上几乎处处有 $u^- = 0\ \mathcal{H}^{d-1}$。

关于不可穿透约束，请注意，只需在 J_u 上要求满足该约束，因为它也会自动在 $\partial^* E$ 上成立。事实上，对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $x \in \partial^* E \setminus J_u$，有 $u^-(x) = u^+(x) = 0$且该约束成立；而对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $x \in J_u \cap \partial^* E$，两个可求 rectifiable 集 J_u 和 $\partial^* E$ 具有相同的法向量。

注 4.3. 空间 $SBD(\Omega')$ 自然是 $L^1(\Omega';\mathbb{R}^d)$ 的子空间：为保证可容许性，我们要求 $u \in L^2(\Omega';\mathbb{R}^d)$，以确保速度场具有有限动能。事实证明，对于我们的问题有意义的 $SBD(\Omega')$ 中的速度（即能量有限）自动属于 $L^2(\Omega';\mathbb{R}^d)$（见定理 5.1）。

注 4.4（关于边界条件）。若 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$，则 $u \in SBD(\Omega')$，且在 $\Omega' \setminus \Omega$ 上几乎处处满足 $u = V$，因此

$$J_u \cap \partial\Omega = \{x \in \partial\Omega : \gamma(u)(x) \neq V(x)\},$$

其中，$\gamma(u)$ 是从 Ω 内侧取到的 u 在边界 Ω 上的迹（即将 u 视为 $SBD(\Omega)$ 的元素时通常意义下的迹）。由此可知，在当前框架下，边界条件在某种程度上是

松弛的：允许 u 与 V 在边界 Ω 上存在不匹配，但此时该区域会被计作速度场的跳跃部分，进而也被计作障碍物 $\partial^* E \cup J_u$ 的一部分，并对能量产生贡献（见下文 (4.2)）。这种边界条件的松弛是有界变差函数在连续介质力学问题中的若干应用所共有的特征（例如，参见与断裂力学相关的 [25, 21]，或关于塑性问题的 [20]）。

注 4.5. 给定 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$，障碍物 $E \cup J_u$ 仅可在 V 与 Ω 相切的部分接触 $\partial\Omega$：这是因为在 $(\partial^* E \cup J_u) \cap \partial\Omega$ 上，这两个集合几乎处处具有相同的法向量（相对于 $\mathcal{H}^{d-1}$），且 $u^+ = V$（如果定向选择得当）。

注 4.6. 设 $E \Subset \Omega$ 是开集且具有利普希茨边界。则可找到 $W \in H^1(\Omega \setminus E; \mathbb{R}^d)$，使得 $W = V$ 在 $\partial\Omega$ 上，$W = 0$ 在 ∂E 上且 $\operatorname{div} W = 0$。事实上，若 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足：在 $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ 的某个邻域上 $\varphi = 1$，并且在 E 的某个邻域上 $\varphi = 0$，则可考虑向量场 $V_1 := \varphi V$，其散度在 Ω 上的均值为零（由高斯定理）。于是可找到 $V_2 \in H^1_0(\Omega \setminus E; \mathbb{R}^d)$，使得 $\operatorname{div} V_2 = \operatorname{div} V_1$（见 [6, 定理 IV.3.1]），因此向量场 $W := V_1 - V_2$ 是一个可容许的选择。特别地，我们得到 $(E, W) \in \mathcal{A}(V)$，因此可容许构型类非空。

Let

(4.1) f: $[0, |\Omega|] \to [0, +\infty]$ 下半连续，且不恒等于 $+\infty$。

对于每个 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$，令（将阻力问题中涉及的常数归一化为 1）

$$\mathcal{J}(E,u) := \int_{\Omega'} |e(u)|^2 \, dx + \int_{\partial^* E} |u^+|^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{J_u \setminus \partial^* E} [|u^+|^2 + |u^-|^2] \, d\mathcal{H}^{d-1} + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(J_u \setminus \partial^* E) + f(|E|). \tag{4.2}$$

注 4.7. 关于 $\mathcal{J}(E,u)$ 中的体积分，密度 $e(u)$ 在 $\Omega' \setminus \Omega$ 上几乎处处等于 $e(V)$，并在 E 上几乎处处等于 0：因此，我们可以将其替换为 Ω 上的积分 $\setminus E$，而不影响 $\mathcal{J}$ 的极小化。

关于纳维能量以及 $\partial^* E \cup J_u$ 的表面惩罚，请注意，如注 4.4 所指出的，它也计入了 u 与 V 在边界处可能存在的不匹配：因此，该不匹配会受到问题能量的“惩罚”。

前述观察表明，较大的区域 Ω' 对该问题仅起辅助作用，因为它可以替换为任意严格包含 Ω 的开区域。

本文的第一个主要结果如下

定理 4.8（最优障碍物的存在性）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为具有利普希茨边界的有界开集，$V \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ 为无散向量场，f 为满足 (4.1) 的函数。设可容许构型族 $\mathcal{A}(V)$ 由定义 4.1 给出，且 $\mathcal{J}$ 为 (4.2) 中定义的泛函。那么问题

$$\min_{(E,u) \in \mathcal{A}(V)} \mathcal{J}(E,u) \tag{4.3}$$

存在一个解。

注 4.9。当 V 为一个非零常向量 V_∞时，我们便得到原始的阻力最小化问题；同时，我们在泛函中恰当地恢复了物理常数 μ 和 β以及周长惩罚常数 c。

本文的第二个主要结果涉及二维情形下极小化子的正则性。

定理 4.10（二维正则性）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是具有利普希茨边界的有界开集，$V \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$ 是无散向量场，且 $f\colon [0,|\Omega|] \to [0,+\infty[$ 是 Lipschitz 函数。设 $(E,u) \in \mathcal{A}(V)$ 是根据定理 4.8 的 (4.3) 的一个解。那么

$$\mathcal{H}^1\left(\Omega \cap (\overline{J_u \cup \partial^* E} \setminus (J_u \cup \partial^* E))\right) = 0,$$

以及 $u \in C^\infty(\Omega \setminus \overline{J_u \cup \partial^* E};\mathbb{R}^2)$。

定理 4.8 将在第 6 节中证明，其依据是第 5 节中建立的一些技术结果。定理 4.10 的证明将在第 7 节中讨论。

5. Some technical results in SBD

本节汇集了关于 SBD 空间的一些技术性质，这些性质对于定理 4.8 的证明至关重要。特别地，我们将在定理 5.1 中证明，可容许速度向量场具有更高的可和性（事实上，它们属于 $L^{\frac{2d}{d-1}}$）。在定理 5.3 中，我们将证明，满足 $u^\pm$ 与不连续集 J_u 相切的速度场 u，在主优化问题的极小化序列的自然收敛下构成一个闭集。最后，我们将在定理 5.4 中证明一个关于依赖于迹的表面能的下半连续性结果；该结果尤其意味着与纳维条件相关项的下半连续性。

5.1. 浸入结果。以下嵌入结果成立。

定理 5.1. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集，且 $u \in SBD(\mathbb{R}^d)$ 支撑于 Ω，使得

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega |e(u)|^2\,dx + \int_{J_u} \left[|u^+|^2 + |u^-|^2\right]\,d\mathcal{H}^{d-1} < +\infty.$$

则 $u \in L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega)$ 满足

$$\|u\|_{\frac{2d}{d-1}} \le C\sqrt{\mathcal{E}(u)},$$

其中 C 仅依赖于 d 和 $\operatorname{diam}(\Omega)$。

证明。只需遵循文献 [29]，中阐述的 BD 到 $L^{d/d-1}$ 的经典嵌入证明策略，但重点考察各分量的平方。

考虑单位向量

$$\xi := \frac{1}{\sqrt{d}}(1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^d.$$

利用 第2节回顾的截面刻画，对于 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $y \in \xi^\perp$，我们有 e

$$\hat{u}_y^\xi \in SBV(\Omega_y^\xi)$$

with

$$\int_{\Omega_y^\xi} |(\hat{u}_y^\xi)'|^2\,dt + \sum_{t\in J_{\hat{u}_y^\xi}} \left[|(\hat{u}_y^\xi)^+(t)|^2 + |(\hat{u}_y^\xi)^-(t)|^2\right] < +\infty.$$

于是，对于几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\|\hat{u}_y^\xi\|^2_{L^\infty(\Omega_y^\xi)} &\le \left|D(\hat{u}_y^\xi)^2\right|(\Omega_y^\xi) = \int_{\Omega_y^\xi} 2|\hat{u}_y^\xi(\hat{u}_y^\xi)'|dt + \sum_{t\in J_{\hat{u}_y^\xi}} \left||(\hat{u}_y^\xi)^+(t)|^2 - |(\hat{u}_y^\xi)^-(t)|^2\right| \\ &\le \frac{1}{2}\|\hat{u}_y^\xi\|^2_{L^\infty(\Omega_y^\xi)} + 2|\Omega_y^\xi| \int_{\Omega_y^\xi} \left|(\hat{u}_y^\xi)'\right|^2 dt + \sum_{t\in J_{\hat{u}_y^\xi}} \left(\left|(\hat{u}_y^\xi)^+(t)\right|^2 + \left|(\hat{u}_y^\xi)^-(t)\right|^2\right),\end{aligned} \tag{5.1}$$

令

$$g_\xi(x) := \int_{\Omega_y^\xi} |(\hat{u}_y^\xi)'|^2 \, dt + \sum_{t\in J_{\hat{u}_y^\xi}} \left[|(\hat{u}_y^\xi)^+(t)|^2 + |(\hat{u}_y^\xi)^-(t)|^2 \right],$$

其中 $y := \pi_{\xi^\perp}(x)$，即 x 在超平面 $\xi^\perp$ 上的投影。$g_\xi(x)$ 仅取决于 x 在 $\xi^\perp$ 上的投影，并且

$$\begin{aligned}\int_{\xi^\perp} g_\xi d\mathcal{H}^{d-1} &= \int_\Omega |e(u)\xi\cdot\xi|^2 \, dx + \int_{J_u} \left[|u^+|^2 + |u^-|^2\right] |\xi\cdot\nu| \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &\le C\left[\int_\Omega |e(u)|^2 \, dx + \int_{J_u} \left[|u^+|^2 + |u^-|^2\right] \, d\mathcal{H}^{d-1}\right]\end{aligned}$$

其中 C 仅取决于 d。由 (5.1) 可得

$$|\xi\cdot u|^2 \le C g_\xi \qquad \text{a.e. on } \Omega, \tag{5.2}$$

其中 C 取决于 Ω 的直径，从现在起，所有出现的常数 C 均取决于 n、diam(Ω)。对于每个 $k = 1$，....., $d-1$，我们可以写成

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{d}} e_k + \sqrt{\frac{d-1}{d}} h_k,$$

其中 e_k 是标准基的第 k 个向量，而 h_k 是沿 $\sqrt{d}\xi - e_k$ 方向的单位向量。按照上述方法对分解进行推理

$$\xi\cdot u = \sqrt{\frac{d-1}{d}} h_k\cdot u + \frac{1}{\sqrt{d}} e_k\cdot u$$

我们得到类似的估计

$$|\xi\cdot u|^2 \le C\left(g_{h_k} + g_{e_k}\right), \tag{5.3}$$

将不等式 (5.2) 与 $k = 1$、.....、$d-1$ 对应的不等式 (5.3) 相乘，按照 [29,第二章定理 1 的推理即可得到结论。2]

$$\|(\xi\cdot u)^2\|_{\frac{d}{d-1}} \le C\left[\int_\Omega |e(u)|^2 \, dx + \int_{J_u} \left[|u^+|^2 + |u^-|^2\right] \, d\mathcal{H}^{d-1}\right].$$

由于该估计与基的具体选取无关，因此对任意范数为 1 的 ξ 都成立，定理得证。□

5.2. 不可穿透约束的闭性。在等一致利普希茨边界的情形下，对于弱收敛的索伯列夫函数序列，不可穿透性质的保持可通过散度定理直接得到（例如，可参见 [8]）。然而，在边界塌缩的情形下，极限函数定义在曲面的两侧，且极限集不具备任何光滑性，此时这一方法并不适用。证明不可穿透性质的保持需要采用不同的技术论证，我们将在 SBD 框架下处理。

我们先从以下下半连续性结果开始。

定理 5.2. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为有界开集，且 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $SBD(\Omega)$ 中的一个序列，使得

$$\sup_n \left[\int_\Omega |e(u_n)|^2 \, dx + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})\right] < +\infty$$

with

$$u_n \to u \qquad \textit{in measure}$$

对某个 $u \in SBD(\Omega)$ 成立。于是

$$\int_{J_u} \left[|u^+ \cdot \nu_u| + |u^- \cdot \nu_u|\right] \, d\mathcal{H}^{d-1} \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{J_{u_n}} \left[|u_n^+ \cdot \nu_{u_n}| + |u^- \cdot \nu_{u_n}|\right] \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

证明。考虑一个函数可数集 $\{\varphi_h : h \in \mathbb{N}\}$，它在集合内部关于 $\|\cdot\|_\infty$稠密

$$\left\{ f \in C_c^0(]0,+\infty[) \, : \, \int_0^{+\infty} f \, \mathrm{d}t = 0 \text{ and } \|f\|_\infty \le 1 \right\}.$$

给定 $\varepsilon > 0$，考虑

$$g_{h,k}(x) := \int_0^{\frac{1}{2}|x-x_k|^2} \varphi_h(t) \, dt,$$

其中 $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ 是 $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^d$ 中的一个可数稠密集，且满足 $x_0 = 0$。显然 $g_{h,k} \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$，其中

$$G_{h,k}(x) := \nabla g_{h,k}(x) = \varphi_h\left(\frac{1}{2}|x-x_k|^2\right)(x-x_k).$$

我们有，$G_{h,k}$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一个具有紧支撑的连续保守向量场。

令 $(i,j) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$，并令 $\nu \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|\nu| = 1$

$$f_\varepsilon(i,j,\nu) := \sup_{h,k} (G_{h,k}(i) - G_{h,k}(j)) \cdot \nu.$$

根据构造， f_ε 是一个对称联合凸函数，符合 [26, 定义 3.1]。我们声称，对于 $i \neq j$

$$|i \cdot \nu| + |j \cdot \nu| \le f_\varepsilon(i,j,\nu) \le |i \cdot \nu| + |j \cdot \nu| + 2\varepsilon. \tag{5.4}$$

根据下半连续性结果 [26, 定理 5.1]，我们有

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{J_{u_n}} f_\varepsilon(u_n^+, u_n^-, \nu_{u_n}) \, d\mathcal{H}^{d-1} \ge \int_{J_u} f_\varepsilon(u^+, u^-, \nu_u) \, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

因此可以写成

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to+\infty} \left[\int_{J_{u_n}} \left[|u_n^+ \cdot \nu_{u_n}| + |u_n^- \cdot \nu_{u_n}|\right] \, d\mathcal{H}^{d-1} + 2\varepsilon \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n}) \right] \\
&\ge \liminf_{n\to+\infty} \int_{J_{u_n}} f_\varepsilon(u_n^+, u_n^-, \nu_{u_n}) \, d\mathcal{H}^{d-1} \ge \int_{J_u} f_\varepsilon(u^+, u^-, \nu_u) \, d\mathcal{H}^{d-1} \\
&\ge \int_{J_u} \left[|u^+ \cdot \nu_u| + |u^- \cdot \nu_u|\right] \, d\mathcal{H}^{d-1},
\end{aligned}$$

因此　　考虑到 $\mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})$的上界并令 $\varepsilon \to$，即可得出结论　　0.

