双曲守恒律的高阶自适应多分辨率小波迎风格式

Bing Yang、Jizeng Wang*、Xiaojing Liu、Youhe Zhou

西部灾害与环境力学重点实验室（兰州大学），教育部；兰州大学土木工程与力学学院，甘肃兰州 730000，中国

摘要：本文建立了一套用于求解双曲守恒律的高阶自适应多分辨率小波配置迎风格式。构造了一组具有插值性质的非对称小波基，以实现迎风性质并处理双曲型问题中的非线性。设计了一种基于小波理论中多分辨率分析的自适应算法，用于捕捉移动激波并识别新的局部陡峭区域。基于勒贝格微分定理，提出了一种积分平均重构方法，以抑制吉布斯现象。所有这些数值技术使小波配置迎风格式能够为构建具有高阶精度的优良自适应小波迎风方法提供一般框架。通过若干一维双曲问题的基准测试，验证了本文小波格式的精度和效率。

关键词：高阶精度、小波迎风格式、自适应多分辨率算法、双曲守恒律

1 引言

由双曲守恒律支配的问题通常包含陡梯度区域，甚至间断，例如激波和接触间断，这给相应数值格式的设计带来了核心挑战。此外，这类问题的解往往具有相当复杂的结构，其中包括涡旋和声波等光滑成分。传统的低阶数值方法，如一阶 Godunov 格式 [1] 和 Roe 格式[2]，，能够捕捉间断而不产生伪振荡。然而，它们往往会过度抹平接触间断，并在解的光滑区域产生相对较大的数值耗散。因此，为了在长时间模拟中准确识别复杂的光滑结构，需要大量节点，效率相当低。

高阶数值格式能够以少得多的自由度实现所需的分辨率和更高的精度 [3]，因此在计算流体力学中更具吸引力。过去几十年来，研究人员针对双曲守恒律探索了多种高阶数值方法，因为这类方法在提升效率方面具有更大的潜力。这些格式包括有限差分法

* 通讯作者。电子邮件：jzwang@lzu.edu.cn

（FDM）、有限体积法（FVM）、有限元法（FEM）和无网格方法。由于简单且效率高，FDM 适用于规则几何上的结构网格问题。在复杂几何上的非结构网格中，FVM 和 FEM 因能够灵活适用于任意网格而更为常用。

本质无振荡（ENO）格式最初由 Harten等人 [4]在有限体积法框架下提出，随后由 Shu 和 Osher [5]，在有限差分法框架下发展。这些格式在光滑区域获得高阶精度，并在间断处实现尖锐过渡且不产生伪振荡方面取得了根本性进展。ENO 格式从多个候选模板中选取最光滑的一个，以高阶精度近似单元边界处的通量并避免伪振荡，但这会导致效率低下，并使某些函数的精度降低。Liu 等人 [6] 在有限体积法框架下提出的加权本质无振荡（WENO）格式，在保持 ENO 格式稳健性和高阶精度的同时，合理地弥补了其不足。Jiang 和 Shu [7] 将这一思想扩展到有限差分法，并提出了 WENO 格式的高效实现，在高阶精度和高效率方面取得了显著成功。迄今为止，ENO 和 WENO 格式已应用于许多物理领域，例如湍流 [8], 、超声速流和高超声速流 [9], 、天体物理流、气象与气候科学 [10], 以及计算生物学 [11]。

另一类颇具吸引力的高阶方法是紧致格式，其采用局部化数据结构，因此并行计算效率极高。紧致格式的主要例子包括多矩约束有限体积（MCV）方法、谱体积（SV）方法和间断伽辽金（DG）有限元法。Ii 和 Xiao [12] 提出的 MCV 格式在单个网格单元内等间距点处定义点值，并利用施加于不同类型矩上的一组约束条件来实现所需的高阶精度。Wang 等人 [13] 通过将每个基本体积划分为若干小控制体，并利用这些控制体的单元平均数据，在基本体积内重构高阶近似解，从而设计出 SV 格式。Cockburn 和 Shu [14-16] 提出了用于时间演化问题的有限元框架下的 DG 格式：在单个单元中，利用传统的伽辽金方法将偏微分方程转化为弱形式，并在多项式空间中寻求间断近似解。DG 方法借鉴经典有限差分法和有限体积法中的黎曼求解器，以获得单元边界处的数值通量 [17]。上述紧致格式都采用近似黎曼求解器来计算网格单元或单元边界处的通量；在求解双曲守恒律时，即使是在任意几何形状的非结构网格上，也能表现良好。然而，一旦激波出现在网格单元或单元内部，数值解仍会受到间断附近伪振荡的污染。为消除这些振荡，人们设计了大量附加技术，例如总变差有界（TVB）限制器 [12, 18] 和 WENO 限制器 [10, 19, 20]。

当流场中包含激波或尖锐层时，经典 Galerkin有限元法效果不佳 [21]。Hughes等人[22-24] 提出了带有额外间断捕捉项的流线迎风/Petrov-Galerkin（SUPG）格式，以推动有限元法在求解双曲型问题方面的发展。与采用黎曼求解器的间断伽辽金格式不同，SUPG 格式通过修改权函数来实现迎风性质：在权函数中加入一个额外项，该项由速度与权函数梯度的标量积定义 [22]。SUPG 格式促进了有限元法框架下其他格式的诞生，例如 Galerkin/最小二乘方法 [25] 和无网格局部 Petrov-Galerkin方法 [26]。

由双曲守恒律支配的流场中，多尺度光滑结构和间断往往同时出现。上述高阶格式通常构建于

均匀节点或网格单元上。因此，必须设置大量节点或网格单元，才能准确检测并捕捉不同尺度，这样做并不经济。在局部陡峭区域采用精细分辨率、其他区域采用较粗分辨率的自适应算法，有助于在降低计算成本的同时实现高精度。受此目标启发，人们开发并应用了大量自适应方法来求解偏微分方程，例如自适应网格细化[27], 有限元方法 [28, 29], 和自适应小波方法 [30-35]。传统自适应方法通常采用后验或启发式方法作为控制网格细化的判据。对于双曲型和抛物型问题，这种方法成本会相当高，因为每个时间步都需要经过迭代过程，确保特征波位于细化区域内 [36]。

小波理论中的多分辨率分析为捕捉函数在时频域中的局部特征提供了一种极为有效且通用的方法。此外，许多基于小波的数值方法已用于求解不同类型的偏微分方程 [37, 38]。然而，专门针对双曲型偏微分方程的研究相对较少，可分为两类。第一类仅将小波多分辨率分析嵌入传统高阶格式中，例如间断伽辽金格式 [39], 、有限差分WENO [40], 以及带人工黏性的有限差分法 [35]。这类混合方法的主要思路是检测局部陡峭结构附近的问题节点或网格单元，并依据小波系数在这些问题节点或网格单元处实施自适应处理或重构过程。另一类称为纯小波数值方法，它将小波作为一组基来离散偏微分方程。Juan 和 Gray [41] 首次采用均匀节点分布下的经典小波伽辽金格式求解双曲方程，并发现伪振荡会从激波处向更远处传播，导致数值不稳定性；其他经典伽辽金格式也存在这一问题。近期，Pereira 等人 [42] 提出了一种动态小波伽辽金格式，该格式借助非光滑投影算子引入的能量耗散，成功克服了上述缺陷。他们的工作为利用自适应伽辽金离散研究非线性双曲守恒律开辟了新的方向。此外，Minbashian 等人 [43] 开发了一种用于双曲守恒律的自适应小波SUPG方法，并采用基于最小化形式的去噪技术进行后处理，以减少吉布斯振荡。与小波伽辽金方法相比，配置点方法效率更高。基于对称小波基的自适应小波配置方法已成功用于求解抛物型问题 [44-46]。然而，尚无研究尝试将自适应小波配置法用于双曲型问题。双曲型偏微分方程的基本理论表明，求解双曲型问题时，一个自然且基本的思路是设计迎风格式。迎风格式引入适当的隐式数值黏性，以确保数值解稳定地收敛到熵解 [47]。受此启发，本文提出一种用于双曲守恒律的高阶自适应多分辨率小波配置点迎风格式，结合了高阶格式和自适应算法的优点。

本文其余部分安排如下。第2节介绍小波逼近理论、适用于均匀与自适应节点分布的小波配置迎风格式，以及振荡限制器。第3节基于所提出的小波配置迎风格式，对一维线性标量方程、非线性无黏 Burgers 方程和 Euler 方程组进行数值实验。第4节给出主要结论。

2 基础理论与算法

首先考虑一维标量守恒律，以此构造小波迎风格式：

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{2.1}$$

在介绍小波迎风格式之前，先阐述作为预备知识的小波逼近理论。然后详细讨论这些格式的基本思想和公式。

2.1 小波逼近理论

2.1.1 预备知识

希尔伯特空间 $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ 是满足以下条件的平方可积函数 的集合，其中 $\mathbf{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}$ [48]的任意开子集。该空间自然地配备了内积

$$(f,g) := \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \ \text{for all } f,g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}). \tag{2.2}$$

相应的 $\mathrm{L}^2(\mathbf{\Omega})$ 范数定义为

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad \text{for all } f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega}). \tag{2.3}$$

$\mathrm{L}^\infty(\mathbf{\Omega})$ 范数也定义为

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}\{f(x)\}. \tag{2.4}$$

对于任意整数 $\mathrm{m} \geq 1$，在 $\mathbf{\Omega}$ 上 m 次连续可微的所有函数所构成的空间记为 $\mathrm{C}^m(\mathbf{\Omega})$。

为了刻画函数的奇异结构，利普希茨指数是一个很好的选择，它能够对 $\mathbf{\Omega}$ 上的点态或一致正则性进行度量。若函数 f 满足以下条件，则称其在点 x 处是利普希茨 α

$$|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{K}|x-y|^\alpha \qquad \text{for } x \in \mathbf{\Omega}, \text{any } y \in (x-\delta, x+\delta), \tag{2.5}$$

其中 K 是一个依赖于点 x 的常数，而 $\delta > 0$ 的量级较小 [49]。本文主要研究定义在 R 上的小波变换，以及 $\mathrm{L}^2(\mathbf{\Omega})\cap\mathrm{C}^m(\mathbf{\Omega})$ 中的函数。

现在我们转向小波的核心理论，首先定义双正交多分辨率分析。双正交多分辨率分析由 $\mathbf{L}^2$ 的两个闭子空间对偶序列组成，记为 和 ，它们满足以下关系：

V_J $\tilde{V}_J$

$$\begin{aligned} &\cdots V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_J \subset V_{J+1} \subset \cdots, \\ &\cdots \tilde{V}_{-1} \subset \tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \cdots \subset \tilde{V}_J \subset \tilde{V}_{J+1} \subset \cdots, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\overline{\bigcup_{J\in\mathbf{Z}} V_J} = \overline{\bigcup_{J\in\mathbf{Z}} \tilde{V}_J} = \mathbf{L}^2, \tag{2.7}$$

$$\overline{\bigcap_{J\in\mathbf{Z}} V_J} = \overline{\bigcap_{J\in\mathbf{Z}} \tilde{V}_J} = \{0\}, \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
&f \in V_J \Leftrightarrow f\left(2^{-J}\cdot\right)\in V_0,\\
&f \in \tilde{V}_J \Leftrightarrow f\left(2^{-J}\cdot\right)\in \tilde{V}_0,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&f \in V_0 \Leftrightarrow f\left(\cdot-k\right)\in V_0,\\
&f \in \tilde{V}_0 \Leftrightarrow f\left(\cdot-k\right)\in \tilde{V}_0,
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

其中 J 表示分辨率层级。通常，两个不同的辅助函数 和 分别称为尺度函数(及其对应的对偶尺度函数，并满足

$$
\begin{aligned}
&\left\{\varphi\left(\cdot-k\right)\right\}_k \text{ is a Riesz basis of } V_0,\\
&\left\{\tilde{\varphi}\left(\cdot-k\right)\right\}_k \text{ is a Riesz basis of } \tilde{V}_0,\\
&\left(\varphi\left(\cdot-l\right),\tilde{\varphi}\left(\cdot-k\right)\right)=\delta_{l,k}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

滤波器 尺度函数的系数可根据细化关系确定 on

$$
\begin{aligned}
&\varphi\left(x\right)=\sum_k h_k\varphi\left(2x-k\right),\\
&\tilde{\varphi}\left(x\right)=\sum_k \tilde{h}_k\tilde{\varphi}\left(2x-k\right).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

