用于科学与工程计算分析的傅里叶级数（基）多尺度方法：

VII. 帕斯捷尔纳克地基上梁弹性弯曲问题的傅里叶级数多尺度解

孙伟明[a*+] 和张自茂[b]

摘要：本文将通过这一系列论文，提出一种简洁高效的多尺度计算分析方法——傅里叶级数多尺度方法。在第七篇论文中，我们将传统的弹性地基上梁的结构分析，拓展为对梁横向挠度四阶线性微分方程的全面多尺度分析，并设定一般边界条件和广泛的模型参数。为此，将解函数表示为边界函数与内部函数的线性组合，以确保所得级数表达式一致收敛，且可逐项求至四阶导数。同时，内部函数对应特解，边界函数则对应满足控制微分方程齐次形式的通解。由于通解恰当地诠释了微分方程的含义，预期能够更好地捕捉该方程解的空间特征。将边界函数和内部函数分别选为微分方程线性无关齐次解的组合以及解区间上的一维半区间傅里叶正弦级数后，推导出帕斯捷尔纳克地基上梁弯曲问题的傅里叶级数多尺度解。随后通过数值算例考察傅里叶级数多尺度解的收敛特性，并展示广泛模型参数下帕斯捷尔纳克地基上梁弯曲问题的多尺度特征。

关键词：傅里叶级数、多尺度、弹性弯曲、梁、帕斯捷尔纳克地基

数学学科分类：35C10；35G15

[a]江汉大学人工智能学院数学与大数据系，中国武汉，430056[b]北京交通大学土木工程学院力学系，中国北京，100044 *通讯作者：孙伟明，江汉大学人工智能学院数学与大数据系，中国武汉，430056[+] 电子邮箱：xuxinenglish@hust.edu.cn

1. 引言

在现代土木工程中，弹性地基上的梁分析十分常见。在这一过程中，会采用多种梁理论，例如经典的伯努利-欧拉梁理论 [1-6] 或著名的铁木辛柯梁理论 [7] 。与此同时，地基通常被理想化为 Winkler（单参数）模型 [1, 3, 6], 、Pasternak（双参数）模型 [2, 4, 5], ，甚至 Kerr（三参数）模型 [7]。得益于这些简单的数学表述，它们已应用于各种问题，并在许多实际情形中取得了令人满意的结果 [8]。然而，需注意的是，以上研究均局限于建筑、岩土工程、机场跑道、公路和铁路结构的结构分析，其中地基的模型参数在特定的（较窄）范围内变化。

过去二十年来，科学与工程中的多尺度问题受到广泛关注 [9]。多尺度问题中的空间、材料和/或物理参数很容易跨越多个数量级，导致解区域中出现边界层或其他形式的局部不连续，并伴有较大的梯度。例如，对流-扩散-反应方程的形式非常简单，是一个二阶线性微分方程。然而，当模型参数在很宽的范围内变化时，该方程会呈现不同的物理行为，包括指数区间和传播区间 [10-13]。因此，它已成为多尺度方法中研究最多的课题之一。

与对流-扩散-反应方程相比，帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁弹性弯曲的控制方程似乎要复杂一些。因此，当研究范围扩展到模型参数的广阔范围时，工程结构的具体结构分析预计将转变为针对四阶线性微分方程的全面多尺度分析。

如今，人们已针对多尺度问题开发了许多多尺度方法，包括稳定化有限元方法 [14, 15], 泡函数方法 [16-19], 小波有限元方法 [20-22], 无网格方法 [23], 变分多尺度方法 [24, 25], 等。从这些方法的名称显然可以看出，它们通常基于传统的网格方法或其他离散化方法，并通过适当的修改加以改进，例如：使用稳定化项、引入不同的尺度组、将解分解为粗尺度分量和细尺度分量等。尽管这些多尺度方法已应用于各种边值问题，例如对流-扩散-反应方程，但在求解算法的稳定性、计算尺度的合理选择、方法的鲁棒性和有效性、尺度组跨度与解精度之间的平衡、较高的计算成本、场变量高阶导数的数值精度较低等方面，我们仍然面临着持续的挑战。

值得注意的是，一种新型傅里叶级数方法，即带补充项的傅里叶级数方法，有望成为一种战略性转变，使现有框架能够更好地求解多尺度问题。在该方法中，解函数表示为传统傅里叶级数与若干补充项的线性组合 [26-44]。补充项一方面 被特意引入，用于承接原解函数的周期延拓可能带来的不连续性。因此，傅里叶级数实际对应于一个周期且足够光滑的残差函数，因而具有一致收敛性并可逐项求导。另一方面，补充项只需

在紧区间（或区域）上足够光滑，而不必将其限定为任何特定形式。这意味着，在进行傅里叶级数展开时，这类基函数实际上有大量（理论上为无限多种）可能的选择。具体而言，若将补充项取为微分方程的通解，可以预期，该通解能够恰当地诠释微分方程的含义，从而更好地捕捉解在不同方向上的空间特征。鉴于这种求解方法具备多尺度处理能力，我们将其重新命名为傅里叶级数（基）多尺度方法。

因此，在傅里叶级数多尺度方法系列研究的第七篇论文中，我们将从更加系统、一般的角度重新研究帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁的弯曲问题。首先，我们将这一问题推广为对描述梁横向挠度的四阶线性微分方程进行多尺度分析，其中给定一般边界条件和广泛范围的模型参数。其次，我们将发展傅里叶级数多尺度方法，用于分析帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁的弯曲问题。按照常规做法，将解函数，更确切地说，将横向挠度分解为若干组成部分，例如边界函数和内部函数。内部函数对应特解，而边界函数对应满足控制微分方程齐次形式的通解。随后，将各组成部分分别选为微分方程线性无关齐次解的组合，以及定义在解区间上的一维半区间傅里叶正弦级数，从而得到弯曲问题的傅里叶级数多尺度解

推导了帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁的相关内容。因此，本文首先对问题进行描述，随后详细介绍傅里叶级数多尺度方法的相关公式。最后，通过数值算例研究傅里叶级数多尺度解的收敛特性，并展示帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁弯曲问题在广泛模型参数范围内的多尺度特征。

2. 问题描述

本节对梁和弹性地基作出以下假设:

1. 梁为一根抗弯刚度为 、区间为的弹性直梁，其变形和内部力（如梁斜率EJ 弯矩和剪力）均可由梁挠度描述。

2. 对于梁，其上表面承受横向载荷，下表面仅承受地基的反力 。梁w与地基之间完全接触。一般而言，反力可表示为双参数形式[8] ，其中反力来自地基

$$q_e = kw - G_p \frac{d^2 w}{dx_1^2}, \tag{1}$$

其中 为地基的地基反力模量， 为地基的剪切模量。 k G_p

根据伯努利-欧拉梁 理论，我们可以将置于双参数地基上的梁的横向弹性弯曲平衡微分方程表示为

$$\mathcal{L}_b w = q - q_e, \tag{2}$$

其中微分算子

$$\mathcal{L}_b = EI\frac{d}{dx_1^4}. \tag{3}$$

定义几何方程 where we hav

$$\theta = \frac{dw}{dx_1}, \tag{4}$$

以及相应方程 hysical equ

$$M = EI\frac{d^2w}{dx_1^2}, \tag{5}$$

$$Q = EI\frac{d^3w}{dx_1^3}, \tag{6}$$

其中，θ 和 M 分别表示 Q 梁的斜率、弯矩和横向剪力。

例如，考虑梁的边界（实际上是端部）处的三种边界条件：

1. 广义固支边界条件（简称 C 型边界条件）

$$w(a) = \bar{w}_a,\ \theta(a) = \bar{\theta}_a, \tag{7}$$

2. 广义简支边界条件（简称 S 型边界条件）

$$w(a) = \bar{w}_a,\ M(a) = \bar{M}_a, \tag{8}$$

3. 广义自由边界条件（简称 F 型边界条件）

$$M(a) = \bar{M}_a,\ Q(a) = \bar{Q}_a, \tag{9}$$

其中，$\bar{w}_a$，$\bar{\theta}_a$ 和 $\bar{M}_a$ 分别为端部给定的挠度、斜率、弯矩和剪力。

3. 傅里叶级数多尺度解

双参数地基上梁的弹性弯曲可表示为关于梁横向挠度的四阶（ ）常系数线性微分方程，该方程仅包含解函数及其偶数阶导数。因此，梁的横向挠度将采用下文所述的一维半区间傅里叶正弦级数多尺度解的形式 [45]。

3.1. 梁挠度微分方程

将式（1）代入式（2），得到梁挠度微分方程

$$\mathcal{L}_{bf} w(x_1) = q(x_1), \tag{10}$$

其中微分算子记为

$$\mathcal{L}_{bf} = EI\frac{d^4}{dx_1^4} - G_p\frac{d^2}{dx_1^2} + k. \tag{11}$$

3.2. 解函数的结构分解

根据常系数四阶线性微分方程的傅里叶级数多尺度方法 [45]，，我们将解函数 在区间上展开为复合半区间傅里叶正弦级数。它将被分解为两部分：

$$w(x_1) = w_0(x_1) + w_1(x_1), \tag{12}$$

其中 是边界函数，且满足

$$w_1^{(2k_1)}(a) = w^{(2k_1)}(a), \quad w_1^{(2k_1)}(0) = w^{(2k_1)}(0), \quad k_1 = 0, 1, \tag{13}$$

而 是内部函数，自然满足一维函数[46]的半区间傅里叶正弦级数展开可逐项求导四次的充分条件

$$w_0^{(2k_1)}(a) = 0, \quad w_0^{(2k_1)}(0) = 0, \quad k_1 = 0, 1. \tag{14}$$

将式（12）代入式（10），进一步假设

$$\mathcal{L}_{bf} w_1 = 0, \tag{15}$$

and

$$\mathcal{L}_{bf} w_0 = q, \tag{16}$$

那么，我们可以相应地将式（10）的解分解为两部分，即通解和特解。在这一分解中，通解对应于复合傅里叶级数的边界函数，使得

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_{bf} w_1 = 0 \\ &w_1^{(2k_1)}(a) = w^{(2k_1)}(a), \quad w_1^{(2k_1)}(0) = w^{(2k_1)}(0), \quad k_1 = 0, 1 \end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

特解对应于复合傅里叶级数的内部函数，使得

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_{bf} w_0 = q \\ &w_0^{(2k_1)}(a) = 0, \quad w_0^{(2k_1)}(0) = 0, \quad k_1 = 0, 1 \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

然而，对于常系数线性微分方程（如式（10）），外载荷函数 的特性在一定程度上会影响傅里叶级数多尺度解的收敛性和计算精度。在某些特定条件下，我们可以将外载荷函数分解为两部分，即粗尺度分量 和细尺度分量，并采用不同的方法求解微分方程对这两部分的响应。

更具体地说，我们选取一个具有特定形式的函数 （例如代数多项式），使得

$$\mathcal{L}_{bf} w_s = q_s. \tag{19}$$

将其代入式（10），得到

$$\mathcal{L}_{bf} (w - w_s) = q - q_s. \tag{20}$$

不失一般性，设式（20）的傅里叶级数多尺度解为

$$w - w_s = w_0 + w_1, \tag{21}$$

因此，方程 (10) 的解为

$$w = w_0 + w_1 + w_s. \tag{22}$$

为简便起见，我们也将式（22）称为式（10）的傅里叶级数多尺度解。因此，傅里叶级数多尺度解不仅包含必要项， 和，还包含可选项和补充项。根据式（10）w的通解和特解的定义，我们还可以将函数称为式（10）w_s的补充解。

可以看出，合理选择补充解能够有效提高傅里叶级数多尺度解的收敛性和计算精度。

3.3. 通解

假设式（17.a）的齐次解为

$$p_H(x_1)=\exp(\eta x_1), \tag{23}$$

其中 是一个待定常数。

将式（23）代入式（17.a），得到特征方程

$$EI\eta^4-G_p\eta^2+k=0. \tag{24}$$

我们定义地基的地基比较地基反力模量

$$G_{pr}=\frac{G_p a^2}{EI}, \tag{25}$$

以及地基的比较剪切模量

$$k_r=\frac{ka^4}{EI}. \tag{26}$$

容易验证，当，

$$\eta_1=\alpha_1,\ \eta_2=-\alpha_1,\ \eta_3=\alpha_2,\ \eta_4=-\alpha_2, \tag{27}$$

where $\alpha_1=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left[G_{pr}+\sqrt{G_{pr}^2-4k_r}\right]}$，$\alpha_2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}\left[G_{pr}-\sqrt{G_{pr}^2-4k_r}\right]}$.

