arXiv:2301.01077v1 [math.AG] 3 Jan 2023

Vaisman 流形上的全纯张量

Liviu Ornea[1], Misha Verbitsky[2]

谨以此文献给 Valentin Poenaru 教授，祝贺他九十华诞

摘要

LCK（局部共形 K¨ahler）流形是一种复流形，具有满足 $d\omega = \omega \wedge \theta$ 的 Hermitian 形式 ω，其中 θ 是一个闭 1-形式，称为 Lee 形式。若 Lee 形式相对于 Levi-Civita 联络平行，则称该 LCK 流形为 Vaisman 流形。其对偶向量场称为 Lee 向量场，它是全纯且为 Killing 的。我们证明，Vaisman 流形上的任意全纯张量都在 Lee 向量场作用下保持不变。利用这一点，我们计算了 Vaisman 流形的 Kodaira 维数。我们证明，对于由射影流形 X 上的代数锥经 $\mathbb{Z}$ 商空间得到的 Vaisman 流形，其 Kodaira 维数等于 X 的 Kodaira 维数。这可用于证明 Vaisman 流形的 Kodaira 维数在变形下稳定。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **3**

2.1 局部共形 K¨ahler 流形.3 2.2 带势的 LCK 流形.4 2.2.1 代数锥.5 2.2.2 Vaisman 流形.6

3 带势的 LCK 流形上的全纯张量 **7**

3.1 反身凝聚层的延拓.7 3.2 全纯张量场的不变性.8

[1]Liviu Ornea 部分获得罗马尼亚教育与研究部 PN-III 计划项目（项目编号 PN-III-P4-ID-PCE-2020-0025，合同编号 30/04.02.2021）的资助。[2]Misha Verbitsky 部分获得 HSE 大学基础研究计划、FAPERJ E-26/202.912/2018 以及 CNPq - 项目编号 313608/2017-2 的资助。关键词：局部共形 K¨ahler，LCK 位势，代数群，Zariski 闭包。2010年数学主题分类：53C55，32G05。

4 Zariski 闭包与切瓦莱定理 9

5 Vaisman 流形上的全纯张量 11

6 一个应用：Vaisman 流形的 Kodaira 维数 12

1 引言

局部共形 K¨ahler 几何大概是超越 K¨ahler 几何之后最简单的复几何，它既有许多显式例子，也有许多非显式例子。若一个流形是 LCK（局部共形 K¨ahler）流形，¨则它存在一个 Kähler 覆盖空间，且甲板变换群以全纯齐次变换作用（定义 2.1）。每个 Hopf 流形都是 LCK 流形，因为其万有覆盖空间存在一个 K¨ahler 势，甲板变换会将势乘以一个数。具有这一性质的流形称为带势的局部共形凯勒流形；LCK 流形存在势，当且仅当它可以实现为 Hopf 流形中的复子流形（[OV3]）。

回顾一下，对角 Hopf 流形是形如 $\frac{\mathbb{C}^n\setminus 0}{\langle A\rangle}$ 的流形，其中 A 是一个线性压缩，在适当的基下可以对角化。带势的 LCK 流形中一个更特殊的类是 Vaisman 流形，第 2.2.2小节；其特征是可以全纯嵌入到对角 Hopf 流形中的复流形（[OV9，定理 4。9]）。

每个 Vaisman 流形 M 都带有 Lee 向量场和反 Lee 向量场的作用，这些向量场既是 Killing 向量场，也是全纯的（命题 2.17）。在[Ve2], 中证明了，任意定义在 M 上的稳定全纯向量丛都关于此作用等变。由定理 2.18可知，任意复子簇也在此作用下保持不变。

令 G 表示 Vaisman 流形 M 的全纯等距变换群，它是由 Lee 流和反 Lee 流生成的群的闭包。本文证明， M 上的任意全纯张量场都是 G- 不变的。

对于全纯向量场和微分形式，这一结果由 K. Tsukada 在 [T1，定理 3.3、定理 4.2]。

我们证明带势的 LCK 流形也有类似的结果。设 M 是一个 ˜ ˜带势的局部共形凯勒流形，且 M 是它的 K¨ahler $\mathbb{Z}$覆盖。我们假设 M是一个开代数锥（定义2.10）；当 $\dim_{\mathbb{C}} M \geqslant 3$ ([OV8]) 时，这一条件自动成立。当 $\dim_{\mathbb{C}} M = 2$ 时，若我们假设˜GSS 猜想（[OV7，第25节6]），则可推出这一结论。由于 M 是代数的，因此讨论其 Zariski 闭包是有意义的

˜可以讨论 M 上 $\mathbb{Z}$ 作用的 Zariski 闭包。我们将 $\mathbb{Z}$ 作用的 Zariski 闭包 G 视为包含该 $\mathbb{Z}$ 作用的最小代数子群˜，它是 Aut(M) 的子群；显然，这个群是交换的且维数大于零。由于 G 的作用与 M 上˜覆盖变换群 $\mathbb{Z} \subset$ 的作用相交换，商空间 G/$\mathbb{Z}$ 自然作用于 M。

