arXiv:2301.01112v1 [quant-ph] 3 Jan 2023

简谐振子的时间最优输运：解析解

GerhardC. Hegerfeldt[1]

[1]*Institut für Theoretische Physik, Universität Göttingen, Friedrich-Hund-Platz 1, D-37077 Göttingen, Germany*

受将含有量子力学系统的陷阱建模为简谐振子（h.o.）进行实验输运的启发，本文研究了相应的经典问题。本文推导了将货车中的经典简谐振子以尽可能快的速度输运距离 d 的方案，要求货车在初始和最终时刻均处于静止状态，且简谐振子均处于平衡位置并静止。假设货车的加速度有界。对于固定的振子频率 Ω，证明加速度通常有三个切换时刻；而在 Ω 取某些特殊值时，只有一个切换时刻。在后一种情形下，最优输运时间为 $T_{\rm abs}$，与不载简谐振子的货车相同。文中确定了最优输运时间和切换时刻。研究表明，在某些情况下，先沿 *backwards* 行进一段时间更有利。此外，还允许 Ω 随时间变化，即 Ω(t)，且受 $\Omega_\pm$ 限制。在这种情况下，系统行为对 $\Omega_\pm$ 十分敏感，文中对此进行了详细阐述。特别是，根据 $\Omega_\pm$，$T_{\rm abs}$ 可以通过连续多种方式实现。

PACS编号:

I. 引言

绝热过程可用于将系统的初始态转变为规定的末态。然而，这类过程非常缓慢，原则上甚至需要无限长的时间。过去，人们提出了加快时间演化的方案，并将其广泛应用于量子光学 [1–22] 以及经典系统，例如起重机 [23]。这些方法包括“绝热捷径”（STA） [1–10], 、“反绝热”方法[11–13] 以及“快进”方法 [15–18]。一般而言，上述方案能够加快演化，但不一定能实现尽可能快的时间演化。其他方法则与控制理论相结合 [24–26], ，例如参见 [19, 27, 28]。尽管人们常常希望时间演化尽可能快，但鲁棒性等其他考量及进一步的条件，可能会延长最终所需的持续时间。

一个典型例子是通过移动束缚势阱，高效输运超冷原子和离子。谐振阱中的原子或离子可以很好地近似为量子简谐振子。对于谐振阱，研究人员已采用 STA 和基于不变量的逆向工程方法，探讨如何在施加的约束下实现比绝热过程更快的无跃迁演化[6, 28]。因此，自然会想到一个问题：量子简谐振子的输运能有多快？这当然取决于人们关注的具体问题，例如，在附加条件下实现谐振子的时间最优输运。

通过对经典简谐振子提出同样的问题，或许可以获得对量子情形的启示。因此，本文将研究经典简谐振子的时间最优输运。

考虑一个位于长货车中央、无摩擦的经典一维谐振子（h.o.），如图 1 所示：一个小质量块 m 连接在货车上的弹簧上。当货车加速时，谐振子便开始振荡。在这种情况下，谐振子的频率 Ω 取决于弹簧常数和 m。

所要研究的问题如下：

(i) 初始时，货车处于静止状态，且谐振子位于其平衡位置，也处于静止状态。

(ii) 随后，货车以加速度 $a(t)$ 行驶，其中 $a(t)$ 可在 $\pm a_{\max}$ 之间变化，直至行驶完规定距离 d。

(iii) 到达终点时，系统应再次处于初始态，即货车应处于静止状态，而谐振子也应再次处于平衡位置并保持静止。

这里要回答的问题是：这能否实现？如果能，所需的最短时间是多少？如果允许谐振子的频率 Ω 随时间变化，即 Ω(t)，能否进一步缩短这一时间？这两个问题的答案都是肯定的。

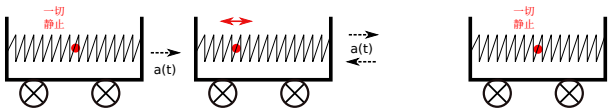

图 1：加速的马车中连接在弹簧上的振荡质量 m

本文的安排如下。首先，在第二节中，我们将考察振子频率固定的情形，给出若干示例，并为该问题推导出一个完整的解以及固定Ω的显式方案。第三节将提供详细证明。第四节将讨论振子频率时变的情形，此时Ω(t)满足$\Omega_- \le \Omega(t) \le \Omega_+$，其中$\Omega_\pm$任意。我们将看到，结果和方案在很大程度上取决于$\Omega_\pm$的具体选择。最后，在第五节中，我们将总结并讨论这些结果。