当，式 (24) 有两个不同的二重实根

，，其中

$$\eta_1=\eta_2=\alpha_3\quad \eta_3=\eta_4=-\alpha_3 \tag{28}$$

当，式 (24) 有四个不同的复根

$$\eta_{1,2,3,4}=\pm\alpha_5\pm i\alpha_6, \tag{29}$$

其中，$\alpha_5>0$以及$\alpha_6>0$ $i=\sqrt{-1}$

此外，根据特征方程（24）的特征根分布，我们可以确定四个线性无关齐次解，，如表1所示。

1, 2, 3, 4升

表 1：的表达式，$p_{l,H}(x_1)$ $=1\ 2\ 3\ 4$，

	$G_{pr}^2-4k_r>0$	$G_{pr}^2-4k_r=0$	$G_{pr}^2-4k_r<0$
$p_{1,H}(x_1)$	$\frac{\sinh(\alpha_1 x_1)}{\sinh(\alpha_1 a)}$	$\frac{\sinh(\alpha_3 x_1)}{\sinh(\alpha_3 a)}$	$\frac{\sinh(\alpha_5 x_1)\sin(\alpha_6 x_1)}{\sinh(\alpha_5 a)\sin(\alpha_6 a)}$
$p_{2,H}(x_1)$	$\frac{\alpha_1 a-x_1}{\sinh(\alpha_1 a)}$	$\frac{x_1\sinh(\alpha_3 x_1)}{a\sinh(\alpha_3 a)}$	$\frac{\alpha_5 a-x_1}{\sinh(\alpha_5 a)\sin(\alpha_6 a)}$
$p_{3,H}(x_1)$	$\frac{\alpha_2 x_1}{\sinh(\alpha_2 a)}$	$\frac{\alpha_3 a-x_1}{\sinh(\alpha_3 a)}$	$\frac{\alpha_5 a-x_1}{\sinh(\alpha_5 a)\sin(\alpha_6 a)}$
$p_{4,H}(x_1)$	$\frac{\alpha_2 a-x_1}{\sinh(\alpha_2 a)}$	$\frac{\alpha_3 a-x_1}{a\sinh(\alpha_3 a)}$	$\frac{\alpha_5 a-x_1}{\alpha_5 a}$

当计算参数 从 1.0 调整至， 并依次变化时，齐次解，，的演化分别如图 1-3 所示。10^6

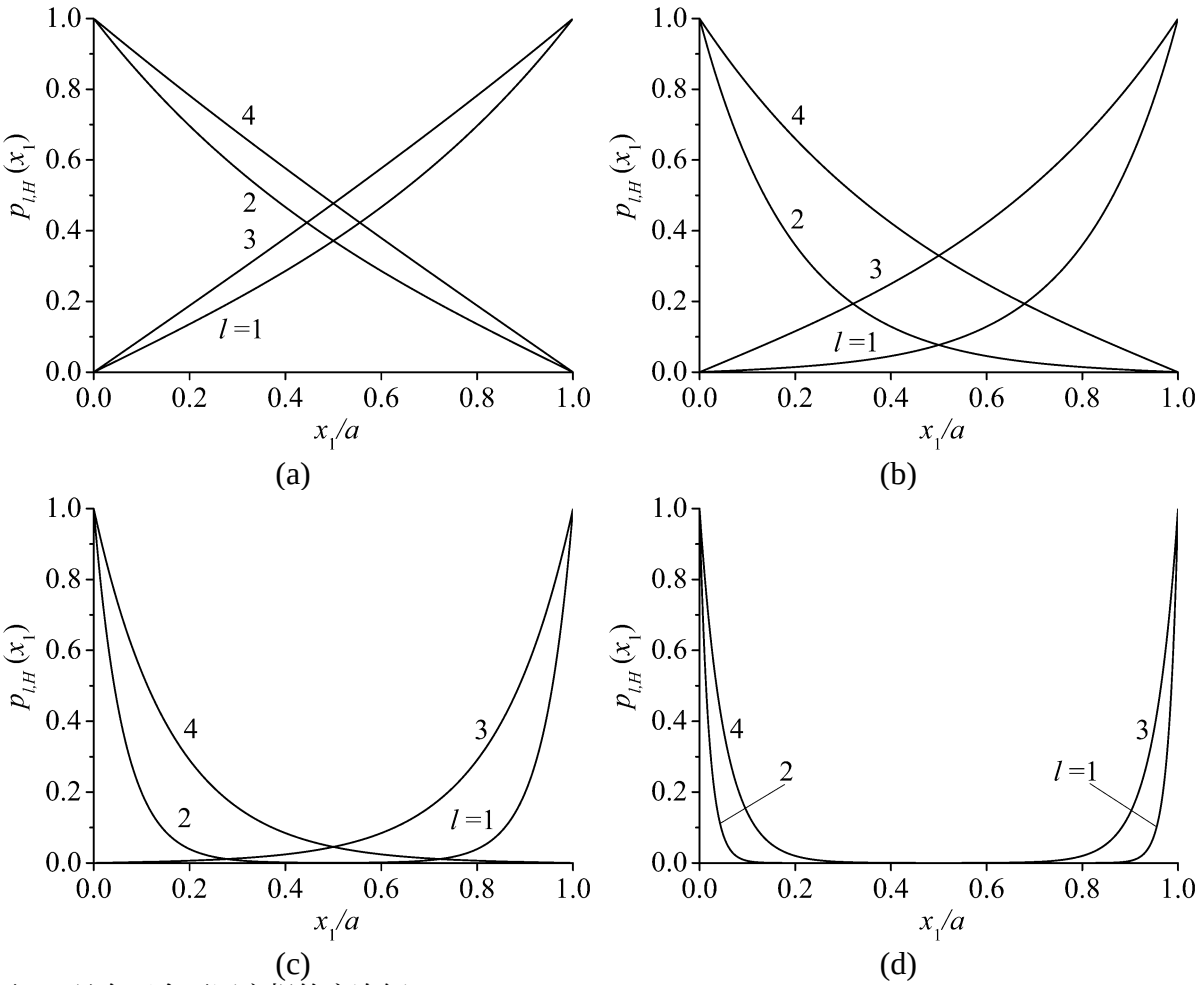


图 1：具有四个不同实根的齐次解：(a)，，(b)，，(c)，，(d)，。

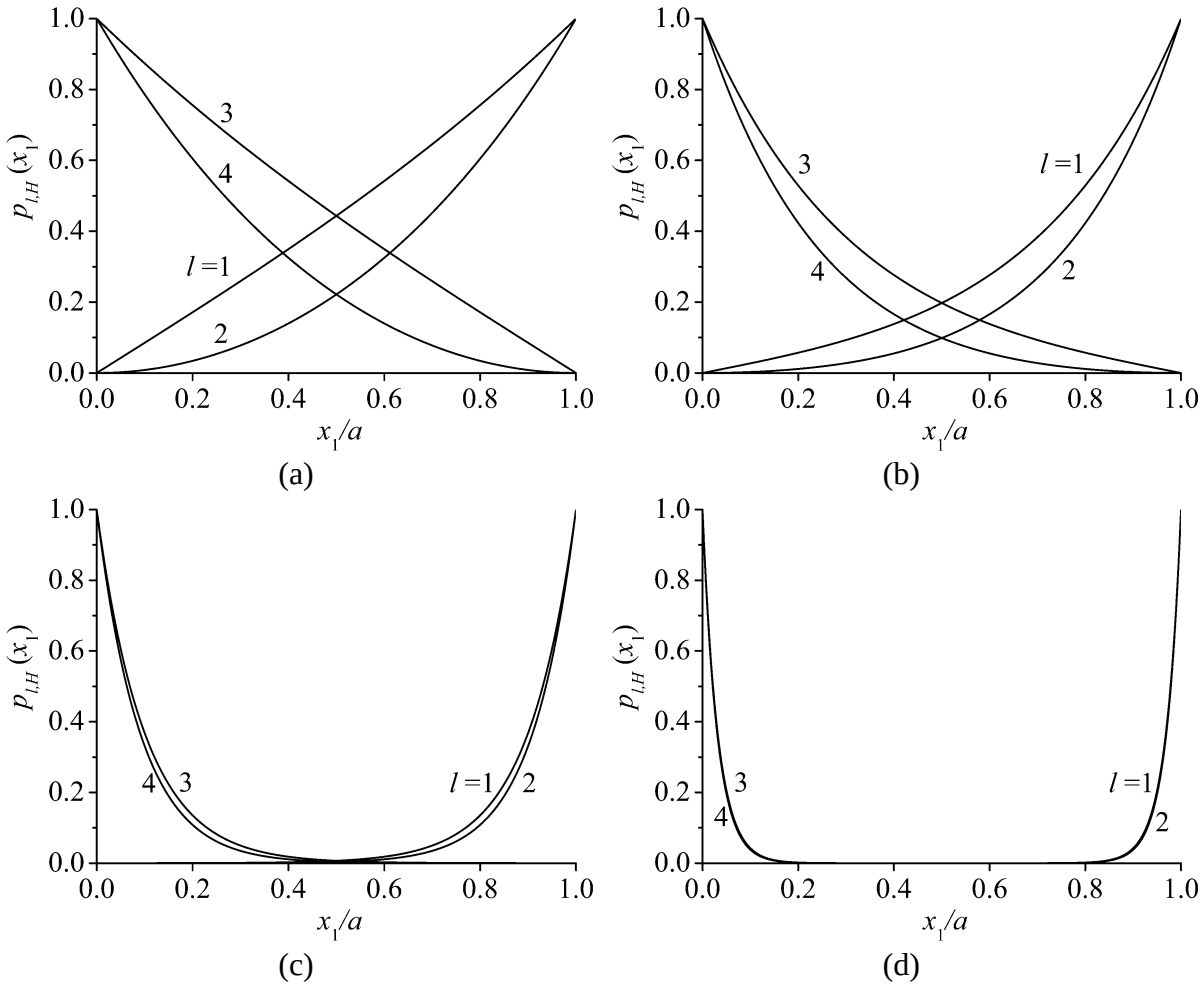
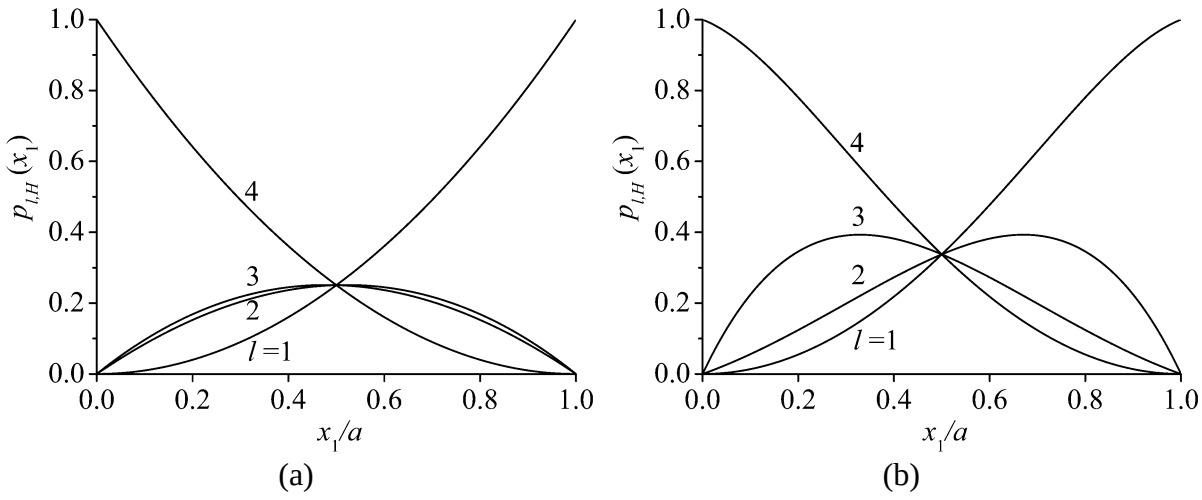
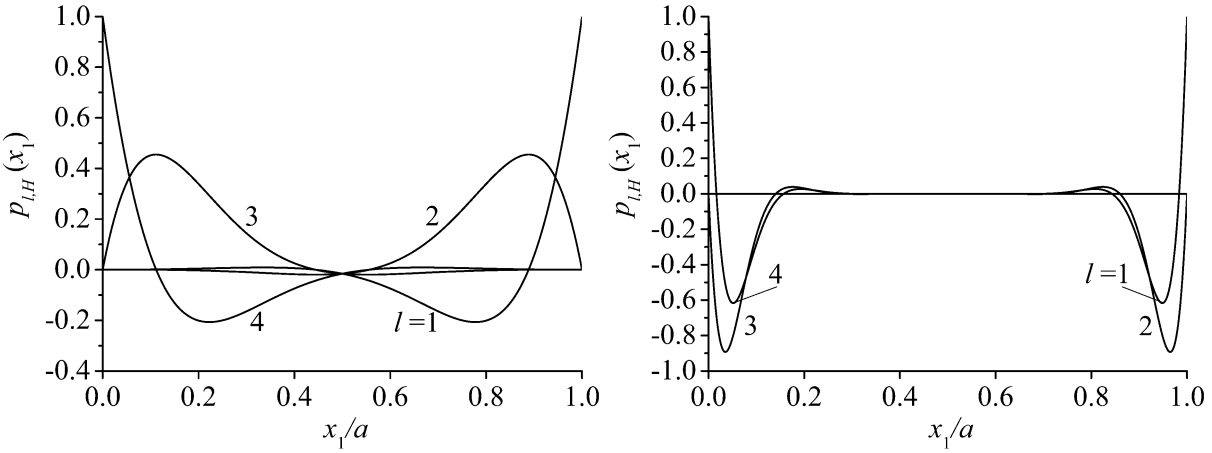


图2：具有两个实二重根的齐次解：(a)，，(b)，，(c)，，(d)，。

$_r=10.$ $_{pr}=2\sqrt{\ _r}$ $_r=10^2$ $_{pr}=2\sqrt{\ _r}$ $_r=10^4$ $_{pr}=2\sqrt{\ _r}$ $_r=10^6$

$_{pr}=2\sqrt{\ _r}$





(c) (d)

具有四个不同复根的齐次解：(a)，、(b)、、(c)、、(d)、。

$_r=1\,0.$ $_{pr}=0$ $_r=10^2$ $_{pr}=0$ $_r=10^4$ $_{pr}=0$ $_r=10^6$ $_{pr}=0$

我们选择函数向量

$$\mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}(x_1)=[p_{1,H}(x_1)\quad p_{2,H}(x_1)\quad p_{3,H}(x_1)\quad p_{4,H}(x_1)], \tag{30}$$

对于，我们定义所选函数的导数向量

$$\mathbf{p}_1^{(k_1)\mathrm{T}}(x_1)=[p_{1,H}^{(k_1)}(x_1)\quad p_{2,H}^{(k_1)}(x_1)\quad p_{3,H}^{(k_1)}(x_1)\quad p_{4,H}^{(k_1)}(x_1)]. \tag{31}$$

此外，设待定常数向量，则可构造边界函数

$$w_1(x_1)=\mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{a}_1. \tag{32}$$

对于边界函数，考虑式（17.b）中给出的条件，我们有

$$\mathbf{R}_1\mathbf{a}_1=\mathbf{q}_1, \tag{33}$$

其中

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1^{(0)\mathrm{T}}(a)\\ \mathbf{p}_1^{(2)\mathrm{T}}(a)\\ \mathbf{p}_1^{(0)\mathrm{T}}(0)\\ \mathbf{p}_1^{(2)\mathrm{T}}(0)\end{bmatrix}, \tag{34}$$

以及向量涉及解函数的边界值及其导数

$$\mathbf{q}_1^{\mathrm{T}}=[w^{(0)}(a)\quad w^{(2)}(a)\quad w^{(0)}(0)\quad w^{(2)}(0)]=[w(a)\quad w^{(2)}(a)\quad w(0)\quad w^{(2)}(0)]. \tag{35}$$