为了完成证明，我们需要证明断言 (5.4)。上界估计可由下式得到

$$[G_{h,k}(i) - G_{h,k}(j)] \cdot \nu \le |(i-x_k)\cdot\nu| + |(j-x_k)\cdot\nu| \le |i\cdot\nu| + |j\cdot\nu| + 2\varepsilon$$

由于 $\|\varphi_h\|_\infty \le 1$ 和 $|x_k| < \varepsilon$。下面证明下界估计。我们选取 $x_{k_n} \to 0$，使得$|i - x_{k_n}| \neq |j - x_{k_n}|$（鉴于 $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ 在 $B_\varepsilon(0)$ 中的稠密性，且由于 $i \neq j$，这总是可能的），然后选取 φ_{h_n}，使得对于 $n \to +\infty$

$$\varphi_{h_n}\left(\frac{1}{2}|i-x_{k_n}|^2\right) \to \frac{i\cdot\nu}{|i\cdot\nu| + \eta} \qquad \text{and} \qquad \varphi_{h_n}\left(\frac{1}{2}|j-x_{k_n}|^2\right) \to -\frac{j\cdot\nu}{|j\cdot\nu| + \eta},$$

其中 $\eta > 0$。根据 f_ε 的定义，我们可推得

$$f_\varepsilon(i,j,\nu) \ge |i\cdot\nu| + |j\cdot\nu| - 2\eta,$$

因此令 $\eta \to 0$ 趋于.....，即可得到下界估计。 □

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理 5.3（跳跃集上不可穿透约束的闭性）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集，且 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $SBD(\Omega)$ 中的一个序列，使得

$$\sup_n \left[\int_\Omega |e(u_n)|^2\,dx + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})\right] < +\infty$$

and

$$u_n \to u \qquad \text{in measure}$$

对某个 $u \in SBD(\Omega)$ 成立。若

$$u_n^{\pm}\cdot \nu_{u_n} = 0 \qquad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. on } J_{u_n},$$

then

$$u^{\pm}\cdot \nu_{u} = 0 \qquad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. on } J_{u}.$$

证明。由定理 5.2，我们可以写成

$$\int_{J_u} \left[|u^+\cdot\nu_u| + |u^-\cdot\nu_u|\right]\,d\mathcal{H}^{d-1} \le \liminf_{n\to+\infty}\int_{J_{u_n}} \left[|u_n^+\cdot\nu_{u_n}| + |u^-\cdot\nu_{u_n}|\right]\,d\mathcal{H}^{d-1} = 0,$$

因此结论成立。 □

5.3. SBD中的表面能下半连续性结果。本节讨论泛函 J （见（4.2））中与障碍物上的纳维条件相关的曲面项的下半连续性。下述下半连续性结果成立。

定理 5.4. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个开集， $u_n, u \in SBD(\Omega)$ 满足

$$u_n \to u \qquad \text{strongly in } L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

and

$$\sup_n \left[\int_\Omega |e(u_n)|^2\,dx + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})\right] < +\infty.$$

那么，如果 $\phi\colon\ \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ 是一个下半连续函数，则有

$$\int_{J_u} [\phi(u^+) + \phi(u^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1} \le \liminf_{n\to+\infty}\int_{J_{u_n}} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1}.$$

特别地，这适用于 $\phi(u) = |u|^2$ 和 $\phi(u) = 1_{\{u\neq 0\}}$，这将是我们所关注的情形。

证明。首先注意到， ϕ 可以假设为连续函数。事实上，对于任意下半连续的非负 ϕ，通过考虑一列连续的非负函数 $\phi_k \nearrow \phi$ ，我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{J_u} [\phi(u^+) + \phi(u^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1} &= \liminf_{k\to\infty}\int_{J_u} [\phi_k(u^+) + \phi_k(u^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1}\\
&\le \liminf_{k\to\infty}\liminf_{n\to+\infty}\int_{J_{u_n}} [\phi_k(u_n^+) + \phi_k(u_n^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1}\\
&\le \liminf_{n\to+\infty}\int_{J_{u_n}} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1}
\end{aligned}$$

通过一种如今已相当标准的放大论证（见注 5.6），我们可以将问题化简为以下下半连续性结果。设 $Q_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ 为以 0 为中心的单位正方形，并令

$$H := Q_1 \cap \{x_d = 0\} \qquad \text{and} \qquad Q_1^{\pm} := Q_1 \cap \{x_d \gtrless 0\}.$$

给定 $u^{\pm}\in\mathbb{R}^d$，其中 $u^+\neq u^-$ 和 $u_n\in SBD(Q_1)$ 满足

$$u_n\to u:=u^+1_{Q_1^+}+u^-1_{Q_1^-}\qquad\text{strongly in } L^1(Q_1;\mathbb{R}^d), \tag{5.5}$$

$$\sup_n \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n})<+\infty \tag{5.6}$$

and

$$e(u_n)\to 0\qquad\text{strongly in } L^1(Q_1;M^{d\times d}_{sym}), \tag{5.7}$$

then

$$\phi(u^+)+\phi(u^-)\le\liminf_{n\to+\infty}\int_{J_{u_n}}[\phi(u_n^+)+\phi(u_n^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1}. \tag{5.8}$$

现在我们将证明分为几个步骤，并将采用第2节中解释的 SBD函数的截面刻画。

步骤1。设给定 $\varepsilon>0$ 。我们固定 $\delta>0$ 和 $N\in\mathbb{N}$，使得 $N>d$：这些数将受到证明过程中出现的若干约束。

固定 N 个单位向量 $\{\xi_i\}_{1\le i\le N}$，使得

$$|e_d\cdot\xi_i-1|<\delta \tag{5.9}$$

并且其中任意 d 个都构成 $\mathbb{R}^d$的一组基。此外，我们还可以假设

$$(u^+-u^-)\cdot\xi_i\neq 0 \tag{5.10}$$

对于每个 $i=1,\ .....,\ N$。

由 (5.5) 和 (5.6)，我们可以固定一个足够小的 $a>0$，使得令 $H^{\pm}:=H\times\{\pm a\}=H\pm ae_d$ 后，有

$$(u_n)_{|H^{\pm}}\to u^{\pm}\qquad\text{strongly in } L^1(H^{\pm};\mathbb{R}^d)$$

and

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n}\cap H^{\pm})=0. \tag{5.11}$$

步骤 2. 我们声称，取一个子序列后，可以找到 $H_\varepsilon^-\subset H^-$，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(H^-\setminus H_\varepsilon^-)<\varepsilon \tag{5.12}$$

使得对每个 $i=1,\ \dots,\ N$，对每个 $y\in H_\varepsilon^-$ 以及对每个 $n\in\mathbb{N}$

$$H_\varepsilon^-\cap J_{u_n}=\emptyset, \tag{5.13}$$

and

$$\mathcal{H}^0((J_{u_n})_y^{\xi_i})<+\infty,\quad \mathcal{H}^0((J_{u_n})_y^{\xi_i}\cap\mathbb{R}_+)\ge 1\,. \tag{5.14}$$

此外，令

$$\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i}:=u_n(y+t\xi_i)\cdot\xi_i,$$

对每个 $y\in H_\varepsilon^-$，我们有

$$\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i}\in SBV((Q_1)_y^{\xi_i}),$$

$$J_{\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i}}=(J_{u_n})_y^{\xi_i} \tag{5.15}$$

（参见记号（2.4））,

$$\|[\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i}]'\|_{L^1}\to 0\qquad\text{uniformly for } y\in H_\varepsilon^-, \tag{5.16}$$

and

$$(u_n)_{|H^-} \to u^- \qquad \text{uniformly on } H_\varepsilon^-. \tag{5.17}$$

事实上，i 如果（5.9）中出现的数值 δ 足够小，我们就可以找到 $A_\varepsilon^- \subseteq H^-$ ，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(H^- \setminus A_\varepsilon^-) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.18}$$

并且对于每个 $y \in A_\varepsilon^-$，直线 $\{y + t\xi_i : \ t \in \mathbb{R}\}$ 都与 H^+ 相交，其中每个 $i = 1$，....., N均成立。根据（5.5）、（5.6）和（5.7），又由于逐点收敛意味着几乎一致收敛，我们可以找到 $N_\varepsilon \subset A_\varepsilon^-$，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(N_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.19}$$

并且，取一个子序列后

$$\|\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i} - \widehat{u}_y^{\xi_i}\|_{L^1} \to 0 \qquad \text{uniformly for } y \in A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon \tag{5.20}$$

$$\|[\widehat{(u_n)}_y^{\xi_i}]'\|_{L^1} \to 0 \qquad \text{uniformly for } y \in A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon \tag{5.21}$$

$$(u_n)_{|H^-} \to u^- \qquad \text{uniformly on } A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon, \tag{5.22}$$

并且对于每个 $y \in A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon$

$$\mathcal{H}^0((J_{u_n})_y^{\xi_i}) < +\infty. \tag{5.23}$$

注意，当 n 充分大时，对于每个$y \in A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon$ ，我们都有

$$(J_{u_n})_y^{\xi_i} \neq \emptyset. \tag{5.24}$$

事实上，否则，对于 $n_k \to +\infty$，我们将得到 $y_k \in A_\varepsilon^- \setminus N_\varepsilon$ 的存在，使得 $\widehat{(u_{n_k})}_{y_k}^{\xi_i} \in W^{1,\,1}((Q_1)_{y_k}^{\xi_i})$，并且 (5.22) 与 (5.21) 一起将推出

$$\|\widehat{(u_{n_k})}_{y_k}^{\xi_i} - u^-\|_1 \to 0$$

这与 (5.20) 矛盾（回想一下，根据对 ξ_i 的选择 (5.10)，函数 $\widehat{u}_y^{\xi_i}$ 有一个跳跃）。令.....即可得到该结论

$$H_\varepsilon^- := A_\varepsilon \setminus \left[N_\varepsilon \cup \bigcup_n (J_{u_n} \cap H^-) \right].$$

事实上，(5.12) 可由 (5.18)、(5.19) 和 (5.11) 推出，而 (5.13) 显然成立。由 (5.23) 和 (5.24) 可得关系式 (5.14)，而关系式 (5.16) 可由 (5.21) 推出。最后，关系式 (5.17) 可由 (5.22) 推出。

步骤 3。对于每个 $i = 1, \ldots, N$，考虑集合 $J^{i,\ n^-}$：它由直线 $\{y + t\xi^i : \ t \in \mathbb{R}\}$ 与跳跃集 J_{u_n} 的（关于 $t > 0$ 的）第一个交点构成，其中 y 在步骤 2 中定义的集合 H_ε^- 内变化（回想 (5.14) 和 (5.15)）。鉴于 (5.16) 和 (5.17)，我们可以找到 $\eta_n \to 0$ ，使得对于每个$x \in J^{i,\ n^-}$，都有 $\nu_{u_n} \cdot \xi_i > 0$

$$|u_n^-(x) \cdot \xi_i - u^- \cdot \xi_i| < \eta_n. \tag{5.25}$$

步骤 4. 我们断言，当 δ 足够小时且 N 足够大时，经过取一个子序列，我们可以找到$J_n^- \subseteq J_{u_n}$ ，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(\tilde{J}_n^-) \geq 1 - c_\varepsilon, \tag{5.26}$$

˜其中， $c_\varepsilon \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时，并且对于每个 $x \in J_n^-$

$$x \in J_n^{i,-} \text{ for } d \text{ different indices } i \in \{1,\dots,N\}, \tag{5.27}$$

其中 $J^{i,}{}_n{}^-$在步骤 3 中定义。此外，我们可以对 ν_{u_n} 在 $\tilde{J}_n^-$ 上进行定向，使得 t

$$e_d \cdot \nu_{u_n} > 0 \qquad \text{and} \qquad \xi_i \cdot \nu_{u_n} > 0 \text{ for every } i = 1,\dots,N. \tag{5.28}$$

˜直观地说， J_n^- 中的点是从 H_ε^- 沿着 d 个不同方向观察到的；此外，相应的直线横向穿过跳跃集，从“下”部到“上”部。

事实上，根据 ξ_i 的定义（当 $\delta \to 0$ 时，它们与 e_d 形成的角度很小）以及面积公式（例如参见 [24, 第 3.2] 节），我们可以假设 δ 足够小，以至于对每个 $i = 1$, ..., N

$$\mathcal{H}^{d-1}(J_n^{i,-}) \geq \int_{J_n^{i,-}} |\nu_{u_n} \cdot \xi_i| \, d\mathcal{H}^{d-1} = \mathcal{H}^{d-1}((H_\varepsilon^-)^{\xi_i}) = \frac{1}{1+\hat{c}_\delta}\mathcal{H}^{d-1}(H_\varepsilon^-), \tag{5.29}$$

其中记号 $(H_\varepsilon^-)^{\xi_i}$ 在 (2.1) 中定义，且 ˆ$c_\delta \to 0$，因此，考虑到 (5.12)，当 δ 很小时，我们有

$$\mathcal{H}^{d-1}(J_n^{i,-}) \geq 1 - 2\varepsilon. \tag{5.30}$$

根据下文的引理 5.5（其中 $X = J_{u_n}$、 $\mu = \mathcal{H}^{d-1}$ 和 $\mathcal{M}$ 由博雷尔集族给出），如果 N 足够大，我们就可以找到一个指标 i，使得

$$\mathcal{H}^{d-1}\left(J_n^{\bar{i},-} \setminus \bigcup_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_d \\ i_h=1,\dots,N}} \left(J_n^{i_1,-} \cap J_n^{i_2,-} \cap \cdots \cap J_n^{i_d,-}\right) \right) < \varepsilon. \tag{5.31}$$

直观地说，$_n{}^-$中的大多数点都可以从至少 d^-个不同方向上被 H_ε^-看到：˜我们称这个集合为 J_n^-，即，

$$\tilde{J}_n^- := J_n^{\bar{i},-} \cap \bigcup_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_d \\ i_h=1,\dots,N}} \left(J_n^{i_1,-} \cap J_n^{i_2,-} \cap \cdots \cap J_n^{i_d,-}\right). \tag{5.32}$$

由 (5.30) 和 (5.31) 可得

$$\mathcal{H}^{d-1}(\tilde{J}_n^-) \geq 1 - 3\varepsilon. \tag{5.33}$$

最后，若令

$$G_{n,\varepsilon} := \{x \in \tilde{J}_n^- \,:\, |\nu_{u_n} \cdot \xi_{\bar{i}}| > \varepsilon\} \qquad \text{and} \qquad B_{n,\varepsilon} := \tilde{J}_n^- \setminus G_{n,\varepsilon},$$

回到 (5.29)，我们有

$$\mathcal{H}^{d-1}(G_{n,\varepsilon}) + \varepsilon^2 \mathcal{H}^{d-1}(B_{n,\varepsilon}) > 1 - 3\varepsilon,$$

从而

$$\mathcal{H}^{d-1}(G_{n,\varepsilon}) > 1 - 3\varepsilon - \varepsilon^2 C,$$

其中 $C := \sup_n \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n}) < +\infty$。最后，我们将 ν_{u_n} 上的法向量定向为 $G_{n,\varepsilon}$，使得

$$\nu_{u_n} \cdot \xi_{\bar{i}} > \varepsilon.$$

˜由 (5.9) 可知，若 δ 足够小，则不等式 (5.28) 在 $G_{n,\varepsilon}$ 上也成立。如有必要，将 J_n^- 缩小至 $G_{n,\varepsilon}$，再结合 (5.32) 和 (5.33)，即可得到完整结论。