II. 固定振子频率下的最优方案

我们考虑一辆长货车上的经典一维谐振子。谐振子（即质点）相对于车厢中心的位置记为 $x_{\rm h}$，车厢中心在外部静止参考系中的位置记为 $x_{\rm w}$。当货车以加速度 $a(t)$ 加速时，质点在货车静止参考系中还会受到相应的惯性力 $-ma$，因此有

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\rm h} &= -\Omega^2 x_{\rm h} - a \\ \ddot{x}_{\rm w} &= a\ . \end{aligned} \tag{1}$$

假设 $a(t)$ 可以在 $\pm a_{\max}$ 之间变化。

例1. 若不存在谐振子，要使货车以最短时间行驶距离 d，且初速度和末速度均为零，最优方案是先以 $a_{\max}$ 加速行驶一半距离，再以 $-a_{\max}$ [25] 减速（参见图2中的实线）。若要求货车中的谐振子初始和最终都静止在其平衡位置，则相应的时间 $T_{\rm abs}(d)$，$T_{\rm abs}^2 = 4\,d/a_{\max}$，至多可以达到，但不能再缩短。

例2. 对于 Ω 的某些特殊“共振值”，确实可以达到这一时间，例如

$$\begin{aligned} \Omega &= n\,\Omega_{\rm res}(d)\ , \qquad n = 1, 2, \cdots \\ \Omega_{\rm res}(d) &= \sqrt{4\pi^2 a_{\max}/d} = 4\pi/T_{\rm abs}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

为说明这一点，考虑 $n = 1$。起初，货车和谐振子都处于静止状态。货车以 $a_{\max}$ 加速时，谐振子在车厢参考系中受到额外的惯性力 $-ma$，并开始向左运动。经过时间 $T_{\rm abs}/2$，它恰好完成一次振荡，回到货车中的初始位置，并相对于货车静止。此时，货车的加速度反向，谐振子开始向右运动；再经过 $T_{\rm abs}/2$ 的持续时间，它便回到初始位置并再次静止，此时货车也处于静止状态，行驶距离为 d。对于 $n > 1$，相应地会发生更多次振荡。

对于固定Ω，构造如下方案以获得唯一的最优运输时间。

(i) 对于给定的 d，由下式确定唯一的最优时间 $t_{\rm f}$

$$d = \frac{1}{4} a_{\max}\, t_{\rm f}^2 \left[1 - \frac{8}{(\Omega\, t_{\rm f})^2} \left(\arccos(\cos^2(\Omega\, t_{\rm f}/4))\right)^2\right]\ . \tag{3}$$

(ii) 货车和振子在 $t = 0$时均静止，以 $a_{\max}$ 加速，直至时间 $\frac{1}{2}t_{\rm f} - t_1$，其中 t_1、$0 \le \Omega t_1 \le \pi/2$由下式给出

$$t_1 = \frac{1}{\Omega} \arccos(\cos^2(\Omega\, t_{\rm f}/4))\ . \tag{4}$$

(iii) 以 $-a_{\max}$ 减速，直至时间 $\frac{1}{2}t_{\rm f}$。(iv) 以 $a_{\max}$ 加速，直至时间 $\frac{1}{2}t_{\rm f} + t_1$。

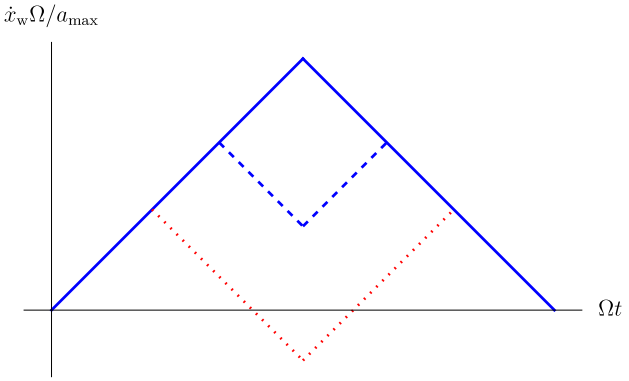

图2：加速度在±1之间交替时典型的货车速度。实线：不存在振子时以及例2中Ω为共振值时的情况。虚线和点线：一般的Ω。对于点线，货车速度会有一段时间变为负值，即货车会倒退一段时间。

(v) 最后以 $-a_{\max}$ 减速，直至时间 $t_{\rm f}$。

典型的车厢速度如图2所示。结束时，货车显然处于静止状态。振子可能会经历多次振荡。它最终也会再次处于静止状态并回到平衡位置，这将在本章节末尾证明。在下一章节中将证明，$t_{\rm f}$ 确实是唯一的最优时间。上述方案具有一定的对称性；可能存在，也可能不存在其他非对称方案，能够达到同一个唯一的最优时间。