第 J 层的尺度函数可定义为

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{J,k}\left(x\right)=2^{J/2}\varphi\left(2^J x-k\right),\\
&\tilde{\varphi}_{J,k}\left(x\right)=2^{J/2}\tilde{\varphi}\left(2^J x-k\right).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

根据上述尺度函数，小波定义为

$$
\begin{aligned}
&\psi\left(x\right)=\sum_k g_k\varphi\left(2x-k\right),\\
&\tilde{\psi}\left(x\right)=\sum_k \tilde{g}_k\tilde{\varphi}\left(2x-k\right),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&g_k=\left(-1\right)^k\tilde{h}_{1-k},\\
&\tilde{g}_k=\left(-1\right)^k h_{1-k}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

类似地，J 层的小波可表示为

$$
\begin{aligned}
&\psi_{J,k}\left(x\right)=2^{J/2}\psi\left(2^J x-k\right),\\
&\tilde{\psi}_{J,k}\left(x\right)=2^{J/2}\tilde{\psi}\left(2^J x-k\right).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

由和张成的空间分别记为和。小波空间表示两个连续近似之间的差异，和，即

$$
\begin{aligned}
V_{J+1} &= V_J \oplus W_J, \\
\tilde{V}_{J+1} &= \tilde{V}_J \oplus \tilde{W}_J.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

所有 $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ 中的函数都可以通过尺度函数任意精确地逼近，因为和在 $\mathbf{L}^2$中嵌套且稠密。随后，存在一个投影算子，使得对每个 f 属于 $\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$当 J趋于无穷时趋于 0。接下来，在双正交框架下定义投影为

$$
P_J f = \sum_k \left(f, \tilde{\varphi}_{J,k} \right) \varphi_{J,k}. \tag{2.18}
$$

给定，也可以写成如下多分辨率分解形式：

$$
P_J f = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}, \tag{2.19}
$$

其中，

2.1.2 小波构造

至此，已介绍了多分辨率分析以及小波空间中的函数展开。接下来将介绍如何构造适用于特定应用的理想小波。本文仅讨论属于第二代小波族的插值小波的构造。关于更一般的小波，详细的构造方法可参见参考文献 [49-52]。

由于我们关注数值计算与分析，“优良”小波的尺度函数应具有以下性质：

(1) 紧支撑：$\varphi(x)$ 仅在有限区间 $[N_L, N_R]$ 内非零，这对应于细分格式的局部性。

(2) 插值：$\varphi(x)$ 是插值函数，意味着 $\varphi(k) = \delta_{0,k}$，其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克δ函数。

(3) 多项式再现：尺度函数可以再现次数不超过 N – 1 的多项式。

(4) 光滑性：$\varphi(x) \in C^{\alpha}$，其中 $\alpha = \alpha(N)$。光滑性随 N [53]线性增加。

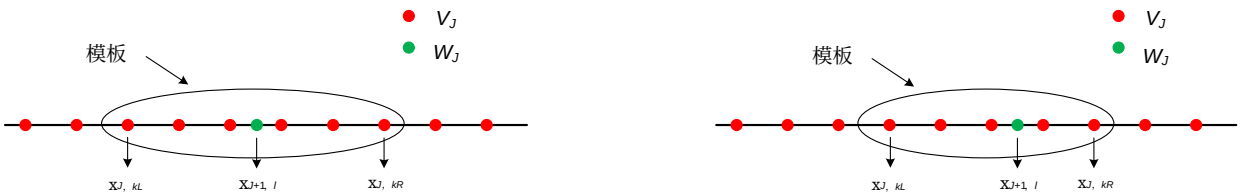
(5) 可细化性：细化关系如方程 (2.12) 所述。

对于一般应用，另一项重要性质是对称性，尤其是在信号处理和数据压缩中。构造满足上述条件的尺度函数有多种方法，例如 Daubechies尺度函数的自相关 [54, 55] 和插值法 [56]。自相关法只能用于构造对称尺度函数。后一种方法则提供了更大的灵活性，可用于构造对称和非对称尺度函数。接下来将讨论一种基于插值法构造小波的逐步过程：

(1) 选择一种小波类型 小波并确定光滑性参数 N：（a）对称小波，N∈ 偶数

是唯一的选择；(b) 非对称小波，N∈ 奇数或 N∈ 偶数均可选。

(2) 选择一个节点模板。指定在 V_J 中均匀分布的 N 个节点作为基底，并在 W_J 中选择一个节点。对称小波的模板是唯一的，而非对称小波则有多个候选模板。为直观地展示模板，以下示例分别选取 N = 6 和 N = 5：



(a) 对称小波的 N = 6 节点模板　　(b) 非对称小波的 N = 5 节点模板

图1. 模板示例

(3) 用阶数为 $(N-1)$ 的拉格朗日插值多项式进行近似，并计算滤波器系数。可推导出以下关系：

$$\varphi_{J,k}\left(x_{J,k_1}\right)=\delta_{k,k_1},$$
$$\varphi_{J,k}\left(x_{J+1,l}\right)=\sum_{k_1=kL}^{kR}\varphi_{J,k}\left(x_{J,k_1}\right)L_{J,k_1}(x_{J+1,l}), \tag{2.20}$$

其中 且k。根据细化关系，

$$\varphi_{J,k}\left(x_{J+1,l}\right)=\sum_{l_1}h_{l_1}\varphi_{J+1,l_1}\left(x_{J+1,l}\right) \tag{2.21}$$

将 (2.21) 代入 (2.20)，当 l ∈ 为偶数时，$h_l=\delta_{0,l}$ 可以很容易地计算得到；当 l ∈ 为奇数时，则为

$$h_l=L_{J,k}(x_{J+1,l})=\prod_{\substack{i=kL\\ i\neq k}}^{kR}\frac{x_{J+1,l}-x_{J,i}}{x_{J,k}-x_{J,i}}. \tag{2.22}$$

对于给定参数 k，参数 kL 和 kR 会随 l 平移而变化。为更高效地计算系数，假设 J = 0 和 k = 0，可得

$$h_l=\prod_{\substack{i=kL\\ i\neq 0}}^{kR}\frac{l/2-i}{-i}. \tag{2.23}$$

(4) 使用 Wang [57] 和 Chen 等人 [58] 提出的算法计算尺度函数的导数和积分。回到细化关系并应用级联算法，即可得到任意细化分辨率层级的二进点处尺度函数及其导数和积分的值。

按照上述步骤，可以成功构造出所需的尺度函数。然后，需要确定对偶尺度函数。对于当前的插值方法，克罗内克δ函数为

自然选为对偶尺度函数 [56]:

$$\tilde{\varphi}_{J,k} = \delta\left(x - x_{J,k}\right). \tag{2.24}$$

接下来，采用 Donoho 提出的思想[54], , 由尺度函数构造小波函数:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi(2x-1), \\ \psi_{J,k}(x) &= \varphi\left(2^{J+1}x - (2k+1)\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

小波系数应通过 计算，但为简便起见，此处使用多分辨率分析计算小波系数:

$$d_{J,l} = c_{J+1,2l+1} - \sum_k h_{(2l+1)-2k} c_{J,k}. \tag{2.26}$$

2.1.3 有限区域上的函数逼近

函数的分解式（2.19）定义在整个实数轴 R 上。对于一般的实际情况，**Ω** 区域是有限的。因此，边界附近会出现新的问题[54, 55, 57]。我们在先前的研究中基于拉格朗日插值开发了一种边界延拓技术，以消除因区域[55]之外的信息缺失而引起的局部误差。第 J 层的修正逼近可写为

$$P_J f(x) = \sum_{k \in \mathbb{R}_J} f(x_k)\Phi_{J,k}(x), \tag{2.27}$$

其中，修改后的小波基为

$$\begin{aligned} \Phi_{J,k}(x) &= \varphi_{J,k}(x) + \sum_{n \in \bar{\Xi}_k} \Pi_k^n\left(x_n\right)\varphi_{J,n}(x) \\ &= \sum_{n \in \Xi_k} \Pi_k^n\left(x_n\right)\varphi_{J,n}(x) \qquad , \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\Pi_k^n\left(x_n\right) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{\eta} \frac{x_n - \tilde{x}_i}{\tilde{x}_k - \tilde{x}_i}, \tag{2.29}$$

其中，$\bar{\Xi}_k$是序号集合，n 表示外部点 x_n 使得 $f(x_n)$ 恰好是所有拉格朗日插值。在方程（2.29）中，集合 $\{\ , i=1, 2,\ldots,\eta\}$ 是在外部点 **Ω** x_n 处选取的拉格朗日插值节点集合，且 的系数为。修改后的小波基 保留了插值性质，因为原尺度函数和拉格朗日插值多项式具有这些特性。接下来将介绍一系列未经证明的小波近似定理；这些定理可使用参考文献中提出的方法予以证明[55, 59]。

以下关系：

$$\left\| P_{J_0}^{J_{\max}} f - f \right\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C_{4,L} 2^{-J_0 \lambda}, \tag{2.37}$$

$$\left\| P_{J_0}^{J_{\max}} f - f \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \le C_{4,\infty} 2^{-J_0 \lambda}. \tag{2.38}$$

备注：(1) 多分辨率近似 (2.36) 中使用的所有函数值 均满足相同的关系式 。 (2) 边界延拓在基本层级 J_0, 和$\eta = N$ 被建议作为合适的选择。(3) 高分辨率层级上的附加节点可以完全随机。(4) 定理 2.4 表明，附加节点绝不会降低基于节点均匀分布所获得的基本近似精度。

2.2 均匀节点分布下的小波配置迎风格式

本节介绍如何构造具有均匀节点分布的小波配置迎风格式，记为 WCU。在求解双曲守恒系统 [7, 12-14, 60-62] 时，有限差分法、有限体积法和间断伽辽金格式中的迎风格式概念，对于设计新的数值格式至关重要。这里不采用伽辽金方法，而是首次尝试构造纯小波配置迎风格式，以求解双曲守恒律。

非对称小波可能具有迎风性质。根据小波近似的微分算子，在离散点处计算函数的导数时，所得导数可表示为若干函数值的线性组合：

$$u'(x_{J,l}) = \sum_{k \in \mathbb{R}_J} u_{J,k} \Phi'_{J,k}(x_{J,l}), \tag{2.39}$$

其中 是尺度函数在处的导数。由于尺度函数具有紧支撑，式 (2.39) 中的求和仅包含有限项。受经典数值方法中迎风格式的启发，可以通过选择合适的非对称小波来建立类似的迎风格式。小波的非对称性是指尺度函数的导数在零点两侧不相同，呈现出偏向性。构造高阶稳定格式的关键在于构造一对“良好”的非对称小波。

迎风性质由所选点在 W_J 中的位置决定。如果 左侧模板的节点数多于右侧，则该小波沿正方向迎风；否则，沿负方向迎风。可以构造一对完全镜像对称的小波，分别用于构造正向和负向迎风格式，这与有限差分法中的迎风格式类似。下面将展示如何针对给定参数 N 构造一对小波。

图2展示了 V_0 中的一个模板。模板中的节点相对于零点对称。当 $x_{1,1}$ 位于 0 和 1 之间时，可得到一个具有正向迎风性质的轻微非对称小波。通过将 W_0 中的点关于零点镜像，可以轻松构造出相应的负迎风小波。采用这一策略，滤波器系数也具有镜像对称性。这种方法确实提高了我们的效率，因为只需计算一组系数。这里，表1列出了非零滤波器系数，并给出了两对小波的尺度函数作为示例，如图所示

图3。

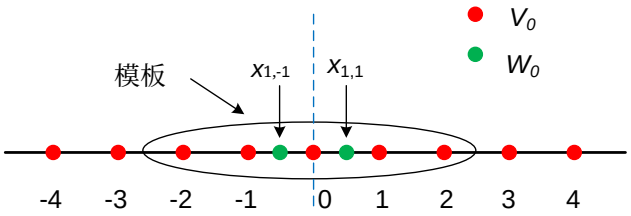
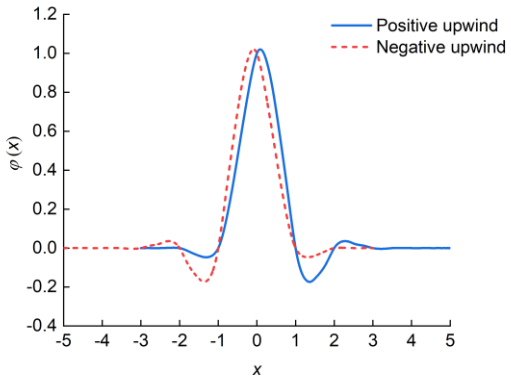