˜步骤 5. 令 $J_n^- \subseteq J_{u_n}$ 为步骤 4 给出的集合。由于从 H_ε^-观察该集合中的点时，它们分别沿着 ˙d 不同的方向，根据 (5.25)，我们推断存在 $\tilde{\eta}_n \to 0$，使得对于每个 $x \in J_n^-$

$$|u_n^-(x) - u^-| < \tilde{\eta}_n.$$

以类似的方式从上部 H_ε^+出发，并采用相反方向$\{-\xi_i\colon\ i=1$、.....、 $N\}$，我们可以构造 $\tilde{J}_n^+ \subseteq J_{u_n}$，使其具有 ν_{u_n}取向，从而再次得到

$$e_d \cdot \nu_{u_n} > 0 \qquad \text{and} \qquad \xi_i \cdot \nu_{u_n} > 0 \text{ for every } i = 1, \dots, N,$$

使得

$$\mathcal{H}^{d-1}(\tilde{J}_n^+) \geq 1 - c_\varepsilon \tag{5.34}$$

其中 $c_\varepsilon \to 0$ 为 $\varepsilon \to 0$，且使得对每个 $x \in \tilde{J}_n^+$

$$|u_n^+(x) - u^+| < \tilde{\eta}_n.$$

注意，对于 $x \in \tilde{J}_n^- \cap \tilde{J}_n^+$，所选定向与 (5.28) 中的定向相容，因此确实有 $u_n^-(x)$ 和 $u_n^+(x)$，它们是 u_n 在 x 处的两个迹。

因此，鉴于 ϕ 的连续性，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\int_{J_{u_n}} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\, d\mathcal{H}^{d-1} \geq \int_{\tilde{J}_n^+ \cap \tilde{J}_n^-} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\tilde{J}_n^+ \Delta \tilde{J}_n^-} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\, d\mathcal{H}^{d-1} \\
&\geq \int_{\tilde{J}_n^+ \cap \tilde{J}_n^-} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\tilde{J}_n^+ \setminus \tilde{J}_n^-} \phi(u_n^+)\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\tilde{J}_n^- \setminus \tilde{J}_n^+} \phi(u_n^-)\, d\mathcal{H}^{d-1} \\
&\geq \int_{\tilde{J}_n^+} \phi(u_n^+)\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\tilde{J}_n^-} \phi(u_n^-)\, d\mathcal{H}^{d-1} \\
&\geq [\phi(u^+) - \tilde{\eta}_n]\mathcal{H}^{d-1}(\tilde{J}_n^+) + [\phi(u^-) - \tilde{\eta}_n]\mathcal{H}^{d-1}(\tilde{J}_n^-)
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\eta}_n \to 0$，因此，考虑到 (5.26) 和 (5.34)

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_{J_{u_n}} [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\, d\mathcal{H}^{d-1} \geq [\phi(u^+) + \phi(u^-)](1 - 2c_\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得结论。 □

在定理 5.4 的证明中，我们用到了以下抽象引理。

引理 5.5. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个有限测度空间。设 $\varepsilon > 0$ and $d \geq 2$。那么存在仅依赖于 $\mu(X)$ ε, d 的 $N \in \mathbb{N}$，使得若 $\{E_i\}_{i=1,\dots,N}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的集合族，我们就可以找到 $\bar{i}$，使得

$$\mu\left(E_{\bar{i}} \setminus \bigcup_{j_1 < j_2 < \cdots < j_d} (E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \cdots \cap E_{j_d})\right) < \varepsilon.$$

证明. 不失一般性，除以 $\mu(X)$ 后，我们可以假设 $\mu(X) = 1$。只需证明：对于任意 $d \geq 2, \varepsilon > 0$，存在某个 $N(d, \varepsilon) \geq 1$，使得对于任意由 $N \geq N(d, \varepsilon)$ 个集合组成的族 $(E_i)_{1 \leq i \leq N}$，都存在某个 i 满足

$$\mu\left(E_i \setminus \bigcup_{J \subset [1,N] \setminus \{i\}, |J| = d-1} \bigcap_{j \in J} E_j\right) < \varepsilon,$$

这意味着存在某个 i，使得 E_i 中除去一个测度小于 ε 的集合外，每一点都属于（至少） $d-1$ 个其他集合 E_j（对于 $j \neq i$）。

我们通过递归证明。若 $d = 2$，令 $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，其中 $[\cdot]$ 表示整数部分。给定 $(E_i)_{1 \leq i \leq N}$，考虑集合 $\left(E_i \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq N, j \neq i} E_j\right)_{1 \leq i \leq N}$。这些集合互不相交，且 $\mu(X) = 1$，因此存在某个i使得

$$\mu\left(E_i \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq N, j \neq i} E_j\right) \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon,$$

这就证明了初始步骤。

现在假设该结果对 d 成立，并检查它对 $d+1$是否成立。设

$$N := N\left(d, \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{and} \qquad M := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right],$$

并考虑 $N \times M$ 个集合，将它们分为 N组，每组包含 M 个集合，记作 $(E_{k,i})_{1\le k\le N, 1\le i\le M}$。对于每个 $k \in [1,N]$，集合 $\left(E_{k,i} \setminus \bigcup_{1\le j\le M, j\neq i} E_{k,j}\right)_{1\le i\le M}$两两不相交，因此存在某个 i_k使得

$$\mu\left(E_{k,i_k} \setminus \bigcup_{1\le i\le M, i\neq i_k} E_{k,i}\right) \le \frac{1}{M} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

考虑集合 $(E_{k,i_k})_{1\le k\le N}$，由于 $N = N\left(d, \frac{\varepsilon}{2}\right)$，我们可找到某个 $\overline{k}$使得

$$\mu\left(E_{\overline{k},i_{\overline{k}}} \setminus \bigcup_{K\subset[1,N]\setminus\{\overline{k}\}, |K|=d-1} \bigcap_{k\in K} E_{k,i_k}\right) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

这意味着，除去一个测度至多为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的集合，$E_{\overline{k},i_{\overline{k}}}$中的每个点都属于形如 E_{k,i_k} 的 $d-1$ 个集合，其中 $k \neq \overline{k}$；类似地，除去一个测度至多为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的集合，每个点也属于某个形如 $E_{\overline{k},i}$ 的集合，其中某个 $i \neq i_{\overline{k}}$。由此可知，除去一个测度至多为 ε 的集合，$E_{\overline{k},i_{\overline{k}}}$ 中的每个点都属于 d个其他集合，这意味着 $N(d+1,\varepsilon)$ 定义良好，且 $N(d+1,\varepsilon) \le N\left(d, \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$。□

注 5.6. 下面详细说明定理 5.4 证明中所用的放大论证。若令

$$\mu_n := [\phi(u_n^+) + \phi(u_n^-)]\mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_{u_n}$$

并假设（不妨取一个子序列）

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \qquad \text{weakly* in } \mathcal{M}_b(\Omega)$$

对某个定义在 Ω 上的拉东测度 μ，若能证明

$$\mu \ge [\phi(u^+) + \phi(u^-)]\mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_u \qquad \text{as measures on } \Omega.$$

为此，只需证明

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{H}^{d-1}}(x) \ge [\phi(u^+(x)) + \phi(u^-(x))] \qquad \text{for } \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. } x \in J_u, \tag{5.35}$$

其中，$\frac{d\mu}{d\mathcal{H}^{d-1}}$ 表示 μ 相对于 $\mathcal{H}^{d-1}$ （限制在 J_u上）的拉东－尼科迪姆导数。设（不妨取子序列）

$$\lambda_n := \mathcal{H}^{d-1}\lfloor J_{u_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \qquad \text{weakly* in } \mathcal{M}_b(\Omega),$$

并且

$$|e(u_n)|\,dx \overset{*}{\rightharpoonup} f\,dx \qquad \text{weakly* in } \mathcal{M}_b(\Omega),$$

其中 $f \in L^1\Omega$（这是可行的，因为（$e(u_n)$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 在 L 中有界）。[2]

令 $x \in J_u$ 使得

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{H}^{d-1}}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\mu(Q_{x,r})}{r^{d-1}}, \qquad \lim_{r\to 0}\frac{\lambda(Q_{x,r})}{r^{d-1}} < +\infty, \qquad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{d-1}}\int_{Q_r(x)} |f|\,dx = 0,$$

并且（选择坐标轴使得 $\nu_u(x) = e_d$），对于 $r \to 0^+$

$$u(x + r\cdot) \to u^+(x)1_{Q_1^+} + u^-(x)1_{Q_1^-} \qquad \text{strongly in } L^1(Q_1;\mathbb{R}^d).$$

由于这些性质对 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎处处的 $x \in J_u$ 都成立，因此只需关注这类点来证明不等式 (5.35)。

设 $r_k \to 0$ 满足

$$\mu(\partial Q_{x,r_k}) = \lambda(\partial Q_{x,r_k}) = 0.$$

由于弱收敛以及上述关系，我们有 $\mu_n(Q_{x,\ r_k}) \to \mu(Q_{x,\ r_k})$，对于 λ 也同样如此，因此我们可以选取 $n_k \nearrow +\infty$，使得

$$\mu(Q_{x,r_k}) \geq \mu_{n_k}(Q_{x,r_k}) - \frac{r_k^{d-1}}{k}, \qquad \lambda(Q_{x,r_k}) \geq \lambda_{n_k}(Q_{x,r_k}) - \frac{r_k^{d-1}}{k},$$

and

$$\int_{Q_{x,r_k}} |f|\,dx \geq \int_{Q_{x,r_k}} |e(u_{n_k}|\,dx - \frac{r_k^{d-1}}{k}.$$

此外，令 $v_k(y) := u_{n_k}(x + r_k y)$，我们还可以假设

$$v_k \to u^+(x)1_{Q_1^+} + u^-(x)1_{Q_1^-} \qquad \text{strongly in } L^1(Q_1;\mathbb{R}^d).$$

我们得到

$$\int_{Q_1} |e(v_k)|\,dx = \frac{1}{r_k^{d-1}} \int_{Q_{x,r_k}} |e(u_{n_k}|\,dx \leq \frac{1}{r_k^{d-1}} \int_{Q_{x,r_k}} |f|\,dx + \frac{1}{k} \to 0$$

and

$$\mathcal{H}^{d-1}(J_{v_k}) = \frac{1}{r_k^{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_{n_k}} \cap Q_{x,r_k}) = \frac{\lambda_{n_k}(Q_{x,r_k})}{r_k^{d-1}} \leq \frac{\lambda(Q_{x,r_k})}{r_k^{d-1}} + \frac{1}{k} \to c < +\infty,$$

于是，利用关于单位正方形上函数的下半连续性 (5.8)（定理的证明已归结为此）

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{d\mathcal{H}^{d-1}}(x) &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\mu(Q_{x,r_k})}{r_k^{d-1}} \geq \liminf_{k\to+\infty} \frac{\mu_{n_k}(Q_{x,r_k})}{r_k^{d-1}} \\ &= \liminf_{k\to+\infty} \int_{J_{v_k}} [\phi(v_k^+) + \phi(v_k^-)]\,d\mathcal{H}^{d-1} \geq \phi(u^+(x)) + \phi(u^-(x))\end{aligned}$$

(5.35) 即得。

6. Existence of minimizers: proof of Theorem 4.8

现在我们可以证明本文的第一个主要结果。

定理 4.8 的证明。设 $(E_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个极小化序列：由于函数 f 并非恒等于 $+\infty$，且根据注 4.6，存在 $C > 0$ 使得

$$\mathcal{J}(E_n, u_n) \leq C.$$

由于在 E_n 上 $u_n = 0$ 几乎处处成立，我们可以写成

$$\int_{\partial^* E_n} |u_n^+|^2\,d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{J_{u_n}\setminus\partial^* E_n} [|u_n^+|^2 + |u_n^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{J_{u_n}} [|u_n^+|^2 + |u_n^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1}$$

因此我们推断

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E_n) \leq C \qquad \text{and} \qquad \int_\Omega |e(u_n)|^2\,dx + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n}) + \int_{J_{u_n}} [|u_n^+|^2 + |u_n^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1} \leq C.$$

注意到

$$\begin{aligned}|E(u_n)|(\Omega') &= \int_{\Omega'} |e(u_n)|\,dx + \int_{J_{u_n}} |u_n^+ - u_n^-|\,d\mathcal{H}^{d-1}\\ &\le \int_{\Omega'\setminus\Omega} |e(V)|\,dx + \int_{\Omega} |e(u_n)|\,dx + \int_{J_{u_n}} [|u_n^+| + |u_n^-|]\,d\mathcal{H}^{d-1}\\ &\le \int_{\Omega'\setminus\Omega} |e(V)|\,dx + \frac{1}{2}\left[|\Omega| + \int_{\Omega} |e(u_n)|^2\,dx + 2\mathcal{H}^{d-1}(J_{u_n}) + \int_{J_{u_n}} [|u_n^+|^2 + |u_n^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1}\right] \le \tilde{C},\end{aligned}$$

对于某个 $\tilde{C} > 0$。此外，根据应用于 $u - V$ 的定理 5.1，我们还可以假设 tha t

$$\|u_n\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega')} \le \tilde{C}. \tag{6.1}$$

根据 SBD 中的紧性结果（见定理 2.1），存在一个子序列 $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $u \in SBD(\Omega')$，使得 $u = V$ 在 $\Omega'\setminus\Omega$ 上成立，并且

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{strongly in } L^1(\Omega';\mathbb{R}^d), \tag{6.2}$$

$$e(u_{n_k}) \rightharpoonup e(u) \qquad \text{weakly in } L^2(\Omega';M^{d\times d}_{sym}), \tag{6.3}$$

and

$$\mathcal{H}^{d-1}(J_u) \le \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(J_{u_{n_k}}).$$

关于集合 E_{n_k}，如有必要，我们可以取进一步的子序列并假设存在一个精细周长为 $E \subset\Omega$ 的集合，使得

$$1_{E_{n_k}} \to 1_E \qquad \text{strongly in } L^1(\mathbb{R}^d) \tag{6.4}$$

with

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E) \le \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E_{n_k}).$$

特别地，我们得到

$$f(|E|) \le \liminf_{n\to+\infty} f(|E_n|). \tag{6.5}$$

我们来证明

$$(E,u) \in \mathcal{A}(V). \tag{6.6}$$

由 (6.1) 可推得 $u \in L^{\frac{2d}{d-1}}(\Omega';\mathbb{R}^d)$，因此特别有 $u \in L^2(\Omega';\mathbb{R}^d)$。此外，在 $\Omega'\setminus\Omega$ 上 $u = V$，而根据 (6.2) 和 (6.4)，在 E 上几乎处处有 $u = 0$。

由于散度约束是在 Ω 上按分布的意义理解的，利用 (6.2) 可轻易将其传递到极限。此外，根据定理 5.3，我们推出

$$u^{\pm} \perp \nu_u \qquad \text{on } J_u.$$

特别地，这意味着

$$u^+ \perp \nu_E \qquad \text{on } \partial^* E \cap \Omega,$$

因为对于 $x \in \partial^* E$，我们有 $x \in J_u$ 或 $u^+(x) = 0$。由此得出，速度场的不可穿透约束在 $\partial^* E$ 和 $J_u \setminus \partial^* E$ 上成立，因此 (6.6) 成立。

我们来证明，数对 (E,u) 是该问题的一个极小化者。由 (6.3) 可得

$$\int_{\Omega'} |e(u)|^2\,dx \le \liminf_{k\to+\infty} \int_{\Omega'} |e(u_{n_k})|^2\,dx,$$

而根据定理 5.4，我们有

$$\int_{J_u} [|u^+|^2 + |u^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1} \le \liminf_{k\to+\infty} \int_{J_{u_{n_k}}} [|u_{n_k}^+|^2 + |u_{n_k}^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1},$$

这意味着

$$\begin{aligned}&\int_{\partial^* E} |u^+|^2\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{J_u\setminus\partial^* E} [|u^+|^2 + |u^-|^2]\, d\mathcal{H}^{d-1}\\ &\le \liminf_{k\to+\infty} \left[\int_{\partial^* E_{n_k}} [u^+_{n_k}|^2\, d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{J_{u_{n_k}}\setminus\partial^* E_{n_k}} [|u^+_{n_k}|^2 + |u^-_{n_k}|^2]\, d\mathcal{H}^{d-1}\right]\end{aligned} \tag{6.7}$$