我们证明，带势的局部共形凯勒流形上的任意全纯张量场都是 $\mathcal{G}$-不变的（命题 3.3 ）。

设 $H = \frac{\mathbb{C}^n \setminus 0}{\langle A \rangle}$ 是一个对角 Hopf 流形，且 $\mathcal{G}$ 是 $\langle A \rangle$的 Zariski 闭包。设 α_i 是 A的特征值， A_1 是一个在同一基底下具有特征值 $|\alpha_i|$ 的算子。在定理 4.3中，我们证明线性向量场 $\log A_1$ 属于 $\langle A \rangle$的 Zariski 闭包；在定理 5.1第 3 步中，我们证明 $\log A_1$ 可以作为 H上某个 Vaisman 结构的 Lee 向量场得到。

这意味着，Vaisman 流形的 Lee 向量场和反 Lee 向量场属于 G 的李代数（ $\mathbb{Z}$-作用的 Zariski 闭包）。因此，任意全纯张量场都在 Lee 向量场和反 Lee 向量场作用下保持不变。

2 预备知识

本节内容可参阅 [OV7]。

2.1 局部共形 K¨ahler 流形

定义 2.1：若复流形 (M, I) 存在一个覆盖空间 $(\tilde{M}, I)$，其上配备了一个 K¨ahler 度量 $\tilde{\omega}$，且覆盖空间的甲板变换群通过全纯相似变换作用于 $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$，则称该复流形 (M, I) 为局部共形 K¨ahler 流形（简称 LCK）。LCK 流形上的 LCK 度量是 (M, I) 上的一个 Hermitian 度量，其在 $\tilde{M}$ 上的拉回与 ω 共形。

命题 2.2：Hermitian 流形 (M, I, g) 是 LCK 流形，当且仅当存在一个闭 1-形式 θ （称为 Lee 形式），使得基本形式 $\omega(x, y) := g(Ix, y)$ 满足 $d\omega = \theta \wedge \omega$。

定义 2.3：复流形（M， I）上的 LCK 结构（ω， θ）称为严格的，如果 Lee 形式不是恰当的。当 Lee 形式是恰当的时，该结构（ω， θ）称为全局共形 K¨ahler（GCK）。

例 2.4：设 $H := (\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A \rangle$, $A = \lambda \mathrm{Id}$, $|\lambda| > 1$ 是一个经典

Hopf 流形。它是 LCK 流形，因为甲板变换群 $\mathbb{Z}$ 将平坦的 K¨ahler 度量 $\tilde{g}_0 = \sum dz_i \otimes d\overline{z}_i$ 放大了 2 倍。覆盖空间 $\mathbb{C}^n \setminus 0$ 上的 Lee 形式为 $\theta = -d$ log $|z|^2$。由于 Hopf 流形与 $S^1 \times S^{2n-1}$ 微分同胚，该 LCK 结构是严格的。

注 2.5：LCK 流形的所有复子流形仍是 LCK 流形（但不一定是严格的）。

2.2 带势的 LCK 流形

定义 2.6： 若一个 LCK 流形具有 LCK 位势，则它存在一个 K¨ähler 覆盖空间，使得该空间上的 K¨ähler 度量具有一个全局正位势函数 ψ，且甲板变换群以常数 ψ 乘以该函数。[1] 此时， M 称为带势的局部共形凯勒流形。

例 2.7： 例 2.4 中的对角 Hopf 流形 是带势的 LCK 流形，因为 $\tilde{g}_0$ 具有全局自守位势 $\psi : = \sum |z_i|^2$。

根据 [OV3], ，紧致带势的 LCK 流形在复结构的小变形下保持稳定。这意味着所有线性 Hopf 流形$(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\langle A\rangle$， $A \in \mathrm{GL}(n,\ \mathbb{C})$，其特征值的绝对值$> 1$均使其成为带势的 LCK 流形。

注 2.8：很容易证明，带势的局部共形凯勒流形的所有复子流形仍然是带势的局部共形凯勒流形。

带势的 LCK 流形最重要的性质之一是以下 Kodaira 型嵌入定理：

定理 2.9： ([OV3]) 设 M 是一个复维数至少为 3 的紧致带势 LCK 流形。那么 M 可全纯嵌入线性 Hopf 流形。

■

证明的思路是，带势的局部共形凯勒流形的 K¨ähler 覆盖在黎曼意义下并非锥（它不具有相似变换），但与锥的概念非常接近，因为它只需补上一个（奇异）点即可完成。这种完备化可以借助 Rossi 和 Andreotti-Siu 的一个定理来实现，而该定理仅适用于维数大于 3 的情形。在维数 2 时，若假设 GSS 猜想（[OV6,

[1]下文中，将在甲板变换群作用下按常数因子缩放的微分形式称为自守形式。

定理 5.6]），这是一项由来已久的猜想，人们通常假设它成立。

下面，我们将精确描述带势的 LCK 流形的 K¨ähler 覆盖。

2.2.1 代数锥

定义2.10：（[OV4]）一个闭代数锥是一个仿射簇$\mathcal{C}$，它具有一个 $\mathbb{C}^*$-作用 ρ 和唯一的不动点 x_0，称为原点或顶点，并满足以下条件：