因此，我们有

$$\mathbf{a}_1=\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{q}_1. \tag{36}$$

若将基函数向量记为

$$\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)=\mathbf{p}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{R}_1^{-1}, \tag{37}$$

那么，对应于边界函数的通解，最终可表示为

$$w_1(x_1)=\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_1. \tag{38}$$

3.4. 补充解

设 为正整数，且 是在区间 上均匀分布的一组插值点。现在我们要构造载荷函数 的插值代数多项式，使得满足以下插值条件

$$q_s(x_{1,n_1}) = q(x_{1,n_1}),\ \ n_1 = 1, 2, \cdots, N_1^s + 1. \tag{39}$$

为此，我们选取由代数多项式构成的函数向量

$$\mathbf{p}_{qs}^{\mathrm{T}}(x_1) = [p_{qs,1}(x_1) \quad p_{qs,2}(x_1) \quad \cdots \quad p_{qs,\,N_1^s+1}(x_1)], \tag{40}$$

其中

$$p_{qs,\,j}(x_1) = (x_1/a)^{j-1},\ \ j = 1, 2, \cdots, N_1^s + 1, \tag{41}$$

并定义待定常数向量

$$\mathbf{a}_{qs}^{\mathrm{T}} = [H_{qs,1} \quad H_{qs,2} \quad \cdots \quad H_{qs,\,N_1^s+1}], \tag{42}$$

则插值代数多项式 可表示为

$$q_s(x_1) = \mathbf{p}_{qs}^{\mathrm{T}}(x_1) \cdot \mathbf{a}_{qs}. \tag{43}$$

结合式（39）中的插值条件，可得

$$\mathbf{R}_{qs}\mathbf{a}_{qs} = \mathbf{q}_{qs}, \tag{44}$$

其中

$$\mathbf{R}_{qs} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{qs}^{\mathrm{T}}(x_{1,1}) \\ \mathbf{p}_{qs}^{\mathrm{T}}(x_{1,2}) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{qs}^{\mathrm{T}}(x_{1,N_1^s+1}) \end{bmatrix}, \tag{45}$$

以及向量值函数

$$\mathbf{q}_{qs}^{\mathbf{T}} = [q(x_{1,1}) \quad q(x_{1,2}) \quad \cdots \quad q(x_{1,N_1^s+1})]. \tag{46}$$

此外，我们将式（10）的补充解设为代数多项式的形式。

对于 ，我们不失一般性地选取代数多项式形式的函数向量

$$\mathbf{p}_s^{\mathrm{T}}(x_1) = [p_{s,1}(x_1) \quad p_{s,2}(x_1) \quad \cdots \quad p_{s,\,N_1^s+1}(x_1)], \tag{47}$$

其中

$$p_{s,\,j}(x_1) = (x_1/a)^{j-1},\ \ j = 1, 2, \cdots, N_1^s + 1, \tag{48}$$

并定义待定常数向量

$$\mathbf{a}_s^{\mathrm{T}} = [G_{s,1} \quad G_{s,2} \quad \cdots \quad G_{s,\,N_1^s+1}], \tag{49}$$

因此，方程（10）的补充解可表示为

$$w_s(x_1) = \mathbf{p}_s^{\mathrm{T}}(x_1) \cdot \mathbf{a}_s. \tag{50}$$

将补充解代入方程（19）

we 得到

$$\mathbf{R}_s\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_{qs}, \tag{51}$$

其中矩阵

$$\mathbf{R}_s = [r_{s,ij}]_{i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N_1^s+1}, \tag{52}$$

with

$$r_{s,ij} = \begin{cases} k, & \text{if } j = i,\ i = 1, 2, \cdots, N_1^s + 1 \\ -G_p a^{-2} i(i+1), & \text{if } j = i+2,\ i = 1, 2, \cdots, N_1^s - 1 \\ EIa^{-4} i(i+1)(i+2)(i+3), & \text{if } j = i+4,\ i = 1, 2, \cdots, N_1^s - 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{53}$$

因此

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{a}_{qs}. \tag{54}$$

定义基函数向量

$$\mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(x_1) = \mathbf{p}_s^{\mathrm{T}}(x_1) \cdot \mathbf{R}_s^{-1} \mathbf{R}_{qs}^{-1}. \tag{55}$$

然后，补充解 可表示为 $w_s(x_1)$

$$w_s(x_1) = \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(x_1) \cdot \mathbf{q}_{qs}. \tag{56}$$

在某些情况下，补充解 不会引入傅里叶级数多尺度解中， 为方便起见，记作。 $q_s(x_1)$

$$q_s = 0$$

3.5. 特解

设插值代数多项式的误差 相对于载荷函数 为 $q_p(x_1)$

$$q_p(x_1) = q(x_1) - q_s(x_1), \tag{57}$$

于是，由插值条件可知

$$q_p(0) = 0,\ q_p(a) = 0. \tag{58}$$

在区间上将其展开为半区间傅里叶正弦级数，得到 $[0,\ a]$

$$q_p(x_1) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{qp,2m} \sin(\alpha_m x_1), \tag{59}$$

其中，且 是的傅里叶系数 $\alpha_m = m\pi / a$ $V_{qp,2m}$ $q_p(x_1)$

记

$$\varphi_{02m}(x_1) = \sin(\alpha_m x_1),\ m = 1, 2, \cdots, \tag{60}$$

则有:

对于非负偶整数 , k_1

$$\varphi_{02m}^{(k_1)}(x_1) = (-1)^{k_1/2} \alpha_m^{k_1} \sin(\alpha_m x_1); \tag{61}$$

对于非负奇整数, k_1

$$\varphi_{02m}^{(k_1)}(x_1) = (-1)^{(k_1-1)/2} \alpha_m^{k_1} \cos(\alpha_m x_1). \tag{62}$$

此外， 可表示为矩阵形式 $q_p(x_1)$

$$q_p(x_1) = \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1) \cdot \mathbf{q}_{qp,02}, \tag{63}$$

其中三角函数向量

$$\mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1) = [\varphi_{021}(x_1) \quad \varphi_{022}(x_1) \quad \cdots \quad \varphi_{02m}(x_1) \quad \cdots], \tag{64}$$

和 ve ctor of Fourier coefficients

$$\mathbf{q}_{qp,02}^{\mathrm{T}} = [V_{qp,21} \quad V_{qp,22} \quad \cdots \quad V_{qp,2m} \quad \cdots]. \tag{65}$$

同时，假设方程（10）具有傅里叶级数形式的特解

$$w_0(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{02}, \tag{66}$$

其中，未定傅里叶系数向量

$$\mathbf{q}_{02}^{\mathrm{T}}=[V_{21}\quad V_{22}\quad\cdots\quad V_{2m}\quad\cdots]. \tag{67}$$

将式（63）和（66）代入式（20），可得

$$[\mathcal{L}_{bf}\boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1)]\cdot\mathbf{q}_{02}=\boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{qp,02}, \tag{68}$$

可通过傅里叶系数比较法（FCCM）求解。

对于特解，令 为傅里叶级数的截断项数，并依次比较式 （68）两边的前 个傅里叶系数，可得 M M

$$(EI\alpha_m^4+G_p\alpha_m^2+k)V_{2m}=V_{qp,2m},\ \ m=1,2,\cdots,M. \tag{69}$$

通过这种方法，可以得到未定傅里叶系数向量 。 $\mathbf{q}_{02}$

3.6. 傅里叶级数多尺度解的表达式

将式（66）、（38）和（56）合并，可将双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度解表示为

$$\begin{aligned}w(x_1)&=w_0(x_1)+w_1(x_1)+w_s(x_1)\\&=\boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{02}+\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_1+\boldsymbol{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{qs},\end{aligned} \tag{70}$$

其中，待定常数向量 和 与载荷函数及其对应的插值代数多项式 相关，并由式（69）、（59）和式 （46）分别确定。然而，待定常数向量需要通过令上述方程满足给定的边界条件来确定。 $\mathbf{q}_{02}$ $\mathbf{q}_{qs}$ α_x α_x $\mathbf{q}_1$

3.7. 解的等效变换

在双参数地基上梁的弹性弯曲分析中，从第3.6节可知，通过强制解满足边界条件，可以完全确定其中涉及的傅里叶系数和展开常数。然而，这会给变分方法的应用带来困难，因为变分方法要求预先满足位移型边界条件。因此，本节对初始未定常数的变化进行等效变换。F

为简洁起见，假设位移型边界条件表示为

$$\mathbf{q}_b=[w(0)\quad w^{(1)}(0)\quad w(a)\quad w^{(1)}(a)]^{\mathrm{T}}=[w(0)\quad\theta(0)\quad w(a)\quad\theta(a)]^{\mathrm{T}}. \tag{71}$$

然后将式（70）代入式（71），得到

$$\mathbf{q}_1=\mathbf{R}_f^{-1}\mathbf{q}_b-\mathbf{R}_f^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{02}+\boldsymbol{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{qs}\\ \boldsymbol{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{02}+\boldsymbol{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{qs}\\ \boldsymbol{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{02}+\boldsymbol{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{qs}\\ \boldsymbol{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{02}+\boldsymbol{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{qs}\end{bmatrix}, \tag{72}$$

其中

$$\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_1^{(1)\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(a) \\ \mathbf{\Phi}_1^{(1)\mathrm{T}}(a) \end{bmatrix}. \tag{73}$$

代入式（70）得

$$w(x_1) = \mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{R}_f^{-1}\mathbf{q}_b + \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{02} + \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{qs}$$

$$-\mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{R}_f^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{02} + \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{qs} \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{02} + \mathbf{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(0)\cdot\mathbf{q}_{qs} \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{02} + \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{qs} \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{02} + \mathbf{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(a)\cdot\mathbf{q}_{qs} \end{bmatrix}. \tag{74}$$

我们将函数向量记为

$$\mathbf{\Phi}_b^{\mathrm{T}}(x_1) = \mathbf{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{R}_f^{-1}, \tag{75}$$

$$\mathbf{\Phi}_{0R}^{\mathrm{T}}(x_1) = \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(x_1) - \mathbf{\Phi}_b^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{\mathrm{T}}(a) \\ \mathbf{\Phi}_{02}^{(1)\mathrm{T}}(a) \end{bmatrix}, \tag{76}$$

$$\mathbf{\Phi}_{sR}^{\mathrm{T}}(x_1) = \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(x_1) - \mathbf{\Phi}_b^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(0) \\ \mathbf{\Phi}_s^{\mathrm{T}}(a) \\ \mathbf{\Phi}_s^{(1)\mathrm{T}}(a) \end{bmatrix}, \tag{77}$$

并将函数记为

$$w_{0R}(x_1) = \mathbf{\Phi}_{0R}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{02}, \tag{78}$$

$$w_b(x_1) = \mathbf{\Phi}_b^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_b, \tag{79}$$

$$w_{sR}(x_1) = \mathbf{\Phi}_{sR}^{\mathrm{T}}(x_1)\cdot\mathbf{q}_{qs}, \tag{80}$$

则双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度解可改写为

$$w(x_1) = w_{0R}(x_1) + w_b(x_1) + w_{sR}(x_1). \tag{81}$$

式（81）仍与其原始形式式（70）相似，但位移型边界条件现已明确纳入解中。换言之，与边界函数相关的原始系数，已转化为一组新的系数，这组系数具体取决于位移型边界条件。

4. 变分法

除了通常采用的傅里叶系数比较法（FCCM）外，还采用变分法（VM），更准确地说是最小势能法，来分析地基上的梁。

在这种情况下，不将补充解 引入傅里叶级数多尺度解。因此，在式（81）中，我们记

$$\mathbf{q}_{qs}=\mathbf{0}, \tag{82}$$

并分别将修正后的基函数向量 和修正后的系数向量表示为

$$\mathbf{\Phi}_R^{\mathrm{T}}=\left[\mathbf{\Phi}_{0R}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{\Phi}_b^{\mathrm{T}}\right], \tag{83}$$

$$\mathbf{q}_R^{\mathrm{T}}=[\mathbf{q}_{02}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{q}_b^{\mathrm{T}}]. \tag{84}$$

并且根据 dingly, Eq. (81) beco

$$w=\mathbf{\Phi}_R^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{q}_R. \tag{85}$$

根据公式（4）—（6），梁的横向挠度、斜率、弯矩和剪力可表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} w\\ \theta\\ M\\ Q\end{bmatrix}=\mathbf{\Gamma}_R\cdot\mathbf{q}_R, \tag{86}$$

其中矩阵

$$\mathbf{\Gamma}_R=\begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_{R,w}\\ \mathbf{\Gamma}_{R,\theta}\\ \mathbf{\Gamma}_{R,M}\\ \mathbf{\Gamma}_{R,Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_R^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{\Phi}_R^{(1)\mathrm{T}}\\ EI\mathbf{\Phi}_R^{(2)\mathrm{T}}\\ EI\mathbf{\Phi}_R^{(3)\mathrm{T}}\end{bmatrix}. \tag{87}$$

对于梁和双参数地基，系统能量可表示为

$$\Pi=\Pi_b+\Pi_f+\Pi_q+\Pi_\sigma, \tag{88}$$

其中 为梁的弹性势能， 为双参数地基的弹性势能， 为分布于梁上的横向载荷的势能， 为施加在梁的应力边界上的弯矩和横向剪力的总势能。

具体而言，梁的弹性势能为

$$\Pi_b=\frac{1}{2EI}\int_0^a M^2(x_1)dx_1. \tag{89}$$

双参数地基的弹性势能为

$$\Pi_f=\frac{1}{2}\int_0^a[kw^2(x_1)+G_p(\frac{dw}{dx_1})^2]dx_1. \tag{90}$$

沿梁分布的横向载荷的势能为

$$\Pi_q=-\int_0^a qw(x_1)dx_1. \tag{91}$$

如果梁的所有端部均指定为应力边界，并且端部施加了弯矩和横向剪力，则相应的势能为

$$\Pi_\sigma=-\overline{Q}_a w(a)-\overline{M}_a\theta(a)+\overline{Q}_0 w(0)+\overline{M}_0\theta(0). \tag{92}$$