因为在 E 上几乎处处有 $u=0$，且在 E_{n_k} 上几乎处处有 $u_{n_k}=0$。

我们来证明

$$2\mathcal{H}^{d-1}(J_u\setminus\partial^* E) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E) \le \liminf_{k\to+\infty} \left(2\mathcal{H}^{d-1}(J_{u_{n_k}}\setminus\partial^* E_{n_k}) + \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E_{n_k})\right). \tag{6.8}$$

我们来选择 $h\in\mathbb{R}^d$，使得

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^{d-1}(\{x\in\partial^* E\cup J_u : u^+(x)=h\}) = \mathcal{H}^{d-1}(\{x\in\partial^* E\cup J_u : u^-(x)=h\})\\ &\quad = \mathcal{H}^{d-1}(\{x\in\partial^* E_{n_k}\cup J_{u_{n_k}} : u^+_{n_k}(x)=h\}) = \mathcal{H}^{d-1}(\{x\in\partial^* E_{n_k}\cup J_{u_{n_k}} : u^-_{n_k}(x)=h\}) = 0.\end{aligned}$$

这是可行的，因为例如集合 $\{x\in\partial^* E\cup J_u\colon\ u^+(x)=h\}$ 在 h 变化时互不相交，其他集合也同样如此。特别地，令

$$v^h := u + h1_E \qquad \text{and} \qquad v^h_{n_k} := u_{n_k} + h1_{E_{n_k}}$$

我们有

$$J_{v^h} = J_u\cup J_{1_E} = \partial^* E\cup J_u \qquad \text{and} \qquad J_{v^h_{n_k}} = J_{u_{n_k}}\cup J_{1_{E_{n_k}}} = \partial^* E_{n_k}\cup J_{u_{n_k}}$$

在忽略 $\mathcal{H}^{d-1}$-零测集的意义下。若在序列 $(v^h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 上取 $\phi_h(s)=1_{\{s\neq h\}}$ 并应用定理 5.4，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E) + 2\mathcal{H}^{d-1}(J_u\setminus\partial^* E) &= \int_{J_{v^h}} [\phi_h((v^h)^+) + \phi_h((v^h)^-)] d\mathcal{H}^{d-1}\\ &\le \liminf_{k\to+\infty} \int_{J_{v^h_{n_k}}} [\phi_h((v^h_{n_k})^+) + \phi_h((v^h_{n_k})^-)] d\mathcal{H}^{d-1}\\ &= \liminf_{k\to+\infty} \left[\mathcal{H}^{d-1}(\partial^* E_{n_k}) + 2\mathcal{H}^{d-1}(J_{u_{n_k}}\setminus\partial^* E_{n_k})\right]\end{aligned} \tag{6.9}$$

从而 (6.8) 成立。

综合 (6.3)、(6.7)、(6.5) 和 (6.8)，我们推得

$$\mathcal{J}(E,u) \le \liminf_{k\to+\infty} \mathcal{J}(E_{n_k}, u_{n_k})$$

因此，考虑到 (6.6)，有序对 (E,u) 是主问题 (4.3) 的极小化者，证明至此完成。□

7. Regularity of two-dimensional minimizers: proof of Theorem 4.10

本节旨在证明定理 4.10，该定理涉及二维情形下极小化子的正则性。

如引言中所述，德乔治、Carriero 和 Leaci 针对 [22] 中的 Mumford-Shah问题所采用的一般策略，在 [18, 15] 中结合 Griffith断裂问题考察时，面临向量情形带来的新困难；此外，我们的问题还具有特有的额外条件，即速度场的不可压缩性和不可穿透性。我们遵循 [18, 15] 的主要思路：然而，技术上的困难使我们只能处理二维情形（见下文 (a) 点）。

由于我们的阻力问题将成对的 (E,u) 视为可容许构型，而 $\partial^* E$中的某些点可能不是 u的跳跃点，因此处理成对的 (J,u) 将很有用，其中 J 是一个可求 rectifiable 集，并且

u 是一个函数，其跳跃包含在 J 中（除去 $\mathcal{H}^1$-零测集），并满足零散度和不可穿透性的约束。更确切地说，我们给出以下定义。

定义 7.1（类 $\mathcal{V}$）。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为一个开集。若 $(J,u) \in \mathcal{V}(\Omega)$ 满足： $J \subseteq \Omega$ 是一个可求 rectifiable 集，且 $u \in SBD(\Omega)$ 满足 div $u = 0$ 在 Ω 中按分布意义成立， $\mathcal{H}^1(J_u \setminus J) = 0$ 且在 J 上 $u^{\pm}_{|J} \cdot \nu_J = 0$ $\mathcal{H}^1$-几乎处处成立，则称 (J,u) 属于该类。

本节的结构如下。

(a) 在第 7.1 节中，我们证明一个基本的逼近引理（光滑化引理 7.2），它允许我们将每个 $(J,u) \in \mathcal{V}(Q_1)$ 逼近为一个构型 $(J \setminus Q_r, v) \in \mathcal{V}(Q_1)$，其中 $\mathcal{H}^1(J)$ 很小；在略小的正方形 Q_r 内， v 是一个 Sobolev函数，并且能量受到控制。其思路是将 u 在 Q_r 中的跳跃集“平滑化”，从而得到函数 v ，该函数保持散度为零约束以及不可穿透条件。此结果受到 [15], 的启发，而二维在此处至关重要。

(b) 在第 7.2 节中，我们证明定义在 ({v1},{v2}) {v3}(Ω) 上的 Griffith 泛函的局部极小化子的正则性

$$G(J,u) := \int_\Omega |e(u)|^2 dx + \mathcal{H}^1(J),$$

。所考虑的局部极小性概念非常弱，其灵感来自利用光滑化引理 7.2 所构造的竞争函数。正则性证明的关键结果是命题 7.7 中的衰减估计。

随后，在第 7.3 节中，我们利用 Griffith 能量极小化者的正则性证明定理 4.10，即证明阻力问题极小化者的正则性。

(c) 最后，受定理 4.10 正则性结果的启发，我们在第 7.4 节中介绍阻力问题的另一种松弛形式，其中涉及拓扑闭障碍物和 Sobolev 速度场：该正则性结果可用于证明，这种表述在二维中是适定的。

7.1. 平滑引理。我们固定一个标准的径向光滑非负磨光函数 ρ ，其支集位于半径为 $1/8$ 的圆盘内，并记

$$\rho_\delta(x) := \delta^{-2}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

本节的主要结 果是以下平滑引理，其思想源自 [15] .

引理 7.2（平滑引理）。存在 $C, \eta > 0$ ，使得对于任意的 $(J,u) \in \mathcal{V}(Q_1)$，满足$\mathcal{H}^1(J) < \eta$，令 $\delta := \mathcal{H}^1(J)^{\frac{1}{2}}$，则存在 $r \in]1-\delta^{\frac{1}{2}}, 1[$和 $v \in SBD(Q_1) \cap H^1(Q_r)$，使得以下各项成立。

(a) $\mathcal{H}^0(J \cap \partial Q_r) = 0$ ，且对每个 $0 < s < r$

$$\mathcal{H}^1(J \cap (Q_r \setminus Q_{r-s})) \le C\delta^{\frac{3}{2}} s.$$

(b) $\{v \neq u\} \subseteq Q_r$ 且 $(J \setminus Q_r, v) \in \mathcal{V}(Q_1)$。

(c) 成立

$$\|e(v)\|_{L^2(Q_1)} \le (1 + C\delta^{\frac{1}{6}})\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}.$$

(d) 存在截断函数 $\varphi \in C^\infty(Q_r, [0,1])$，满足 $\varphi = 0$ 在 $Q_r \setminus Q_{r-\delta}$上、 $\varphi = 1$ 在 $Q_{r-4\delta}$上，并且

$$\|e(v) - \varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)} \le C\delta^{\frac{1}{6}}\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}.$$

证明。证明思路沿用 [15], 中提出的方法，部分内容将直接引用该论文。不过，由于我们的结论略有不同，我们会详细推导部分计算。对于某个维数相关的常数 C，当 $a \le Cb$ 时，我们将使用记号 $a \lesssim b$ 。

我们将证明分为几个步骤。

步骤 1：细分成小正方形。令

$$N := 1 + \left[\mathcal{H}^1(J)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

其中 $[\cdot]$ 表示整数部分。下文假设 $\mathcal{H}^1(J)$ 任意小，因此 N任意大。为便于构造，我们令 $\delta = 1/N \leq \mathcal{H}^1(J)^2$，这与命题中的取值略有不同；然而，由于 δ与 $\mathcal{H}^1(J)^2$渐近等价，这一差异不会影响结论的有效性。

对于 $r \in]1-\delta^{\frac{1}{2}}, 1[$以及每个 $k \geq -2$，令

$$\delta_k := \frac{\delta r}{2^k} \qquad \text{and} \qquad r_k = \left(N - \frac{1}{2^k}\right)\delta\,.$$

于是，我们将 Q_r （除去一个可忽略集）划分为立方体：用边长为 δ_0的立方体填充 Q_{r_0}，并记为 $(\tilde{q}_{0,j})_j$；然后用边长为 δ_k的立方体填充每个 $Q_{r_k} \setminus Q_{r_{k-1}}$，并记为 $(\tilde{q}_{k,j})_j$ （注意，这样做只有一种方式）。

对于任意正方形 $q = z + [-t,t]^2$，我们记

$$q' := z + \left[-\frac{8}{7}t, \frac{8}{7}t\right]^2 \qquad \text{and} \qquad q'' := (q')'.$$

我们设

$$q_{k,j} := (\tilde{q}_{k,j})'.$$

我们可以注意到，按照我们的选取

$$\forall k \geq 1 : q''_{k,j} \Subset Q_{r_{k+1}} \setminus Q_{r_{k-2}}, \tag{7.1}$$

并且 $\{q''_{k,j}\}_{k,\,j}$ 是 Q_r 的一个覆盖，重叠数有一个固定的有限上界：事实上，每个 $q''_{k,\,j}$ 至多与 8 个邻项相交 $q''_{p,\,i}$，且它们都满足 $|k-p| \leq 1$，也就是说 $\delta_k/\delta_p \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$。这是因为上面的因子 $\frac{8}{7}$的选取使得 $\left(\frac{8}{7}\right)^3 < \frac{3}{2}$。

步骤 2：正方形 Q_r的选取。现在我们方便地选取 r，使得 J 在 ∂Q_r 附近的密度较小，方法类似于 [17, 定理 2.1]。

我们断言，存在 $C, \eta > 0$，使得对于 $\delta < \eta$，我们可以选取 $r \in]1-\sqrt{\delta}, 1[$，满足 $\mathcal{H}^0(J \cap \partial Q_r) = 0$，

$$\forall\, s \in]0, r[:\ \mathcal{H}^1(J \cap (Q_r \setminus Q_{r-s})) \leq C\delta^{\frac{3}{2}} s \tag{7.2}$$

and

$$\int_{Q_r \setminus Q_{r-2}} |e(u)|^2\, dx < C\delta^{\frac{1}{2}} \int_{Q_1} |e(u)|^2\, dx. \tag{7.3}$$

事实上，考虑定义在 $[0,1]$ 上的测度 μ：

$$\mu(E) := \frac{\mathcal{H}^1(J \cap Q_E)}{\mathcal{H}^1(J)} + \frac{\int_{Q_E} |e(u)|^2\, dx}{\int_{Q_1} |e(u)|^2\, dx},$$

其中 $Q_E := \cup_{r \in E} \partial Q_r$ 是与 $E \subset [0,1]$ 相关的立方壳层。只需证明我们可以找到 $r \in]1-\delta^{\frac{1}{2}}, 1[$，使得

$$\mathcal{H}^0(J \cap \partial Q_r) = 0, \tag{7.4}$$

并记 $I_r^s := [r-s, r[$，其中 $0 < s < r$，

$$\mu(I_r^s) \leq \hat{C}\delta^{-\frac{1}{2}} s, \tag{7.5}$$

ˆ其中 $C > 0$ 是一个适当的常数，稍后将对其进行固定。事实上，如果 δ 足够小，则可得（回忆一下， $\mathcal{H}^1(J)$ 的行为类似于 δ^2）

$$\mathcal{H}^1(J \cap (Q_r \setminus Q_{r-s})) \le \mathcal{H}^1(J)\mu(I_r^s) \le \hat{C}\delta^{\frac{3}{2}}s$$

and

$$\int_{Q_r \setminus Q_{r-4\delta r}} |e(u)|^2\,dx \le \hat{C}\delta^{-\frac{1}{2}}(4\delta r)\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx \le 4\hat{C}\delta^{\frac{1}{2}}\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx,$$

ˆ 因此，取 $C := 4C$ 即可得到 (7.2) 和 (7.3)。

令 I_1 为以下区间的并集 这些区间均不满足 (7.5)。如果 $(I_{r_i}^{s_i})$ 是 I 的维塔利覆盖，那么

$$2 = \mu([0,1]) \ge \sum_i \mu(I_{r_i}^{s_i}) > \hat{C}\delta^{-\frac{1}{2}}\sum_i |I_{r_i}^{s_i}| = \frac{\hat{C}\delta^{-\frac{1}{2}}}{5}\sum_i |5I_{r_i}^{s_i}| \ge \frac{\hat{C}\delta^{-\frac{1}{2}}}{5}|I_1|$$

因此 $|I_1| < \frac{10}{\hat{C}}\delta^{\frac{1}{2}}$。

令 $I_2 := \pi_x(J) \cup \pi_y(J)$，其中 π_x、π_y 表示在坐标轴上的投影：渐近地有 $|I_2| \le 2\delta^2$。如果 $C > 10$，这意味着当 δ 足够小时

$$]1-\sqrt{\delta}, 1[\setminus(I_1 \cup I_2) \neq \emptyset,$$

由此可知存在 r，其满足断言 (7.4) 和 (7.5)。

步骤 3：一阶近似。根据 (7.2) 和 (7.1)，对于每个 $k \ge 1$，我们有 e

$$\mathcal{H}^1(J_u \cap q''_{k,j}) \lesssim \delta^{\frac{3}{2}}\delta_k,$$

而如果 δ 足够小（回想一下， $\mathcal{H}^1(J)$ 的变化趋势类似于 δ^2 和 $r \in]1-\delta^{\frac{1}{2}}$，1 []

$$\mathcal{H}^1(J_u \cap q''_{0,j}) \le \mathcal{H}^1(J_u) \lesssim \delta\delta_0.$$

这意味着，在所构造细分的每个立方体中， u 的跳跃集相对于立方体的边长可以任意小。

借助 [14, 命题 3]，，并考虑到前面的不等式，对于每个 (k,j)，都存在一个集合 $\omega_{k,\,j} \subset q'_{k,\,j}$ 和一个仿射函数 $a_{k,\,j}$，满足 $e(a_{k,\,j}) = 0$，使得

$$|\omega_{k,j}| \lesssim \delta_k \mathcal{H}^1(J_u \cap q''_{k,j}) \lesssim \delta\delta_k^2 \tag{7.6}$$

$$\int_{q'_{k,j}\setminus\omega_{k,j}} |u - a_{k,j}|^4\,dx \lesssim \left(\delta_k \int_{q''_{k,j}} |e(u)|^2\,dx\right)^2, \tag{7.7}$$