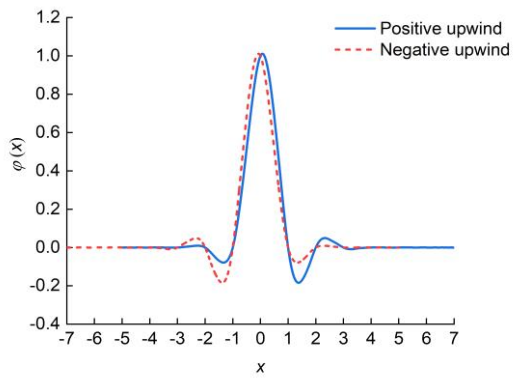
图2。两种非对称小波的模板

表1。几种小波的非零滤波器系数

N = 5		N = 7	
正向迎风	负向迎风	正向迎风	负向迎风
$h_{-3} = -0.0390625000$	$h_{-5} = 0.023437500$	$h_{-5} = 0.0068359375$	$h_{-7} = -0.0048828125$
$h_{-1} = 0.4687500000$	$h_{-3} = -0.1562500000$	$h_{-3} = -0.0683593750$	$h_{-5} = 0.0410156250$
$h_0 = 1.0000000000$	$h_{-1} = 0.7031250000$	$h_{-1} = 0.5126953125$	$h_{-3} = -0.1708984375$
$h_1 = 0.7031250000$	$h_0 = 1.0000000000$	$h_0 = 1.0000000000$	$h_{-1} = 0.6835937500$
$h_3 = -0.1562500000$	$h_1 = 0.4687500000$	$h_1 = 0.6835937500$	$h_0 = 1.0000000000$
$h_5 = 0.02343750000$	$h_3 = -0.0390625000$	$h_3 = -0.1708984375$	$h_1 = 0.5126953125$
		$h_5 = 0.0410156250$	$h_3 = -0.0683593750$
		$h_7 = -0.0048828125$	$h_5 = 0.0068359375$



(a) N=5 尺度函数



(b) N=7 尺度函数

图3. 两组小波的尺度函数

对于由双曲守恒律支配的问题，有限差分法建议采用守恒形式求解，如方程（2.1）所示。幸运的是，由于尺度函数具有精确插值性质，守恒方程中的非线性项可以轻松离散化，这使得可以执行以下算子 [63]:

$$f\left(u(x)\right)=\sum_{k\in\mathbb{R}_J} f\left(u_{J,k}\right)\Phi_{J,k}(x), \tag{2.40}$$

其中 f 满足关于 α 的一致 Lipschitz 条件，阶数为 u，$\alpha \geq 1$。 的分解系数 可以通过计算 的值而高效地求得。

回到方程（2.1）。考虑周期边界条件，并 ，在基本分辨率层级 J 上采用小波配置迎风格式进行空间离散，得到以下半离散系统：

$$\frac{\mathrm{d}u_J(x_l,t)}{\mathrm{d}t}+\sum_{k\in\mathbb{R}_J} f\left(u_J(x_k,t)\right)\Phi'_{+,J,k}(x_l)=0,\qquad k,l\in\Omega, \tag{2.41}$$

其中 表示上迎风小波的尺度函数。随后，可以采用一般方法求解上述常规偏微分方程。本文采用经典的显式四阶 Runge–Kutta 方法进行时间积分。在均匀节点的框架下，尺度函数的导数对于指定的分辨率层级 J是一系列不变的系数。这一结果表明，我们的格式是守恒的。

现在，我们将这些格式应用于一般通量，即可在全局或局部范围内分解为两部分的通量：

$$f(u)=f^{+}(u)+f^{-}(u), \tag{2.42}$$

其中和。由于我们的格式遵循迎风概念，因此进一步借鉴了有限差分法中用于实现 Euler 方程组空间离散的通量分裂技术。已有多种成功的分裂方法，例如 Steger-Warming通量分裂 [64],Lax–Friedrichs 通量分裂[7], 以及 Roe通量分裂[65]。这里选用全局 Lax–Friedrichs 通量分裂，其描述如下：

$$f^{\pm}(u)=\frac{1}{2}\left(f(u)\pm\alpha u\right), \tag{2.43}$$

其中，最大值取自 的整个相关范围。于是可得到一般的半离散系统：

$$\frac{\mathrm{d}u_J(x_l,t)}{\mathrm{d}t}+\sum_{k\in\mathbb{R}_J} f^{+}\left(u_J(x_k,t)\right)\Phi'_{+,J,k}(x_l)+\sum_{k\in\mathbb{R}_J} f^{-}\left(u_J(x_k,t)\right)\Phi'_{-,J,k}(x_l)=0,\ k,l\in\Omega, \tag{2.44}$$

其中是负迎风小波的尺度函数。要将该格式推广至一维欧拉系统，只需将由三个守恒变量构成的向量代入方程（2.44）。

基于上述分析，我们的小波配置迎风格式以守恒方式求解守恒形式方程。因此，我们的格式能够很好地求解双曲守恒律。

2.3 自适应多分辨率小波配置迎风格式

本节将详细说明所提出的小波配置迎风格式的实现方法。为简单起见，本文使用一维标量守恒律来阐述自适应多分辨率小波配置点迎风格式，简称 AMWCU。根据均匀节点上的一般半离散系统，可以得到自适应算法的一般半离散系统：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_J(x_l,t)}{\mathrm{d}t}&+\left(\sum_{k\in\mathbb{R}_{J_0}} f^+(u_{J_0}(x_k,t))\Phi'_{+,J,k}(x_l)+\sum_{J=J_0+1}^{J_{\max}}\sum_{k\in\mathbb{R}_J} d^+_{J,k}\Phi'_{+,J,k}(x_l)\right)\\&+\left(\sum_{k\in\mathbb{R}_{J_0}} f^-\left(u_{J_0}(x_k,t)\right)\Phi'_{-,J,k}(x_l)+\sum_{J=J_0+1}^{J_{\max}}\sum_{k\in\mathbb{R}_J} d^-_{J,k}\Phi'_{-,J,k}(x_l)\right)=0,\ k,l\in\Omega\end{aligned} \tag{2.45}$$

其中，和分别是与的高分辨率层级相关联的小波系数，以及分别对应正向和负向迎风小波。

利用小波分析求解偏微分方程，最吸引人的特点是能够根据小波系数评估解的局部正则性。自适应小波算法的核心思想是进行自适应离散化，自动执行局部节点加密，并获得待求变量的稀疏表示。回到函数（2.36）的多分辨率分解，只有小波系数 会被保留：

$$P_{J_0}^{J_{\max}}u(x)=\sum_{k\in\mathbb{R}_{J_0}} u(x_k)\Phi_{J,k}(x)+\sum_{\substack{J=J_0+1\\ |d_{J,k}|>\varepsilon}}^{J_{\max}}\sum_{k\in\mathbb{R}_J} d_{J,k}\Phi_{J,k}(x), \tag{2.46}$$

其中 ε 是一个数值较小的阈值参数，例如 10^{-5}。这里，将小波系数为 的节点称为问题节点。利用（2.46）对具有局部奇异性的函数进行精确近似已足够。然而，求解具有激波间断的双曲演化问题可能会遇到困难。为确保解在时间演化过程中得到充分近似，Liandrat 和 Tchamitchian [66] 提出了邻接区域的概念，其中包含在一个时间积分步内，当节点分布保持不变时，其系数已经显著或可能变得显著的小波。我们的节点自适应策略也基于这一思想。

对于一般的双曲守恒律，定义问题的区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 可分为两部分。第一部分的解足够光滑，其节点均处于分辨率层级 J_0；另一部分的解具有陡梯度，其节点处于高分辨率层级。激波可能出现在这样的光滑区域中，因此必须设计基于 J_0分辨率层级所提供信息来识别潜在问题节点的方法。因此，需要设计两种不同的自适应策略，即针对 J_0 的自适应节点生成（ANG-J_0）和针对 J 的自适应节点生成（ANG-J）。

首先，展示 ANG-J_0 的详细内容。为衡量解在光滑区域内的正则性，采用了 Jiang 和 Shu 提出的光滑度测量函数 [7]:

$$
\begin{aligned}
IS_{J_0,l} &= \frac{13}{12}\left(f_{J_0,l-1} - 2f_{J_0,l} + f_{J_0,l+1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(f_{J_0,l-1} - f_{J_0,l+1}\right)^2 \\
&= \left(f'\Delta x\right)^2\left(1 + O(\Delta x^2)\right) \qquad \text{for } \Delta x = 2^{-J_0},\ f' \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

可以看出，受空间步长 Δx 和函数的一阶导数影响。因此，应确定合适的参数 M_0，以检测低正则性区域的位置，尤其是间断处。如果，则将节点标记为问题节点。一旦识别出所有问题节点，就根据我们先前研究中提出的算法，在高分辨率层级插入一组节点 [67]，以提高局部逼近精度。采用合适参数的策略，会在问题节点的邻接区域添加足够多的节点，从而保证时间演化问题的精度。

接下来介绍 ANG-J 的构成要素。基于 Vasilyev 和 Paolucci 提出的方法[45]，，制定了一条规则，用于确定相邻节点是否位于问题节点的邻接区域内。假设是一个问题节点，若节点满足以下关系，则可将其定义为该节点的邻接区域中的节点：

$$
\left|J_1 - J\right| \le L, \left|x_{J_1,k} - x_{J,l}\right| \le K_w \cdot 2^{-J}, \tag{2.48}
$$

其中，L 为新增节点的最高分辨率层级与层级 J 之差，K_w为邻接区域的宽度。参数 L 和 K_w 分别决定了在 t_i时刻节点邻接区域内插入节点的总数及其位置。根据数值测试，对于大多数问题，建议取 L = 1 和 K_w = 2 。此外，从 t_i 到 t_{i+1}对半离散系统进行积分时，不修改节点分布。

介绍上述基本原理后，下面将详细说明动态过程的具体实现步骤。与均匀节点分布方案相比，这种自适应过程还需要执行额外任务，包括动态自适应节点生成以及通量的小波系数计算。动态自适应节点生成过程包括节点初始化和动态自适应。前者包括以下步骤：

(1) 确定一个能够描述所有……的守恒变量。对于一维欧拉系统，建议使用守恒变量 ρ 。

（2）选择适当的基本分辨率层级 J_0 和最高分辨率层级 J_{max}，为所有创建均匀节点，并在$x = a$、b处 添加两个节点，它们是 的Ω 端点，用于施加边界条件。

（3）检测初始条件中的局部结构，并基于 ANG-J 插入与高分辨率层级 J_0相关的节点。然后，删除重复节点和外部节点，得到新的节点分布 。

（4）重构守恒变量的值并进行时间积分，以得到。

然后，在每个时间步执行自适应节点生成：

（1）获取t_i （$i > 0$）处、具有计算节点分布的解的守恒变量，选择一个特征变量，并计算$\mathcal{N}^i$ 小波系数。

(2) 在 t_i 处的基本分辨率层级进行评估，并确定采用 ANG-J_0 在新的陡梯度区域中增加的节点总数。

(3) 将高分辨率层级 J ($J_0 < J < J_{\max}$) 的小波系数与指定的阈值参数 ε进行比较，并计算采用 ANG-J 的问题节点相邻区域中的节点总数。

(4) 根据 ANG-J_0 和 ANG-J 在 中插入新增节点，删除重复节点和外部节点，并获得更新后的节点分布 。

(5) 在 t_i 处重构守恒变量的值，并将所得半离散系统积分至$\mathcal{N}^{i+1}$时间步 t_{i+1}。如果 $t_{i+1} = t_{end}$，则求解完成。否则，重复执行 (1)–(5)。

现在我们提出一种快速、高效计算小波系数的方法。回顾传统的快速小波变换算法，[56], 正向变换过程按层级进行，并在每一层将系数从最高层级$J_{\max}$ 分解至基础层级J_0。当函数的所有信息均已知时，该算法表现良好。然而，在数值计算中，基于多分辨率分析计算小波系数时，需要通过小波近似来获取函数的一些未知值。我们此前的研究 [55] 指出，标准插值小波基函数具有如下性质：对于。这一关系表明，较高分辨率层级上的小波系数不会影响较低分辨率层级二进点处的函数值。基于这一结论，只需反转正向变换的分解方向，即从基础层级J_0 变换至最高层级$J_{\max}$。由此给出如下快速正向变换：