其中 和 分别为梁端部 处指定的弯矩和剪力。

将式（89）—（92）代入式（88），可得

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{bf}\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_R^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{bf}\,, \tag{93}$$

其中刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{bf} = \int_0^a [\frac{1}{EI}\boldsymbol{\Gamma}_{R,M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{R,M} + k\boldsymbol{\Gamma}_{R,w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{R,w} + G_p\boldsymbol{\Gamma}_{R,\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{R,\theta}]dx_1 \tag{94}$$

以及矢量 or of the resultant forces

$$\mathbf{Q}_{bf} = \int_0^a q\boldsymbol{\Gamma}_{R,w}^{\mathrm{T}}dx_1 + \overline{Q}_a\boldsymbol{\Gamma}_{R,w}^{\mathrm{T}}(a) + \overline{M}_a\boldsymbol{\Gamma}_{R,\theta}^{\mathrm{T}}(a) - \overline{Q}_0\boldsymbol{\Gamma}_{R,w}^{\mathrm{T}}(0) - \overline{M}_0\boldsymbol{\Gamma}_{R,\theta}^{\mathrm{T}}(0)\,. \tag{95}$$

相应的驻定条件最终变为

$$\mathbf{K}_{bf}\mathbf{q}_R = \mathbf{Q}_{bf}\,. \tag{96}$$

5. 数值算例

如表2所示，我们采用涵盖广泛计算参数和边界条件的设置，实现了双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度方法，并分析了载荷函数插值代数多项式的插值阶数以及离散方程推导方法对傅里叶级数多尺度解收敛特性和近似精度的影响。通过这种方式，我们优化了双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度解的计算方案。基于优化后的计算方案，我们研究了不同计算参数下置于双参数地基上的梁的多尺度特征。

表2：双参数地基上梁弹性弯曲的计算方案。

问题配置	计算方案		
边界条件	计算参数 $(k_r)G_{pr}$	插值阶数 插值代数的载荷函数的多项式函数	推导方法 对于离散的方程
CC	$(10^6, 0)$	$N_1^s = 0$	FCCM
SS	$(10^6, 1000)$	$N_1^s = 1$	VM
CF	$(10^6, 2000)$	$N_1^s = 2$	
	$(10^6, 3000)$		

5.1. 收敛特性

如表3所示，我们依次开展了三组收敛性对比实验，以详细分析若干可能因素对傅里叶级数多尺度解收敛特性的影响。这些可能因素包括：梁在双参数地基上发生弹性弯曲的控制微分方程中涉及的计算参数和边界条件，以及其傅里叶级数

多尺度解（载荷函数的插值代数多项式阶数和离散方程的推导方法）。我们采用表3第一列所规定的计算方案作为参考方案，然后调整单个因素（见表3中的相应行），得到三组收敛性对比实验。例如，在第一组实验中，我们以参考计算方案为起点，将载荷函数的插值代数多项式阶数依次从0调整为1和2。在第二组实验中，我们以参考计算方案为起点，引入变分法（VM）作为离散方程的第二种推导方法，然后依次调整地基的计算参数 从0调整为1000、2000和3000。最后，基于

G_{pr}

在参考计算方案中，我们通过引入变分法作为离散方程的第二种推导方法，并依次将边界条件从广义固支边界条件（CC）调整为广义简支边界条件（SS）和广义固支-自由边界条件（CF），开展第三组实验。

在所进行的收敛性比较实验中，载荷函数保持不变，其三次代数多项式形式如下

$$q(x_1) = EIa^{-3}[10^3 + 2\times10^3\frac{x_1}{a} + 5\times10^3(\frac{x_1}{a})^2 + 10^4(\frac{x_1}{a})^3]，\ x_1 \in [0, a]，\tag{97}$$

因此，将载荷函数的 adjust the order of the interpolational algebraical polynomia 取为三，可得傅里叶系数向量

$$\mathbf{q}_{02} = \mathbf{0}，\tag{98}$$

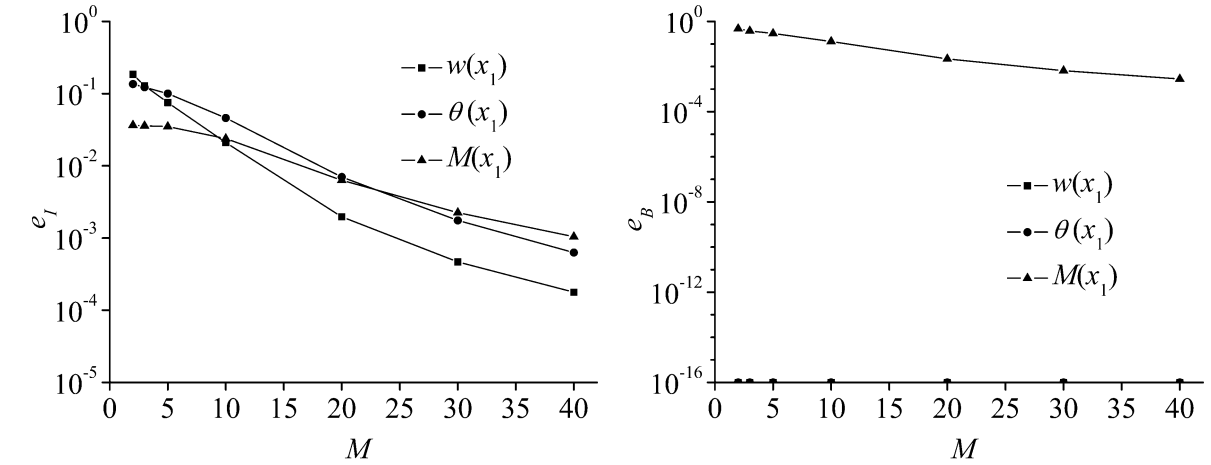
因此，式（70）给出的傅里叶级数多尺度解，或等价地式（81），得出了双参数地基上梁的弹性弯曲精确解。

表3：双参数地基上梁的弹性弯曲收敛性比较实验。

数值实验	No.	边界条件	计算参数 $(k_r，G_{pr})$	插值阶数 插值代数的多项式的载荷函数	推导方法，用于离散的方程
1	a b c	CC	$(10^6, 0)$	$_1^{s=0]}$ $N_1^s = 1$ $N_1^s = 2$	FCCM
2	a b c d	CC	$(10^6, 0)$ $(10^6, 1000)$ $(10^6, 2000)$ $(10^6, 3000)$	$_1^{s=0]}$	FCCM VM
3	a b c	CC SS CF	$(10^6, 0)$	$_1^{s=0]}$	FCCM VM

1. 总体收敛特性

对于表3中给出的参考计算方案，我们依次取傅里叶级数多尺度解的复合傅里叶级数的前2、3、5、10、20、30和40项进行截断，然后计算梁的挠度[47]的内部近似误差和边界近似误差（见）、斜率以及弯矩。部分结果见图4。



(a) (b)

图4：双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度解的收敛特性：(a) - 曲线，(b) - 曲线。

e_I M e_B M

随着复合傅里叶级数截断项数量的增加，近似误差指标计算值的变化如下：

a. 内部近似误差随着复合傅里叶级数截断项数量的增加而迅速减小。当截断项数量为10时，近似误差已约为2.0E-2，并呈现持续快速下降的趋势。当截断项数量为40时，近似误差进一步降低了2个数量级。

b. 随着复合傅里叶级数截断项数量的增加，边界近似误差始终极小。近似误差均低于1.0E-16。

c. 内部近似误差随着复合傅里叶级数截断项数量的增加而迅速减小。当截断项数量为10时，近似误差已约为5.0E-2，并呈现持续下降的趋势。当截断项数量为40时，近似误差进一步降低了2个数量级。

d. 随着复合傅里叶级数的截断项数增加，边界近似误差仍然极小。近似误差均低于 1.0E-16。

随着复合傅里叶级数截断项数量的增加，近似误差迅速减小。当截断项数量为 10 时，近似误差已约为 2.0E-2，并呈现出

持续下降。而当截断项的数量达到 40 时，近似误差会进一步降低一个数量级。

f. 复合傅里叶级数中截断项数量的增加，使得边界近似误差缓慢减小。当截断项数量为 10 时，近似误差已约为 1.0E-1，并呈现持续下降的趋势。当截断项数量为 40 时，近似误差进一步降低了 2 个数量级。

因此，双参数地基上梁弹性弯曲的傅里叶级数多尺度解的收敛特性总结如下：梁挠度、斜率和弯矩的复合傅里叶级数不仅在解区间内，而且在边界上也收敛良好。

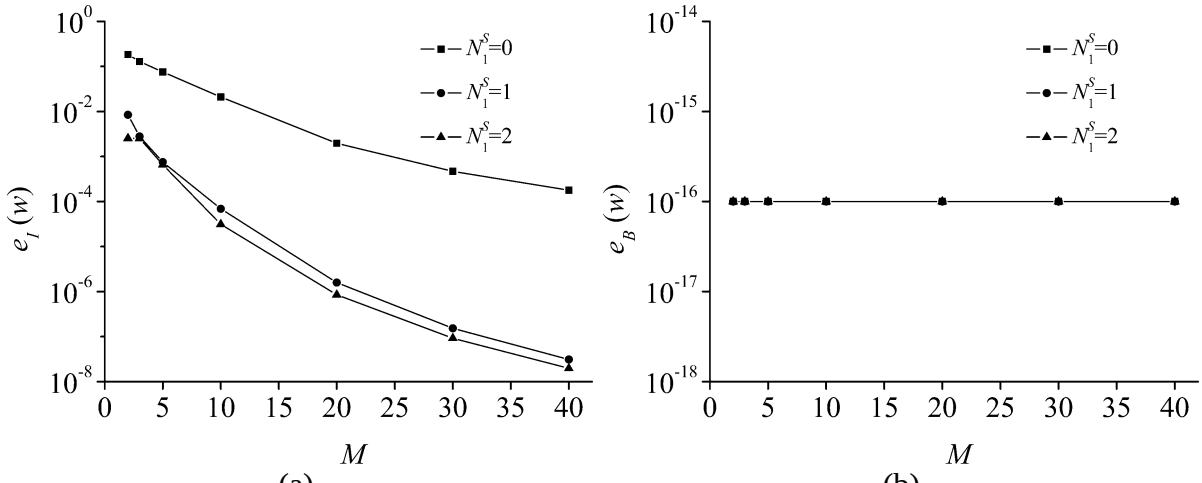
2. 收敛性对比实验 1 当插值代数

载荷函数的多项式次数依次从零变为一和二时，傅里叶级数多尺度解收敛特性的演变如图5所示。我们简要分析如下：

a. 和的复合傅里叶级数在解区间内的收敛性几乎保持不变，即复合傅里叶级数在解区间内均收敛良好。然而，当复合傅里叶级数的截断项数为40时，相应的近似误差分别降低了4、3至4和4个数量级。

b. 和的复合傅里叶级数在解区间边界上的收敛性几乎保持不变，即复合傅里叶级数在边界上均收敛良好。此外，随着复合傅里叶级数截断项数的增加，和的近似误差仍极小（均低于1.0E-16）。

c. 复合傅里叶级数的收敛性 在解区间的边界处几乎保持不变，即复合傅里叶级数在边界处均能良好收敛。当复合傅里叶级数的截断项数等于 40 时，相应的近似误差均降低了 4 个数量级。



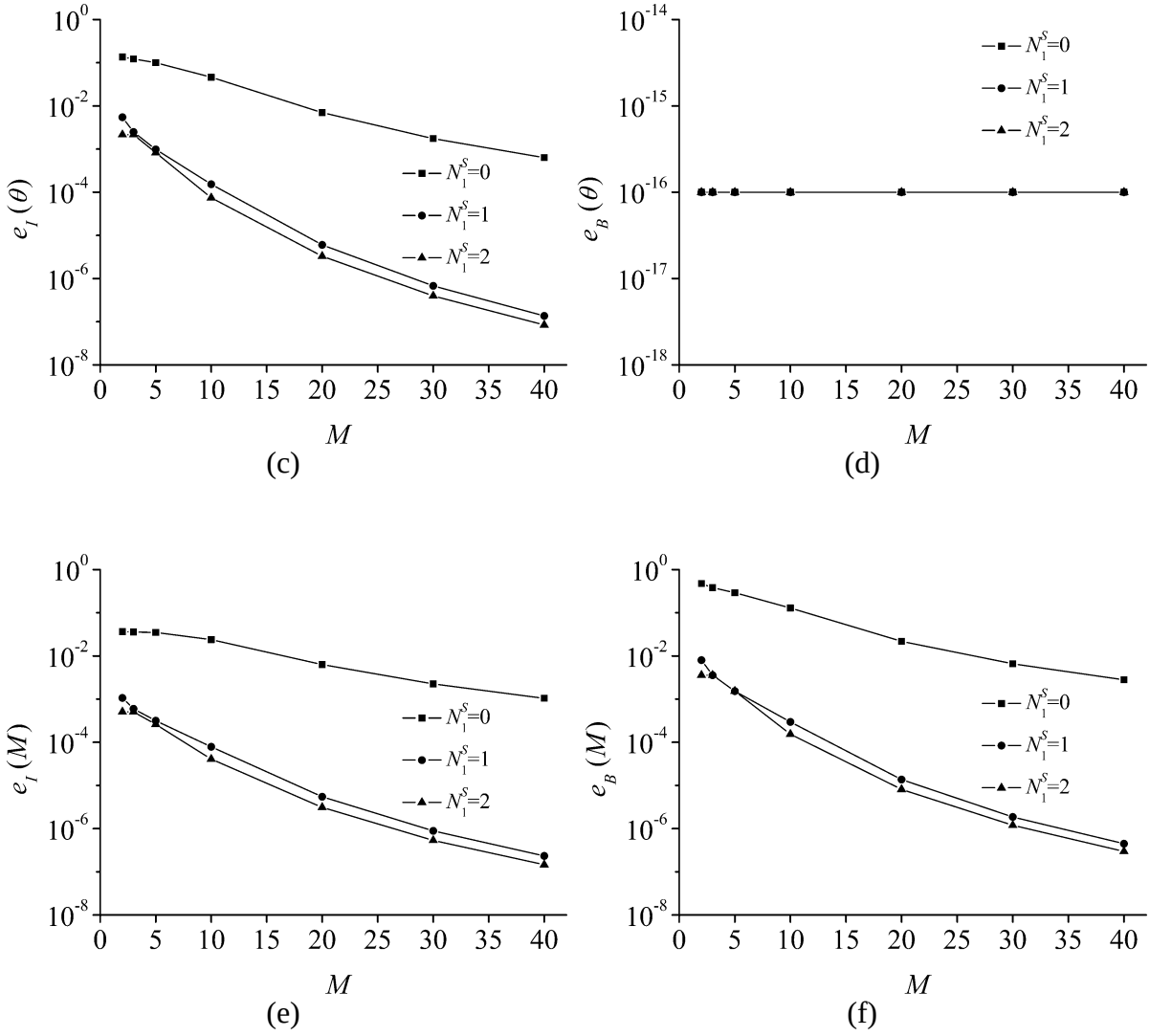


图 5：不同阶横向载荷插值多项式下傅里叶级数多尺度解的收敛性对比：(a) - 曲线，(b) - 曲线，(c) - 曲线，(d) - 曲线，(e) - 曲线，(f) - 曲线。