以及函数 $v_{k,\,j} := u + (a_{k,\,j} - u)1_{\omega_{k,\,j}}$ 满足

$$\begin{aligned}\int_{q_{k,j}} |e(\rho_{\delta_k} * v_{k,j}) - \rho_{\delta_k} * e(u)|^2\,dx &\lesssim \left(\frac{\mathcal{H}^1(J_u \cap q''_{k,j})}{\delta_k}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{q''_{k,j}} |e(u)|^2\,dx \\ &\lesssim \delta^{\frac{1}{3}} \int_{q''_{j,k}} |e(u)|^2\,dx,\end{aligned} \tag{7.8}$$

（见 [14, 第 1389] 页），其中 ρ 是本节开头定义的磨光函数。

注意到根据我们的构造（即 r 的选取），我们有

$$|\omega_{k,j}| \ll |q_{k,j}|, \tag{7.9}$$

而这正是我们最充分利用二维这一事实的地方。

现在，令 $(\varphi_{k,j})$ 为与 Q_r 的覆盖 $(q_{k,j})$ 相关联的单位分解，并使其满足$|\nabla\varphi_{k,j}| \lesssim \frac{1}{\delta_k}$。令

$$w := 1_{Q_1\setminus Q_r}u + 1_{Q_r}\sum_{k,j}\varphi_{k,j}w_{k,j} \qquad \text{where} \qquad w_{k,j} := \rho_{\delta_k} * v_{k,j}.$$

我们声称

$$w \in SBD(Q_1)\cap H^1(Q_r), \qquad \{w \neq u\} \subset Q_r, \qquad \mathcal{H}^1(J_w \setminus J) = 0, \tag{7.10}$$

$$\left\| e(w) - \sum_{k,j}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k} * e(u)\right\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \delta^{\frac{1}{6}}\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}, \tag{7.11}$$

and

$$\text{the trace of } w \text{ and } u \text{ on } \partial Q_r \text{ coincide.} \tag{7.12}$$

我们将这些断言的证明推迟到步骤 5。

令

$$\varphi := \sum_{(0,j)\in\mathcal{K}}\varphi_{0,j},$$

其中 $\mathcal{K}$ 表示满足以下条件的指标集：$q_{0,j}$ 与 ∂Q_r的距离大于 $2\delta r$ 。由于$r \in]1-\delta^{\frac{1}{2}}, 1[$，根据指标集 $\mathcal{K}$的定义可知，函数 φ 在$Q\setminus Q_{r-\delta}$ 上为零，在 $Q_{r-4\delta}$上等于 1。

我们可以写成

$$e(w) - \sum_{k,j}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k} * e(u) = \Big[e(w) - \varphi\rho_\delta * e(u)\Big] - \sum_{(k,j)\notin\mathcal{K}}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k} * e(u).$$

由（7.3）可得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{(k,j)\notin\mathcal{K}}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k} * e(u)\right\|^2_{L^2(Q_r)} &= \left\|\sum_{(k,j)\notin\mathcal{K}}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k} * e(u)\right\|^2_{L^2(Q_r\setminus Q_{r-2\delta r})}\\ &\lesssim \sum_{(k,j)\notin\mathcal{K}}\|\varphi_{j,k}\rho_{\delta_k} * e(u)\|^2_{L^2(Q_1\setminus Q_{r-2\delta r})}\\ &\lesssim \|e(u)\|^2_{L^2(Q_1\setminus Q_{r-3\delta r})} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}}\|e(u)\|^2_{L^2(Q_1)},\end{aligned}$$

因此，结合（7.11），我们得出

$$\|e(w) - \varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \delta^{\frac{1}{6}}\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}. \tag{7.13}$$

此外，我们可以写成

$$\begin{aligned}\|e(w)\|_{L^2(Q_r)} &\le \|\varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)} + \|e(w) - \varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)}\\ &= \|\varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_{r-\delta})} + \|e(w) - \varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)}\\ &\le \|e(u)\|_{L^2(Q_1)} + \|e(w) - \varphi\rho_\delta * e(u)\|_{L^2(Q_r)},\end{aligned}$$

因此，考虑到（7.13），我们推得

$$\|e(w)\|_{L^2(Q_1)} \le (1 + C\delta^{\frac{1}{6}})\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}, \tag{7.14}$$

其中 $C > 0$。

步骤 4：施加散度为零约束。根据可容许性，u在 Q_1 中的分布意义下无散度，因此 $e(u)$ 在 Q_1 中的迹为零，而

$$\int_{\partial Q_r} u\cdot\nu\, d\mathcal{H}^1 = 0, \tag{7.15}$$

其中 ν 是 Q_r 的外法向量，而 u 表示在 ∂Q_r 上的迹（根据构造，J 与 ∂Q_r 不相交）。

回忆 $w\in H^1(Q_r)$，由 (7.13) 可得

$$\|\operatorname{div} w\|_{L^2(Q_r)} = \|\operatorname{Tr}(e(w))\|_{L^2(Q_r)} = \|\operatorname{Tr}(e(w)-\varphi\rho_\delta * e(u))\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \delta^{\frac16}\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}.$$

根据 (7.12)，u 在 ∂Q_r 上的迹与 w 的迹一致，因此由 (7.15) 可推得

$$\int_{Q_r}\operatorname{div} w\, dx = 0.$$

利用一个经典结果（记录在本证明末尾的引理 7.3 中），存在一个向量场 $q\in H^1_0(Q_r)$，使得

$$\operatorname{div} q = \operatorname{div} w \qquad\text{and}\qquad \|\nabla q\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \|\operatorname{div} w\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \delta^{\frac16}\|e(u)\|_{L^2(Q_1)}. \tag{7.16}$$

Let

$$v := \begin{cases} w-q & \text{in } Q_r\\ u & \text{in } Q_1\setminus Q_r,\end{cases}$$

接下来验证 v 满足该引理的结论。

由步骤 2 给出的 r 选择可立即得到结论 (a)。显然，$v\in SBD(Q_1)\cap H^1(Q_r)$，其中$\{v\neq u\}\subseteq Q_r$。此外，由于 $w-q$ 和 u 在 ∂Q_r 上的迹一致，因此我们在 Q_1 中按分布的意义有 $div\, v = 0$，从而证明了结论 (b)。结论 (c) 和 (d) 可由 w 的相应性质推出（见 (7.13) 和 (7.14)），同时注意到修正项 q 的梯度范数很小，其阶为 $\delta^{\frac16}$，如 (7.16) 中的估计所示。

步骤 5：证明断言 (7.10)、(7.11) 和 (7.12)。为了完成证明，我们需要验证步骤 3 中所构造函数 w 满足这些断言。

首先注意到，映射$a_{k,\ j}$ 在相交正方形上的振荡可以进行估计。事实上，只要$q_{k,\ j}$ 与 $q_{p,\ i}$ 相交，那么

$$|q_{k,j}\cap q_{p,i}| \gtrsim \max(|q_{k,j}|,|q_{p,i}|),$$

并且由于（见（7.9））

$$|(q'_{k,j}\cap q'_{p,i})\cap(\omega_{k,j}\cup\omega_{p,i})| \ll |q'_{k,j}\cap q'_{p,i}|$$

且$a_{j、\ k}$、$a_{i、\ p}$ 是仿射的，因此利用 [15, 引理 3.4] 和（7.7），我们推得

$$\begin{aligned}\|a_{k,j}-a_{p,i}\|_{L^4(q'_{k,j}\cap q'_{p,i})} &\lesssim \|a_{k,j}-a_{p,i}\|_{L^4((q'_{k,j}\cap q'_{p,i})\setminus(\omega_{k,j}\cup\omega_{p,i}))}\\ &\le \|a_{k,j}-u\|_{L^4(q'_{k,j}\setminus\omega_{k,j})} + \|a_{p,i}-u\|_{L^4(q'_{p,i}\setminus\omega_{p,i})} \lesssim \delta_k^{\frac12}\|e(u)\|_{L^2(q''_{k,j})} + \delta_p^{\frac12}\|e(u)\|_{L^2(q''_{p,i})}\\ &\lesssim \delta_k^{\frac12}\|e(u)\|_{L^2(q''_{k,j}\cup q''_{p,i})},\end{aligned} \tag{7.17}$$

因为 δ_k 和 δ_p 是可比较的。

现在来看这些主张。显然

$$e(w) = \sum_{k,j}\varphi_{k,j}e(w_{k,j}) + \sum_{k,j}\nabla\varphi_{k,j}\odot w_{k,j},$$

因此

$$e(w)-\sum_{k,j}\varphi_{k,j}\rho_{\delta_k}*e(u)=\sum_{k,j}\varphi_{k,j}\Big[e(w_{k,j})-\rho_{\delta_k}*e(u)\Big]+\sum_{k,j}\nabla\varphi_{k,j}\odot w_{k,j}. \tag{7.18}$$

对于右端项的第一项，由 (7.8) 可得

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k,j}\varphi_{k,j}\Big[e(w_{k,j})-\rho_{\delta_k}*e(u)\Big]\Big\|^2_{L^2(Q_r)}&\lesssim\sum_{k,j}\Big\|\varphi_{k,j}\Big[e(w_{k,j})-\rho_{\delta_k}*e(u)\Big]\Big\|^2_{L^2(Q_r)}\\ &\le\sum_{k,j}\|e(w_{k,j})-\rho_{\delta_k}*e(u)\|^2_{L^2(q_{k,j})}\le\delta^{\frac13}\sum_{k,j}\|e(u)\|^2_{L^2(q''_{k,j})}\lesssim\delta^{\frac13}\|e(u)\|^2_{L^2(Q_r)},\end{aligned} \tag{7.19}$$

其中我们 在第一个和最后一个估计中利用了正方形的有限重叠 $q''_{k,\ j}$.

我们来 估计 (7.18) 右端项的第二项。注意，我们 m ay wri te

$$\sum_{k,j}\nabla\varphi_{k,j}\odot w_{k,j}=\sum_{q_{k,j}\cap q_{p,i}\neq\emptyset}\nabla\varphi_{k,j}\odot(w_{k,j}-w_{p,i})\qquad\text{on } q_{p,i}$$

由于 $\sum_{k,\ j}\nabla\varphi_{k,\ j}=0$。

(a1) 若 $q''_{p,\ i}\Subset Q_{r_{-1}}$，则 $q_{j,\ k}\cap q_{i,\ p}\neq\emptyset$ 意味着 $\delta_k=\delta_p=\delta$、 $k=p=0$，因此我们可以将该项改写为

$$\sum_{q_{0,j}\cap q_{0,i}\neq\emptyset}\nabla\varphi_{0,j}\odot(w_{0,j}-w_{0,i})$$

我们得到

$$\Big\|\sum_{q_{0,j}\cap q_{0,i}\neq\emptyset}\nabla\varphi_{0,j}\odot(w_{0,j}-w_{0,i})\Big\|^2_{L^2(q_{0,i})}\lesssim\sum_{q_{0,j}\cap q_{0,i}\neq\emptyset}\frac{1}{\delta^2}\|w_{0,j}-w_{0,i}\|^2_{L^2(q_{0,j}\cap q_{0,i})}. \tag{7.20}$$

Now

$$\|w_{0,j}-w_{0,i}\|_{L^2(q_{o,j}\cap q_{0,i})}=\|\rho_\delta*(v_{0,j}-v_{0,i})\|_{L^2(q_{0,j}\cap q_{0,i})}\le\|v_{0,j}-v_{0,i}\|_{L^2(q'_{0,j}\cap q'_{0,i})}.$$

由于

$$\begin{aligned}\|v_{0,j}-v_{0,i}\|_{L^2(q'_{0,j}\cap q'_{0,i})}&\le\|(a_{0,j}-a_{0,i})1_{\omega_{0,j}\cup\omega_{0,i}}\|_{L^2(q'_{0,j}\cap q'_{0,i})}+\|(u-a_{0,j})1_{\omega_{0,i}}\|_{L^2(q'_{0,j}\setminus\omega_{0,j})}\\&\quad+\|(u-a_{0,i})1_{\omega_{0,j}}\|_{L^2(q'_{0,i}\setminus\omega_{0,i})}\\&\le\|(a_{0,j}-a_{0,i})\|_{L^4(q'_{0,j}\cap q'_{0,i})}|\omega_{0,j}\cup\omega_{0,i}|^{\frac14}+\|(u-a_{0,j})\|_{L^4(q'_{0,j}\setminus\omega_{0,j})}|\omega_{0,i}|^{\frac14}\\&\quad+\|(u-a_{0,i})\|_{L^4(q'_{0,i}\setminus\omega_{0,i})}|\omega_{0,j}|^{\frac14},\end{aligned}$$

回顾（7.6）、（7.7）和（7.17），我们得到

$$\|w_{0,j}-w_{0,i}\|_{L^2(q_{o,j}\cap q_{0,i})}\le\|v_{0,j}-v_{0,i}\|_{L^2(q'_{0,j}\cap q'_{0,i})}\le\delta^{1+\frac14}\|e(u)\|_{L^2(q''_{0,j}\cup q''_{0,i})}.$$

回到 (7.20)，我们推得

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k,j}\nabla\varphi_{k,j}\odot w_{k,j}\Big\|^2_{L^2(q_{0,i})}&\le\Big\|\sum_{q_{0,j}\cap q_{0,i}\neq\emptyset}\nabla\varphi_{0,j}\odot(w_{0,j}-w_{0,i})\Big\|^2_{L^2(q_{0,i})}\\&\lesssim\delta^{\frac12}\sum_{q_{0,j}\cap q_{0,i}\neq\emptyset}\|e(u)\|^2_{L^2(q''_{0,j}\cup q''_{0,i})}.\end{aligned} \tag{7.21}$$

(a2) 若 $q_{p,i} \not\subseteq Q_{r_{-1}}$，则对于 $q_{k,j} \cap q_{p,i} \neq \emptyset$，我们分解

$$w_{p,i} - w_{k,j} = \rho_{\delta_p} * (v_{p,i} - a_{p,i}) - \rho_{\delta_k} * (w_{k,j} - a_{k,j}) + (a_{p,i} - a_{k,j}).$$

注意到关键的一步是 $\rho_{\delta_k} * a_{k,j} = a_{k,j}$，这是由于 $a_{k,j}$ 是调和的（因为它是仿射的）。于是，根据 (7.7) 和 (7.17)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\rho_{\delta_k} * (v_{p,i} - a_{p,i})\|_{L^2(q_{k,j}\cap q_{p,i})} &\leq \|v_{p,i} - a_{p,i}\|_{L^2(q'_{p,i})} \lesssim \delta_p \|e(u)\|_{L^2(q''_{i,p})} \\
\|\rho_{\delta_k} * (v_{k,j} - a_{k,j})\|_{L^2(q_{k,j}\cap q_{p,i})} &\leq \|v_{k,j} - a_{k,j}\|_{L^2(q'_{k,j})} \lesssim \delta_p \|e(u)\|_{L^2(q''_{k,j})} \\
\|a_{p,i} - a_{k,j}\|_{L^2(q_{k,j}\cap q_{p,i})} &\lesssim \delta_p^{1+\frac{1}{4}} \|e(u)\|_{L^2(q''_{k,j}\cup q''_{p,i})},
\end{aligned}$$

其中我们还用到了 δ_p 与 δ_k 至多相差一个因子 2 这一事实。因此，按照与上一点相同的计算，我们得到

$$\left\| \sum_{k,j} \nabla\varphi_{k,j} \odot w_{k,j} \right\|^2_{L^2(q_{p,i})} \leq \sum_{q_{k,j}\cap q_{p,i}\neq\emptyset} \|e(u)\|^2_{L^2(q''_{k,j}\cup q''_{p,i})}. \tag{7.22}$$

