将 CONGEST 中的最大权匹配归约为最大基数匹配 ⋆

Vahan Mkrtchyan[a]

[a]计算机科学系，波士顿学院，美国马萨诸塞州切斯特纳特希尔，邮编 02467

arXiv:2301.01084v1 [cs.DS] 3 Jan 2023

摘要

本文将最大权匹配问题归约为 CONGEST 中的最大基数匹配。论文提出了两项技术贡献。第一项是一种简单的 $poly(\log\ n, \frac{1}{\varepsilon}, t, \ln\ w_t)$ 轮 CONGEST算法，可将最大权匹配问题归约为最大基数匹配问题。该方法假设所有顶点都知道所有边权重 $\{w_1, ..., w_t\}$（特别是，它们知道不同边权重的数量 t），但某个顶点可能不知道某条特定边的权重。第二项是一个简单的舍入算法（类似于装箱问题的近似算法），它可以将最大权匹配问题的一般实例归约为满足第一项假设的实例，其中 $t \leq poly'(\log\ n, \frac{1}{\varepsilon})$。最后，我们简要讨论了如何在 CONGEST 中实现这些算法。我们的主要结论是，该归约只需要常数轮。

关键词：匹配、最大匹配、近似算法、最大权匹配问题、CONGEST模型。2000年MSC分类：68W15、68W25、05C85

1. 引言

设 Z^+ 为正整数集合，设 Q^+ 为正有理数集合。我们经常使用记号 $poly()$表示一个多项式。当我们不关心多项式的系数和次数时，就会使用该记号。如果需要处理多个此类未定义的多项式，我们将使用记号 $poly'()$、$poly''()$等，以明确它们可能彼此不同。

在本文中，我们考虑不含自环或平行边的有限无向图。若 G 是一个图，则令 $V = V(G)$ 和 $E = E(G)$ 分别表示其顶点集和边集。图中的匹配是其边的一个子集，且该子集中的每条边所关联的每个顶点至多与一条边关联。

⋆本论文的研究工作得到了美国国家科学基金会通过资助项目 CCF-2008422 的支持。电子邮箱：vahan.mkrtchyan@bc.edu（Vahan Mkrtchyan）

提交至期刊的预印本 2023年1月4日

本文关注的是最大基数匹配问题：给定一个图 G ，需要找到一个最大的匹配。令 ν (G) 表示 G 的最大匹配的大小。那么，该问题的目标是设计一种算法，使其输出一个大小为 $\nu(G)$ 的匹配。本文着重研究该问题及其下文所述加权扩展的近似算法。因此，在输入中，我们假设给定一个图 G 和一个数 $\varepsilon \in (0, 1)$。目标是返回 G 的一个匹配 M，使得 M 至少包含 $(1-\varepsilon) \cdot \nu(G)$ 条边。本文中，我们始终假设 ε 是一个有理数。

在本文中，我们将研究最大权匹配问题（记为 MWM）。给定图 G 的同时，还会给定一个数 $w(e) \in Z^+$，称为边 $e \in E(G)$ 的权重。目标是找到一个匹配 M ，使 M 的权重最大，即

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e).$$

最优匹配的权重记为 $OPT(G)$。显然，最大权匹配问题包含最大基数匹配问题；如果 $w(e) = 1$，我们就得到后者。此外，请注意，最大权匹配问题可以看作最大基数匹配问题的非均匀情形，因为如果 G 的所有边具有相同的权重 W，那么权重就无关紧要，特别是我们有

$$OPT(G) = W \cdot \nu(G).$$

在本文中，我们将关注如何近似求解这一问题。因此，除图 G 及其边权重 $w(e)$ 外，输入还会给定一个数 $\varepsilon \in (0, 1)$。目标是返回图 G 的一个匹配 M，使得 M 中的边的权重总和至少为 $(1-\varepsilon) \cdot OPT(G)$。

下面这个将 MWM 扩展到有理数权重的版本对我们很重要。我们将其称为有理数最大权匹配，其输入、输出和目标与 MWM 相同，只是假设权重是区间$[1, +\infty)$中的有理数。

针对最大基数匹配问题及其加权扩展 MWM，第一个多项式时间算法由 [8, 9] 提出。有关这些问题及其历史的更多内容，请参见 [7], ，其中表 III、IV 及其所列参考文献总结了 2014 年以前最大基数匹配问题和 MWM 的研究现状。