3. 收敛性对比实验 2

当地基的一个计算参数 取值为 ，另一个计算参数依次从0变化到1000、2000年和3000年时，图6展示了采用傅里叶系数比较法（FCCM）得到的傅里叶级数多尺度解的收敛特性演变。简要分析如下：

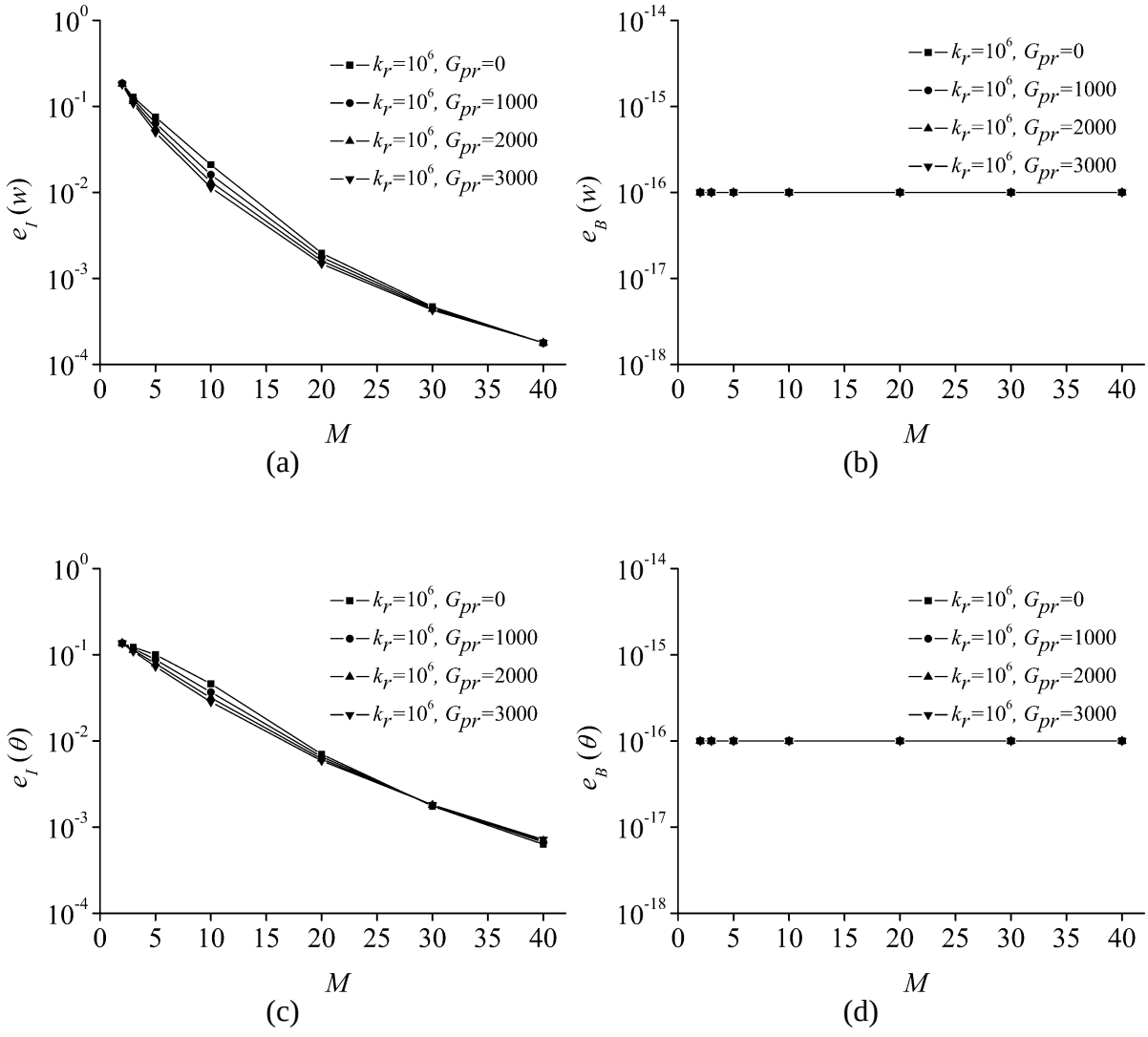
a. ， 和的复合傅里叶级数在解区间内的收敛性几乎保持不变，也就是说，复合傅里叶级数在解区间内均收敛良好。同时，当复合傅里叶级数的截断项数等于 40 时，相应的近似误差在数量级上没有差异。

b. 与 的复合傅里叶级数的收敛性几乎保持不变

在解区间的边界上保持不变，即复合傅里叶级数在边界上均收敛良好。此外，随着复合傅里叶级数截断项数目的增加，和的近似误差仍然极小（均低于 1.0E-16）。

c. 复合傅里叶级数的收敛性 在解区间边界处几乎保持不变，即复合傅里叶级数在边界处均收敛良好。此外，当复合傅里叶级数的截断项数量为 40 时，所对应的近似误差在数量上没有显著差异。

作为比较，图7展示了通过 变分法（VM）获得的傅里叶级数多尺度解的收敛特性演变。我们得出了相同的结论。



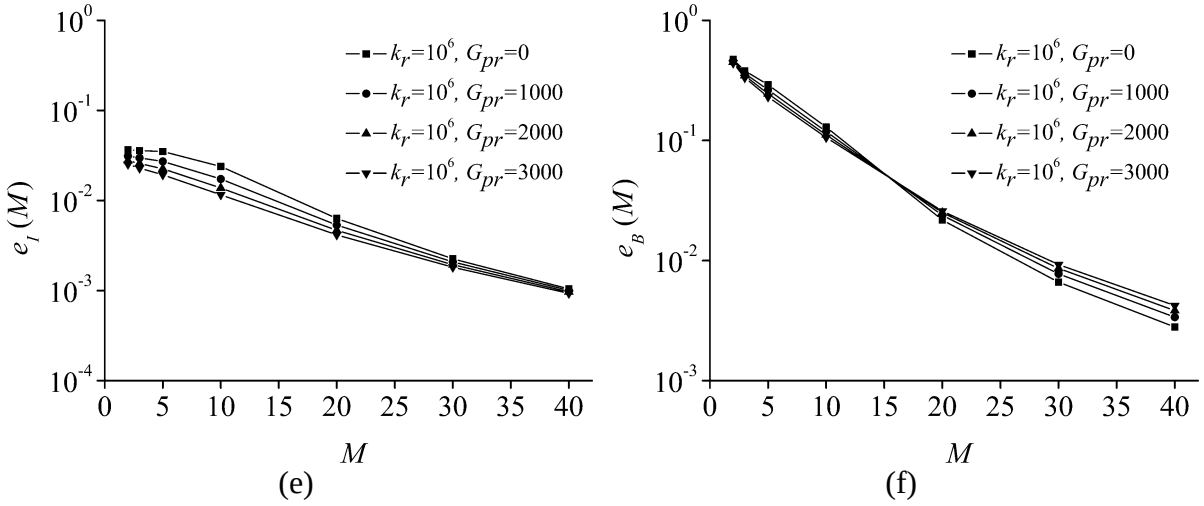
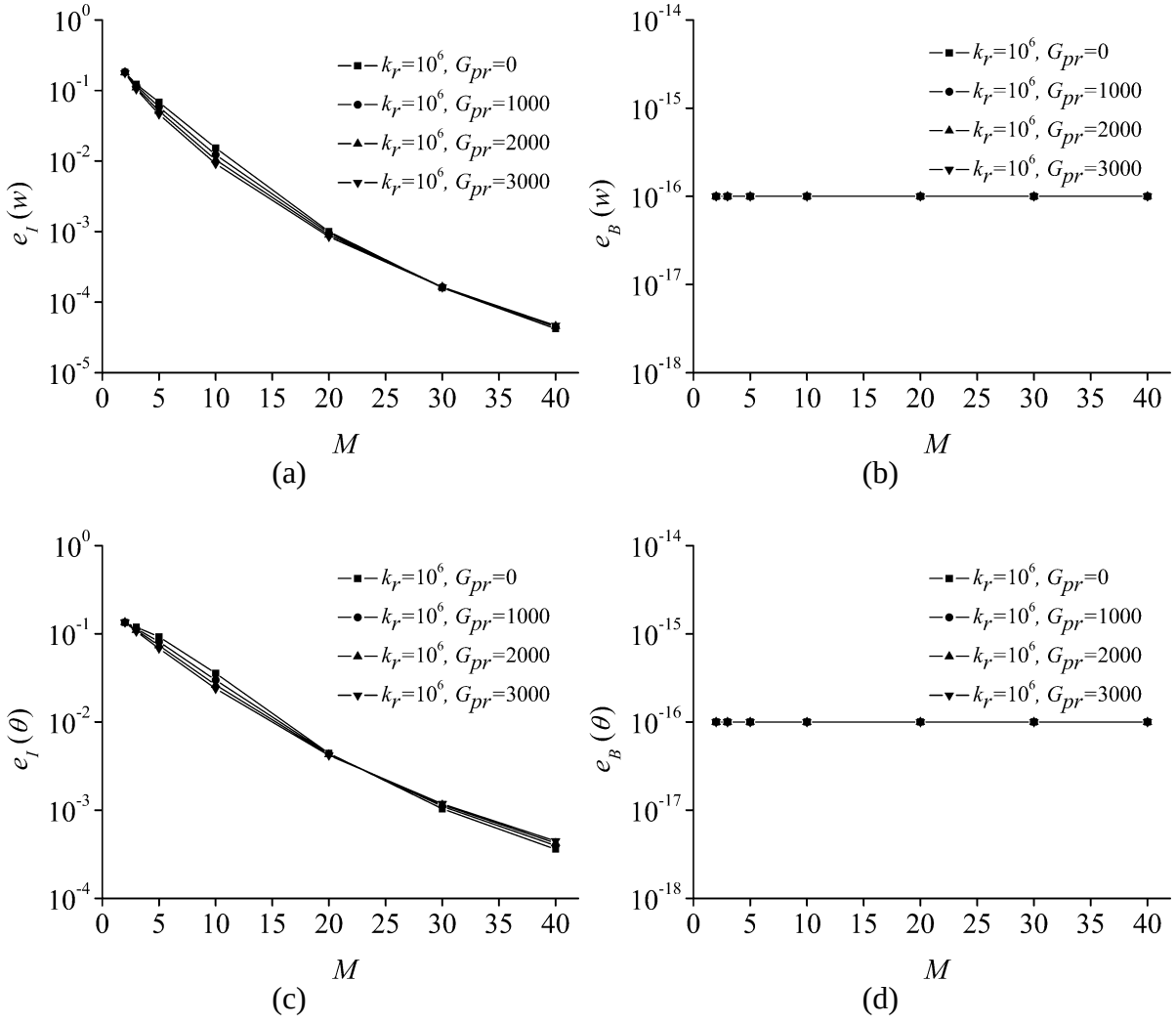


图6：FCCM得到的傅里叶级数多尺度解的收敛性比较，以及采用不同计算参数时的比较 和： k_r G_{pr}

(a) - 曲线，(b) - 曲线，(c) - 曲线，(d) - 曲线，(e) - 曲线，(f) - 曲线。 M



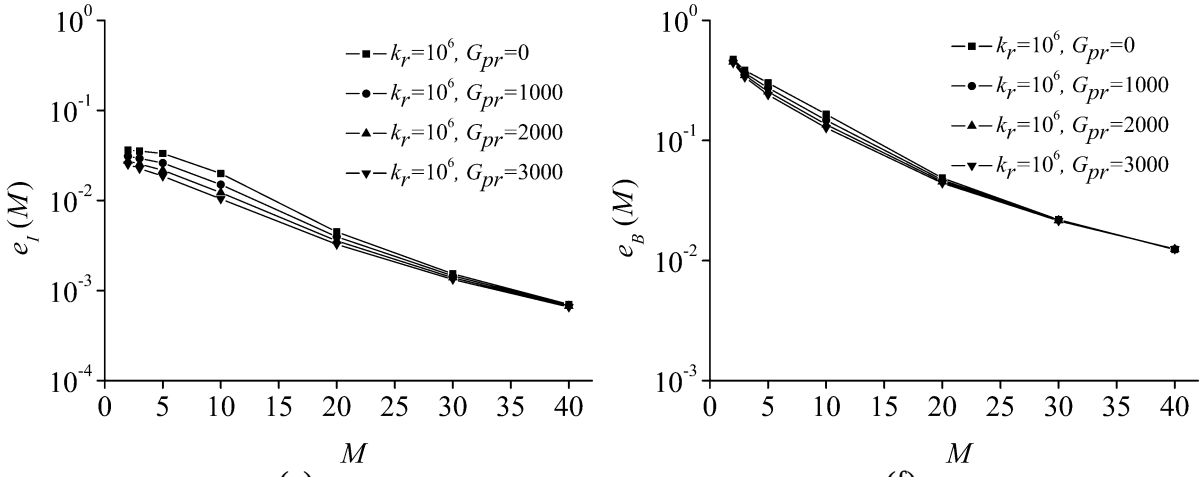


图7：通过变分法（VM）以及采用不同计算参数和计算参数得到的傅里叶级数多尺度解的收敛性对比：

k_r G_{pr}

(a) - 曲线，M(b) - 曲线，(c) - 曲线，M(d) - 曲线，(e) - 曲线，M(f) - 曲线。 M

$e_I(M)$ M $e_B(M)$ M

4. 收敛性对比实验 3 当弹性梁的

双参数地基上的梁的边界条件从CC边界条件变为SS边界条件和CF边界条件时，傅里叶系数比较法（FCCM）所得傅里叶级数多尺度解的收敛特性演变如图8所示。简要分析如下：

a. 复合傅里叶级数在解区间内的收敛性几乎保持不变，即复合傅里叶级数在解区间内收敛良好。然而，当复合傅里叶级数的截断项数等于40时，相应的近似误差分别增加0.5个数量级和减少1.5个数量级。

b. 复合傅里叶级数在解区间内的收敛性随边界条件而变化。对于CC边界条件和SS边界条件，复合傅里叶级数收敛良好。当复合傅里叶级数的截断项数等于40时，相应的近似误差略有增加。然而，对于CF边界条件，复合傅里叶级数在解区间内的收敛性显著变差。当复合傅里叶级数的截断项数等于40时，相应的近似误差分别增加3个和2个数量级。

c. 复合傅里叶级数在解区间边界处的收敛性因边界条件而有显著差异。对于CC边界条件和 SS边界条件，复合傅里叶级数的收敛性良好。更确切地说，在这两种

边界条件下，和的近似误差随着复合傅里叶级数截断项数量的增加而始终极小（均低于 1.0E-16）；或者当复合傅里叶级数的截断项数量等于 40 时，相应的近似误差降至 3.0E-3。对于 CF 边界条件，解区间边界处的复合傅里叶级数的收敛性明显变差。当复合傅里叶级数的截断项数量等于 40 时，相应的