(1) 设置初始值：，对于 并令 J = J0 + 1。

(2) 选择节点 于 J，并计算 ，计算公式如下：

$$d_{J,l} = d_{J,l} - \sum_k h_{(2l+1)-2k} u_{J-1,k}. \tag{2.49}$$

如果节点集不包含 ，则通过小波近似计算。

(3) 将 J 与 $J_{\max}$ 进行比较。如果 $J = J_{\max}$，则过程结束；否则，令 $J = J + 1$ ，并重复步骤 (2)–(3)。

2.4 吉布斯现象抑制

使用一组光滑基函数逼近具有跳跃间断的函数时，间断附近总会出现数值振荡，这与傅里叶级数中的吉布斯现象类似 [68]。因此，基于小波逼近具有跳跃间断的函数时，吉布斯现象不可避免。因此，必须提出一种补救方法，以消除求解双曲守恒律时捕捉激波所产生的非物理伪振荡。

定理 2.5（勒贝格微分定理）[69] 若 f 在 R^{d} 上勒贝格可积，则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = f(x) \quad \text{for a.e. } x. \tag{2.50}$$

勒贝格微分定理指出，当包含 x 的球 B 的测度 m(B) 趋近于 0 时，函数在球 B 上的积分平均值趋于 f (x)。受这一理论及经典方法中的 TVB 限制器启发，提出了一种积分重构方法，以消除伪振荡。

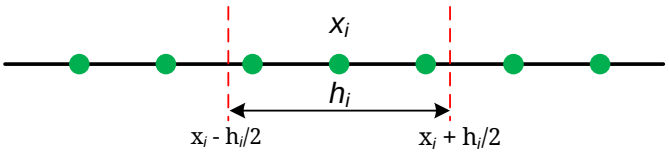


图4. 积分区间示意图

任取一个节点$x_i \in \Omega$，如图 4 所示，u 在区间上的积分平均值定义为 $\left[x_i - h_i/2,\ x_i + h_i/2\right]$，

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h_i}\int_{x_i-h_i/2}^{x_i+h_i/2} u(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.51}$$

其中，h_i 是积分区间的长度。通过泰勒展开，可得：

$$\bar{u}_i = u_i + O(h_i^2). \tag{2.52}$$

定义一个开关函数为

$$\tilde{m}(a_1) = \begin{cases} -a_1 & \text{if } |a_1| \le M h_i^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{2.53}$$

其中，M 是切换参数。然后，通过关系式重构 u_i

$$u_i = \bar{u}_i + \tilde{m}_1(\bar{u}_i - u_i). \tag{2.54}$$

可以看出，u_i 仅在的情况下才会被积分平均值修正。对于光滑区域，的量很小，u_i 因此保持高精度。积分的精度会显著影响重构过程。然而，如定理 2.3所述，积分的小波近似具有高阶精度，因此是计算积分的良好选择。

我们指出，h_i 是一个至关重要且依赖于问题的参数。如果h_i 过大，光滑区域内的精度可能会降低。然而，当h_i 过小时，振荡仍无法被成功消除。此外，h_i 应通过来确定，以确保积分精度。尚未解决的问题可分为两类。第一，初始条件包含间断，因此可以预先细化节点。第二，初始分布足够光滑，而解的奇异性会随时间演化而出现。对于前一种情况，$h_i = \text{值}^{\text{最大}}$ 适用于标量守恒律和欧拉系统（$J_{\max} = J_0$ 采用均匀节点算法）。对于后一种情况，确定适当的h_i 是

稍有困难。小波系数天然可用作间断指示器，因此可以通过将其值与预设参数进行比较来设计规则，以控制 h_i 的数量。下面给出一种合理的积分区间长度计算方法：

$$h_i=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\lfloor 0.5(J_{\max}+J_0)\rfloor}} & J_i>J_0, d_{J_i,i}\geq\varepsilon_0,\\ 0.5\left(\dfrac{1}{2^{\lfloor 0.5(J_{\max}+J_0)\rfloor}}+\dfrac{1}{2^{J_{\max}-1}}\right) & J_i>J_0, \varepsilon_1\leq d_{J_i,i}<\varepsilon_0,\\ \dfrac{1}{2^{J_{\max}-1}} & J_i>J_0, d_{J_i,i}<\varepsilon_1,\\ 0.5\left(\dfrac{1}{2^{\lfloor 0.5(J_{\max}+J_0)\rfloor}}+\dfrac{1}{2^{J_{\max}-1}}\right) & J_i=J_0, J_{i+1}>J_0,\\ \dfrac{1}{2^{J_{\max}-1}} & \text{else.}\end{cases} \tag{2.55}$$

对于 WCU 格式，$h_i=$ 值2^{-J} 对所有标量守恒律和欧拉系统都是合适的取值。然而，对于 AMWCU 格式，则必须根据上述分析采用不同的策略。为方便表述，TVBU 表示 WCU 格式的重构方法，而 TVBR 和 TVBC 则分别表示 AMWCU 格式用于两类问题的重构方法。

2.5 一些说明

我们结合高阶迎风格式、小波配置方法和自适应算法的优点，设计了本文的小波配置迎风格式。“迎风”特性通过隐式数值黏性稳定求解过程，并确保数值解正确收敛到物理解。数值测试表明，精度阶与预期一致。带有重构过程的自适应小波格式通过加密局部节点捕捉激波。因此，高阶自适应小波格式非常适合求解解中包含多尺度光滑结构和多个间断的双曲守恒律。此外，与伽辽金方法相比，自适应小波配置方法效率更高。其最显著的优势是，自适应小波分解能够逼近任意几何形状区域上定义的函数，这表明我们的格式可以轻松推广到二维或三维问题中的复杂区域。

3 数值实验

本节通过应用基于 N =5 和 N = 7 小波的不同格式，开展了若干基准实验。定义两种范数来评估数值误差，如下所示：

$$\|e\|_{l_\infty}=\max_k\left\{\left|u_k^e-u_k^n\right|\right\}, \tag{3.1}$$

$$\|e\|_{l_2}=\left(\sum_k\left|u_k^e-u_k^n\right|^2\Delta x\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

其中 是精确解， 是数值解。 u u_k^n

3.1 一维线性标量方程

对以下一维线性标量方程进行了数值算例：

$$u_t + a u_x = 0, \quad x \in [-1,1]. \tag{3.3}$$

3.1.1 精度验证

首先，通过网格加密测试验证所提出的方法在均匀节点分布下的精度阶数。给定一个光滑的初始条件：

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad \text{periodic.} \tag{3.4}$$

周期边界条件采用我们先前工作 [71] 中提出的周期函数延拓法处理。

在 t = 2时计算数值误差。选择足够小的时间步长，使误差主要由空间离散造成。表 2 展示了两种格式的数值误差和精度阶。如定理 2.2 所述，采用 N= 5 和 N = 7 小波的格式，其理论精度阶分别为四阶和六阶。四阶格式的精度阶符合预期，而数值结果表明，六阶格式的精度阶高于理论值。对于其他方法，例如多矩约束有限体积法 [12], WENO格式 [7], 以及谱（有限）体积法 [13], ，只有当网格数足够大时，才能达到预期的精度阶。即使采用粗得多的节点分布，我们的格式仍能保持一致的收敛率。

表 2. 一维线性标量方程的数值误差和精度阶数

方法	N_1	l_∞ 误差	l_∞ 阶数	l_2 误差	l_2 阶数
N = 5（4阶）	16	2.99E−3	—	3.17E−3	—
	32	1.84E−4	4.02	1.90E−4	4.05
	64	1.15E−5	4.01	1.16E−5	4.03
	128	7.15E−7	4.00	7.21E−7	4.01
	256	4.47E−8	4.00	4.49E−8	4.01
N = 7（六阶）	16	6.84E−5	—	7.05E−5	—
	32	1.02E−6	6.07	1.04E−6	6.08
	64	1.46E−8	6.12	1.48E−8	6.14
	128	1.71E−10	6.42	1.73E−10	6.42
	256	8.70E−13	7.61	8.75E−13	7.62

3.1.2 方波对流

为验证这些格式捕捉跳跃间断的能力，采用以下初始条件进行方波对流实验：

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & -0.4\le x\le 0.4,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}\qquad \text{周期性的。} \tag{3.5}$$

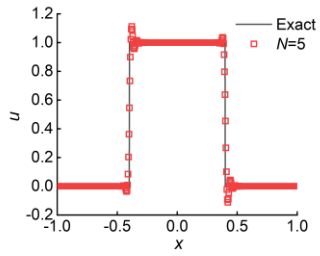
图5和图6分别给出了在分辨率层级 J = 8 下，采用 WCU 格式且未进行限制过程时，t = 2 和 t = 32 处的数值结果。对于 N = 5 和 N = 7 格式，伪振荡会污染跳跃间断附近的数值解。采用高阶小波迎风格式时，奇异点附近的振荡幅度较小，振荡区域也较窄。图6还表明，在求解含间断的线性标量问题且不进行限制时，我们的格式在长时间积分过程中保持稳定。

图7绘出了采用 TVBU 限制器、在不同均匀分辨率层级下 t = 2 处的数值结果。本测试中使用的参数 M 列于表3。伪振荡被有效消除，并且随着 J 增大，数值解逐渐收敛至精确解。因此，采用 TVBU 限制器的 WCU 格式能够捕捉间断，且不会出现明显的伪振荡。

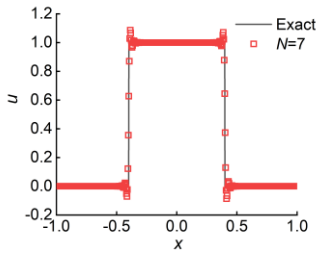
表3. 不同分辨率级别 J 下的参数 M_{max}

J_{max}	6	7	8	9	10	11	12	13
M	5	10	20	40	80	120	160	320

随后，采用带有 TVBR 限制器的 AMWCU 格式求解该问题，以作进一步验证。数值结果如图 8 所示。随着 J_{max} 增大，解保持无振荡，并趋近于精确解。为评估自适应方法的优势，我们将 Jiang 和 Shu [7] 提出的经典五阶有限差分 WENO 格式（WENO-5）在间断附近的数值结果与自适应算法进行比较，如图 9 所示。图 9(a) 和 (b) 表明，所提出的自适应小波算法使用的节点数少得多，却能捕捉到比 WENO-5 格式更陡峭的梯度。AMWCU 格式的节点数约为 WENO-5 格式节点数的 10%，展现出显著的数据压缩效果。以更高精度实现稀疏表示是所提出的自适应格式的主要优势之一，而采用积分重构的当前自适应格式能够非常高效地捕捉间断。