（i）C 在 x_0 外光滑，并且 $\mathbb{C}^*$ 在 C$\backslash x_0$ 上自由作用。

（ii） ρ 作用在 T_{x_0}C 的 Zariski切空间上，其所有特征值均为 $|\alpha_i| < 1$。

开代数锥是一个复流形，它与去掉原点后的闭代数锥双全纯等价。

定理2.11：([OV8]) 设 M 是一个具有真势的 LCK 流形，
˜ ˜且 M 它的 K¨ähler $\mathbb{Z}$-覆盖。则 M 是一个开代数锥。

注2.12： 对真势的限制并不重要，因为任何具有势的 LCK 度量都可以在 C^∞-拓扑下（保持复结构不变）通过具有真势的 LCK 度量加以逼近（[OV2，OV5]）。

˜作为一个拓扑空间，闭代数锥 M_c 可由一个开代数锥˜经一点紧化得到 M。然而，闭代数锥上的复˜结构并不能由 M唯一确定。关于这个复杂而迷人的主题，请参阅 [OV8] 。

˜流形 M 不能唯一确定 LCK 流形 M： $M =$ ˜
$M\mathbb{Z}$由 $\mathbb{Z}$-作用的选择决定，而这种选择可能有所不同。

在 [OV8], 中，我们证明了带势的局部共形凯勒流形的代数锥同构于射影轨形上的仿射锥。这几乎将带势的 LCK 流形的几何转化为代数几何的一个章节。

我们以引用一项结果来结束本节预备知识：一旦已知将作为覆盖空间的代数锥，该结果便给出了一种构造带势的 LCK 流形的方法。首先需要引入以下概念。

定义 2.13：设 M 为一个开代数锥，M_c 为相应的闭锥，且 $\vec{r} \in TM_c$ 为一个全纯向量场，使得对于所有 $t > 0$，微分同胚 $e^{t\vec{r}}$ 都是将 $\tilde{M}_c$ 压缩到原点的全纯压缩。在这种情况下，单参数族 $e^{t\vec{r}}$ 称为压缩流（或压缩流）。若严格伪凸超曲面 $S \subset M$ 与 $e^{t\vec{r}}$的每条轨道 S，$t \in \mathbb{R}$恰好相交一次，则称其为伪凸壳。

伪凸壳可用于构造自守拟次调和函数，具体如下。

定理 2.14：([OV4]) 设 $\tilde{M}$ 是一个代数锥，$e^{t\vec{r}}$ 是一个压缩流，且 $S \subset M$ 是一个伪凸壳。则对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，都存在唯一的函数 φ_λ 使得 $\mathrm{Lie}_{\vec{r}}\varphi = \lambda\varphi$ 且 $\varphi_\lambda\Big|_S = 1$。此外，当 φ_λ 时，这样的 $\lambda \gg 0$是严格多重次调和的。

■

2.2.2 Vaisman 流形

在带势的 LCK 流形中，了解得最深入的子类是 Vaisman 流形。这类流形是 Lee 形式相对于 LCK 度量的 Levi-Civita 联络平行的 LCK 流形。

设 (M, I, ω, θ) 是一个 Vaisman 流形，且 $\pi: M \to M$ 是一个 K¨ahler 覆盖，在其上 $\pi^*\theta$ 是恰当的。那么可以看出，$\tilde{\omega}$ 的平方范数是 $\pi^*\theta$Kähler 度量 ¨ 的一个正的自守位势 $\tilde{\omega}$ ([OV3])。

例 2.15：一些 Vaisman 流形的例子：

(i) 对角 Hopf 流形 $(\mathbb{C}^n\backslash 0)/\langle A\rangle$，其中 A 是半单的，其特征值 α_i 的绝对值为 > 1，[GO，OV4]。**(ii)** 椭圆复曲面（参见 [B]，了解 Vaisman 紧曲面的完整分类；另见 [VVO]）。**(iii)** Vaisman 流形的所有紧子流形（[Ve1]）。

注 2.16: Vaisman 流形这一类是严格的：局部共形凯勒 Inoue 曲面和非对角 Hopf 流形都不可能具有 Vaisman 度量（[B], [OV4]）。

Lee 形式的度量对偶 $\theta^\sharp$ 称为 Lee 向量场。

命题 2.17：（[Vai1，Vai2]）设 $(M，g，I，\theta)$ 是一个 Vaisman 流形。则 Lee 向量场 $\theta^\sharp$ 是 Killing 且全纯的；此外，它与 $I\theta^\sharp$对易。

■

记 Σ为由 $\theta^\sharp$和 $I\theta^\sharp$生成的全纯一维叶状结构。它称为典范叶状结构（其动机将在下一个定理中给出）。

定理 2.18：设 M 是一个紧致 Vaisman 流形，$\Sigma \subset TM$ 是其典范叶状结构。则：

(i) Σ 与 Vaisman 度量的选择无关（[T3]）。

(ii) $d^c\theta = \omega - \theta \wedge I\theta$ ([Vai2]) 和恰当 (1,1)-形式 $\omega_0 := d^c\theta$ 是半正的（[Ve1]）。因此，$\Sigma = \ker \omega_0$，并且 ω_0 关于 Σ是横向 Kähler 的。

下面的结果几乎显而易见。为保持一致性，我们给出证明。

引理 2.19：设 M 是一个紧致 Vaisman 流形，G 是由 Lee 向量场和反 Lee 向量场在 M 上的作用所生成的李群的闭包。那么 G 是一个紧致环面。