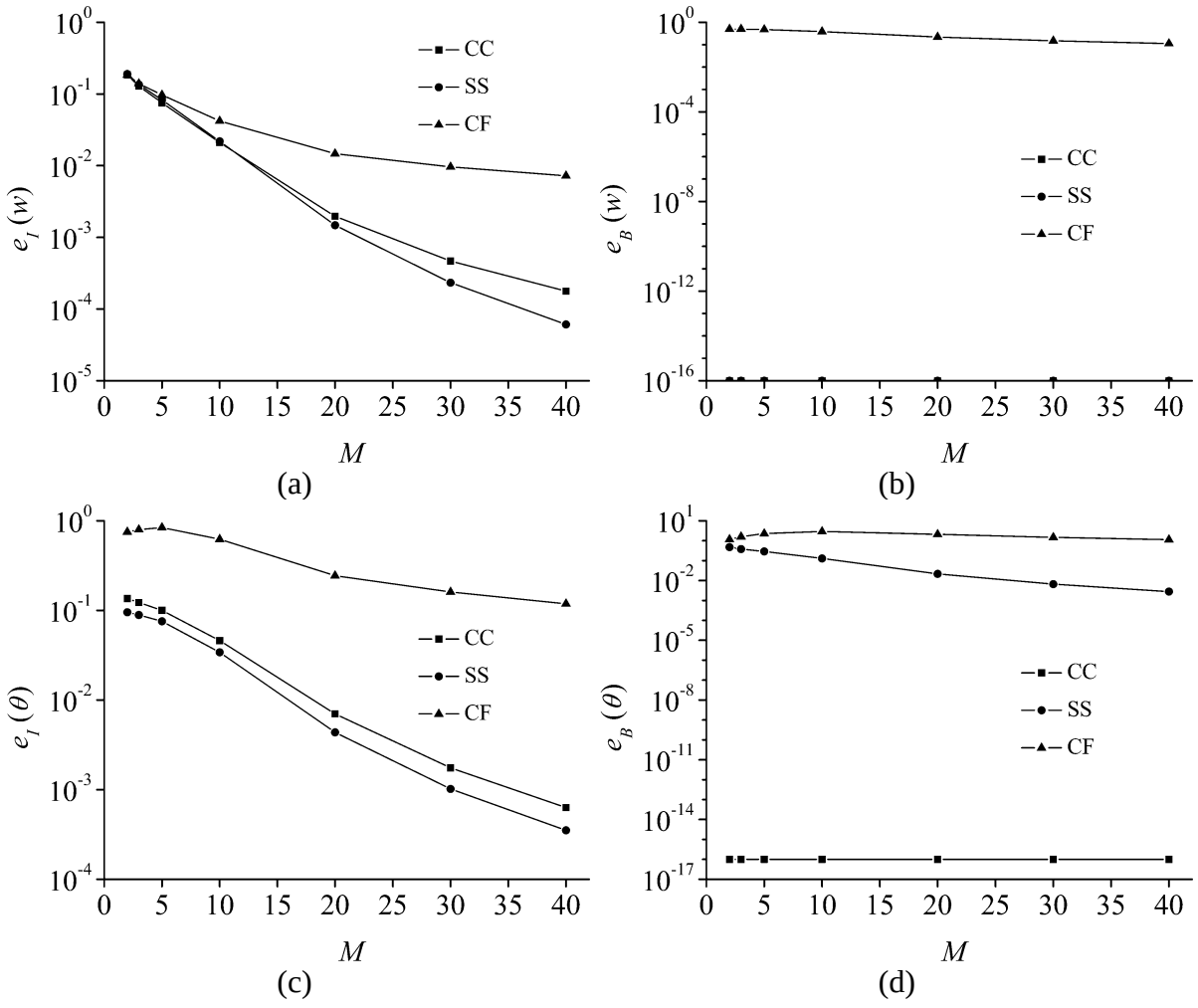
近似误差分别高达 0.11 和 1.13。

作为对比，图 9 展示了通过 变分法（VM）获得的傅里叶级数多尺度解的收敛特性演变。我们还进行了简要分析，结果如下：

a. 复合傅里叶级数、、的收敛性在解区间内几乎保持不变，即所有复合傅里叶级数在解区间内均具有良好的收敛性。同时，当复合傅里叶级数的截断项数为 40 时，相应的近似误差数量级相同，或分别增加 0-1 和 1-2 个数量级。

b. 在解区间边界处，、和的复合傅里叶级数收敛性几乎保持不变，即复合傅里叶级数在边界处均收敛良好。此外，随着复合傅里叶级数截断项数量的增加，和的近似误差仍极小（均低于 2.0E-7）。此外，当复合傅里叶级数的截断项数量为 40 时，在三种边界条件下，相应的近似误差分别为 1.2E-2、3.5E-2 和 1.8E-1。

最后，随着复合傅里叶级数截断项数量的增加，CC边界条件下、和对应的曲线分别如图10所示，CF边界条件下的对应曲线如图11所示。变分法（VM）的优势也得到了充分展现。



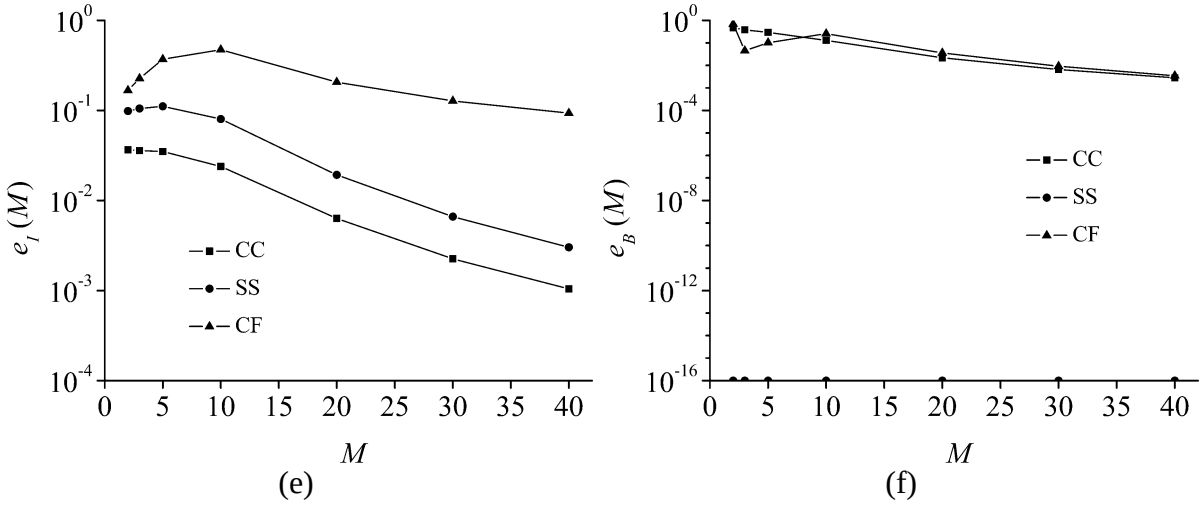
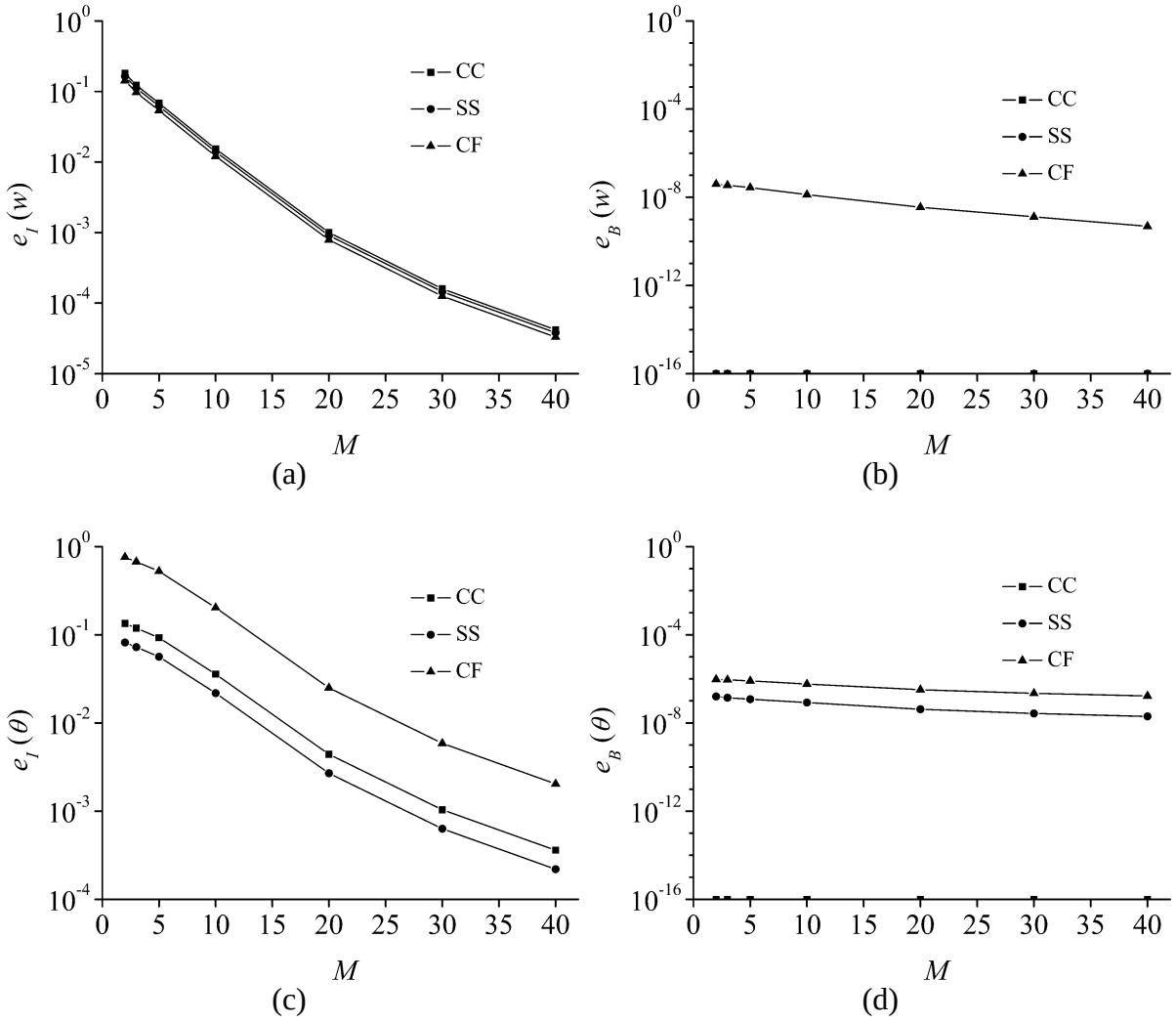