结合 (7.21) 和 (7.22)，并考虑到满足 (7.3) 的 r 的选取，我们推出

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k,j} \nabla\varphi_{k,j} \odot w_{k,j} \right\|^2_{L^2(Q_r)} &\leq \sum_{p,i} \left\| \sum_{k,j} \nabla\varphi_{k,j} \odot w_{k,j} \right\|^2_{L^2(q_{p,i})} \\
&\lesssim \delta^{\frac{1}{2}} \|e(u)\|^2_{L^2(Q_{r_1})} + \|e(u)\|^2_{L^2(Q_r\setminus Q_{r-2})} \lesssim \delta^{\frac{1}{2}} \|e(u)\|^2_{L^2(Q_1)}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

回到 (7.18)，根据 (7.19) 和 (7.23)，我们推出

$$\left\| e(w) - \sum_{k,j} \varphi_{k,j} \rho_{\delta_k} * e(u) \right\|_{L^2(Q_r)} \lesssim \delta^{\frac{1}{6}} \|e(u)\|_{L^2(Q_1)},$$

因此，断言 (7.11) 得证。

特别地，我们还得到 $w \in H^1(Q_r)$。关于迹的断言 (7.12) 可由如下构造得出：该构造涉及一系列卷积，其半径在趋近 ∂Q_r 时越来越小，详见 [15]。最后，我们推得 $w \in SBD(Q_1)$，且断言 (7.10) 成立。

□

在命题 7.2 的证明中，我们用到了以下由 Neˇcas 提出的引理（参见 [6, 定理 IV.3.1], ，或参见 [4]）。

引理 7.3. 设 Ω 为有界连通开集，且具有利普希茨边界；设 $L^2_0(\Omega)$ 为零平均值 L^2-函数的集合。则存在连续线性映射 $\Phi\colon L^2_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega;\mathbb{R}^d)$，使得 $\mathrm{div} \circ \Phi = \mathrm{Id}_{L^2_0(\Omega)}$。

7.2. 格里菲斯能量拟极小化子的正则性。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为一个开集。以下内容中，我们将考虑 Griffith 泛函

$$G(J,u,B) := \int_B |e(u)|^2\,dx + \mathcal{H}^1(J\cap B),$$

其中 $B \subseteq \Omega$ 是一个博雷尔集。

我们考虑以下（非常弱的）局部极小性概念。

定义 7.4（拟极小化子）。设 $\Lambda, \overline{r} > 0$。若 $(J,u) \in \mathcal{V}(\Omega)$（回顾定义 7.1）是 G 在 $\mathcal{V}(\Omega)$ 上的 $(\Lambda, \overline{r})$ 拟极小化子，则对任意开集 $\omega \Subset \Omega$，以及任意满足 $r \in (0, \overline{r})$、$\mathcal{H}^0(J \cap \partial Q_{x,r}) = 0$ 且 $Q_{x,r} \Subset \Omega$ 的正方形，均有 $G(J,u,\omega) < +\infty$

$$\limsup_{s \to 0^+} \frac{1}{s} \mathcal{H}^1 \left(J \cap (Q_{x,r} \setminus Q_{x,r-s}) \right) < 1,$$

并且对于任意满足 div $v = 0$ 且在 $\partial Q_{x,r}$ 上满足 $v = u$ 的函数 $v \in H^1(Q_{x,r}; \mathbb{R}^2)$，我们有

$$\int_{Q_{x,r}} |e(u)|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(J \cap Q_{x,r}) \leq \int_{Q_{x,r}} |e(v)|^2 \, dx + \Lambda r^2. \tag{7.24}$$

备注 7.5. 注意，在前述定义的假设下，我们有 $(J \setminus Q_{x,r}, v) \in \mathcal{V}(\Omega)$，其中我们通过令 $v = u$ 在 $\Omega \setminus Q_{x,r}$ 中成立，将 v 延拓到整个 Ω 上，不等式 (7.24) 可写为

$$G(J,u,Q_{x,r}) \leq G(J \setminus Q_{x,r}, v, Q_{x,r}) + \Lambda r^2.$$

因此，局部极小性涉及对 (J,u) 与非常特殊的竞争函数之间进行比较：Sobolev函数 v 是通过在适当的正方形 $Q_{x,r}$ 内将 u 的跳跃光滑化而得到的，因此它可以与可求 rectifiable 集 $J \setminus Q_{x,r}$ 配对，从而得到可容许对 $(J \setminus Q_{x,r}, v)$。这类竞争函数由平滑引理 7.2 给出，其中二维这一条件至关重要。在二维中，对于（标量）Mumford-Shah泛函，一种涉及 Sobolev 竞争函数的、相关的弱极小性概念（相对于其自身的跳跃集的极小性）已在 [9] 中得到研究。

注 7.6. 极小性的概念足够宽泛，能够涵盖以下形式的泛函的任意局部极小值

$$F(u,A) := \int_A |e(u)|^2 \, dx + \int_{J_u \cap A} \Theta(\nu_u, u^+, u^-) d\mathcal{H}^1$$

其中 Θ 是一个可测函数，使得 $\inf(\Theta) \geq 1$（或者，在尺度关系意义下，$\inf(\Theta) > 0$）

以下结果是获得正则性的关键。

命题 7.7（衰减估计）。设 $\Lambda > 0$。存在一个普适常数 $\overline{\tau} \in (0,1)$，使得对于每个 $\tau \in (0, \overline{\tau})$，都存在 $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ 和 $\bar{r} = \bar{r}(\tau)$，满足如下性质：对于 G 在 $\mathcal{V}(\Omega)$ 上的任意（$\Lambda, \overline{r}$）-拟极小化子（J,u），若 $r < \bar{r}$

$$G(J,u,Q_r) \geq r^{3/2} \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{H}^1(J \cap Q_r) \leq \varepsilon r,$$

then

$$G(J,u,Q_{\tau r}) \leq \tau^{3/2} G(J,u,Q_r).$$

证明。用反证法，假设对于充分小的 τ，存在 $\varepsilon_n \to 0$、$\bar{r}_n \to 0$、$0 < r_n < \bar{r}_n$，以及一个（$\Lambda, \overline{r}_n$）-极小化子的序列（K_n, w_n），使得对每个 n

$$G(K_n, w_n, Q_{r_n}) \geq r_n^{3/2}, \quad \mathcal{H}^1(K_n \cap Q_{r_n}) \leq \varepsilon_n r_n, \quad \text{and} \quad G(K_n, w_n, Q_{\tau r_n}) > \tau^{3/2} G(K_n, w_n, Q_{r_n}).$$

Let

$$g_n := G(K_n, w_n, Q_{r_n}), \qquad J_n := \frac{K_n}{r_n} \qquad \text{and} \qquad u_n(x) := \frac{w_n(r_n x)}{\sqrt{g_n}}.$$

那么，(J_n, u_n) 是 $G_n(\cdot,\cdot,Q_1)$ 的 $(\Lambda\sqrt{r_n}, 1)$-极小化者，其中

$$G_n(J,u,A) := \int_A |e(u)|^2 \, dx + \frac{r_n}{g_n} \mathcal{H}^1(J \cap A),$$

with

$$G_n(J_n, u_n, Q_1) = 1, \qquad G_n(J_n, u_n, Q_\tau) > \tau^{3/2} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{H}^1(J_n \cap Q_1) = \varepsilon_n. \tag{7.25}$$

[1] [1]应用光滑化引理 7.2：若 $\delta_n = \varepsilon_n^{\frac{2}{7}}$，令 $Q_{s_n}$with $1-\delta_n^{\frac{2}{7}} < s_n < 1$ 为 u_n 的跳跃集经过平滑后形成函数 v_n 的正方形，该函数与可容许对 $(J \setminus Q_{s_n}, v_n) \in \mathcal{V}(Q_1)$ 相关联。特别地

$$\|e(v_n)\|_{L^2(Q_1)} \le (1 + C\delta_n^{\frac{1}{6}})\|e(u_n)\|_{L^2(Q_1)} \qquad \text{with} \qquad \|e(u_n)\|_{L^2(Q_1)} \le 1, \tag{7.26}$$

and

$$\|e(v_n) - \varphi_n \rho_{\delta_n} * e(u)\|_{L^2(Q_{s_n})} \le C\delta_n^{\frac{1}{6}} \|e(u_n)\|_{L^2(Q_1)}, \tag{7.27}$$

其中，$C > 0$与 n无关，且 $\varphi_n \in C^\infty(Q_{s_n}, [0,1])$满足：$\varphi_n = 0$在$Q_{s_n} \setminus Q_{s_n - \delta_n}$上，$\varphi_n = 1$在 $Q_{s_n - 4\delta_n}$上。由于 v_n 在Q_{s_n} 上无散度且属于索博列夫空间，我们有

$$\int_{\partial Q_{s_n}} v_n \cdot \nu \, d\mathcal{H}^1 = 0. \tag{7.28}$$

根据Q_{s_n} 上的经典 Korn 不等式，存在一个反对称仿射函数 a_n ，使得$\int_{Q_{s_n}} (v_n - a_n)\, dx = 0$，并且

$$\int_{Q_{s_n}} |\nabla(v_n - a_n)|^2 \, dx \le C_1 \int_{Q_{s_n}} |e(v_n)|^2 \, dx$$

其中某个 $C_1 > 0$ 与 n无关。由此可推得，$(v_n - a_n)$在 $H^1(Q_{s_n})$中有界。由于 $s_n \to 1$，我们可以在进一步抽取一个子序列后，假设

$$v_n - a_n \rightharpoonup w \qquad \text{weakly in } H^1_{loc}(Q_1; \mathbb{R}^2) \tag{7.29}$$

对某个 $w \in H^1(Q_1)$成立。由于每个 $v_n - a_n$ 的散度均为零，因此 w也如此。此外，$\|e(w)\|_{L^2(Q_1)} \le 1$。

设$\psi \in C_c^\infty(Q_1; \mathbb{R}^2)$具有零散度，并设$\eta \in C_c^\infty(Q_1, [0,1])$是一个截断函数，使得$\{\psi \neq 0\} \Subset \{\eta = 1\}$。考虑

$$z_n := \begin{cases} \mathbb{P}_{Q_{s_n}}\Big[(1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi)\Big] & \text{in } Q_{s_n} \\ u_n & \text{in } Q_1 \setminus Q_{s_n}, \end{cases}$$

其中$\mathbb{P}_{Q_{s_n}}$ 表示投影到无散度 $H^1(Q_{s_n})$向量场上的投影，该投影保持迹，其定义依据引理7.3，通过考虑

$$\mathbb{P}_{Q_{s_n}}(u) := u - \Phi_{Q_{s_n}}(\operatorname{div} u)$$

对于任意具有零均值散度的 $u \in H^1(Q_{s_n}; \mathbb{R}^2)$。注意，$z_n$ 定义良好，因为

$$(1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi) = v_n \qquad \text{on } \partial Q_{s_n}$$

当 n足够大时成立，因此根据（7.28），其散度的均值为零。

根据定义 7.4，$(J_n \setminus \partial Q_{s_n}, z_n)$ 是 (J_n, u_n) 的可容许竞争函数，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&G_n(J_n, u_n, Q_{s_n}) \\
&\le \left\| e\left(\mathbb{P}_{Q_{s_n}}\Big[(1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi)\Big]\right)\right\|^2_{L^2(Q_{s_n})} + \Lambda\sqrt{r_n} \\
&\le \left(\|e\left((1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi)\right)\|_{L^2(Q_{s_n})} + C\|\operatorname{div}((1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi))\|_{L^2(Q_{s_n})}\right)^2 + \Lambda\sqrt{r_n} \\
&\le \left(\|e\left((1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi)\right)\|_{L^2(Q_{s_n})} + C\|\nabla\eta \cdot (w + a_n - v_n)\|_{L^2(Q_{s_n})}\right)^2 + \Lambda\sqrt{r_n}.
\end{aligned}$$

Since

$$\|\nabla\eta \cdot (w + a_n - v_n)\|_{L^2(Q_{s_n})} \to 0$$

并且（回顾一下， $\{\psi \neq 0\} \Subset \{\eta = 1\}$）

$$\begin{aligned}\|e\left((1-\eta)v_n + \eta(a_n + w + \psi)\right)\|_{L^2(Q_{s_n})} &= \|(1-\eta)e(v_n) + \eta e(w+\psi) + \nabla\eta \odot (w + a_n - v_n)\|_{L^2(Q_{s_n})} \\ &\leq \|(1-\eta)e(v_n) + \eta e(w+\psi)\|_{L^2(Q_{s_n})} + o_n\end{aligned}$$

其中 $o_n \to 0$，根据 (7.26)（并且由于 $e(a_n) = 0$），我们可推知

$$G_n(J_n, u_n, Q_{s_n}) \leq \|(1-\eta)e(v_n - a_n) + \eta e(w+\psi)\|^2_{L^2(Q_{s_n})} + o_n. \tag{7.30}$$

现在，仍利用 (7.26)，我们可以写出

$$\int_{Q_{s_n}} |e(v_n - a_n)|^2\, dx \leq (1 + C\delta_n^{\frac{1}{6}})^2 \int_{Q_{s_n}} |e(u_n)|^2\, dx \leq (1 + C\delta_n^{\frac{1}{6}})^2 G_n(J_n, u_n, Q_{s_n}) + o_n,$$

因此，回到 (7.30)，我们可得

$$\|e(v_n - a_n)\|^2_{L^2(Q_{s_n})} \leq \|(1-\eta)e(v_n - a_n) + \eta e(w+\psi)\|^2_{L^2(Q_{s_n})} + o_n.$$

由此得到

$$\int_{Q_{s_n}} \left(1 - (1-\eta)^2\right) |e(v_n - a_n)|^2\, dx \leq \int_{Q_{s_n}} \left(2\eta(1-\eta)e(v_n - a_n) : e(w) + \eta^2 |e(w+\psi)|^2\right)\, dx + o_n$$

因此，鉴于 (7.29)

$$\begin{aligned}\int_{Q_1} \left(1 - (1-\eta)^2\right) |e(w)|^2\, dx &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{Q_1} \left(1 - (1-\eta)^2\right) |e(v_n - a_n)|^2\, dx \\ &\leq \int_{Q_1} \left(2\eta(1-\eta)e(w) : e(w) + \eta^2 |e(w+\psi)|^2\right)\, dx.\end{aligned}$$

注意，选择 $\psi = 0$ 并令 η 在开集的示性函数上局部化，我们可以推得

$$e(v_n - a_n) \to e(w) \qquad \text{strongly in } L^2_{loc}(Q_1; M^{2\times 2}_{sym}). \tag{7.31}$$

特别地，我们得到

$$\int_{Q_1} |e(w)|^2\, dx \leq \int_{Q_1} |e(w+\psi)|^2\, dx,$$

这意味着 w 是零散度函数上的能量 $z \mapsto \|e(z)\|^2_{L^2(Q_1)}$ 的局部极小值。因此，对于某个 $p \in L^2(Q_1)$，有 $\Delta w = \nabla p$。利用下面的引理 7.8，我们有

$$\int_{Q_\tau} |e(w)|^2\, dx \leq \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}} \int_{Q_1} |e(w)|^2\, dx \leq \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}}.$$

考虑到 (7.31)，我们推得

$$\|e(v_n)\|^2_{L^2(Q_{\tau+\delta_n})} \leq \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}} + o_n. \tag{7.32}$$

由极小性可得

$$G(u_n, J_n, Q_{s_n}) \leq \|e(v_n)\|^2_{L^2(Q_{s_n})} + \Lambda\sqrt{r}_n = \|e(v_n)\|^2_{L^2(Q_{\tau+\delta_n})} + \|e(v_n)\|^2_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_{\tau+\delta_n})} + \Lambda\sqrt{r}_n$$

while thanks to (7.27)

$$\begin{aligned}\|e(v_n)\|_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_{\tau+\delta_n})} &\leq \|e(v_n) - \varphi_n \rho_{\delta_n} * e(u_n)\|_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_{\tau+\delta_n})} + \|\varphi_n\rho_{\delta_n} * e(u_n)\|_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_{\tau+\delta_n})} \\ &\leq o_n + \|\rho_{\delta_n} * e(u_n)\|_{L^2(Q_{s_n-\delta_n}\setminus Q_{\tau+\delta_n})} \leq o_n + \|e(u_n)\|_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_\tau)}.\end{aligned}$$