此前已有针对可在多项式时间内求解的问题的近似算法。 [5] 提出了一种用于 MWM 的线性时间$_{1\,2}$近似算法。在 [7], 中，对于任意 $\varepsilon > 0$，提出了一种用于 MWM 的 $(1-\varepsilon)$ 近似算法，其运行时间为 $O(m \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \log \frac{1}{\varepsilon})$。这里 $m = |E(G)|$。关于一种生成树问题的近似算法，请参见 [6] ；该问题旨在使树的最大度数最小化。由于 [13], 该问题已知可在多项式时间内求解。一篇近期预印本 [16] 提出了一种用于计算图的退化度的 $(1+\varepsilon)$ 近似算法。

在本文中，我们将关注分布式计算领域中，如何为 CONGEST 模型设计有理数最大权匹配算法。在 CONGEST 模型中，我们

将输入图的每个顶点视为一个处理器，并允许顶点（或处理器）在每一轮交换长度为 $O(\log n)$ 的消息。这里， n 是输入图的顶点数。我们将关注如何在该模型中设计所需轮次数较少的算法。

需要指出的是，在 CONGEST模型中，通常要求所有整数权重均由 $poly(n)$ 界定。由于本文将研究有理数最大权匹配，其中的权重可能是有理数，因此我们将每个有理数 r 视为一对整数 (p, q)，且 p 和 q 均由 $poly(n)$ 界定。我们假设所有顶点都知道 ε（最大边权重）以及 $poly（n）$——即上述上界 W。

[2] 给出了一种分布式算法，用于验证最大基数匹配问题的给定解。更多相关内容请参见 [1] 。[17] 给出了一种随机化 CONGEST 算法，用于寻找大小为 $\nu(G)$ 的匹配，其轮次数量关于 $\log n$ 和 $\nu(G)$ 呈多项式依赖关系。 [10]给出了一个用于二分图中加权顶点覆盖问题的 $poly(\log n, \frac{1}{\varepsilon})$ 轮 $(1-\varepsilon)$-近似算法，且该算法在 CONGEST 模型中运行。该文还针对最大权匹配问题取得了类似结果，但其对 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的依赖呈指数级，且对输入图没有限制。 [11], 改进了这一结果，作者给出了一个用于 CONGEST 模型中最大基数匹配问题的 $poly(\log n, \frac{1}{\varepsilon})$ 轮 $(1-\varepsilon)$-近似算法。更多相关内容请参见 [19] 。[15] 给出了一种随机化 CONGEST 算法，可在 $poly(\log \log n)$ 轮内对所有具有 n 个顶点且最大度数 Δ 为足够大常数的图进行 $(1+\varepsilon)\cdot\Delta$-边着色。关于经典 Brooks 定理（即对所有最大度数为 Δ 的图进行 Δ-着色）的相关结果，请参见近期预印本 [12], 。关于生成树及其他问题的分布式算法可见 [4, 14, 18]。最后请注意， [3] 中还提出了一些有待进一步研究的开放问题。

在本文中，我们展示了一种 CONGEST算法，可将有理数最大权匹配归约为最大基数匹配问题。结合 [11], 我们的结果可知，存在一种用于 CON- GEST中有理数最大权匹配的 $poly(\log n, \frac{1}{\varepsilon})$轮次（$1-\varepsilon$）近似算法。值得注意的是，Su 和 Huang 独立地在 [20]中得到了针对最大权匹配的相同结果。

2. 一些辅助结果

本节将介绍一些有助于获得论文主要结果的辅助结果。我们先给出一个引理，它将在多种归约中频繁使用。

引理 1. 设 G 是一个配备权重函数 $w: E \to Q^+$ 的图，并设 $\varepsilon \in (0, 1)$ 是一个有理数。考虑一个新的最大权匹配实例，其中图保持不变，权重函数为 w'，除所有具有最小 w-权重 w_1 的边 e 现在具有权重 w'_1 外，它与 w 相同，其中

$$w_1 \leq w'(e) = w'_1 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{t}\right) \cdot w_1.$$