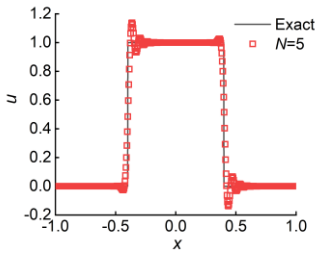


(a) N=5

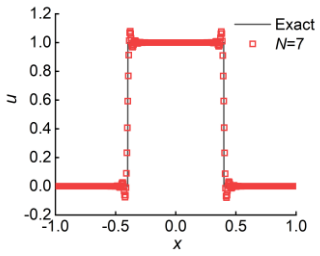


(b) N=7

图5. WCU 未加限制器时对方波的平流，t = 2s，J = 8

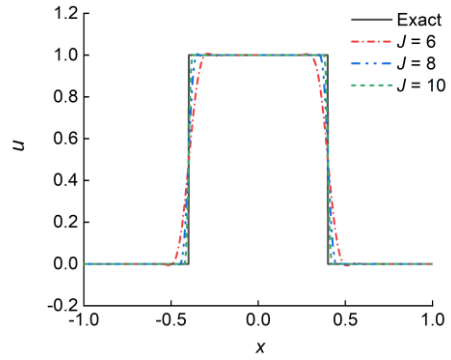


(a) N=5

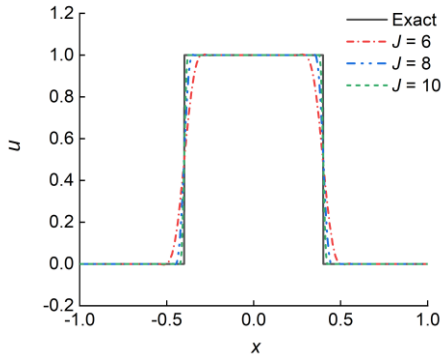


(b) N=7

图6. WCU 未加限制器时对方波的平流，t = 32s，J = 8

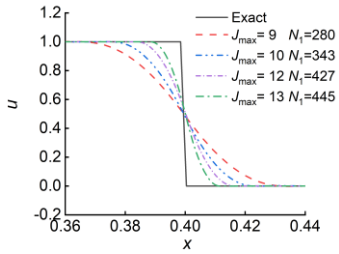


(a) N=5

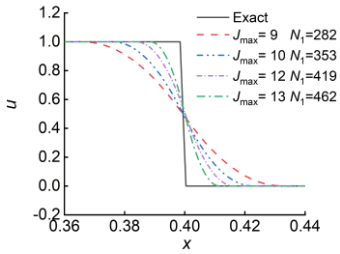


(b) N=7

图7. t = 2s 时 WCU 与 TVBU 数值解的比较

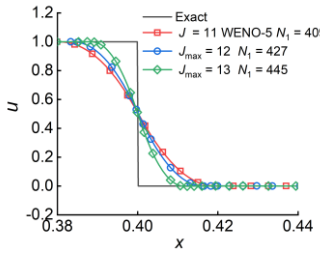


(a) N=5

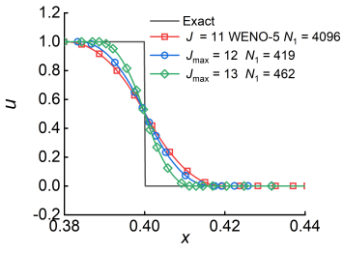


(b) N=7

图 8. 在 t = 2s（$J_0 = 6$）时，AMWCU 与 TVBR 数值解的比较



(a) N=5



（b）N=7

图 9. AMWCU、TVBR 与 WENO-5 解的比较（$J_0 = 6$）

3.1.3 Jiang 和 Shu 问题[7]

Jiang 和 Shu [7] 设计的算例用于研究小波格式识别光滑解和间断解的能力。初始条件包含如图所示的光滑但窄的高斯函数组合、方波、尖锐三角波和半椭圆，表示为

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{1}{6}\left(G(x,\beta,z-\delta)+G(x,\beta,z+\delta)+4G(x,\beta,z)\right) & -0.8\le x\le -0.6,\\ 1 & -0.4\le x\le -0.2,\\ 1-|10(x-0.1)| & 0\le x\le 0.2,\\ \frac{1}{6}\left(F(x,\alpha,a-\delta)+F(x,\alpha,a+\delta)+4F(x,\alpha,a)\right) & 0.4\le x\le 0.6,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{3.6}$$

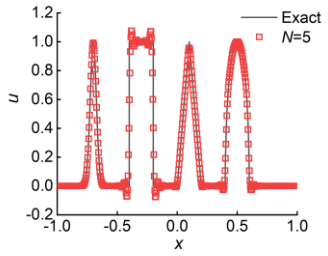
$$G(x,\beta,z)=e^{-\beta(x-z)^2},F(x,\alpha,a)=\sqrt{\max(1-\alpha^2(x-a)^2,0)}.$$

常数选取为 。 $= 0\,5,\ = -0\,7, \delta = 0\,005, \alpha = 10, \beta = \ \ 2\ \ 36\delta^2 \ldots \ln/(\ )\,a\ z$

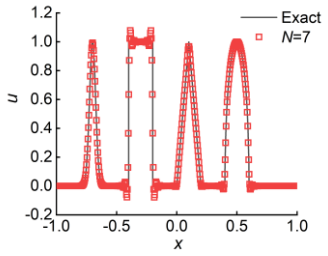
t = 2 和 t = 20 时的数值结果由 WCU 在分辨率层级 J = 8下计算得出，分别如图10和图11所示。图10显示，在方波和半椭圆附近的局部区域中出现了伪振荡，这些区域的利普希茨指数恰好为零。此外，N = 7 小波格式在光滑区域和不连续区域，尤其是跳跃间断区域，展现出更高的精度。图11显示，N = 7 小波格式在方波附近产生的振荡区域更窄、过冲更低，并且在光滑

区域中具有更高的精度。N = 5 小波格式的结果显示，半椭圆的极值点附近存在轻微畸变。

接下来，采用带 TVBR 限制器的 AMWCU 格式进行数值实验。图12展示了两种小波格式在基本分辨率层级 $J_0 = 6$下的结果。带 TVBR 的 AMWCU 格式能够有效捕捉间断，并在光滑区域保持高精度。对于 WCU 格式，要将方波的陡峭程度从 $J = 10$ 提高到 $J = 12$，需要增加总计 6144 个节点。使用 AMWCU 格式时，对于 $N = 5$ 和 $N = 7$ 小波格式，分别只需增加 311 和 312 个节点即可实现这一目标，这充分展现了其表示具有不同正则性的函数的强大能力。



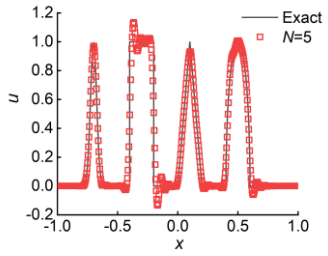
(a) N=5



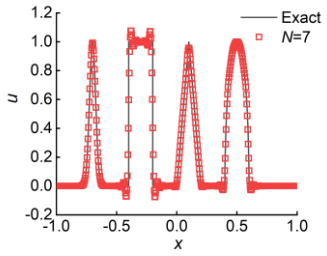
(b) N=7

图10. 未使用限制器时 WCU 格式的数值结果

在 t = 2, J = 8



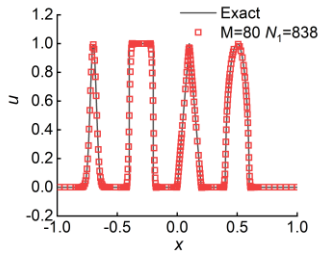
(a) N=5



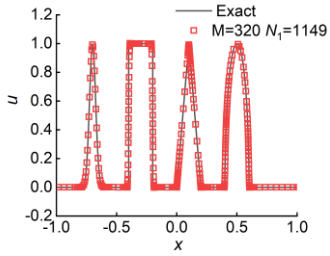
(b) N=7

图11. WCU 未加限制器时的数值结果

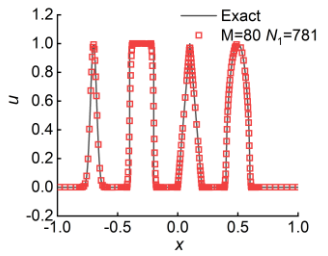
在 t = 20, J = 8



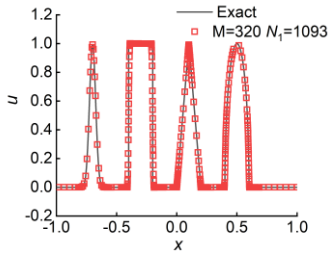
(a) N=5, J_{max}=10



(b) N=5, J_{max}=12



(c) N=7, J_{max}=10



(d) N=7, J_{max}=12

图12. t = 2 （$J_0 = 6$）时 AMWCU 与 TVBR 数值解的比较

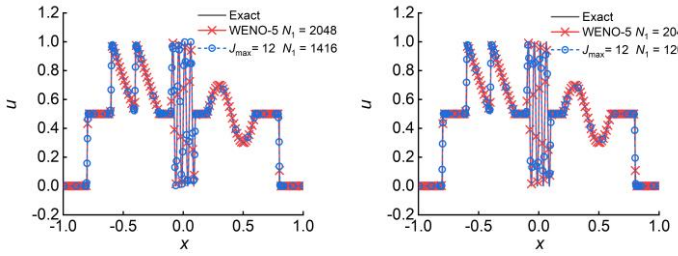
3.1.4 混合尺度函数的对流

为展示本格式检测不同尺度结构的能力，设计了如下初始条件，其中混合了低频和高频光滑正弦函数及间断：

$$u(x,0)=0.5+\sin(\pi x)=\begin{cases}0.5 & -0.8\le x\le -0.6,\\ -2.5x-0.5 & -0.6\le x\le -0.4,\\ -2.5x & -0.4\le x\le -0.2,\\ 0.5 & -0.2\le x\le -0.1,\\ 0.5+\sin(40\pi x) & -0.1\le x\le 0.1,\\ 0.5 & 0.1\le x\le 0.2,\\ 0.2\sin(5\pi(x-0.2)) & 0.2\le x\le 0.6,\\ 0.5 & 0.6\le x\le 0.8,\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \tag{3.7}$$

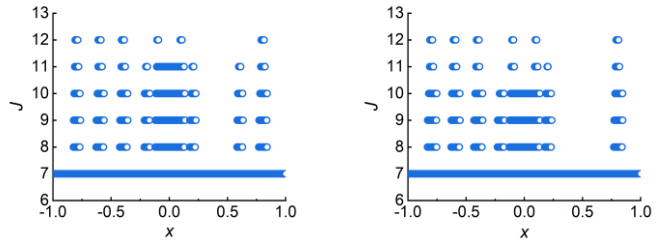
图13展示了 AMWCU 的数值结果与 WENO-5格式的比较。这里设置了相同的显示控制参数，以提高图的可读性。AMWCU 格式的节点集中在不连续区域和高频区域，以精确描绘不同尺度；而六阶格式只需较少的节点，就能获得几乎相同的精度。不过，对于 WENO-5格式，要分辨解中的所有细节，则需要均匀节点分布，且 $N_1 = 2048$ 。图14展示了两种格式中所有节点的分辨率等级分布。最高分辨率层级标示了跳跃间断。

该测试的解在相当小的区域内包含多个不同尺度和间断。对于此类情况，AMWCU 格式能够以极高的效率更好地捕捉所有细节。在处理定义于大区域上的局部奇异问题时，AMWCU 格式能够高效地逼近复杂解，表现出卓越的能力。



(a) N = 5　　(b) N = 7

图13. AMWCU 与 TVBR 的数值解对比，t = 2 (J_0=7, M = 320)



(a) N = 5　　(b) N = 7

图14. AMWCU 与 TVBR 的分辨率级别，t = 2 (J_0 = 7, M = 320)

3.2 一维非线性无黏 Burgers 方程

无黏的一维非线性 Burgers 方程可表示为

$$\begin{aligned} &u_t+\left(u^2/2\right)_x=0, && x\in[0,2],\\ &u(x,0)=0.5+\sin(\pi x), && \text{periodic.}\end{aligned} \tag{3.8}$$

这是一个典型示例：由于非线性，即使初始条件足够光滑，随着时间推移也会形成激波。首先，通过节点加密测试评估小波格式的精度阶。精确解采用 Harten等人提出的半解析方法计算，该方法利用牛顿-拉夫森迭代求解特征关系。为与数值解进行比较，计算了 t = 0.1 时的精确解，此时解仍然非常光滑。The

误差以及l_∞范数和l_2范数下的精度阶见表 4。随着节点数增加，精度阶趋于预期值。

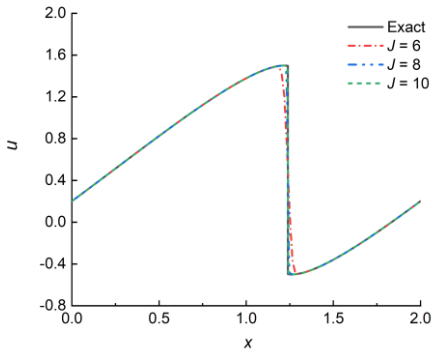
表 4。一维非线性无黏 Burgers 方程的数值误差和精度阶 n

方法	N_1	l_∞ 误差	l_∞ 精度阶	l_2 误差	l_2 精度阶
N = 5 4 阶	64	1.63E−5	—	8.06E−6	—
	128	1.24E−6	3.71	5.83E−7	3.79
	256	8.26E−8	3.91	3.84E−8	3.93
	512	5.29E−9	3.97	2.45E−9	3.97
	1024	3.34E−10	3.99	1.54E−10	3.99
N = 7 六阶	64	2.74E−7	—	1.20E−7	—
	128	7.64E−9	5.17	3.07E−9	5.29
	256	1.46E−10	5.71	5.65E−11	5.77
	512	2.48E−12	5.87	9.54E−13	5.89
	1024	3.97E−14	5.97	2.22E−14	5.43