图8：FCCM 得到的傅里叶级数多尺度解以及不同边界条件下解的收敛性对比：

(a) - 曲线，(b) - 曲线，(c) - 曲线，(d) - 曲线，(e) - 曲线，(f) - 曲线。



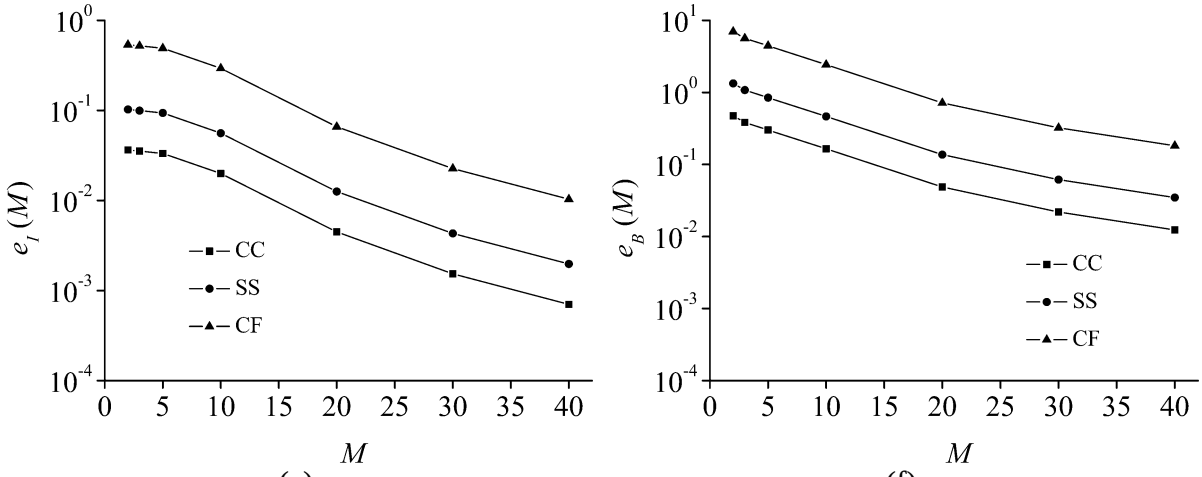
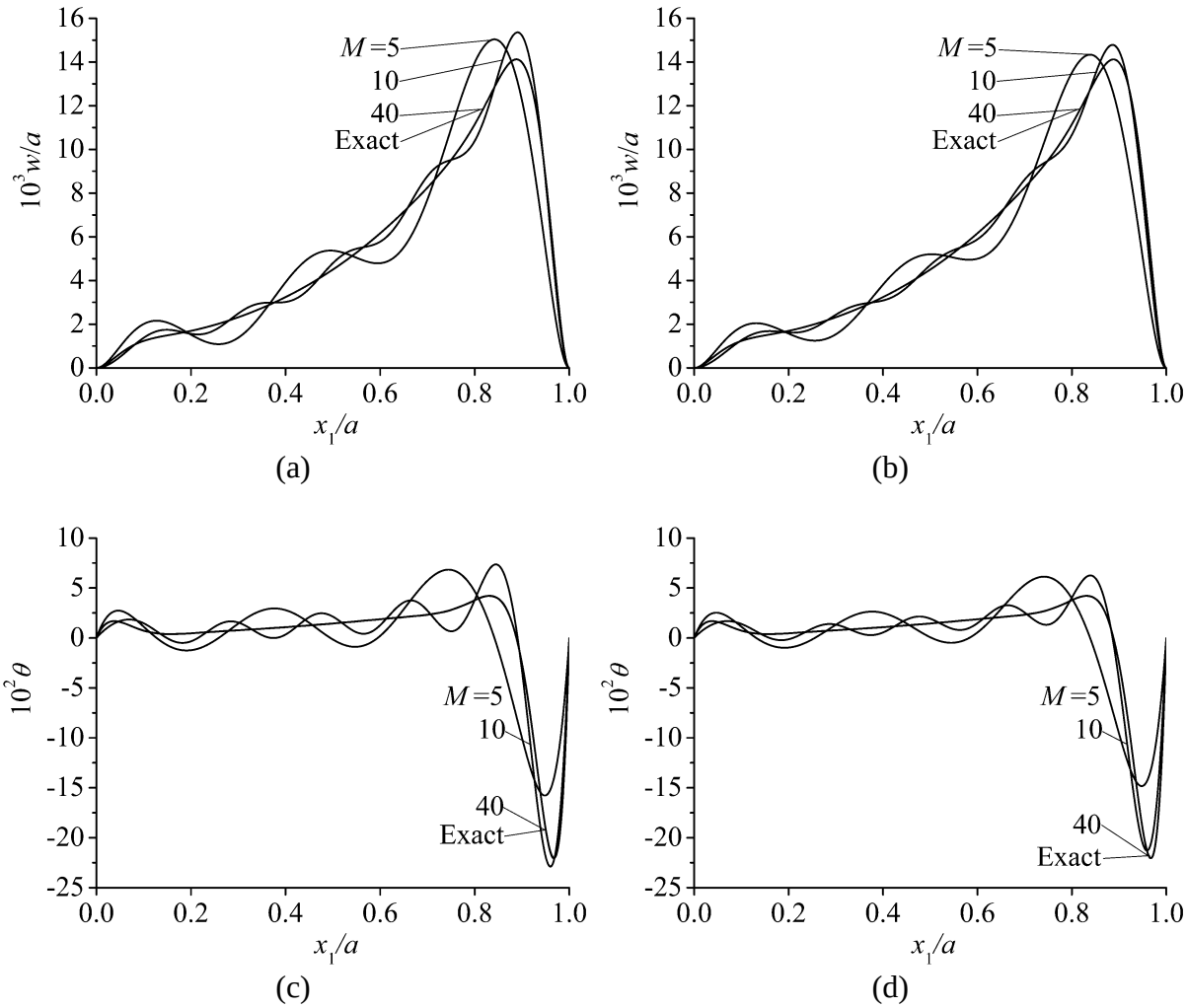


图 9：变分法获得的傅里叶级数多尺度解及不同边界条件下解的收敛性比较：

(a) - 曲线，$e_I(M)$ 曲线；(b) - 曲线，$e_B(M)$ 曲线；(c) - 曲线，$e_{\theta I}(M)$ 曲线；(d) - 曲线，$e_{\theta B}(M)$ 曲线；(e) - 曲线，$e_{\theta e}(M)$ 曲线；(f) - 曲线。



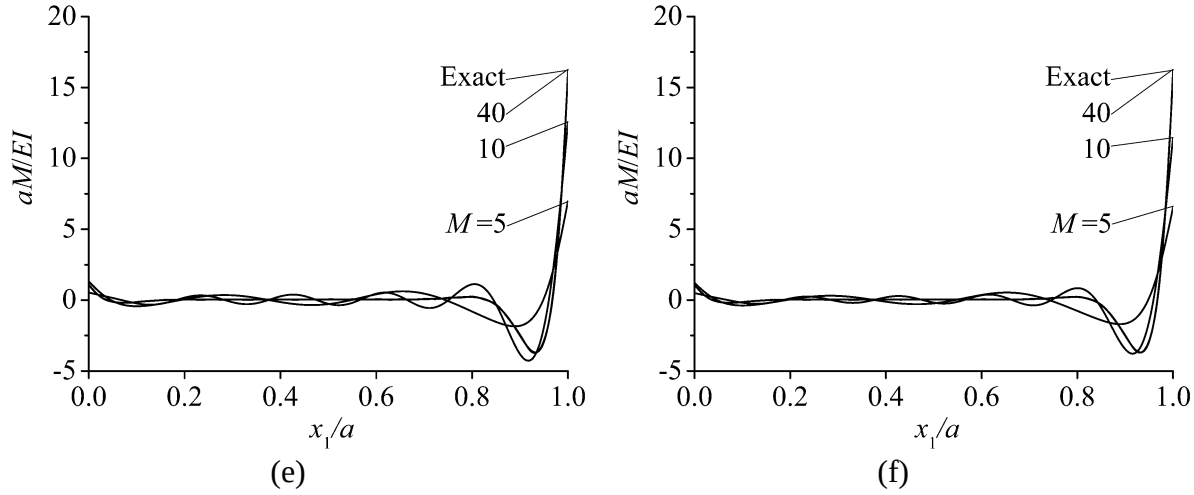
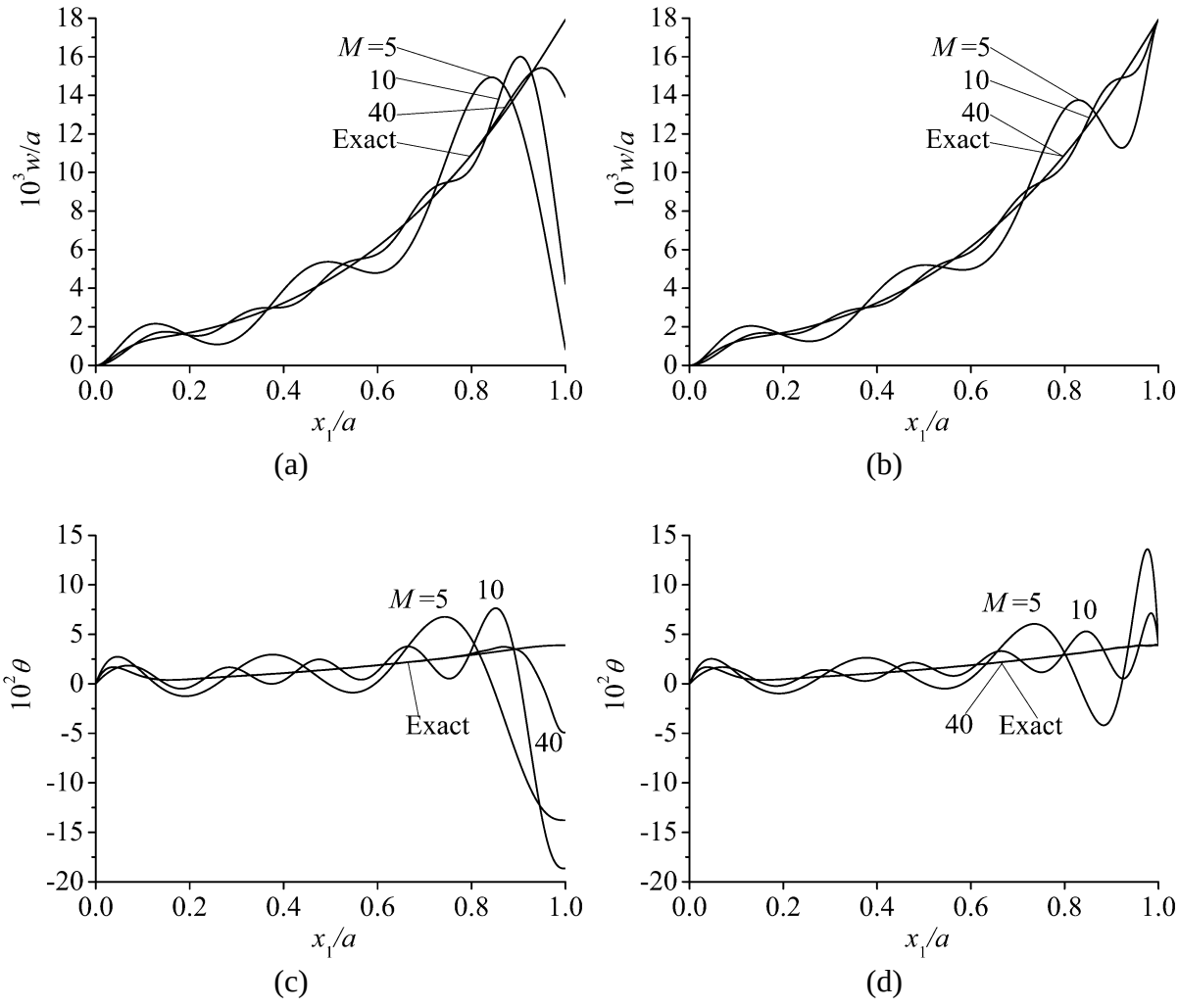


图10：CC边界条件下傅里叶级数多尺度解的收敛性比较：

（a）- 曲线（FCCM），（b）- 曲线（VM），（c）- 曲线（FCCM），（d）- 曲线（VM），（e）- 曲线（FCCM），（f）- 曲线（VM）。



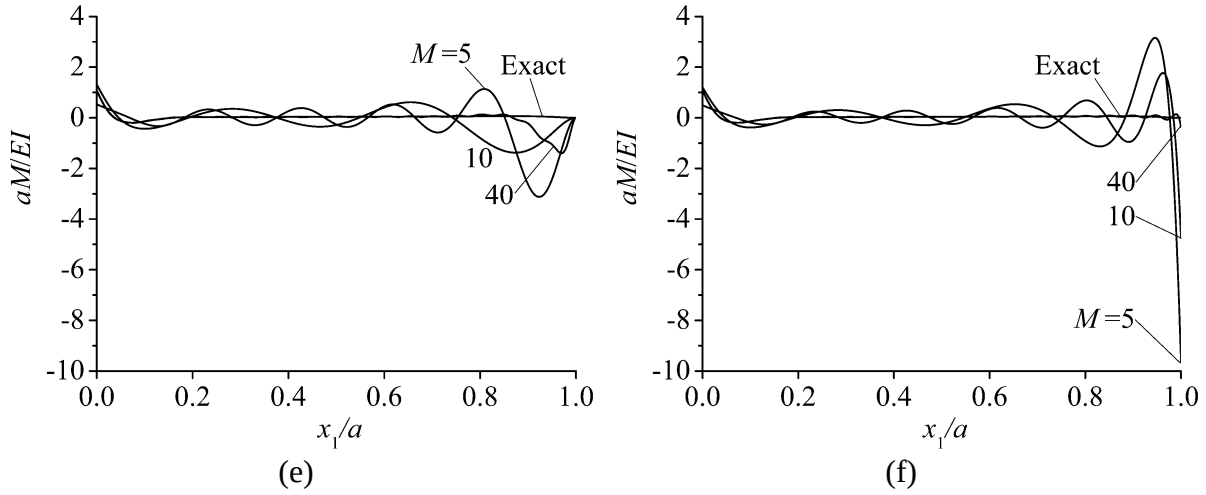


图11：CF边界条件下傅里叶级数多尺度解的收敛性比较：

(a) - 曲线（FCCM），(b) - 曲线（VM），(c) - 曲线（FCCM），(d) - 曲线（VM），(e) - 曲线（FCCM），(f) - 曲线（VM）。

5.2 多尺度特性

如图12所示，作用于梁上的横向载荷形式为

$$q(x_1) = q_0[1000\delta(x_1 - 0.5) + 1000], \quad x_1 \in [0,1], \tag{99}$$

其中。我们以这个拟格林函数问题为例，研究计算参数变化时双参数地基上梁的弹性弯曲的多尺度特征。

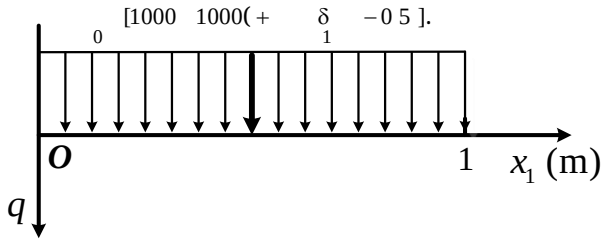


图12：作用于梁上的横向载荷。

对于上述拟格林函数问题，我们在表4中给出了详细的计算方案。

如表4所示，对于梁在双参数地基上的弹性弯曲问题，我们分别将计算参数 预设为 0、10^2, 10^4, 和 10^6 ，然后将计算参数 依次从 0 调整至 1000、2000 和 3000。对于这些不同的计算参数，我们将复合傅里叶级数截断为 40 项，并在图13中给出梁相应的横向相对挠度，，。可以观察到，当参数 取较小值（如 1.0 和 10^2）时，横向相对挠度在区间 内变化平缓。

$$k_r \qquad [0,1]$$

随着参数进一步增大至 10^4，，集中载荷的作用点（）处出现一个凸起，且随着参数减小，凸起的陡峭程度显著增加。最终，当参数增大至 10^6,时，集中载荷作用点处明显的凸起演变为尖锐的峰值。此外，对于参数，峰值两侧均存在波动。