那么，如果 M 是 G 的一个匹配，且满足

$$w'(M) \geq (1-\theta) \cdot OPT',$$

其中 $\theta = \frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon$，于是

$$w(M) \geq (1-\varepsilon) \cdot OPT.$$

证明。设 $z = w'_1 - w_1 \leq \frac{\varepsilon}{t} \cdot w_1$。假设 M 是一个匹配，且满足

$$w'(M) \geq (1-\theta) \cdot OPT',$$

其中 OPT' 是 w' 的最优解，且 $\theta = \frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon$。我们有

$$\begin{aligned} w(M) &\geq w'(M) - z \cdot \nu(G) \geq (1-\theta) \cdot OPT' - \frac{z}{w_1} \cdot w_1 \cdot \nu(G) \\ &\geq (1-\theta) \cdot OPT - \frac{z}{w_1} \cdot OPT = \left(1 - \theta - \frac{z}{w_1}\right) \cdot OPT \geq \left(1 - \theta - \frac{\varepsilon}{t}\right) \cdot OPT \\ &= (1-\varepsilon) \cdot OPT, \end{aligned}$$

因为

$$w_1 \cdot \nu(G) \leq OPT \leq OPT'$$

and

$$\theta + \frac{\varepsilon}{t} = \frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon + \frac{\varepsilon}{t} = \varepsilon.$$

证明完毕。 □

推论 1. 设 G 是一个图，$w : E \to Q^+$ 是一个取值于 $w_1 < w_2 < ... < w_t$ 的权重函数。假设

$$w_2 - w_1 \leq \frac{\varepsilon}{t} \cdot w_1.$$

然后，考虑一个图相同的新实例，其边权重函数为 w'，这与 w 相同，只是 w-权重 w_1 的边现在具有 w'-权重w_2。那么，如果 M 是 G 的一个匹配，其中

$$w'(M) \geq (1-\theta) \cdot OPT',$$

其中 $\theta = \frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon$，则

$$w(M) \geq (1-\varepsilon) \cdot OPT.$$

我们将频繁使用以下引理。

引理 2. 设 $(G, w, \varepsilon \in (0,1))$ 是一个最大权匹配实例。对于 $\tau > 1$，考虑一个实例 (G, w', θ)，其中每条权重为 $w(e)$ 的边 e，其

$$\tau^{i-1} < w(e) \leq \tau^i,$$

被舍入为 τ^i。那么，如果 M 是一个匹配，且

$$w'(M) \geq (1-\theta) \cdot OPT',$$

then

$$w(M) \geq (1-\varepsilon) \cdot OPT,$$

前提是

$$\frac{1}{\tau} \cdot (1-\theta) \geq 1-\varepsilon.$$

证明。对于 $j \geq 0$，令 B_j 为 G 中满足以下条件的边集

$$\tau^{j-1} < w(e) \leq \tau^j$$

（因此 $w'(e) = \tau^j$）。令 $\alpha_j = \tau^j$，并令 β_j为 B_j中最小的边权重。若假设 B_1，...，B_r是唯一的非空集合，则有：

$$\begin{aligned} w(M) &\geq \beta_1 \cdot |M \cap B_1| + ... + \beta_r \cdot |M \cap B_r| = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 \cdot |M \cap B_1| + ... + \frac{\beta_r}{\alpha_r} \cdot \alpha_r \cdot |M \cap B_r| \\ &\geq \frac{1}{\tau} \cdot (\alpha_1 \cdot |M \cap B_1| + ... + \alpha_r \cdot |M \cap B_r|) = \frac{1}{\tau} \cdot w'(M) \geq \frac{1}{\tau} \cdot (1-\theta) \cdot OPT' \\ &\geq (1-\varepsilon) \cdot OPT. \end{aligned}$$

这里我们使用了简单的不等式

$$OPT \leq OPT',$$

and

$$\alpha_j \leq \beta_j \cdot \tau$$

对于 $j = 1$，...，r。根据定义，每组中最大与最小边权重之比至多为τ。证明完毕。

□

下面这个观察将会很有帮助。

观察 1. 考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = -\frac{1}{\ln(1-x)}$$

在区间 (0, 1) 上。则存在一个正的 $A > 0$，使得

$$f(x) \leq A + \frac{1}{x}$$

对于每个 $x \in (0, 1)$。

证明。为确保完整性，我们给出证明。回顾一下，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\ln(\frac{1}{1-x})}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\ln(1-x)}=1.$$