证明：由于 Lee 向量场和反 Lee 向量场在 M 上作为等距变换作用（命题 2.17），群 G 是 M的等距变换群的闭子群，而后者是紧致的。因此 G 是紧致的；由于它是阿贝尔群的闭包，因此它也是阿贝尔群。

■

3 带势的 LCK 流形上的全纯张量

本节旨在证明 命题 3.3。为证明该命题，我们将回顾一些与凝聚层相关的事实。

3.1 反身凝聚层的延拓

设 X 上有一个凝聚层 F，令 $\mathrm{F}^* := \mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{O}_X)$ 为对偶层，即到正则函数环的模同态层

。层的自然态射 $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$ 不一定是同构：例如，其核包含 $\mathcal{F}$的挠子。若一个凝聚层满足自然映射 自反 当且仅当 $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$ 是同构。关于自反层的介绍，参见 [OSS]。这里我们陈述一些与本文相关的结果。

首先请注意，层 $\mathcal{F}^*$ 已经是自反的（[OSS], 第 II 章，引理 1.1.8）。此外，正规簇上自反层的奇异集的余维为 $\geqslant 3$；特别地，复曲面上的自反层是局部自由的（[OSS], 第 II 章，1.1.10）。此外，光滑流形上的秩一自反层是局部自由的（[OSS], 第 II 章，引理 1.1.15）。

自反层最重要的性质是正规性。设 $Z \subset X$ 是正规复簇的一个子簇，$\operatorname{codim}_X Z \geqslant 2$。考虑开嵌入映射 $j: X \backslash Z \hookrightarrow X$，并设 j^* 和 j_* 分别为层拉回和推前。对于任意层 F，都存在一个自然的层态射 $\mathrm{F} \longrightarrow j_* j^* \mathrm{F}$，它将 F 的一个截面映射为其在 $X \backslash Z$上的限制。若对于任意余维为 $\geqslant 2$的子簇 $Z \subset X$，自然映射 $\mathrm{F} \longrightarrow j_* j^* \mathrm{F}$ 都是同构，则称凝聚层 F 是正规的。

下述定理可视为 Hartogs 延拓定理的层版本。

定理3.1：正规复簇上的凝聚层 F 正规，当且仅当它是自反的。

证明：[见命题 7]。 ■

定理 3.2：([OV7，定理 27。6]) 设 M 是一个具有孤立奇点的正规复簇，维数$_{\mathbb{C}} M \geqslant 3$，$x \in M$ 是一个点，且 $M_0 := M \backslash \{x\} \stackrel{j}{\hookrightarrow} M$。考虑$\mathcal{F}$ 在 M_0上的一个自反层。那么 $j_* \mathcal{F}$ 是一个自反凝聚层。此外，$j_* \mathcal{F}$ 是 M上唯一一个与$\mathcal{F}$ 在 M_0上同构的凝聚自反层。

证明：自反延拓的唯一性来自这样一个事实：正规簇上的凝聚层$\mathcal{F}$ 正规，当且仅当它是自反层（定理3.1）。凝聚延拓$\mathcal{F}$ 的存在性由 [AS，命题 6。1]得出。 ■

3.2 全纯张量场的不变性

现在我们可以证明本节的主要结果了。

˜命题 3.3：设 M 是一个带势的紧致局部共形凯勒流形， M 是其 K¨ahler $\mathbb{Z}$-覆盖，并将其视为一个开代数锥；设 $\Phi \in H^0(M, B)$ 是定义在 M 上的全纯张量场，其中 $B = (\Omega^1 M)^{\otimes k} \otimes TM^{\otimes l}$。记

˜ ˜ ˜ Φ 为其在 M 上的提升，并令 G 为 M 上 $\mathbb{Z}$-作用的 Zariski 闭包。˜那么 Φ 是 G-不变的。

证明。步骤 1：考虑有限维空间W上的 $\mathbb{Z}$-作用。于是，任何 $\mathbb{Z}$-不变向量 $w \in W$ 都在 $\mathbb{Z}$的 Zariski 闭包作用下保持不变。这就是命题 3.3 的结论并不令人意外的原因。˜然而， M 上的张量场空间并非有限维，因此命题 3.3 并非平凡。记 $\mathfrak{m}$ 为闭代数锥 $\tilde{M}_c$中原点处的极大理想。我们将商空间 $\mathsf{O}_{\tilde{M}_c}/\mathfrak{m}^k$视为全纯（或代数）函数的喷流空间。与 [OV8],

˜ ˜中一样，我们选择 M_c 为正规，从而将 $\mathbb{Z}$-作用延拓到 M_c。于是，任何$\mathbb{Z}$-不变喷流 $u \in \mathsf{O}_{\tilde{M}_c}/\mathfrak{m}^k$ 也都是 G-不变的。