表4：双参数地基上梁的弹性弯曲准格林函数问题的计算方案。

问题描述		求解方案	
边界条件	计算参数 $(k_r)\ G_{pr}$	插值阶数 插值代数的载荷函数	推导方法 对于离散的方程
FF	(1.0, 0) (1.0, 1000) (1.0, 2000) (1.0, 3000)	$_1{}^{s=0]}$	VM
FF	$(10^2, 0)$ $(10^2, 1000)$ $(10^2, 2000)$ $(10^2, 3000)$	$_1{}^{s=0]}$	VM
FF	$(10^4, 0)$ $(10^4, 1000)$ $(10^4, 2000)$ $(10^4, 3000)$	$_1{}^{s=0]}$	VM
FF	$(10^6, 0)$ $(10^6, 1000)$ $(10^6, 2000)$ $(10^6, 3000)$	$_1{}^{s=0]}$	VM

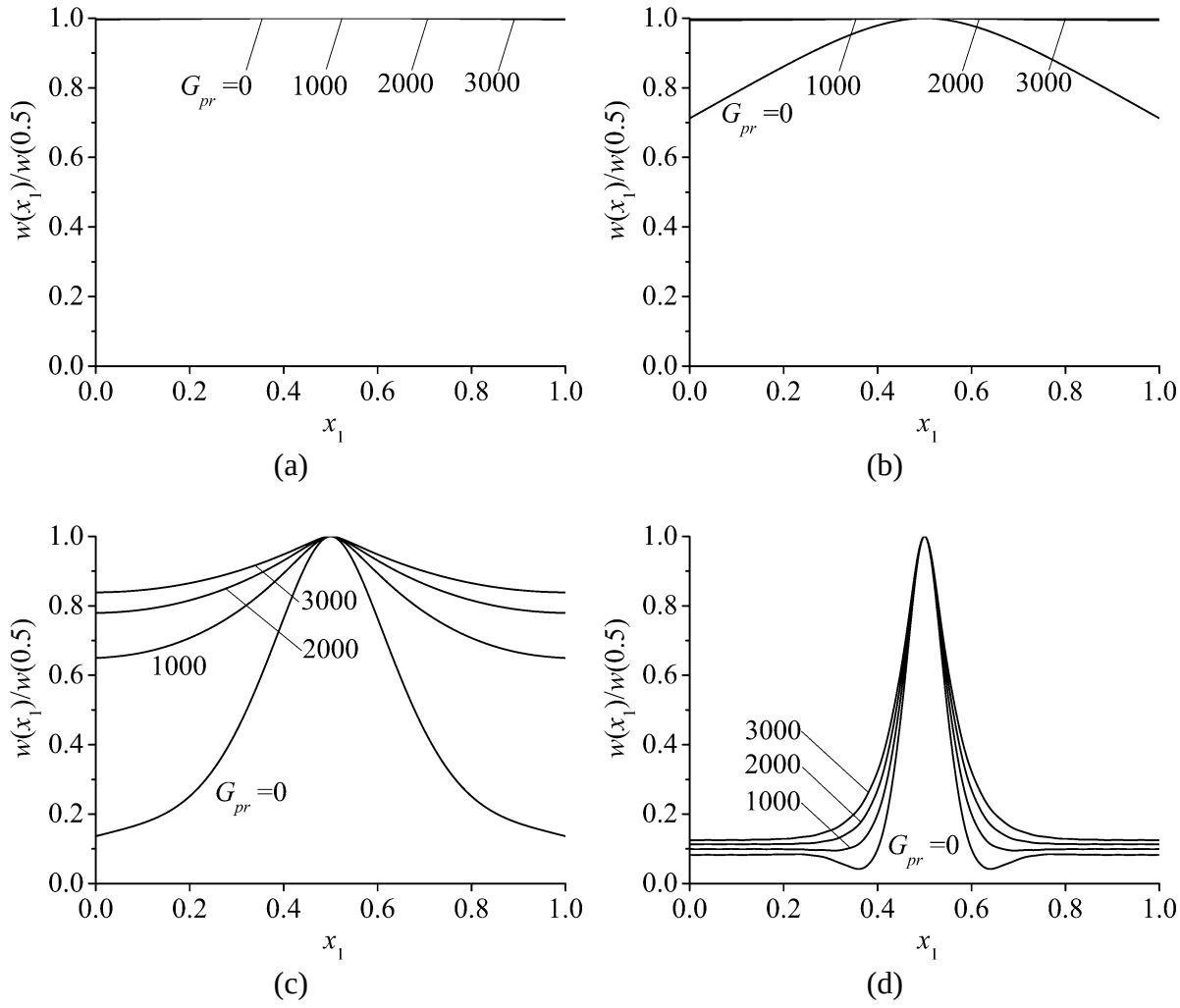


图13：梁的横向相对挠度，：(a) , (b) , (c) ^{1}( )/(0.5)w x , (d) 。

$_r$=1 0. $_r$=10^2 $_r$=10^4 $_r$=10^6

6. 结论

弹性地基上的梁是多种工程结构的常见模型。本文将帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁的常规结构分析，扩展为对具有一般边界条件且模型参数范围广泛的四阶线性微分方程进行多尺度分析。结论如下：

1. 我们推导出了帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁弯曲问题的傅里叶级数多尺度解。

2. 我们采用最小势能法，并结合通常使用的
傅里叶系数比较法，推导出求解傅里叶级数多尺度解所需的最终方程组。

3. 我们研究了所得傅里叶级数多尺度解的收敛特性。

4. 我们揭示了伯努利-欧拉梁弯曲问题的多尺度特征
帕斯捷尔纳克地基上的梁。

对帕斯捷尔纳克地基上伯努利-欧拉梁弯曲问题的初步应用研究，验证了本文傅里叶级数多尺度方法的有效性，并提供了一个新的基准问题（正如对流-扩散-反应方程），可用于持续提升其他多尺度方法的计算性能。

参考文献

1. Kaschiev MS, Mikhajlov K. 张力不可承受温克勒地基上的梁。《计算机与结构》1995年；55：261-264。2. Coskun I. 受谐波荷载作用的张力不可承受帕斯捷尔纳克地基上有限长梁的响应。《欧洲力学杂志A辑：固体》2003年；22：151-161。3. Sato M, Kanie S, Mikami T. 弹性支承梁与弹性地基梁的数学类比。《应用数学建模》2008年；32：688-699。4. Ma X, Butterworth JW, Clifton GC. 张力不可承受帕斯捷尔纳克地基上无限长梁的静力分析。《欧洲力学杂志A辑：固体》2009年；28：697-703。5. Binesh SM. 使用径向点插值法分析弹性地基上的梁。《伊朗科学》A辑 2012年；19：403-409。6. Borak L, Marcian P. 利用修正贝蒂定理分析弹性地基上的梁。《国际机械科学杂志》2014年；88：17-24。7. Avramidis IE, Morfidis K. 三参数弹性地基上梁的弯曲。《固体与结构国际杂志》2006年；43：357-375。8. Wang YH, Tham LG, Cheung YK. 弹性地基上的梁和板：综述。《结构工程与材料进展》2005年；7：174-182。9. Oden JT, Belytschko T, Babuska I, Hughes TJR. 计算力学的研究方向。《计算机辅助应用力学与工程》2003年；192：913-922。10. Hauke G, Garcia-Olivares A. 对流-扩散-反应方程的变分亚格子尺度公式。《计算机辅助应用力学与工程》2001年；190：6847-6865。11. Corsini A, Rispoli F, Santoriello A. 用于透平机械流动计算的变分多尺度高阶有限元公式。《计算机辅助应用力学与工程》2005年；194：4797-4823。12. Onate E, Miquel J, Hauke G. 使用有限微积分和线性有限元求解对流-扩散-吸收方程的稳定化公式。《计算机辅助应用力学与工程》2006年；195：3926-3946。13. Onate E, Miquel J, Nadukandi P. 一维对流-扩散-反应方程的精确有限增量演算有限元法公式。《计算机辅助应用力学与工程》2016年；298：373-406。14. Huerta A, Donea J. 稳定化对流-扩散-反应方程的时间精确解：I——时间和空间离散。《工程数值方法通讯》2002年；18：565-573。15. Huerta A, Roig B, Donea J. 稳定化对流-扩散-反应方程的时间精确解：II——精度分析与算例。《工程数值方法通讯》2002年；18：575-584。

16. Brezzi F, Franca LP, Russo A. 关于对流-扩散方程无残差泡函数的进一步探讨。《计算机辅助应用力学与工程》1998年；166：25-33。17. Franca LP, Nesliturk A, Stynes M. 对流-扩散问题中无残差泡函数的稳定性及其两层有限元法近似。《计算机辅助应用力学与工程》1998年；166：35-49。18. Sangalli G. 对流-扩散问题的间断无残差泡函数法。《工程数学杂志》2004年；49：149-162。19. Parvazinia M, Nassehi V. 使用双线性和三角形单元中的泡函数对扩散-反应方程进行多尺度有限元建模。《计算机辅助应用力学与工程》2007年；196：1095-1107。20. Dahmen W. 偏微分方程的小波方法——近期进展。《计算与应用数学杂志》2001年；128：133-185。21. Dahmen W, Kurdila AJ, Oswald P. 偏微分方程的多尺度小波方法。圣迭戈：学术出版社；1997年。22. Donea J, Huerta A. 《流动问题有限元方法》。奇切斯特：John Wiley & Sons Ltd；2003年。23. Liu GR, Gu YT. 《无网格方法及其编程导论》。多德雷赫特：施普林格；2005年。24. Hughes TJR, Wells GN. 伽辽金形式和对流-扩散方程及不可压缩纳维-斯托克斯方程稳定化形式的守恒性质。《计算机辅助应用力学与工程》2005年；194：1141-1159。25. Song LN, Hou YR, Zheng HB. 基于泡函数的变分多尺度法，用于对流主导的对流-扩散方程。《应用数学与计算》2010年；217：2226-2237。26. Li WL. 一般边界条件下梁的自由振动。《声学与振动杂志》2000年；237：709-725。27. Li WL. 两端具有任意弹性支承的梁的动力分析。《声学与振动杂志》2001年；246：751-756。28. Li WL, Zhang XF, Du JT, Liu ZG. 一般弹性边界支承下矩形板横向振动的精确级数解。《声学与振动杂志》2009年；321：254-269。29. Xu HA. 用于复杂动力系统振动和功率流分析的傅里叶谱元法。博士论文，韦恩州立大学，2011年。30. Zhang XF. 一般动力结构振动分析的傅里叶谱元法。博士论文，韦恩州立大学，2012年。31. Li WL. 一般弹性边界约束下圆柱壳的振动。《美国机械工程师学会振动与声学杂志》2013年；135：024501。32. Li WL. 具有加速收敛特性的替代傅里叶级数展开。《应用数学》2016年；7：1824-1845。33. Du JT, Liu ZG, Li WL. 《复杂边界条件下结构振动及其耦合声场的建模分析方法》。北京：科学出版社；2017年（中文）。34. Ye TG, Jin GY, Su Z, Chen YH. 一般边界约束和内部线支承下中厚层合板振动分析的修正傅里叶解。《国际机械科学杂志》2014年；80：29-46。35. Jin GY, Ye TG, Su Z. 《结构振动：层合梁与板的统一精确解

及具有一般边界条件的壳体。北京：科学出版社；柏林海德堡：施普林格出版社；2015年。36. Jin GY, Ye TG, Wang XR, Miao XH. 具有任意边界条件的功能梯度材料双曲壳体振动分析的统一解。《复合材料B辑》2016年；89：230-252。37. Jin GY, Chen YK, Li SJ, Ye TG, Zhang CY. 采用改进傅里叶谱方法对旋转功能梯度材料梁进行准三维动力分析。《国际机械科学杂志》2019年；163：105087。38. Chen YK, Ye TG, Jin GY, Li SJ, Yang CM. 在热环境中工作的旋转预扭曲功能梯度夹层叶片振动分析。《国际机械科学杂志》2021年；205：106596。39. Huang CS, Lin YJ. 带有贯穿直裂纹的矩形板振动的傅里叶级数解。《应用数学建模》2016年；40：10389-10403。40. Wang QS, Shi DY, Liang Q, Ahad Fe. 具有一般边界条件的正交各向异性圆板、环形板和扇形板面内自由振动统一解。《应用数学建模》2016年；40：9228-9253。41. Wang QS, Shi DY, Liang Q, Pang FZ. 具有一般边界条件的四参数功能梯度中厚双曲面板和旋转壳的自由振动。《应用数学建模》2017年；42：705-734。42. Wang QS, Shi DY, Liang Q, Pang FZ. 具有一般弹性约束的复合材料层合双曲壳体和旋转面板的自由振动。《应用数学建模》2017年；46：227-262。43. Zhang H, Shi DY, Wang QS. 采用改进傅里叶级数解分析具有非均匀边界条件的中厚层合复合材料矩形板自由振动。《国际机械科学杂志》2017年；121：1-20。44. Zhang SG, Xu L, Li R. 转动约束正交各向异性板横向振动的新精确级数解。《应用数学建模》2019年；65：348-360。45. Sun WM, Zhang ZM. 用于科学与工程计算分析的傅里叶级数（基）多尺度方法：III. 常系数线性微分方程的傅里叶级数多尺度方法。doi:10.48550/ARXIV.2208.05170。46. Sun WM, Zhang ZM. 关于函数高阶（偏）导数的傅里叶级数。《应用科学数学方法》2017年；40：2197-2218。47. Sun WM, Zhang ZM. 用于科学与工程计算分析的傅里叶级数（基）多尺度方法：II. 用于同时逼近函数及其（偏）导数的复合傅里叶级数方法。doi:10.48550/ARXIV.2208.03749。