因此，存在一个正的 $\delta>0$，使得对于任意 $x\in(0,\delta)$，我们有

$$f(x)<\frac{1}{x}+1.$$

另一方面，函数 $f(x)$ 在区间 $[\delta,1)$ 上连续，并且

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0.$$

因此， $f(x)$ 在 $[\delta,1)$ 上有某个 $A>0$ 界。因此，命题得证。证明完毕。

□

下一个引理将在得到论文的主要结果时发挥重要作用。全文中，我们假设 LargestCardinalityMatching 是一个在 CONGEST 中用 $poly(\log\ n,\frac{1}{\varepsilon})$ 轮次近似最大基数匹配问题的算法。需要指定其输入时，我们将写作 LargestCardinalityMatching(G,ε)。

引理 3. 对所有有理数 $\varepsilon\in(0,1)$，都存在一个 $poly(\log\ n,\frac{1}{\varepsilon},t,\ln\ w_t)$ 轮次的 $(1-\varepsilon)$-近似算法，可在 CONGEST 中求解所有边权重至多为 t 个（有理数）边权重的实例 $(G,w,\varepsilon>0)$ 的有理数最大权匹配问题

$$1\le w_1\le w_2\le ...\le w_t,$$

当 G 的所有顶点都知道这些数值 $\{w_1,w_2,...,w_t\}$，但可能不知道每条边对应的权重时。特别是，所有顶点都知道 t。

证明。考虑算法 2.1。

我们来证明，对于任意实例（G， ε， w（e） $\in\{w_1,w_2,...,w_t\}$），它总会返回一个匹配 M，且满足 w（M） $\ge$（$1-\varepsilon$）$\cdot OPT$。我们通过对 t 作归纳法来证明这一结论。显然，对于 $t=1$，结论成立。假设对于边权重各不相同的边至多有 $t-1$ 个的所有实例，结论均成立；现在考虑一个边权重各不相同的边有 t 个的实例。注意，在步骤 19 中，我们会增大当前最大权匹配实例中最小的边权重。因此，在某个时刻，我们会遇到一个不满足步骤 18 中条件的实例，这会在步骤 21 中减少 t——边权重各不相同的边的数量，因此可以应用归纳假设。由此，我们的算法会返回一个匹配 M，且满足

$$w(M)\ge(1-\varepsilon)\cdot OPT$$

1：输入：图 G，权重函数 w： E（G）$\rightarrow Q$，$\varepsilon \in$（0，1）$\cap Q^{+}$和 $t \in Z^{+}$。2：输出：图 G的一个匹配 M。3：假设：我们假设所有顶点 G都知道有理数 w_1、w_2、...、w_t。特别是，所有顶点都知道 t。请注意，我们不要求顶点知道每条边对应的权重。4：如果（$t=1$），则 5：返回 LargestCardinalityMatching（G，ε）。6：结束 if。7：设置：$z=w_2-w_1$。8：如果（$\frac{z}{w_1} \leq \frac{\varepsilon}{t}$），则 9：定义一个新的边权重函数 w'，它与 w 相同，但将所有权重为 w_1 的边的权重改为 w_2。设置：$\varepsilon:=\frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon$。10：返回 MaximumWeightedMatching（G，w'，ε，$t-1$）。11：否则 12：定义 $x=\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{t}}$ 和 $\varepsilon:=\frac{t-1}{t} \cdot \varepsilon$。13：图 G 中的每个顶点 v 都将与其相 incident 的边 e 的权重 w（e）舍入为 w'（e）$=x^j$，其中 $x^{j-1}<w$（e）$\leq x^j$。令 t' 为边权重各不相同的边数的上界。设置：$z:=w_2'-w_1'$。14：结束 if。15：如果（$z=0$），则 16：返回 LargestCardinalityMatching（G，ε）。17：结束 if。18：如果（$\frac{z}{w_1'}>\frac{\varepsilon}{t'}$），则 19：定义一个新的边权重函数 w''，它与 w' 相同，但将所有权重为 w_1' 的边的权重改为（$1+\frac{\varepsilon}{t'}$）$\cdot w_1'$。20：否则 21：定义一个新的边权重函数 w''，它与 w' 相同，但将所有权重为 w_1' 的边的权重改为 w_2'。令 $t':=t'-1$。22：结束 if。23：设置：$z:=w_2''-w_1''$，$\varepsilon:=\frac{t'-1}{t'} \cdot \varepsilon$。24：转到步骤 15。

算法 2.1：算法 最大权匹配(G, w, ε, t) .