注意，若Ω $t_{\rm f} = 4n\pi$，则 $t_1 = 0$、2、$\cdots$，这便得到Ω为 $t_{\rm f} = T_{\rm abs}$时的例2。若$t_1 > \frac{1}{4}t_{\rm f}$，货车速度会暂时变为负值（图2中的点线），也就是说，倒退一段时间是有利的。由方程(3, 4)可知，这种情况会在以下条件下发生

$$\Omega^2 < \frac{1}{4}\,\Omega_{\rm res}(d)^2, \tag{5}$$

也就是说，对于较小的振子频率。不过，很容易证明，反向运动不会回到货车原来的起始位置。

若将式(3)中的 d 绘制为 $t_{\rm f}$ 的函数，则 $t_{\rm f}$关于 d 的函数图像可通过沿对角线反射得到。在无量纲缩放变量中，图3中的实线表示 $\Omega\, t_{\rm f}$ 关于 d/d_Ω 的函数，其中 $d_\Omega = 4\pi^2 a_{\max}\Omega^{-2}$ 是使 Ω 处于共振状态的距离，即 $\Omega_{\rm res}(d_\Omega)$ =Ω。虚线曲线表示相应的 $T_{\rm abs}(d)$。注意，在 $d/d_\Omega = n^2, n = 1, 2, \cdots$处，两个输运时间相同，这又是例2。

对于固定的 d，也可以根据式（3）求得 $t_{\rm f}$ 关于 Ω 的函数。以无量纲缩放变量表示的结果绘于图4。可以看出，当 $\Omega \to 0$ 时，$t_{\rm f}$ 发散。将式（3）按 Ω $t_{\rm f}$ 展开，可以更明确地看出这一点。经过简单计算可得，以无量纲

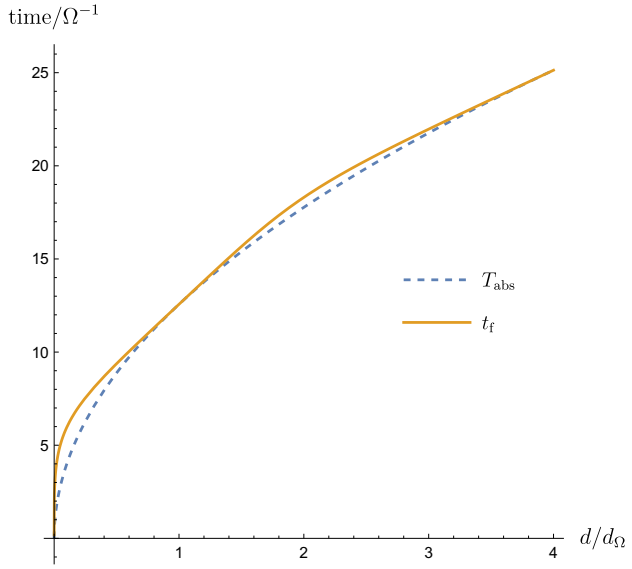

图3：实线：最优输运时间 t_f 随距离 d 变化的曲线，单位为 $d_\Omega = 4\pi^2 a_{max}\Omega^{-2}$，其中 Ω 固定。虚线曲线： $T_{abs}(d)$（无振子）。对于$d/d_\Omega = 1$，2，$\cdots$两种时间相同。

缩放变量表示，

$$t_f/T_{abs}(d) \approx \{6/\pi^2\}^{1/4}\,(\Omega/\Omega_{abs}(d))^{-1/2}. \qquad (6)$$

在式(6)中用 5.3 替换 6，可得到 $t_f/T_{abs}(d)$ 的极佳近似，其适用范围为 $0.05 \le \Omega/\Omega_{abs}(d) \le 0.7$。