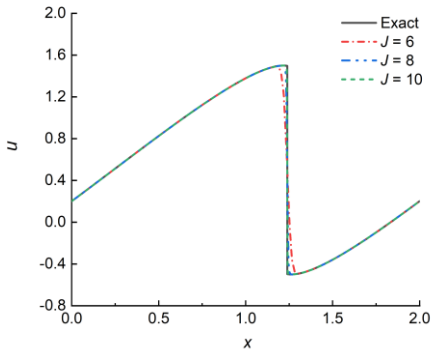
当激波形成时，数值解计算至 t = 1.5/π。图15绘出了采用不同分辨率级别的 TVBU 限制器的 WCU 格式所得结果。随着分辨率级别提高，所有解均收敛至精确解，且没有明显的伪振荡。这一结果表明，采用 TVBU 限制器的 WCU 格式能够有效处理非线性双曲问题，并获得令人满意的物理解。

为考察 TVBU 限制器对间断以外区域解的精度的影响，图16展示了两种格式在不同分辨率级别下、整个区间上的绝对误差。采用 TVBU 限制器的 N = 5 小波格式在激波以外仍保持预期的精度阶。由于 N = 7 小波格式具有很高的精度，光滑区域内的误差会迅速降至机器误差，因此只有在较低分辨率级别下才能达到预期的精度阶。

最后，采用带有 TVBC 的 AMWCU 格式进行了一次数值实验。图 17 展示了不同最大分辨率层级下的结果。带有 TVBC 的自适应格式的数值结果比基本分辨率层级下的 WCU 格式略显锐利，但精度的提升似乎有限。这一现象可归因于采用较大积分区间进行重构。因此，需要设计一种确定 h_i 的优化方法，以消除振荡，同时避免过度平滑间断。

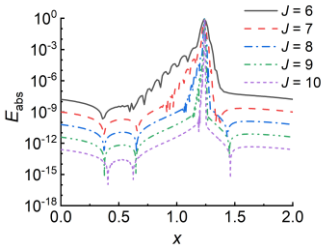


(a) N = 5

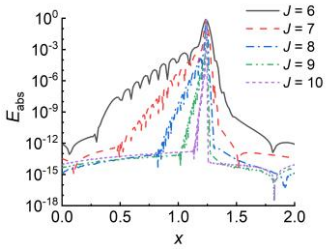


(b) N = 7

图15. t = 1.5/π 时 WCU 与 TVBU 的数值解比较

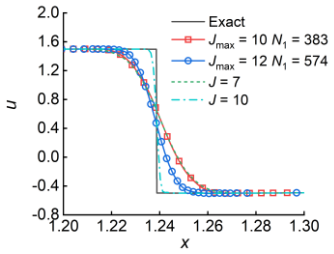


(a) N = 5

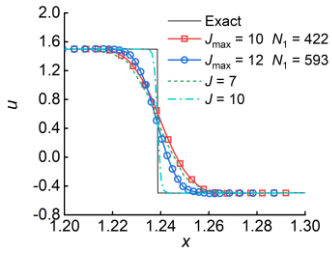


(b) N = 7

图16. WCU 与 TVBU 在 t = 1.5/π 时的数值误差比较



(a) N = 5



(b) N = 7

图17. AMWCU 与 TVBC 在 t = 1.5/π (J_0 = 7) 时的数值解比较

3.3 一维 Euler 方程组

一维欧拉方程 气体动力学中多方气体的守恒形式为

$$\begin{aligned}&\mathbf{U}_t+\mathbf{f}(\mathbf{U})_x=0,\\&\mathbf{U}=\left(\rho,\rho u,E\right)^T,\\&\mathbf{f}(\mathbf{U})=\left(\rho u,\rho u^2+p,u\left(E+p\right)\right)^T,\end{aligned}\tag{3.9}$$

其中，ρ、u、p 和 E 分别表示密度、速度、压力和总能量。对于理想气体，状态方程为

$$E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2,\tag{3.10}$$

其中=1;4.

3.3.1 密度扰动的平流

为检验所提出的非线性系统格式的精度阶，计算了邱和 Shu 设计的密度扰动平流测试 [72]。初始条件为 ρ(x, 0) =1 + 0.2sin (πx)，u(x, 0) = 1，p(x, 0) = 1 在 [0, 2] 上，并采用周期边界条件。

分辨率层级从 3 提高到 7。表 5 显示了在 t = 2 时根据密度评估的数值误差。收敛率均高于理论收敛率。对于 N = 5 小波

格式，随着分辨率的提高，收敛率逐渐降至预期值。然而，随着分辨率层级的提升，N = 7 小波格式表现出超收敛现象。

表 5. 一维欧拉系统的数值误差和精度阶

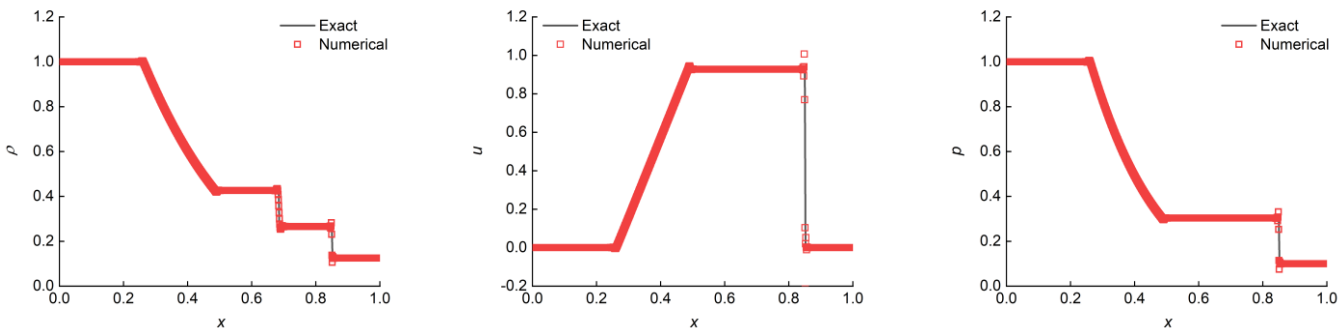
方法	N_1	L_∞ 误差	L_∞ 阶	L_2 误差	L_2 阶
N=5（4 阶）	16	8.86E−4	—	9.19E−4	—
	32	4.28E−5	4.37	4.37E−5	4.39
	64	2.39E−6	4.16	2.43E−6	4.17
	128	1.45E−7	4.05	1.46E−7	4.06
	256	8.97E−9	4.01	9.00E−9	4.02
N=7（六阶）	16	2.49E−5	—	2.52E−5	—
	32	2.63E−7	6.56	2.67E−7	6.56
	64	3.21E−9	6.36	3.25E−9	6.36
	128	3.59E−11	6.47	3.61E−11	6.49
	256	3.69E−13	6.61	2.99E−13	6.91

3.3.2 Sod问题

该实验是 Sod [73] 提出的一个著名黎曼问题标准测试，其初始数据如下：

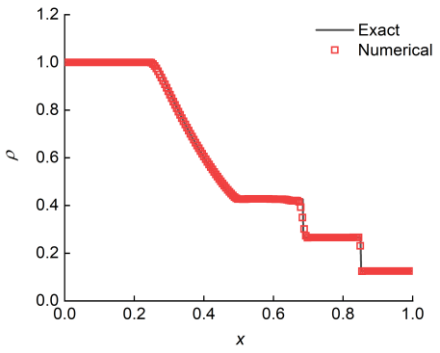
$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases} (1,\ 0,\ 1) & 0 \le x \le 0.5 \\ (0.125,\ 0,\ 0.1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0 \le x \le 1). \tag{3.11}$$

首先，如图 18 所示，采用未加限制的 WCU 格式计算 t = 0.2 时的数值结果。不含重构过程的小波格式能够准确定位激波间断和接触间断的位置，且只在局部产生伪振荡。随后，加入 TVBU限制器以消除数值振荡。图 19 展示了采用 TVBU 的 WCU 格式得到的密度。间断附近的伪振荡已成功消除。

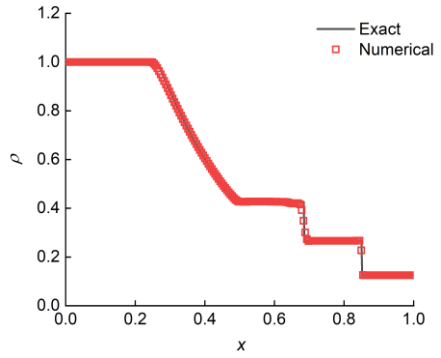


(a) 密度　　(b) 速度　　(c) 压力

图18. WCU 未施加限制器时的数值解，t = 0.2 (N = 5, J = 10)



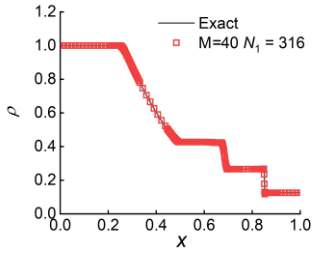
(a) N = 5



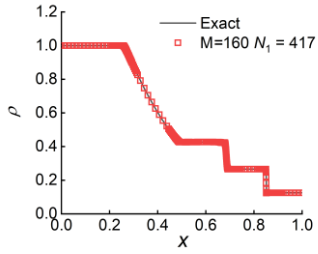
(b) N = 7

图19. t = 0.2 时 WCU 与 TVBU 的密度对比（J = 10, M=40）

进一步探讨了 AMWCU 配合 TVBR 在此类黎曼问题上的表现。图 20 和图 21 比较了采用不同阶数和最大分辨率层级的格式所得到的密度。$J_{max} = 12$ 的解在跳跃间断附近表现得陡峭得多，而高阶小波格式在较低的最大分辨率层级下抑制吉布斯现象的能力更强。

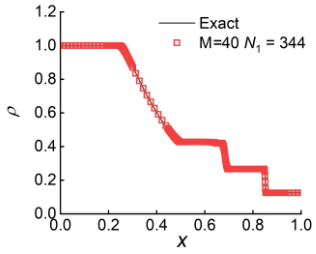


(a) J_{max}=10

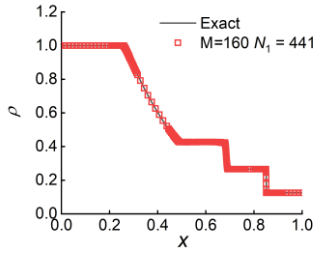


(a) J_{max}=12

图20. AMWCU结合TVBR在t = 0.2时的数值解（N = 5, J_0 = 6）



(a) J_{max}=10



(b) J_{max}=12

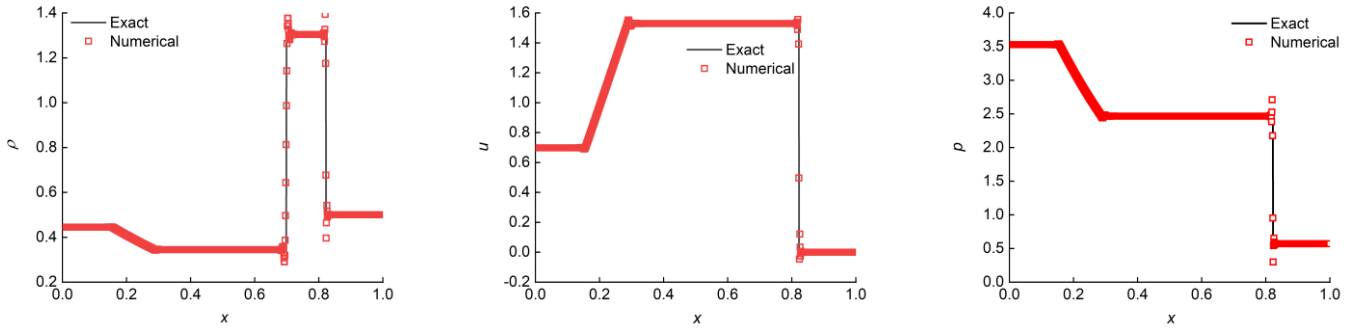
图21. AMWCU结合TVBR在t = 0.2时的数值解（N = 7, J_0 = 6）

3.3.3 Lax问题

另一个著名的黎曼问题由Lax [74] 提出，其初始条件如下：

$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases} (0.445,\ 0.698,\ 3.528) & 0 \le x \le 0.5 \\ (0.5,\ 0,\ 0.571) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0 \le x \le 1). \tag{3.12}$$