结合（7.32），我们推得

$$G(u_n,J_n,Q_{s_n})\le \|e(v_n)\|^2_{L^2(Q_{\tau+\delta_n})}+[o_n+\|e(u_n)\|_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_\tau)}]^2+\Lambda\sqrt{r_n}\le \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}}+\tilde{o}_n+\|e(u_n)\|^2_{L^2(Q_{s_n}\setminus Q_\tau)}$$

从而

$$G(u_n,J_n,Q_\tau)\le \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}}+\tilde{o}_n.$$

总之，考虑到 (7.25)，若 n 足够大，我们得到

$$\tau^{\frac{3}{2}}<G(u_n,J_n,Q_\tau)\le \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{2}}+\tilde{o}_n,$$

这就产生了矛盾。

□

在前面的证明中，我们用到了以下结果。

引理 7.8. 存在一个常数 $C_0>0$，使得对于任意满足 $\Delta u=\nabla p$ 的无散向量场 $u\in H^1(Q_1;\mathbb{R}^2)$，其中压力 $p\in L^2(Q_1)$，我们有

$$\forall \tau\in(0,1/2]:\quad \int_{Q_\tau}|e(u)|^2\,dx\le C_0\tau^2\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx.$$

特别地，对于任意 $0<\tau\le\overline{\tau}:=\frac{1}{4C_0^2}\wedge\frac{1}{2}$ 我们有

$$\int_{Q_\tau}|e(u)|^2\,dx\le\frac{1}{2}\tau^{3/2}\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx.$$

证明。注意到 $e(u)$ 在加上一个非对称仿射函数 a 后保持不变。平移去掉此类函数后，Korn 不等式告诉我们

$$\int_{Q_1}u^2\,dx\le C\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx.$$

由 u 满足的方程等价于存在 $\varphi\in H^2(Q_1)$，使得 $\varphi(0)=0, u=\nabla^\perp\varphi$，且 $\Delta^2\varphi=0$。根据椭圆正则性，存在常数 C'，使得

$$\sup_{Q_{1/2}}\left|\nabla^2\varphi\right|^2\le C'\int_{Q_1}|\nabla\varphi|^2\,dx$$

因此，对于任意 $\tau\le 1/2$,

$$\int_{Q_\tau}|e(u)|^2\,dx\le 4|Q_\tau|\sup_{Q_{1/2}}\left|\nabla^2\varphi\right|^2\le 4CC'|Q_1|\tau^2\int_{Q_1}|e(u)|^2\,dx.$$

□

衰减估计可以按如下方式迭代。

引理 7.9（衰减迭代）。设 $\Lambda>0$，并根据命题 7.7，设 τ_0 足够小，使得衰减估计适用于 $\varepsilon_0=\varepsilon(\tau_0)$ 和 $\bar{r}_0=\bar{r}(\tau_0)$；再设 $\tau_1\in(0,\varepsilon_0^2)$ 足够小，使得衰减性质适用于 $\varepsilon_1,\bar{r}_1$。最后，设

$$\bar{r}:=\min\left(\bar{r}_0,\bar{r}_1,\varepsilon_0^2\tau_1^2,\frac{\varepsilon_0^2\tau_0^3}{\tau_1}\right).$$

假设 (J,u) 是 G on $\mathcal{V}(\Omega)$ 上的 $(\Lambda,\bar{r})$-拟极小化子，且 $G(J,u,Q_{x,r})\le\varepsilon_1 r$，其中 $r\in(0,\bar{r})$。那么对所有 $k\in\mathbb{N}$,

$$G(J,u,Q_{x,\tau_0^k\tau_1 r})\le\varepsilon_0\tau_0^{\frac{3}{2}k}\tau_1 r.$$

证明。我们用归纳法对 k 证明该命题。下文记 $g(r) = G(J,u,Q_{x,r})$，因此我们需要验证：若 $g(r) \le \varepsilon_1 r$，则对每个 $k \in \mathbb{N}$

$$g(\tau_0^k \tau_1 r) \le \varepsilon_0 \tau_0^{\frac{3}{2}k} \tau_1 r. \tag{7.33}$$

该不等式对 $k=0$成立。事实上，我们有以下两种情况：

(a) 若 $g(r) > r^{3/2}$，则根据 τ_1的定义，$g(\tau_1 r) \le \tau_1^{3/2} g(r) \le \sqrt{\tau_1}\tau_1 \varepsilon_1 r \le \varepsilon_0 \tau_1 r$。

(b) 若 $g(r) \le r^{3/2}$，则根据 $\bar{r}$的定义，$g(\tau_1 r) \le g(r) \le r^{3/2} \le \varepsilon_0 \tau_1 r$。

现在假设 (7.33) 成立。注意，根据 G 的定义（因为 $\tau_0 < 1$），我们有

$$\mathcal{H}^1(J \cap Q_{\tau_0^k \tau_1 r}) \le g(\tau_0^k \tau_1 r) \le \varepsilon_0 \tau_0^{\frac{3}{2}k} \tau_1 r \le \varepsilon_0 \tau_0^k \tau_1 r,$$

因此可以应用命题 7.7 的衰减性质。再次，我们有两种情况。

(a) 若 $g(\tau_0^k \tau_1 r) > (\tau_0^k \tau_1 r)^{3/2}$，根据衰减性质，利用 (7.33)，我们有：

$$g(\tau_0^{k+1}\tau_1 r) \le \tau_0^{3/2} g(\tau_0^k \tau_1 r) \le \varepsilon_0 \tau_0^{\frac{3}{2}(k+1)} \tau_1 r.$$

(b) 若 $g(\tau_0^k \tau_1 r) \le (\tau_0^k \tau_1 r)^{3/2}$，则根据 $\bar{r}$ 的定义

$$g(\tau_0^{k+1}\tau_1 r) \le g(\tau_0^k \tau_1 r) \le \sqrt{\frac{\tau_1 r}{\varepsilon_0^2 \tau_0^3}} \varepsilon_0 \tau_0^{\frac{3}{2}(k+1)} \tau_1 r \le \varepsilon_0 \tau_0^{\frac{3}{2}(k+1)} \tau_1 r.$$

两种情况下，对所选的 $k+1$，(7.33) 均成立，因此归纳步骤得证。 □

若要对拟极小化子 (J,u) 的正则性得出一些结论，我们需要以某种方式限制与 J 的选择相关的自由度：事实上请注意，任何满足 $\mathcal{H}^1(N) = 0$ 的一对 $(J\Delta N, u)$，本质上都等价于 (J,u)，其中 $A\Delta B$ 表示集合的对称差。

令

$$J^+ := \left\{ x \in \Omega : \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^1(J \cap Q_{x,r})}{r} > 0 \right\}. \tag{7.34}$$

J^+ 是 J 的一种归一化版本，其中密度为零的点已被剔除。

根据可求 rectifiable 集的标准性质，我们有

$$\mathcal{H}^1(J \Delta J^+) = 0.$$

因此，若 $(J,u) \in \mathcal{V}(\Omega)$，则还有 $(J^+,u) \in \mathcal{V}(\Omega)$，且对于每个 Borel 集 $A \subseteq \Omega$，都有 $G(J,u,A) = G(J^+,u,A)$。

命题 7.10. 给定 $\Lambda > 0$，存在 $\varepsilon, \bar{r} > 0$，使得对于 $\mathcal{V}(\Omega)$ 上任意 $(\Lambda,\bar{r})$-拟极小化子 (J,u)，若对某个 $Q_{x,r} \Subset \Omega$（满足 $r < \bar{r}$），有 $G(J,u,Q_{x,r}) \le \varepsilon r$，则 $J^+ \cap Q_{x,\frac{r}{2}} = \emptyset$。

证明。根据引理 7.9，给定 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \tau_1, \tau_2, \bar{r}$。注意，若 $G(J,u,Q_{x,r}) \le \varepsilon_1 r$，且$r < \bar{r}$，则对于任意 $\rho \in (0,r)$

$$G(J,u,Q_{x,\rho}) \le C_0 r^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{3}{2}} \qquad \text{where } C_0 := \max\left\{ \varepsilon_1 \tau_1^{-\frac{3}{2}}, \varepsilon_0 \tau_0^{-\frac{1}{2}} \tau_1^{-\frac{1}{2}} \right\}. \tag{7.35}$$

令 $\varepsilon := \frac{1}{2}\varepsilon_1$，并假设 $G(J,u,Q_{x,r}) \le \varepsilon r$。注意，对于任意 $y \in Q_{x,\frac{r}{2}}$，我们有

$$G(J,u,Q_{y,\frac{r}{2}}) \le G(J,u,Q_{x,r}) \le \varepsilon r = \varepsilon_1 \frac{r}{2}$$

因此，由 (7.35) 可得

$$0 = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{G(J,u,Q_{y,\rho})}{\rho} \ge \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(J \cap Q_{y,\rho})}{\rho},$$

由此得到 $J^+ \cap Q_{x,\frac{r}{2}} = \emptyset$。

□

命题 7.11（准极小者的正则性）。设 $\Lambda, \overline{r} > 0$。那么，对于 G on $\mathcal{V}(\Omega)$ 的任意 $(\Lambda, \overline{r})$-拟极小化子 (J, u)，我们有 J^+（见 (7.34)）在 Ω 中本质闭，即，

$$\mathcal{H}^1\left(\Omega \cap (\overline{J^+} \setminus J^+)\right) = 0,$$

而 $u \in C^\infty(\Omega \setminus \overline{J^+})$。

证明。由于泛函 G 在 J之外与体积分相同，因此存在一个 $\mathcal{H}^1$-零测集 $N \subset \Omega \setminus J$，使得对每个 $x \in \Omega \setminus (J \cup N)$，都有

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{G(J, u, Q_{x,\rho})}{\rho} = 0.$$

根据命题 7.10，我们可推得

$$\Omega \cap \overline{J^+} \subset J \cup N \subset J^+ \cup (J \setminus J^+) \cup N.$$

由于最后两个集合都是 $\mathcal{H}^1$-零测集，我们可推得 $\mathcal{H}^1(\Omega \cap (\overline{J^+} \setminus J^+)) = 0$。

由于

$$\mathcal{H}^1(J_u \setminus \overline{J^+}) \le \mathcal{H}^1(J \setminus \overline{J^+}) = 0,$$

由此可得，u 在 $\Omega \setminus \overline{J^+}$ 上局部满足 H^1（得益于 Korn 不等式）：随后，根据斯托克斯方程解的正则性理论可知其光滑（例如参见 [6, 定理 IV.5.8]）。

□

7.3. 定理 4.10 的证明。现在我们可以证明定理 4.10 给出的正则性结果了。

设 (E, u) 是 $\mathcal{J}$ 的一个极小化者，并令

$$\Lambda := 4\mathrm{Lip}(f) \qquad \text{and} \qquad J := J_u \cup \partial^* E.$$

我们还假设（将 u 乘以 $c^{-\frac{1}{2}}$ 后），(4.2) 中的常数 c 为 1

.

我们首先证明，根据定义 7.4，(J, u) 是 Λ 拟极小化子，常数为 1，且对应 Griffith 泛函 G 在 $\mathcal{V}(\Omega)$ 上。事实上，取 $Q_{x,\ r} \Subset \Omega$，其中 $r < 1$ 是定义 7.4 中所述的正方形，其对应的竞争函数为 $(J \setminus Q_{x,\ r}, v)$。我们声称以下两种情况之一成立

$$\mathcal{H}^1(\partial Q_{x,r} \setminus E^{(1)}) = 0 \qquad \text{or} \qquad \mathcal{H}^1(\partial Q_{x,r} \setminus E^{(0)}) = 0. \tag{7.36}$$

在第一种情形下，由极小性不等式

$$\mathcal{J}(E, u) \le \mathcal{J}(E, u 1_{\Omega \setminus Q_{x,r}})$$

我们可推出在 $Q_{x,r}$ 上几乎处处成立 $u = 0$，且 $\mathcal{H}^1(\partial^* E \cap Q_{x,r}) = 0$，因此需要检验的准极小性不等式显然成立。注意，$(E, u1_{\Omega \setminus Q_{x,r}})$ 对主问题的可容许性，源于 u 在 $\partial Q_{x,r}$ 上的迹为零这一事实；该边界由集合 E 中密度为一且 u 为零的点组成。

若 (7.36) 中的第二种可能成立，则以下关系（参见 [27, 定理 16.3]，并回忆 $\mathcal{H}^0(\partial Q_{x,r} \cap \partial^* E) = 0$，这是由 $Q_{x,r}$ 的性质所致）

$$\mathcal{J}(E, u) \le \mathcal{J}(E \setminus Q_{x,r}, v) \qquad \text{and} \qquad \partial^*(E \setminus Q_{x,r}) = \partial^* E \setminus \overline{Q_{x,r}} = \partial^* E \setminus Q_{x,r}$$

特别推出

$$\int_{Q_{x,r}} |e(u)|^2 \, dx + \mathcal{H}^1(J \cap Q_{x,r}) \le \int_{Q_{x,r}} |e(v)|^2 \, dx + \Lambda r^2,$$

因此，(J, u) 的准极小性得证。

由命题 7.11 ，我们得到规范化集合 J^+（见 (7.34)）在 Ω 中是本质闭的，即，

$$\mathcal{H}^1(\Omega \cap (\overline{J^+} \setminus J^+)) = 0,$$

并且 u 在 $\Omega \setminus \overline{J^+}$ 上光滑，因此

$$\Omega \cap J_u \subseteq \overline{J^+}.$$

另一方面，鉴于有限周长集合的约化边界的一般性质（见 [1, 定理 3.59] 或 [27, 定理 15.5]），我们有 $\partial^* E \subseteq J^+$。考虑到$\mathcal{H}^1(J^+ \Delta J) = 0$（其中 Δ表示集合的对称差），我们推得

$$\mathcal{H}^1(\Omega \cap \overline{J_u \cup \partial^* E} \setminus (J_u \cup \partial^* E)) \le \mathcal{H}^1(\Omega \cap \overline{J^+} \setminus J) \le \mathcal{H}^1(\Omega \cap \overline{J^+} \setminus J^+) + \mathcal{H}^1(J^+ \setminus J) = 0$$

因此结论得证。

为了完成证明，我们需要验证断言 (7.36)。

反设该断言不成立。那么存在 $p \in E^{(1)} \cap \partial Q_{x,\ r}$和 $q \in E^{(0)} \cap \partial Q_{x,\ r}$，它们不在其中一个角上。不失一般性，设 $p, q \in \{x - re_2 + \mathbb{R}e_1\}$ 且$p_1 < q_1$，两者位于不同边上的情形可类似处理。对于足够小的 $s > 0$，我们令

- $C_p := p + [-s, 0] \times [0, s]$和 $C_q := q + [0, s]^2$,
- $g_s\colon [p_1 - s, q_1 + s] \to [0, 1]$在两端为零，在 $[p_1 - s, p_1]$和 $[q_1, q_1 + s]$上为仿射的，并在 $[p_1, q_1]$上等于 1,

- $f_s \in C_c^1(]0, s[)$，其中 $0 \le f_s \le 1$,
- $\varphi_s(x) = g_s(x_1) f_s(x_2 + r)$。

Then

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(J \cap (Q_{x,r} \setminus Q_{x,r-s})) &\ge \int_{\partial^* E} \varphi_s(\nu_E)_1 \, d\mathcal{H}^1 = \int_E \partial_1 \varphi_s \, d\mathcal{H}^1 \\ &= \frac{1}{s} \int_{E \cap C_p} f_s(y_2 + r) dy - \frac{1}{s} \int_{E \cap C_q} f_s(y_2 + r) dy\end{aligned}$$

因此，令 $f_s \nearrow 1$，我们得到

$$\frac{\mathcal{H}^1(J \cap (Q_{x,r} \setminus Q_{x,r-s}))}{s} \ge \frac{|E \cap C_p|}{|C_p|} - \frac{|E \cap C_q|}{|C_q|}.$$

由于当 $s \to 0^+$ 时，根据关于 p 和 q的密度性质的假设，我们有

$$\frac{|E \cap C_p|}{|C_p|} \to 1 \qquad \text{and} \qquad \frac{|E \cap C_q|}{|C_q|} \to 0,$$

我们推断

$$\limsup_{s \to 0} \frac{\mathcal{H}^1(J \cap (Q_{x,r} \setminus Q_{x,r-s}))}{s} \ge 1$$

这与 定义 7.4 中关于准极小性的假设 r 相悖。因此，证明得证 .