步骤 2：从现在起，我们用同一个字母 Φ 表示˜Φ 到 M的提升。将 Φ 视为适当张量丛 $B = (\Omega^1 M)^{\otimes k} \otimes TM^{\otimes l}$的一个 $\mathbb{Z}$-不变截面；按构造，它是 $\mathbb{Z}$-等变的。˜利用定理 3.2，我们将 B 延拓为 M_c上的自反凝聚层 B_c 。由于自反凝聚层是正规的（[OSS，第 II 章，引理 1.1.12],˜[Se，命题 7]），截面 Φ 可全纯延拓至 M_c，记为 $\Phi_c \in H^0(\tilde{M}_c, B_c)$。考虑空间 $J^k_B := \frac{B_c}{\mathfrak{m}^{k+1} B_c}$的 k-喷流。 $\mathbb{Z}$在 $H^0(\tilde{M}_c, B_c)$上的作用保持 $H^0(\tilde{M}_c, \mathfrak{m}^k B_c) \subset H^0(\tilde{M}_c, B_c)$。令 $\Phi^k_c \in J^k_B$ 为 $\tilde{\Phi}_c$的 k-喷流。由于 Φ_c 是 $\mathbb{Z}$-不变的，且k-喷流空间是有限维的， k-喷流 Φ^k_c 是 G-不变的。令 ˆ $B_c := \varprojlim J^k_B$ˆ 为 B_c 的 $\mathfrak{m}$-进完备化，并令 Φ_c 为 Φ_c 在该完备化中的像。由于所有 k-喷流 Φ^k_c 都是 G-不变的，完备化 ˆ Φ_c 也是 G-不变的。˜由于 c 中 M_c 上的全纯函数芽环是诺特的（[GN，第 II 章，定理 B.9]），且 B_c是自反的，因而无挠，完备化映射 $H^0(\tilde{M}_c, B_c) \longrightarrow \hat{}B_c$ 是单射（[AM，定理 10.17]）。因此，$\Phi \in H^0(\tilde{M}_c, B_c)$ 也是 G-不变的。

■

4 扎里斯基闭包与切瓦莱定理

我们回顾切瓦莱提出的以下著名定理。

设 $G \subset \mathrm{GL}(V)$ 是一个代数群，$W = V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}$ 是 G 的一个张量表示。$v \in W$ 若为 G-不变向量，则称其为 G 的张量不变量。若点 $x \in \mathbb{P}W$ 是 G 的 G-不变点，则称其为射影张量不变量。

定理 4.1：（切瓦莱定理，[M]）。
代数群由其射影张量不变量集合唯一确定。
■

当代数群是约化的（在 $\mathbb{C}$ 上，群是约化的，当且仅当它具有紧实形式）时，切瓦莱定理有一个更强的版本。

定理 4.2：约化代数群由其张量不变量集合唯一确定。

证明：[D，命题 3.1 (c)]。 ■

我们将证明以下结果，后文将用它来确定 Vaisman 流形上的李场作用。

定理 4.3：设 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是一个对角线性算子，其特征值为 $\alpha_1, ..., \alpha_n$，A_1 是一个在同一基底下对角化的算子，其特征值为 $|\alpha_1|, ..., |\alpha_n|$。记 G 为群 $\langle A \rangle$ 在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 中的 Zariski 闭包。那么 G 包含 A_1。

证明：由于算子 A 可对角化，$\langle A \rangle$ 的代数闭包是一个只包含半单元素的交换群。由 [BT，命题 1.5]，，G 的连通分支同构于 $(\mathbb{C}^*)^d$，因此 G 是约化的。于是定理 4.2 表明，G 是所有保持 A-不变向量 $w \in W = V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l}$ 的 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的集合。A 在 W 上的特征值是 k 个 α_i 与 l 个 α_i^{-1} 的乘积。特征向量 $w \in W$ 为 $w = \bigotimes_{i=1}^k z_{m_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^l \zeta_{n_i}$，其中 z_{n_i} 是 V 中对应特征值 α_{n_i} 的特征向量，而 ζ_{m_i} 是 V^* 中对应特征值 $\alpha_{m_i}^{-1}$ 的特征向量。于是 $A(w) = \prod_{i=1}^k \alpha_{n_i} \prod_{i=1}^l \alpha_{m_i}^{-1}$。特征向量 w 是 A-不变的，当且仅当 $\prod_{i=1}^k \alpha_{n_i} \prod_{i=1}^l \alpha_{m_i}^{-1} = 1$。这意味着 $\prod_{i=1}^k |\alpha_{n_i}| \prod_{i=1}^l |\alpha_{m_i}^{-1}| = 1$，因此 w 也是 A_1-不变的。
■

5 Vaisman 流形上的全纯张量

设 M 是一个 Vaisman 流形，且 $\theta^\sharp$ 是其 Lee 向量场。则 $\theta^\sharp$ 和 $I(\theta^\sharp)$ 是全纯 Killing 向量场（命题 2.17）。群 G 在群 $e^{t_1\theta^\sharp+t_2 I(\theta^\sharp)}$ 中关于 M 的等距变换群的闭包是紧致且交换的，因此它是一个紧致环面（引理 2.19）。

定理 5.1：设 M 是一个紧致 Vaisman 流形，$\Phi \in H^0(M,B)$ 是一个全纯张量，其中 $B = (\Omega^1 M)^{\otimes k} \otimes TM^{\otimes l}$，且 G 是包含由 Lee 向量场和反 Lee 向量场生成的流的最小闭李群。那么 Φ 是 G-不变的。