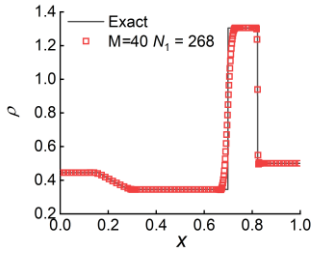
t = 0.13 时的数值结果是基于未进行重构的 WCU 格式计算得到的。图22展示了三个变量的分布。数值振荡局限于接触间断和激波间断附近的局部区域，其中密度表现出最严重的振荡特征。原始 WCU 格式能够稳定地求解 Lax问题，并准确识别所有类型的间断。



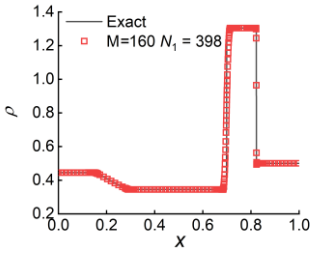
(a) 密度　　(b) 速度　　(c) 压力

图 22. WCU 未进行限制时在 t = 0.13 的数值解（N = 5, J = 10）

接下来，采用带有 TVBR 的 AMWCU 进行实验。图23和图24展示了采用不同小波格式和最大分辨率层级得到的密度数值结果。Jiang 和 Shu[7] 指出，对于高阶非特征型格式而言，这项测试极具挑战性，因而很容易出现振荡。在图23和图24中，N = 7 小波格式的数值解为 ENO，这体现了 AMWCU 格式求解具有间断解的双曲守恒律的卓越能力。对于 N = 5 格式，仅在激波前沿极薄的区域内出现了少量可接受的振荡。因此，带有 TVBR 的高阶格式在消除激波间断附近的振荡方面表现良好。比较不同阶格式解中的稀疏波可知，只有在基本分辨率层级下，高阶格式才能准确逼近稀疏波。因此，该格式所需节点更少，且在求解当前问题时表现更佳。

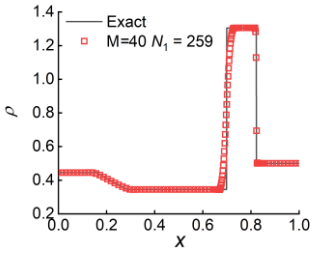


(a) J_{max}=10

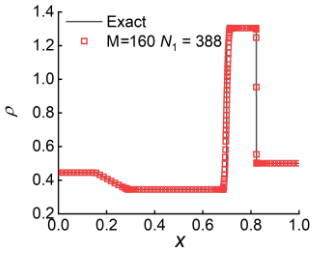


(a) J_{max}=12

图23. AMWCU 与 TVBR 在 t = 0.13 时的数值解（N = 5, J_0 = 7）



(a) J_{max}=10



(b) J_{max}=12

图24. AMWCU 与 TVBR 在 t = 0.13 时的数值解（N = 7, J_0 = 7）

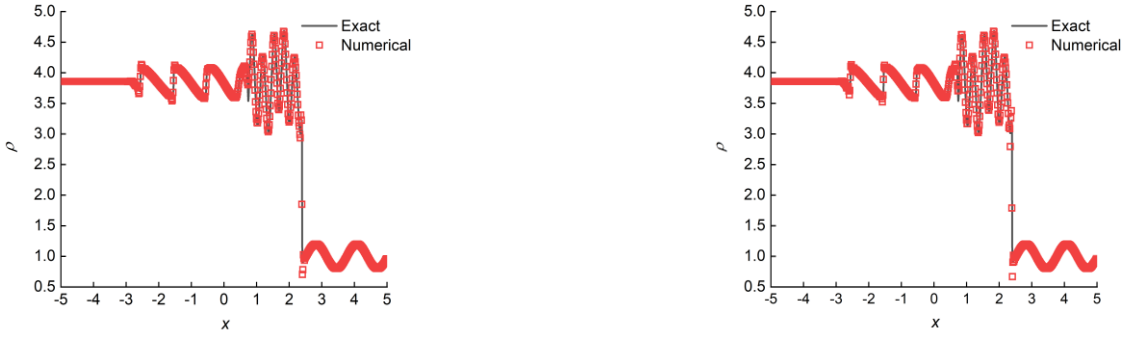
3.3.4 激波–湍流相互作用

当数值解包含激波和复杂的光滑区域结构 [20] 时，高阶格式的优势便会显现。激波与熵波的相互作用就是 Shu 和 Osher 提出的一个典型例子 [75]。运动的 Mach = 3 激波与密度中的正弦波相互作用的问题由以下初始数据定义：

$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases} (3.857148,\ 2.629369,\ 10.333333) & -5 \le x < -4 \\ (1 + 0.2\sin 5x,\ 0,\ 1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (-5 \le x \le 5) \tag{3.13}$$

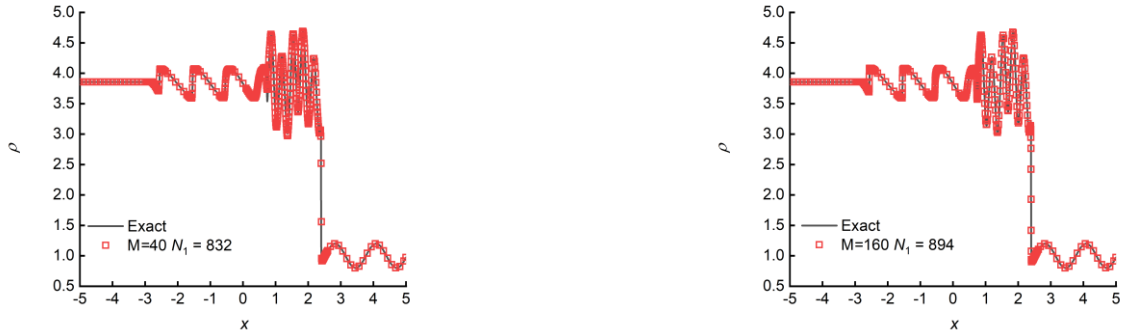
本例中，采用具有 2560 个网格点的 WENO-5 格式计算得到收敛解，并将其作为参考“精确”解。基于 WCU 格式得到的计算密度 ρ

未针对参考解进行限制，在 t = 1.8 时的结果绘于图25。小波格式能够捕捉不同尺度上的激波和复杂光滑结构。该问题采用结合 TVBR 的 AMWCU 格式求解。数值结果与参考解的比较见图26和图27。高分辨率层级的节点聚集在间断附近及高频区域，而结合重构的 AMWCU 格式能够有效消除数值振荡。因此，自适应小波格式在区分含激波的复杂结构方面表现良好。



(a) N = 5　　(b) N = 7

图25. t = 1.8 时 WCU 未使用限制器得到的数值解（J = 6）



(a) J_{max} = 8　　(b) J_{max} = 10

图26. t = 1.8 时 AMWCU 使用 TVBR 得到的数值解（N = 5, J_0 = 4）



(a) J_{max} = 8　　(b) J_{max} = 10

图27. AMWCU 与 TVBR 在 t = 1.8（N = 7, J_0 = 4）时的数值解

3.3.5 两个相互作用的爆炸波

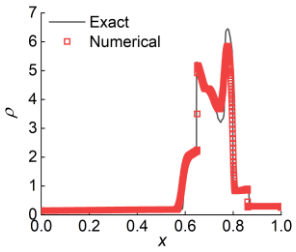
最后，爆炸波　　涉及强激波、稀疏波　　n

、接触间断之间复杂相互作用的问题。该问题具有显著的压力差，其初始条件如下所述：

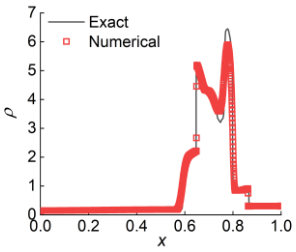
$$(\rho_0, u_0, p_0) = \begin{cases} (1,\ 0,\ 1000) & 0 \le x < 0.1 \\ (1,\ 0,\ 0.01) & 0.1 \le x < 0.9 \\ (1,\ 0,\ 100) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0 \le x \le 1). \tag{3.14}$$

A r两端均施加反射边界条件，如 [4, 76] 所示。

该测试颇具挑战性，因为各种波之间复杂的相互作用都非常强烈且瞬时发生。此处仍采用WENO-5格式，并使用足够精细的节点来计算参考“精确”解。为验证小波格式求解当前问题的能力，采用带 TVBR 的 WCU 格式计算数值结果，直至 t = 0.038。密度的数值结果与参考解的对比见图 28 和图 29。高阶格式在追踪峰值和谷值时表现得更为准确。此外，随着分辨率层级的提高，小波格式的数值解会收敛到参考“精确”解。

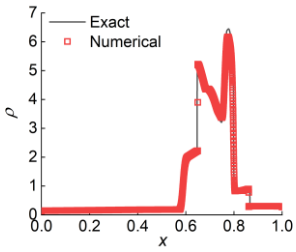


(a) N = 5

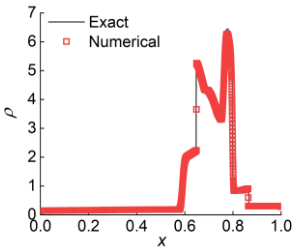


(b) N = 7

图28. WCU 使用 TVBU 得到的数值解 at t = 0.038 (J = 12, M = 3200)



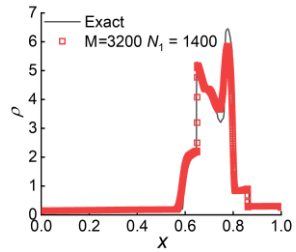
(a) N = 5



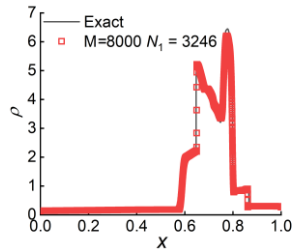
(b) N = 7

图29. WCU 使用 TVBU 得到的数值解 at t = 0.038 (J = 14, M = 8000)

接下来给出自适应小波格式得到的数值结果。图 30 和图 31 展示了不同阶数的 AMWCU 格式计算得到的密度，并与“精确”解进行了比较。AMWCU 的结果与分辨率层级为 J_{max} 的 WCU 计算结果一致。数值结果表明，自适应小波格式可用于高效求解复杂波相互作用问题。

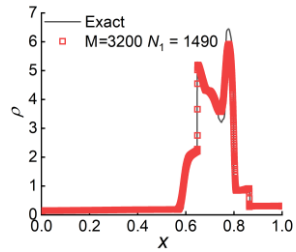


(a) J_{max} = 12

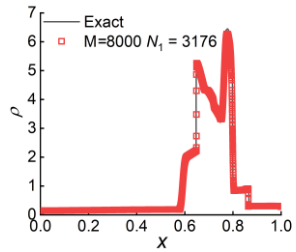


(b) J_{max} = 14

图30. AMWCU 采用 TVBR 得到的数值解，t = 0.038（N = 5, J_0 = 8）



(a) J_{max} = 12



(b) J_{max} = 14

图31. AMWCU 采用 TVBR 得到的数值解，t = 0.038（N = 7, J_0 = 8）

4 结论

本文提出了基于非对称插值小波的高阶自适应多分辨率小波配置迎风格式，用于求解双曲守恒律。利用一对非对称尺度函数可以实现迎风性质。因此，可将通量分裂技术轻松嵌入用于一维欧拉系统的小波格式中。得益于尺度函数的插值性质，双曲守恒律中的非线性项也能得到便捷且高效的处理。

我们进行了大量一维数值实验，以验证本文格式的优势。线性和非线性标量方程以及 Euler 方程组的精度阶均与预期相符。激波湍流相互作用问题的数值解表明，所提出的带重构过程的自适应小波配置迎风格式能够稳定求解双曲守恒律，并在光滑区域和陡峭间断过渡处高效实现高阶精度，且没有明显振荡。此外，我们的格式能够求解复杂波相互作用问题，本文提出的基本思想也可自然地推广到二维或三维问题。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会（11925204）资助。