根据归纳假设、引理 1、推论 1 和引理 2。

现在来求我们算法轮次数的上界。假设B 和 C 是常数，使得 LargestCardinalityMatching 的轮次数至多为

$$\leq B\left(\frac{\log n}{\varepsilon}\right)^{C}.$$

如果步骤 4 中的条件成立，那么轮次数的上界为

$$\leq 1+poly\left(\log n,\frac{1}{\varepsilon},t',\ln w_t\right)=1+poly\left(\log n,\frac{1}{\varepsilon},t-1,\ln w_t\right)$$

因为 $t'=t-1$。假设步骤 4 中的条件不成立。那么，经过步骤 12 和步骤 13 后，我们将得到一个权重为 $\{x,x^2,...,x^{t'}\}$ 的新实例，其中

$$x=\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{t}}=\frac{1}{1-\frac{\varepsilon'}{t'}}\leq 1+2\cdot\frac{\varepsilon}{t}=1+2\cdot\frac{\varepsilon'}{t-1},$$

因为 $t\geq 2$,

$$x^{t'-1}<w_t\leq x^{t'},$$

and

$$\varepsilon'=\frac{t-1}{t}\cdot\varepsilon.$$

Then

$$t'<1+\log_x w_t=1+\frac{\ln w_t}{\ln x}\leq 1+\left(A+\frac{t}{\varepsilon}\right)\cdot\ln w_t$$

根据观察 1。

现在请注意，由于 x 的定义中包含不等式，在步骤 15、步骤 18 和步骤 19 中，经过至多两轮后，算法将到达步骤 21，并将不同边权重的数量减少一。此外，由于相邻两个边权重之间的比值为 x，在步骤 15、步骤 18 和步骤 19 中，经过至多两轮后，算法将再次到达步骤 21，并将边权重的数量减少。因此，对于当前的 ε ，在这些轮次中，它会按照以下方案进行跳跃:

$$\varepsilon\to\frac{\varepsilon}{\frac{t'}{t'-1}}\to\frac{\varepsilon}{\left(\frac{t'}{t'-1}\right)^2}=\varepsilon\cdot\left(\frac{t'-1}{t'}\right)^2.$$

因此

$$\varepsilon'\geq\left(\frac{t'-1}{t'}\right)^2\cdot\varepsilon.$$

因此，经过至多 $2t'$ 轮次后，我们将到达步骤 16，此时将应用最大基数

匹配算法

$$\varepsilon_{unweighted} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t'-2}{t'-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{t'-1}{t'}\right)^2 \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{t'^2}.$$

因此，若我们有 t 种不同的边权重，就可以断定轮次最多为 t

$$\leq 2 \cdot t + B \cdot \left(\frac{\log n}{\varepsilon_{unweighted}}\right)^C$$

轮次。这里，$\varepsilon_{unweighted}$ 是 ε 的最后一个值，算法在此值下调用 LargestCardinalityMatching。我们有

$$\varepsilon_{unweighted} \geq \left(\frac{1}{t'}\right)^2 \cdot \varepsilon.$$

因此

$$\frac{1}{\varepsilon_{unweighted}} \leq \frac{t'^2}{\varepsilon}.$$

因此，轮次数的上界为

$$\leq 2t + B \cdot \left(\frac{\log n}{\varepsilon_{unweighted}}\right)^C \leq 2t + B \cdot \left(\frac{\log n}{\varepsilon} \cdot t'^2\right)^C = poly\left(\log n, \frac{1}{\varepsilon}, t, \ln w_t\right).$$

证明完毕。 □

3. 主要结果

本节中，我们给出论文的主要结果。

定理 1. 对所有 $\varepsilon \in (0, 1)$，只要最大基数匹配问题存在类似的算法，就存在一个用于 CONGEST 中最大权匹配的 $poly(\log n, \frac{1}{\varepsilon})$ 轮次、$(1-\varepsilon)$-近似算法。