证明。步骤 1：在 M 上选取一个 LCK 秩为 1 的 Vaisman 度量，~并设 M 为相应的 K¨ahler $\mathbb{Z}$-覆盖空间 M，并将其视为~一个开代数锥。设 $\mathcal{G} \subset \mathrm{Aut}(M)$ 为该$\mathbb{Z}$作用的 Zariski 闭包。由 Φ 命题 3.3，$\mathcal{G}$不变。为完成命题 3.3的证明，定理 5.1，只需证明 $G \subset \mathcal{G}$；由于 $\mathcal{G}$ 是闭的，只要证明 Lee 向量场 $\theta^\sharp$ 与 相切即可。

步骤 2：设 $M \longrightarrow H$ 是从 M 到对角 Hopf 流形的全纯嵌入。根据定理 2.18，该嵌入与由 Lee 流和反 Lee 流生成的群交换，因此只需证明当 $\theta^\sharp$ 时，它与 $\mathcal{G}$ 相切。 $M = H$。接下来需要证明在 定理 5.1 假设 M 是 Hopf 流形的情况下成立。为此，我们计算对角 Hopf 流形的群 G 和 $\mathcal{G}$ 。利用 定理 2.14 中通过伪凸壳得到的 Hopf 流形上的 Vaisman 度量表达式，可以显式完成这一计算。

步骤 3：Vaisman 流形 M 上由 Lee 流和反 Lee 流生成的秩 2 代数，由 M (定理 2.18) 上的复结构唯一确定。我们利用将要显式构造的 Vaisman 结构来表示 Hopf 流形上的 Lee 流，并证明它属于 Lie($\mathcal{G}$)。这将推出原始的 Lee 流也属于 Lie($\mathcal{G}$)。

设 $H = \frac{\mathbb{C}^n \setminus 0}{\langle A \rangle}$，其中 $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 是一个特征值为 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 的对角线性压缩。设 A_1 是一个与 A 在同一基底下为对角矩阵、特征值为 $|\alpha_i|$ 的矩阵。那么 $\vec{r} := \log A_1$ 是一个全纯收缩向量场，而 $e^{t\vec{r}}$ 是一个 A-不变的压缩流。球面 S^{2n-1} 是与该压缩流相容的伪凸壳。根据 [OV4],，我们得到一个 $e^{t \log A_1}$-自守拟次调和函数 φ。我们将证明 φ 是 A-自守的。

考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的对角 U(1)^n-作用。拟次调和函数 φ 是 U(1)^n-不变的，因为 $\vec{r}$ 和 S^{2n-1} 是 U(1)^n-不变的。由于$A \in \mathrm{U}(1)^n \cdot A_1$，且 φ 是 A_1-自守的，因此它是 A-自守的。因此，$\frac{dd^c\varphi}{\varphi}$ 在 H 上定义了一个 Vaisman 度量。根据定义，Lee 流将 φ 的等值集映射到 φ 的等值集，并且 $\varphi(e^{t\theta^\sharp}z) = t\varphi(z)$。根据 φ 的构造，对于 $e^{-t\log A_1}$ 也同样成立，即 $\varphi(e^{-t\log A_1}z) = t\varphi(z)$。因此，$\theta^\sharp = -\log A_1$，其中 $\log A_1$ 是在同一基底下特征值为 $\log|\alpha_i|$ 的对角矩阵。这就是 Vaisman 度量 $\frac{dd^c\varphi}{\varphi}$ 的 Lee 流。

向量场 $\log A_1$ 属于 Lie($\mathcal{G}$)，因为 A_1的任意张量不变量幂都保持 $\mathcal{G}$ 不变 定理 4.3，因此相应的一参数子群也属于 Lie($\mathcal{G}$)；这给出 $\log A_1 \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$。 ■

6 一个应用：Vaisman 流形的 Kodaira 维数

定义 6.1：设 M 是一个紧复流形。其多重典范丛是张量幂 $K_M^n = K_M^{\otimes n}$，$n \geqslant 0$。Kodaira 维数$\kappa(M)$ 定义为 $\kappa(M) := \limsup_{n} \frac{\log(\dim H^0(K_M^n))}{\log n}$。

备注 6.2：若对几乎所有 $n > 0$，$H^0(K_M^n) = 0$，则 Kodaira 维数等于 $-\infty$；若 dim $H^0(K_M^n)$ 有界，但对无穷多个 n 非零，则 Kodaira 维数为 0。若函数 $n \mapsto \dim H^0(K_M^n)$ 按次数为 d 的多项式增长，则 M 的 Kodaira 维数为 d。

设 M 是一个 Vaisman 流形，G 是由~Lee 作用和反 Lee 作用生成的群的闭包，M 是~Kähler $\mathbb{Z}$覆盖空间 M，且 G 是~从 G到 M的提升。记 $\mathfrak{G}$为 G在 Aut(M) 中的 Zariski 闭包，并将其视为一个代数簇（[OV8]）。

由于G作用于~通过相似变换~，并且包含压缩，存在一个开集 $U \subset \mathfrak{G}$，位于 $\mathfrak{G}$ 的连通分支中，使得对所有 $\gamma' \in U$、~，商空间 $M' := \frac{M}{\langle\gamma'\rangle}$ 都是 LCK（[OV8]）。自同构 γ 与由 Lee 向量场和反 Lee 向量场生成的群的作用可交换，因此根据 [KO] M' 是 Vaisman 流形。[1] 根据 [BT，命题 1，5]，$\mathfrak{G}$ 的连通分支同构于 $(\mathbb{C}^*)^k$。不难看出，任意代数群中所有一维闭子群的并集都是稠密的，因此 U 包含 γ' 的一个稠密子集，其中的元素都包含在某个子群中