7.4. 关于问题“强”表述的一些评论。本节将详细讨论阻力最小化问题的另一种松弛，该松弛涉及通道 Ω F内拓扑闭合（但不一定正则）的障碍物，以及在 $\Omega \setminus F$上满足 H^1_{loc} 的速度向量场。

从这一角度出发，给定开且有界的 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$，自然的做法是从满足以下条件的配对 (F, u) 开始:

$$F \subseteq \Omega \text{ is relatively closed}, \qquad \Omega \cap \partial F \text{ is rectifiable}, \qquad \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial F) < +\infty \tag{7.37}$$

and

$$u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus F; \mathbb{R}^d), \qquad \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \setminus F, \qquad e(u) \in L^2(\Omega \setminus F; M^{d \times d}_{sym}). \tag{7.38}$$

请注意，与前几节研究的松弛一样，∂F 可能包含“低维”部分。集合 $\Omega \setminus F$是开集，因此空间 $H^1_{loc}(\Omega \setminus F; \mathbb{R}^d)$ 有定义。

目前尚不清楚如何讨论 $\partial(\Omega \setminus F)$ 上的迹，而迹对于表述相切约束至关重要，因为该集合通常并不规则。事实证明，速度存在良好定义的迹

在 $\mathcal{H}^{d-1}$ 几乎每个点上 ∂F，即使不假设该集合仅为可求长的集合且不规则。这是以下结果的推论，该结果涉及 $GSBD$ 有界变形广义函数空间，该空间在 [19] 中引入。令

$$\tilde{u} := \begin{cases} u & \text{in } \Omega \setminus F \\ 0 & \text{in } F. \end{cases} \tag{7.39}$$

引理 7.12. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集，并假设数对 (F,u) 满足 (7.37) 和 (7.38)。则 $\tilde{u} \in GSBD(\Omega)$ 与 $\mathcal{H}^{d-1}(J_{\tilde{u}} \setminus \partial F) = 0$。

证明。由于 $\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial F) < \infty$，对每个 $\varepsilon > 0$，我们都可以找到一种覆盖方式，用半径小于 ε 的球的有限并覆盖 ∂F，记为 $(B_i^\varepsilon)_{1 \le i \le N^\varepsilon}$，使得

$$\sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left(\frac{\operatorname{diam}(B_i^\varepsilon)}{2} \right)^{d-1} \le C$$

对于某个不依赖于 ε 的 $C > 0$。令 B^ε 为这些球的并集——只需对半径作微小扰动，它就是一个 Lipschitz 集——并令 $u^\varepsilon := u 1_{\Omega \setminus B^\varepsilon}$。那么 $u^\varepsilon \in SBD(\Omega)$ 且

$$Eu^\varepsilon = e(u)\,dx \lfloor (\Omega \setminus (F \cup B^\varepsilon)) + u\mathcal{H}^{d-1} \lfloor \partial B^\varepsilon.$$

此外

$$u^\varepsilon \to \tilde{u} \qquad \text{a.e. in } \Omega$$

with

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |e(u^\varepsilon)|^2\,dx + \mathcal{H}^{d-1}(J_{u^\varepsilon}) < +\infty.$$

我们将 [16, 定理 1.1] 应用于 (u^ε)：由于 $\tilde{u}$ 几乎处处有限，我们直接将 $\tilde{u}$ 与所得的极限等同起来，并推得 $\tilde{u} \in GSBD(\Omega)$；此外，除去一个 $\mathcal{H}^{d-1}$-零测集，按构造有 $J_{\tilde{u}} \subset \partial F$，结论遂得。□

回到满足 (7.37) 和 (7.38) 的构型 (F,u)，在对可求 rectifiable 集 $\Omega \cap \partial F$作出定向选择后，在 $\Omega \cap \partial F$的 $\mathcal{H}^{d-1}$-几乎所有点上定义 u 的迹 $u^\pm_{|\partial F}$便不存在歧义。

除上述条件外，我们还要求 (F,u) 满足不可穿透条件

$$u^\pm_{|\partial F} \cdot \nu_{\partial F} = 0 \qquad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. on } \Omega \cap \partial F. \tag{7.40}$$

给定一个可容许构型 (F,u)，我们可以考虑以下能量（所有常数均已归一化为 1）

$$\begin{aligned} J(F,u) := &\int_{\Omega \setminus F} |e(u)|^2\,dx + \int_{\Omega \cap \partial^e F} |u^+|^2\,d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Omega \cap F^{(0)} \cap F} [|u^+|^2 + |u^-|^2]\,d\mathcal{H}^{d-1} \\ &+ \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial^e F) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap F^{(0)} \cap F) + f(|F|), \end{aligned}$$

其中 $\partial^e F$ 表示 F的测度论边界，而 f 是前文各节中引入的惩罚函数（见（4.1））。

有限能量构型与我们主要松弛问题的可容许构型通过以下结果相关联。

引理 7.13. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 为开且有界，并设 (F,u) 满足 (7.37) 和 (7.38)，且 $J(F,u) < +\infty$。则在 (7.39) 中定义的函数 $\tilde{u}$ 满足 $\tilde{u} \in SBD(\Omega)$。

证明. 只需注意，对于每个方向 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$，我们都有

$$J(F,u) \geq \int_{\xi^\perp} \left[\int_{\Omega_y^\xi} |(\tilde{u}_y^\xi)'(t)|^2 dt + \sum_{t \in J_{\tilde{u}_y^\xi}} \left(1 + |(\tilde{u}_y^\xi)^+(t)|^2 + |(\tilde{u}_y^\xi)^-(t)|^2\right) \right] d\mathcal{H}^1(y).$$

□

处理边界条件会导致与主要松弛问题中所指出的相同问题。假设 Ω 具有利普希茨边界，并简记 u，以代替 $\tilde{u}$。我们有 $u \in SBD(\Omega)$，因此在 $\partial\Omega$ 上的迹是良定义的。给定无散向量场 $V \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$，我们可以通过考虑集合来处理边界条件的松弛

$$\Gamma_{u,V} := \{x \in \partial\Omega : u(x) \neq V(x)\},$$

并施加不可穿透约束，从而得到

$$u \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{and} \quad V \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0 \qquad \mathcal{H}^{d-1}\text{-a.e. on } \Gamma_{V,\partial\Omega}. \tag{7.41}$$

因此，对于满足 (7.37)、(7.38)、(7.40) 和 (7.41) 的构型 (F,u)，我们可以考虑能量

$$\mathcal{J}^{\text{strong}}(F,u) := J(F,u) + 2\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma_{u,V}) + \int_{\Gamma_{u,V}} [|V|^2 + |u|^2]\, d\mathcal{H}^{d-1}.$$

在可容许构型上极小化 $\mathcal{J}^{\text{strong}}$，是对原始阻力最小化问题的一种不同的可能松弛。显然，我们有

$$\min_{(E,u)\in\mathcal{A}_V(\Omega)} \mathcal{J}(E,u) \leq \inf_{(F,u)} \mathcal{J}^{\text{strong}}(F,u).$$

借助定理 4.10 给出的正则性结果，二维情形下等号成立。事实上，若 (E,u) 是 $\mathcal{J}$ 的极小化者，我们知道 $\partial^* E \cup J_u$ 是本质闭的，因此，通过取 $\Omega \setminus \overline{\partial^* E \cup J_u}$ 中使 u 不恒等于零的连通分支之并集的补集，可得到一个可容许的相对闭集 F。函数 u 在 F 之外光滑，因此，点对 (F,u) 是强可容许的，且 $\mathcal{J}_{\text{强}}(F,u) = \mathcal{J}(E,u)$。因此，在二维情形下，松弛问题

$$\min_{(F,u)} \mathcal{J}^{\text{strong}}(F,u)$$

确实是适定的。

References

[1] L. Ambrosio、N. Fusco 和 D. Pallara。《 *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*》。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000年。[2] Luigi Ambrosio、Alessandra Coscia 和 Gianni Dal Maso。有界变形函数的精细性质。*Arch. Rational Mech. Anal.*，139(3):201–238，1997。[3] G. Bellettini、A. Coscia 和 G. Dal Maso。SBD(Ω)中的紧性与下半连续性性质。 *Math. Z.*，228 2 337 351，1998 ( ): – 。[4] M. E. Bogovskiĭ。不可压缩介质连续性方程第一边值问题的解。 *Dokl. Akad. Nauk SSSR*，248(5):1037–1040，1979。[5] Matthieu Bonnivard 和 Dorin Bucur。微形状控制、微沟槽与阻力最小化。 *SIAM J. Appl. Math.*，73 2 723 740，2013 ( ): – 。[6] Franck Boyer 和 Pierre Fabrie。《 *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models* 183 *Applied Mathematical Sciences* 2013 》，卷号 。施普林格，纽约，。[7] D. Bucur 和 A. Giacomini。罗宾特征值问题等周不等式的变分方法。*Arch. Ration. Mech. Anal.*，198(3):927–961，2010。[8] Dorin Bucur、Eduard Feireisl 和 Šárka Nečasová。黏性流体的边界行为：壁面粗糙度与摩擦驱动边界条件的影响。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，197(1):117–138，2010。[9] Dorin Bucur、Ilaria Fragalà 和 Alessandro Giacomini。通过单调性研究Mumford-Shah泛函的局部极小性结果。 *Anal. PDE*，13(3):865–899，2020。

[10] Dorin Bucur 和 Alessandro Giacomini。罗宾拉普拉斯算子的法贝尔-克拉恩不等式：一种自由间断方法。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，218(2):757–824，2015。[11] Dorin Bucur 和 Alessandro Giacomini。自由边界上具有罗宾边界条件的形状优化问题。*Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*，33(6):1539–1568，2016。[12] Luis A. Caffarelli 和 Dennis Kriventsov。一个与热绝缘相关的自由边界问题。

Comm. Partial ，( ): – 。

Differential Equations 41 7 1149 1182, 2016

[13] J. Casado-D´ıaz、M. Luna-Laynez 和 F. J. Su´arez-Grau。略微粗糙壁面上具有滑移边界条件的黏性流体的渐近行为。 *Math. Models Methods Appl. Sci.*，20(1):121–156，2010。[14] Antonin Chambolle、Sergio Conti 和 Gilles Francfort。小跳跃集函数的Korn-Poincar´e不等式。 *Indiana Univ. Math. J.*，65(4):1373–1399，2016。[15] Antonin Chambolle、Sergio Conti 和 Flaviana Iurlano。小跳跃集函数的逼近及格里菲斯能量强极小化子的存在性。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，128:119–139，2019。[16] Antonin Chambolle 和 Vito Crismale。$GSBD$中的紧性与下半连续性。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，23 3 701 719，2021 ( ): – 。[17] Sergio Conti、Matteo Focardi 和 Flaviana Iurlano。定义在 SBD^p 上的泛函的积分表示（二维）。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，223(3):1337–1374，2017。[18] Sergio Conti、Matteo Focardi 和 Flaviana Iurlano。二维格里菲斯静态断裂模型强极小化子的存在性。 *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*，36(2):455–474，2019。[19] Gianni Dal Maso。广义有界变形函数。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，15(5):1943–1997，2013。[20] Gianni Dal Maso、Antonio DeSimone 和 Maria Giovanna Mora。线弹性—完全塑性材料的准静态演化问题。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，180(2):237–291，2006。[21] Gianni Dal Maso、Gilles A. Francfort 和 Rodica Toader。非线性弹性中的准静态裂纹扩展。

Arch. ，( ): – 。

Ration. Mech. Anal. 176 2 165 225, 2005

[22] E. De Giorgi、M. Carriero 和 A. Leaci。具有自由不连续集的极小化问题的存在性定理。

Arch. ，( ): – 。

Rational Mech. Anal. 108 3 195 218, 1989

[23] L. C. Evans 和 R. F. Gariepy。《 *Measure theory and fine properties of functions*》。高等数学研究丛书。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1992年。[24] H. Federer。《 *Geometric measure theory*》。数学科学基础丛书，第153卷。施普林格出版社纽约公司，纽约，1969年。[25] Gilles A. Francfort 和 Christopher J. Larsen。脆性断裂准静态演化的存在性与收敛性。 *Comm. Pure Appl. Math.*，56(10):1465–1500，2003。[26] Manuel Friedrich、Matteo Perugini 和 Francesco Solombrino。定义在分片刚性函数及 $GSBD$上的泛函的下半连续性。 *J. Funct. Anal.*，280(7):108929，45，2021。[27] Francesco Maggi。《 *Sets of finite perimeter and geometric variational problems* 135 *Cambridge Studies in*》，卷号。剑桥大学出版社，剑桥，。*Advanced Mathematics* 2012 。《几何测度论导论》。[28] O. Pironneau。斯托克斯流中的最优轮廓。 *J. Fluid Mech.*，59:117–128，1973。[29] R. Temam。塑性变分问题。载于

Trends in applications of pure mathematics to mechanics Vol. III ，，卷号，*(Edinburgh, 1979)* 11 *Monographs Stud. Math.* 209 217 1981 页码–。皮特曼出版社，波士顿、马萨诸塞州及伦敦，。[30] Roger Temam 和 Gilbert Strang。有界变形函数。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，75 21，1980 1 7 81 ( ): – / 。[31] E. O. Tuck。关于任意形状物体斯托克斯阻力的计算与最小化。载于*Conference on Hydraulics and Fluid Mechanics (Institute of Engineers, Australia, 1970)* *3rd Australasian* 29 32, 1968 ，页码–。

[32] V. ˇSver´ak。论最优形状设计。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，72(6):537–551，1993。[33] S. R. Watson。缓慢黏性流中给定体积物体的最小阻力。 *J. Inst. Math. Appl.*，7 367 376，1971 : – 。

(Dorin Bucur)
Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 5127 Université de Savoie Mont Blanc Campus Scientifique 73 376 Le Bourget-Du-Lac France , D. Bucur：dorin.bucur@univ-savoie.fr (Antonin Chambolle) *Email address* Ceremade, CNRS and Université de Paris-Dauphine PSL, Place de Lattre de Tas-signy, 75775 Paris Cedex 16 France , A. Chambolle：chambolle@ceremade.dauphine.fr (Alessandro Giacomini) *Email address* DICATAM, Sezione di Matematica, Università degli Studi di Brescia, Via Branze43, 25123 Brescia Italy , A. Giacomini：alessandro.giacomini@unibs.it (Micka¨el Nahon) *Email address* Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 04103 Leipzig, Ger-many*Email address*, M. Nahon：mickael.nahon@mis.mpg.de