证明. 考虑算法 3.1。

1: 输入：一个图 G，包含 n 个顶点；一个边权函数 $w : E(G) \to Q^+$；以及一个有理数 $\varepsilon \in (0, 1)$。2: 输出：该图 G的一个匹配 M。3:定义：$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2}$, $\tau := \frac{1}{1-\varepsilon_1} = \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$。4: 每个顶点 v 将与其相 incident 的边 e 的权重 $w(e)$ 四舍五入到最接近的 τ 的幂。也就是说，如果 $\tau^{j-1} < w(e) \leq \tau^j$，则 v将 e 的新边权重定义为 $w'(e) = \tau^j$。5: 返回 MaxWeightedMatching$(G, w', \varepsilon_1, r)$。

算法 3.1：主算法 MaxWeightedMatchingMain(G, w, ε)。

现在我们来分析该算法。首先，从正确性开始。注意，步骤 3 和步骤 4 中描述的操作可以在 CONGEST 中轻松完成，因为每个顶点都能在一轮内对与其相邻的一条边的边权重进行取整。接下来，虽然 G 中并非每个顶点都知道每条边的 w-权重，但经过这一步后，每个顶点都知道 τ 和 r，因此也就知道 w' 中所有可能的边权重。由于所有顶点都知道 W，因此所有顶点都可以计算出 w' 中不同边权重数量的上界 r。于是，我们主算法的正确性可直接由引理 2 和引理 3 得出。

现在，我们来讨论轮次数的上界。注意，轮次数至多为

$$\leq 1 + poly(\log n, \frac{1}{\varepsilon}, r, \ln w_r),$$

其中， r 是新实例中不同边权重的数量， w_r 是 w'中的最大边权重。我们有

$$\tau^{r-1} < W \leq \tau^r = w_r.$$

因此

$$r < 1 + \log_\tau W = 1 + \frac{\ln W}{\ln \tau} \leq 1 + (\ln B + C \ln n) \cdot \left(A + \frac{2}{\varepsilon}\right) = poly' \left(\log n, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

and

$$\ln w_r = r \cdot \ln \tau = r \cdot \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}\right) \leq poly'' \left(\log n, \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

根据观察 1。因此，我们立即得到轮次数的上界为 $poly'''$ (log $n, \frac{1}{\varepsilon}$)。定理得证。

□

在 [11] 中，提出了以下结果：

定理 2。（*[11]*）对于所有 $\varepsilon \in (0, 1)$，都存在一个 $poly$(log $n, \frac{1}{\varepsilon}$)轮的（$1-\varepsilon$）近似算法，用于求解 CONGEST 中的最大基数匹配问题。

结合定理 1，可以推知，在 CONGEST 模型中，存在一个用于最大权匹配问题的 $poly'$ (log $n, \frac{1}{\varepsilon}$) 轮 $(1 - \varepsilon)$-近似算法。

4. 在 CONGEST 中用常数轮实现我们的算法

本节将说明，在 CONGEST 模型中，我们可以用常数轮（实际上是四轮）将最大权匹配归约为最大基数匹配。

核心思路如下。在第 1 轮，每个顶点 u of G 都会将自己的标签/标识符发送给邻接顶点。这样，每个顶点都能获知所有与其相邻的顶点的标签。这只需一轮；之后，所有顶点一致认为，任何边 $e = uv$ 的权重都会改变标签最小的顶点。

在第 2 轮中，每个顶点都可以执行 MaxWeight-edMatchingMain 的步骤 4 所需的局部舍入。请注意，在此步骤之后，参数 ($\tau_1 = \tau$、 $t_1 = t$、 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \in (0, 1\,2)$)

可以假定图中的所有顶点都已知晓。这是因为每个顶点都知道 ε 和 W—— G 中最大的边权重。

在第3轮中，每个顶点都可以执行最大权匹配步骤 13 所需的局部舍入。注意，在这一步之后，可以假设图中所有顶点都知道参数 ($\tau_2 = x, t_2 = t', \varepsilon_2 = \varepsilon' \in$ (0,1))。这一轮之后，最大权匹配就变成了一个简单的 FOR循环，每个顶点都在本地独立计算最大基数匹配实例中的最终近似参数。注意，顶点只需计算 ε_{final}，无需进行信息交换，除了第 1 轮中标签的信息交换之外。

备注：注意，由于顶点在第 1 轮之后不再交换信息，因此边 e with $w(e) > W$ 是否存在这一事实，对于各顶点而言在本地是相同的（从顶点的角度来看）。因此，如果我们有 t_1（或 t_2）的上界，不失一般性，可以假设 t_1（或 t_2）与该上界相同。即使某个顶点最初并不与权重为此值的边相邻，每个顶点也会继续执行其 FOR循环，直到达到这一参数。