[1]如 [KO], 所示，若一个 LCK 流形允许一个全纯共形 $\mathbb{C}$作用，且该作用不能提升为 Kähler 覆盖空间上的等距变换，则它是 Vaisman 流形。

$\mathbb{C}^* \subset \mathfrak{G}$。由于 $\mathbb{C}^*/\langle\gamma'\rangle$ 是椭圆曲线，Vaisman 流形 $M' = \frac{M}{\langle\gamma'\rangle}$具有椭圆纤维化结构。[2] 如 [OV1], 所示，叶空间 X 是一个射影轨形。

定理 6.3：设 M 是一个 Vaisman 流形，M' 是上述得到的拟正则变形，X 是相应的叶空间，它是一个射影轨形。则 $\kappa(M) = \kappa(M') = \kappa(X)$，其中 κ 表示 Kodaira 维数。

证明。步骤 1：由伴随公式可知等式 $\kappa(M') = \kappa(X)$ 显然：由于 $\pi: M' \longrightarrow X$ 是椭圆纤维化，因此对所有 k，都有 $H^0(K^k_{M'}) = H^0(K^k_X)$。

步骤 2：根据定理 5.1，任意截面 h（多重典范丛的）$\tilde{K^k_M}$在 M 上都是 $\mathfrak{G}$不变的。于是，对任意 $\gamma' \in U$，将 h 提升到 M 后，γ'不变，因此可视为 $K^k_{M'}$在商映射 $\tilde{M} \longrightarrow M'$下的拉回截面。这定义了一个单射 Ψ：$H^0(K^k_M) \longrightarrow H^0(K^k_{M'})$。

步骤 3：为了完成定理 6.3 的证明Ψ：$H^0(K^k_M) \longrightarrow H^0(K^k_{M'})$ 是满射。若能证明任意截面 $h' \in H^0(K^k_{M'})$ 都是 $\mathfrak{G}$-不变的，这便可得出该结论。由于 $H^0(K^k_{M'}) = H^0(K^k_X)$（步骤 1），只需证明对应的 $\mathfrak{G}$-不变性 h'，而这可通过证明 K^k_X 的对应截面在 $\mathfrak{G}$ 对 X的自然作用下不变。

回顾一下，多重典范表示是 Aut(X) 在 $H^0(K^k_X)$ 上的自然作用。由于 X 是一个轨形，其奇点为 klt（[P，命题 1.2。1]）。根据 [KK，定理 10。61], 多重典范表示的像是有限的；由于 $\mathfrak{G}$ 是连通的，它在 $H^0(K^k_X)$ 上的作用是平凡的。因此得到 $H^0(K^k_M) = H^0(K^k_{M'}) = H^0(K^k_X)$。

作为一项应用，我们概述 Vaisman 流形的 Kodaira 维数变形稳定性的证明。

猜想6.4：设 $M_t, t \in \mathbb{R}$ 是一族紧致Vaisman流形。则 M_t 的 Kodaira 维数为常数。

证明思路：我们概述这一猜想的证明，并将其归结为猜想 6.5。

[2]椭圆纤维化的 Vaisman 流形称为拟正则。

˜设 M_t 为对每个 M_t˜取一个 K¨ahler $\mathbb{Z}$覆盖而得到的开代数锥族；根据[OV1]，这是可行的。每个 M_t 都由 [OV8]赋予了自然的代数结构。

以下是一个猜想，很可能可以用[OV8]中所用的方法证明。

˜设 M_t， $t \in \mathbb{R}$是一个开代数锥的光滑族。如˜ [OV8], 所示，对于 $\mathbb{C}^*$ 在 M_t 商空间$M_t/\mathbb{C}^*$ 上适当选取 X_t-作用后，它同构于一个复射影轨形˜；这一同构 M_t 可扩展为°(L_t)与 Tot L_t 之间的同构，其中 X_t是

˜猜想 6.5：设 $M_t, t \in \mathbb{R}$ 是一个开代数锥的光滑族。那么，对于任意充分小的开子集 $U \subset \mathbb{R}$，可以按上述方式选择 $\mathbb{C}^*$-作用，使得族 (X_t, L_t) 随 $t \in U$ 光滑变化。

现在，根据 定理 6.3， M_t 的 Kodaira 维数等于 X_t的 Kodaira 维数；正如 Siu 在 [Si]. ■

致谢：我们感谢 Nicolina Istrati 对本文的关注并给予宝贵建议。

参考文献

[AS] A. Andreotti, Y. T. Siu, *Projective embeddings of pseudoconcave spaces*, 比萨高等师范学院年刊 24, 231-278 (1970).（第 8 页引用。）[AM] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison- Wesley, 1969.（第 9 页引用。）[B] F. A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, 《数学年刊》317 (2000), 1-40.（第 6 页引用。）[BT] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductives*, Publications Math´ematiques de l'IH´ES, 27 (1965), 55-151.（第 10 和 12 页引用。）[D] P. Deligne, *Hodge cycles on abelian varieties*（J. Milne 笔记。）载于：P. Deligne 等，《Hodge 环、动机与 Shimura 簇》。《数学讲义》900。施普林格出版社，柏林—纽约，1982.（第 10 页引用。）[GO] P. Gauduchon, L. Ornea, *Locally conformally Kähler metrics on Hopf surfaces*, 《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》48 (1998), 1107-1128.（第 6 页引用。）