参考文献

[1] S.K. Godunov，流体动力学方程间断解数值计算的有限差分法，Matematičeskij Sb. 47 (1959) 271-290。[2] P.L. Roe，近似黎曼求解器、参数向量与差分格式，J. Comput. Phys. 135 (1997) 250-258。[3] C.-W. Shu，时变对流主导偏微分方程的高阶WENO和间断伽辽金方法：近期若干进展简述，J. Comput. Phys. 316 (2016) 598-613。[4] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S.R. Chakravarthy，均匀高阶精度本质无振荡格式，III，J. Comput. Phys. 71 (1987) 231-303。[5] C.W. Shu, S. Osher，本质无振荡激波捕捉格式的高效实现，J. Comput. Phys. 77 (1988) 439-471。[6] X.D. Liu, S. Osher, T. Chan，加权本质无振荡格式，J. Comput. Phys. 115 (1994) 200-212。[7] G.-S. Jiang, C.-W. Shu，加权ENO格式的高效实现，J. Comput. Phys. 126 (1996) 202-228。[8] D. Zhang, J. Tan, X. Yao，空间发展型高度可压缩混合层的直接数值模拟：结构演化与湍流统计，Phys. Fluids. 31 (2019) 036102。[9] J. Ou, J. Chen，利用DSMC数据改进近连续区平板高超声速流数值模拟，Comput. Fluids. 194 (2019) 104308。[10] J. Tang, C. Chen, X. Li, X. Shen, F. Xiao，基于WENO斜率限制器的立方球网格非振荡多矩有限体积全球输送模型，Q. J. R. Meteorol. Soc. 144 (2018) 1611-1627。[11] R. Bürger, G. Chowell, E. Gavilán, P. Mulet, L.M. Villada，含染病猎物的时空捕食者-猎物模型的数值解，Math. Biosci. Eng. 16 (2018) 438-473。[12] S. Ii, F. Xiao，高阶多矩约束有限体积法。第一部分：基本公式，J. Comput. Phys. 228 (2009) 3669-3707。[13] Z.J. Wang，非结构网格上守恒律的谱（有限）体积法。基本公式：基本公式，J. Comput. Phys. 178 (2002) 210-251。

[14] B. Cockburn, S.-Y. Lin, C.-W. Shu，守恒律的TVB Runge-Kutta局部投影不连续Galerkin有限元方法III：一维系统，J. Comput. Phys. 84 (1989) 90-113。[15] B. Cockburn, C.-W. Shu，守恒律的TVB Runge-Kutta局部投影不连续Galerkin有限元方法II：一般框架，Math. Comput. 52 (1989) 411-435。[16] B. Cockburn, C.-W. Shu，用于标量守恒律的Runge-Kutta局部投影p1不连续Galerkin有限元方法，Esaim. Math. Model. Numer. Anal. 25 (1991) 337-361。[17] B. Cockburn, C.-W. Shu，对流主导问题的Runge–Kutta不连续Galerkin方法，J. Sci. Comput. 16 (2001) 173-261。[18] J. Qiu, C.-W. Shu，采用加权本质无振荡限制器的Runge-Kutta不连续Galerkin方法中疑难单元指示器的比较，SIAM J. Sci. Comput. 27 (2005) 995-1013。[19] Z. Sun, H. Teng, F. Xiao，采用WENO限制器的斜率约束四阶多矩有限体积法，计算物理通讯 18 (2015) 901-930。[20] Q. Jianxian, S. Chi-Wang Shu，采用WENO限制器的Runge-Kutta不连续Galerkin方法，SIAM J. Sci. Comput. 26 (2005) 907-929。[21] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, M. Mallet，计算流体力学的新有限元公式：I. 可压缩Euler方程和纳维–斯托克斯方程及热力学第二定律的对称形式，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 54 (1986) 223-234。[22] T.J.R. Hughes, M. Mallet, M. Akira，计算流体力学的新有限元公式：II. 超越SUPG，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 54 (1986) 341-355。[23] T.J.R. Hughes, M. Mallet，计算流体力学的新有限元公式：III. 多维对流扩散系统的广义流线算子，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 58 (1986) 305-328。[24] T.J.R. Hughes, M. Mallet，计算流体力学的新有限元公式：IV. 多维对流扩散系统的间断捕捉算子，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 58 (1986) 329-336。[25] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, G.M. Hulbert，计算流体力学的新有限元公式：VIII. 对流扩散方程的伽辽金/最小二乘法，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 73 (1989) 173-189。[26] B. Bassett, B. Kiedrowski，采用流线迎风Petrov–Galerkin稳定化的无网格局部Petrov–Galerkin中子输运方程求解，J. Comput. Phys. 377 (2019) 1-59。[27] M.J. Berger, J. Oliger，双曲偏微分方程的自适应网格细化，J. Comput. Phys. 53 (1984) 484-512。[28] D.P. Young, R.G. Melvin, M.B. Bieterman, F.T. Johnson, S.S. Samant, J.E. Bussoletti，局部细化矩形网格有限元方法：在计算流体力学和计算物理学中的应用，J. Comput. Phys. 92 (1991) 1-66。[29] J.T. Oden, L. Demkowicz, W. Rachowicz, T.A. Westermann，迈向通用h-p自适应有限元策略，第二部分：后验误差估计，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 77 (1989) 113-180。[30] E. Bacry, S. Mallat, G. Papanicolaou，一种用于偏微分方程的基于小波的时空自适应数值方法，Esaim. Math. Model. Numer. Anal. 26 (1992) 793-834。[31] M. Holmström, J. Walden，双曲偏微分方程的自适应小波方法，J. Sci. Comput. 13 (1998) 19-49。[32] J. Waldén，双曲偏微分方程的滤波器组方法，SIAM J. Numer. Anal. 36 (1999) 1183-1233。[33] M.A. Alves, P. Cruz, A. Mendes, F.D. Magalhães, F.T. Pinho, P.J. Oliveira，用于求解双曲偏微分方程的自适应多分辨率方法，Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 191 (2002) 3909-3928。[34] O. Roussel, K. Schneider, A. Tsigulin, H. Bockhorn，一种用于抛物型偏微分方程的守恒全自适应多分辨率算法，J. Comput. Phys. 188 (2003) 493-523。[35] J. Regele, O. Vasilyev，一种用于激波计算的自适应小波配置法，Int. J. Comut. Fluid. Dyn. 23 (2009) 503-518。[36] K. Eriksson, C. Johnson，抛物型问题的自适应有限元方法I：线性模型问题，SIAM J. Numer. Anal. 28 (1991) 43-77。[37] B. Li, X. Chen，基于小波的数值分析：综述与分类，Finite. Elem. Anal. Des. 81 (2014) 14-31。[38] K. Schneider, O.V. Vasilyev，小波方法在计算流体力学中的应用，Annu. Rev. Fluid. Mech. 42 (2010) 473-503。[39] M.J. Vuik, J.K. Ryan，用于间断Galerkin格式间断检测的多小波疑难单元指示器，J. Comput. Phys. 270 (2014) 138-160。[40] S. Do, H. Li, M. Kang，结合有限差分WENO求解理想

磁流体动力学，计算物理学杂志 339 (2017) 482 - 499.[41] J.M. Restrepo, G.K. Leaf, 《双曲方程的小波伽辽金离散》，J. Comput. Phys. 122 (1995) 118-128.[42] R.M. Pereira, N. Nguyen Van Yen, K. Schneider, M. Farge, 《通过动力学伽辽金格式自适应求解初值问题》，Multiscale. Model. Simul. 20 (2022) 1147-1166.[43] H. Minbashian, H. Adibi, M. Dehghan, 《用于双曲守恒律的自适应小波时空SUPG方法》，Numer. Methods. Partial. Differ. Equ. 33 (2017) 2062-2089.[44] S. Bertoluzza, 《求解伯格斯方程的自适应小波配置法》，Transport Theory and Statistical Physics. 25 (1996) 339-352.[45] O.V. Vasilyev, S. Paolucci, 《用于在有限区域内求解偏微分方程的动态自适应多层小波配置法》，J. Comput. Phys. 125 (1996) 498-512.[46] J.M. Alam, N.K.-R. Kevlahan, O.V. Vasilyev, 《非线性抛物型微分方程的时空同步自适应小波求解》，J. Comput. Phys. 214 (2006) 829-857.[47] J.D. Regele, O.V. Vasilyev, 《用于激波计算的自适应小波配置法》，Int. J. Comut. Fluid. Dyn. 23 (2009) 503-518.[48] P.G. Ciarlet, 《线性与非线性泛函分析及其应用》，工业与应用数学学会，费城，2013.[49] S.G. Mallat, 《信号处理中的小波之旅》，第3版，爱思唯尔，伯灵顿，2010.[50] C.S. Burrus, I.E. Odegard, 《科夫莱特系统与零矩》，IEEE Trans. Signal Process. 46 (1998) 761-766.[51] I. Daubechies, 《小波十讲》，工业与应用数学学会，费城，1992.[52] Y. Zhou, 《小波数值方法及其在非线性问题中的应用》，新加坡施普林格，新加坡，2021.[53] G. Deslauriers, S. Dubuc, 《二进插值》，载于：分形、非整数维及其应用，马松出版社，巴黎，1987，第44-55页。`D.L. Donoho, 《插值小波变换》，预印本，斯坦福大学统计系。2 (1992) 1-54.[54] X. Liu, G. Liu, J. Wang, Y. Zhou, 《用于目标局部解增强的小波多分辨率插值伽辽金法》，Comput. Mech. (2019) 1-28.[55] W. Sweldens, P. Schroder, 《在家构建自己的小波》，施普林格，柏林海德堡，2005.[56] J. Wang, 《正交小波的广义理论与运算及其在包括压电智能结构在内的力学研究中的应用》，博士论文，兰州大学，兰州，2001.[57] M.-Q. Chen, C. Hwang, Y.-P. Shih, 《有界区间上的小波伽辽金近似计算》，Int. J. Numer. Methods. Eng. 39 (1996) 2921-2944.[58] L. Zhang, J. Wang, X. Liu, Y. Zhou, 《用于物理学中非线性边值问题的小波积分配置法》，Comput. Phys. Commun. 215 (2017) 91-102.[59] S. Osher, F. Solomon, 《双曲守恒律方程组的迎风差分格式》，Math. Comput. 38 (1982) 339-374.[60] A. Harten, S. Osher, 《一致高阶精度无振荡格式 I》，SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987) 279-309.[61] A. Harten, 《双曲守恒律的高分辨率格式》，J. Comput. Phys. 135 (1983) 260-278.[62] G. Beylkin, J.M. Keiser, 《基于小波基自适应数值求解非线性偏微分方程》，J. Comput. Phys. 132 (1997) 233-259.[63] J.L. Steger, R.F. Warming, 《无黏气体动力学方程的通量矢量分裂及其在有限差分方法中的应用》，J. Comput. Phys. 40 (1981) 263-293.[64] P.L. Roe, 《近似黎曼求解器、参数向量与差分格式》，J. Comput. Phys. 43 (1981) 357-372.[65] J. Liandrat, P.H. Tchamitchian, 《利用空间小波近似求解一维正则化伯格斯方程》，载于：NASA承包商报告，NASA兰利研究中心，汉普顿，1990.[66] X. Liu, Y. Zhou, J. Wang, 《用于具有局部陡峭梯度的非线性边值问题的小波多分辨率插值伽辽金法》，Appl. Math. Mech-Engl. 43 (2022) 863-882.[67] S. Gottlieb, J.-H. Jung, S. Kim, 《David Gottlieb关于吉布斯现象分辨率的研究综述》，Commun. Comput. Phys. 9 (2011) 497-519.[68] E.M. Stein, S. Rami, 《实分析：测度论、积分与希尔伯特空间》，普林斯顿大学出版社，牛津郡，2013。

[70] C.W. Shu, 《守恒律的TVB一致高阶格式》, Math. Comput. 49 (1987) 105-121.[71] Liu, Xiaojing, Zhou, Youhe, Wang, Jizeng, 《用于求解二维伯格斯方程的时空完全解耦小波伽辽金方法》, Comput. Math. with Appl. 72 (2016) 2908-2919.[72] J. Qiu, C.-W. Shu, 《Hermite WENO格式及其作为龙格–库塔间断伽辽金方法限制器的应用：一维情形》, J. Comput. Phys. 193 (2003) 115-135.[73] G.A. Sod, 《非线性双曲守恒律方程组的若干有限差分方法综述》, J. Comput. Phys. 27 (1978) 1-31.[74] P.D. Lax, 《非线性双曲方程的弱解及其数值计算》, Commun. Pure Appl. Math. 7 (1954) 159-193.[75] C.W. Shu, S. Osher, 《本质无振荡激波捕捉格式的高效实现，II》, 载于：M.Y. Hussaini, van Leer, B., Van Rosendale, J. (编)《迎风与高分辨率格式》, 施普林格，柏林，海德堡，1989.[76] P. Woodward, P. Colella, 《强激波下二维流体流动的数值模拟》, J. Comput. Phys. 54 (1984) 115-173。