最后，我们想讨论在算法中表示有理数时的以下问题。由于我们假设有理数表示为一对由 $poly(n)$ 有界的整数，因此必须确保算法中不会出现违反这一约束的有理数。请注意，在我们对常数轮次算法的描述中，顶点之间不会交换任何有理数。因此，所有这些数都由某个顶点计算得到，并且不会参与其他 CONGEST算法，除了$\varepsilon_{unweighted}$ 这一部分属于 [11]的算法。不过，我们可以通过简单地假设 $\varepsilon_{unweighted}$ 的实际值为 $\frac{1}{2^k}$ 来轻松解决这个问题，其中 $k \in Z^+$ 和

$$\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon_{unweighted} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

关于 $\varepsilon_{unweighted}$ 的定义，请参见引理 3 证明的结尾。

致谢

作者谨此感谢波士顿学院、其计算机科学系以及 Hsin-Hao Su博士的热情款待。

参考文献

[1] M. Ahmadi、F. Kuhn、R. Oshman，《CONGEST模型中的分布式近似最大匹配》，载于第32届国际分布式计算研讨会（DISC 2018），文章编号6；第6:1–6:17页，2018年。[2] M. Ahmadi、F. Kuhn，《CONGEST中的分布式最大匹配验证》，载于第34届国际分布式计算研讨会（DISC），第37:1–37:18页，2020年。[3] K. Censor-Hillel，《分布式子图查找：进展与挑战》，arXiv，2022年。[4] M. Dinitz、M.M. Halld´orsson、C. Newport，《最小度生成树的分布式算法》，arXiv，2018年。[5] Drake、D.E.、Hougardy、S.，《加权匹配问题的简单近似算法》，《信息处理快报》85，211–213（2003）。

[6] R. Duan、H. He、T. Zhang, 《近线性时间近似最小度生成树算法》, arxiv, 2020年。[7] R. Duan、S. Pettie, 《最大权匹配的线性时间近似算法》, 《美国计算机学会学报》61卷第1期, 文章编号1（2014年1月）, 共23页。[8] J. Edmonds, 《路径、树与花》, 《加拿大数学杂志》17, 1965年, 449–467页。[9] J. Edmonds, 《最大匹配与具有0-1顶点的多面体》, 《美国国家标准局研究杂志B辑》69B, 1965年, 125–130页。[10] S. Faour、M. Fuchs、F. Kuhn, 《加权顶点覆盖与匹配的分布式CONGEST近似算法》, arxiv, 2021年。[11] M. Fischer、S. Mitrovi´c、J. Uitto, 《半流式模型及其他模型中使用 $poly(1/\varepsilon)$次遍历的确定性$(1+\varepsilon)$近似最大匹配》, arXiv:2106.04179v5, 2021年。[12] M. Fischer、M.M. Halld´orsson、Y. Maus, 《快速分布式布鲁克斯定理》, arXiv, 2022年。[13] M. F¨urer、B. Raghavachari, 《将最小度斯坦纳树近似到距最优值不超过1》, 《算法杂志》17(3):409–423, 1994年。[14] M. Ghaffari、J. Portmann, 《利用小消息改进网络分解及其在极大独立集、邻域覆盖等问题中的应用》, 2019年国际分布式计算研讨会（DISC）。[15] M.M. Halld´orsson、Y. Maus、A. Nolin, 《快速分布式顶点拆分及其应用》, arxiv, 2022年。[16] V. King、A. Thomo、Q. Yong, 《次线性时间内计算$(1+\varepsilon)$近似退化度》, arxiv, 2022年。[17] N. Kitamura、T. Izumi, 《精确最大匹配的次二次时间分布式算法》, arxiv, 2021年。[18] Sh. Kutten、D. Peleg, 《快速分布式构造小型k-支配集及其应用》, 《算法杂志》28, 40–66, 1998年。[19] Z. Lotker、B. Patt-Shamir、S. Pettie, 《改进的分布式近似匹配》, 《美国计算机学会学报》62卷第5期, 文章编号38（2015年10月）, 共17页。[20] H.-H. Su、Sh.-E. Huang, 《CONGEST模型中的最大权匹配》, 预印本, 2022年。