[GN] R. C. Gunning, H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, 1965 年原版重印。AMS Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2009.（第 9 页引用。）[KO] Y. Kamishima, L. Ornea, *Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds* **57** 2 2005 201 221 12 , 东北数学杂志， () ()，-。（第页引用。）[KK] Koll´ar, J.，´ *Singularities of the Minimal Model Program* 2013 与 Kovacs, S. 合作，，, 剑桥大学出版社。（第页引用。）[M] D. W. Morris, *Ratner's Theorems on Unipotent Flows*, 芝加哥大学出版社，芝加哥，2005.（第 10 页引用。）[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, 1988 年版的勘误重印本。附有 S. I. Gelfand 的附录。Modern Birkh¨auser Classics。Birkh¨auser/Springer 巴塞尔股份公司，巴塞尔，2011.（第 8 和 9 页引用。）[OV1] L. Ornea, M. Verbitsky, *An immersion theorem for compact Vaisman manifolds*,《数学年刊》332 (2005), 121-143.（第 13 和 14 页引用。）[OV2] L. Ornea, M. Verbitsky, *Morse-Novikov cohomology of locally conformally Kähler manifolds* **59**, 3 2009 295 305 5 , 几何与物理杂志 第 () ，-。（第页引用。）[OV3] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformal Kähler manifolds with potential*,《数学年刊》348 (2010), 25-33.（第 2、4 和 6 页引用。）[OV4] L. Ornea, M. Verbitsky, *Locally conformally Kähler metrics obtained from pseudo-convex shells* **144** 2016 325 335 , 美国数学会会刊 () ，-。（第 5、6 和 11 页引用。）[OV5] L. Ornea, M. Verbitsky, *LCK rank of locally conformally Kähler manifolds with potential* **107** 2016 92 98 5 , 几何与物理杂志 () ，-。（第页引用。）[OV6] L. Ornea, M. Verbitsky, *Embedding of LCK manifolds with potential into Hopf manifolds using Riesz-Schauder theorem*,"复几何与辛几何"，Springer INdAM 丛书，2017, 137-148.（第 5 页引用。）[OV7] L. Ornea, M. Verbitsky, 局部共形 K¨ahler 几何原理。（第 2、3 和 8 页引用。）[OV8] L. Ornea, M. Verbitsky, *Algebraic cones on LCK manifolds with potential*, arXiv:2208.05833.（第 2、5、9、12 和 14 页引用。）[OV9] L. Ornea, M. Verbitsky, *Lee classes on LCK manifolds with potential*, arXiv:2112.03363.（第 2 页引用。）[P] Prokhorov, Yuri G., *Lectures on complements on log surfaces*, 日本数学会回忆录，10。日本数学会，东京，2001.（第 13 页引用。）[Se] J.-P. Serre, *Prolongement de faisceaux analytiques cohérents*,《傅里叶研究所年刊》16 (1966) 第 1 期, 363-374.（第 8 和 9 页引用。）[Si] Y.-T. Siu, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type* ¨ 2000 223 277, 2002 , 复几何（哥廷根，）, 施普林格出版社，柏林，（第 14 页引用。）[T] K. Tsukada, *Holomorphic forms and holomorphic vector fields on compact generalized Hopf manifolds* **93** 1994 1, 1 22 2 , Compositio Mathematica () ，第-期。（第页引用。）

[T3] K. Tsukada, *The canonical foliation of a compact generalized Hopf manifold*, 《Differential Geom. Appl.》11（1999），第1期，13-28。（第7页引用。）[Vai1] I Vaisman, *Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form*, 《Rend. Mat.》（6）12（1979），第2期，263-284。（第7页引用。）[Vai2] I. Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*, 《Geom. Dedicata》13（1982），231-255。（第7页引用。）[Ve1] M. Verbitsky, *Theorems on the vanishing of cohomology for locally conformally hyper-Kähler manifolds* 3 **246** 2004 54 78 , 《Proc. Steklov Inst. Math.》第（）期，-。（第6和第7页引用。）[Ve2] M. Verbitsky, *Stable bundles on positive principal elliptic fibrations*, 《Math. Res. Lett.》12（2005），第2-3期，251-264。（第2页引用。）[VVO] M. Verbitsky, V. Vuletescu, L. Ornea, *Classification of non-Kähler surfaces and locally conformally Kähler geometry* **76** 2021 261 290 , 《Russian Math. Surv.》（），-。arxiv:1810.05768。（第6页引用。）

Liviu Ornea
University of Bucharest, Faculty of Mathematics and Informatics,14 Academiei str., 70109 Bucharest, Romania, and:
Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21, Calea Grivitei Str. 010702-Bucharest, Romanialornea@fmi.unibuc.ro, liviu.ornea@imar.ro

Misha Verbitsky
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Estrada Dona Castorina, 110Jardim Botânico, CEP 22460-320
Rio de Janeiro, RJ - Brasilalso:Laboratory of Algebraic Geometry, Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics, 6 Usacheva Str. Moscow, Russiaverbit@verbit.ru, verbit@impa.br