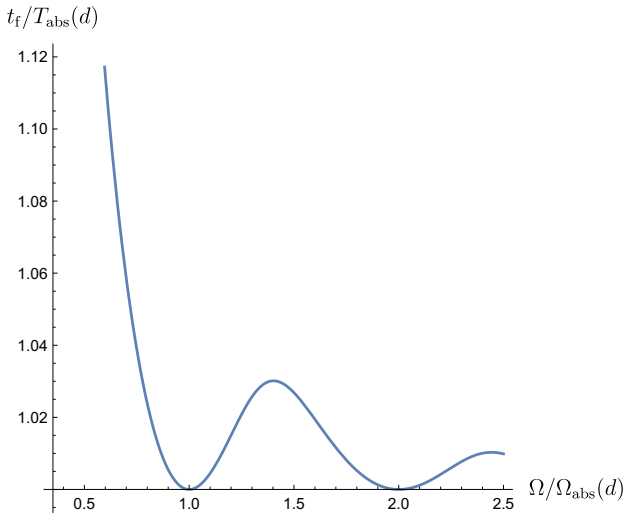

图4：固定 d：最优输运时间 t_f，单位为$T_{abs}(d)$，随 Ω 变化的曲线，Ω 的单位为 $\Omega_{abs}(d)$。

协议评估。对于振子的时间演化，必须使用 $a = \pm a_{max}$ 对公式 (1) 进行评估。借助复平面可以方便地完成这一过程。

With

$$z = x_h + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h \pm a_{max}/\Omega^2 \qquad (7)$$

可得 $\dot{z} = -i\Omega\, z$，因此 $z(t) = \exp[-i\Omega(t-t_0)\, z(t_0)$。于是

$$x_h(t) + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h(t) = \exp[-i\Omega(t-t_0)] \qquad (8)$$
$$\cdot\,(x_h(t_0) + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h(t_0) \pm a_{max}/\Omega^2) \mp a_{max}/\Omega^2.$$

在复平面中，右侧对应于 $x_h(t_0) + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h(t_0)$ 围绕点 $-a_{max}/\Omega^2$ 和 a_{max}/Ω^2, 分别按顺时针旋转 $\Omega(t-t_0)$ 角。

在该方案中，初始为 $x_h(0) = 0$ 和$\dot{x}_h(0) = 0$，先绕 $-a_{max}/\Omega^2$, 顺时针旋转，再绕 a_{max}/Ω^2, 旋转，接着再次绕 $-a_{max}/\Omega^2$ 旋转，最后绕 a_{max}/Ω^2旋转。解析地可得

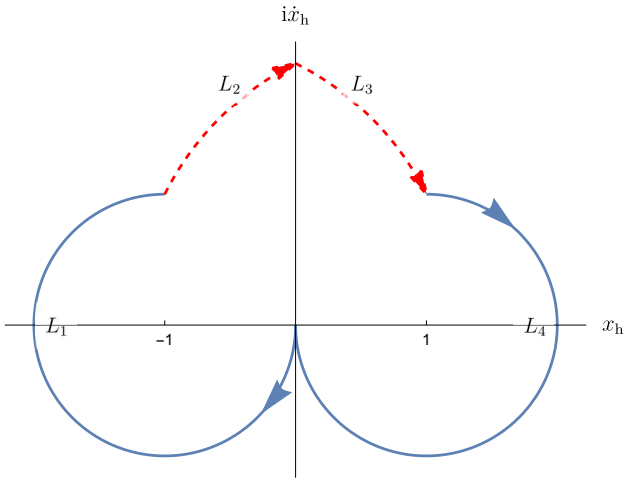

图5： x_h 在复相空间中的时间演化，其中 $\Omega = 1$, $a_{max} = 1$, $d = 2.82\,\pi^2$ 和 $t_f = 3.41\,\pi$，以及 $t_1 = .205\,\pi$。从原点出发，即位于平衡位置且静止，先绕 -1 旋转，再绕 1 旋转，接着绕 -1 旋转，最后再次绕 1 旋转，回到原点。

前两次旋转

$$\begin{aligned}\zeta_1 &\equiv x_h(t_f/2 - t_1) + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h(t_f/2 - t_1)\\ &= \exp[-i\Omega(t_f/2 - t_1)]\, a_{max}/\Omega^2 - a_{max}/\Omega^2\\ \zeta_2 &\equiv x_h(t_f/2) + i\,\Omega^{-1}\dot{x}_h(t_f/2)\\ &= \exp[-i\Omega t_1](\zeta_1 - a_{max}/\Omega^2) + a_{max}/\Omega^2. \qquad (9)\end{aligned}$$

$x_h(t_f/2)$ 是 ζ_2 的实部，可得

$$\begin{aligned}x_h(t_f/2) &= 2\,a_{\,max}/\Omega^2\,(\cos^2(\Omega\, t_f/4)) - \cos(\Omega\, t_1))\\ &= 0 \qquad (10)\end{aligned}$$

根据式（4），即 ζ_2 位于虚轴上。复平面中的相应轨迹对应于

图5中左半平面的两条曲线。根据方案的对称性，接下来的两个步骤给出右半平面中的两条曲线，其中最后一条再次终止于原点。当然，这也可以通过解析方法得出。因此，最后一步之后，振子再次静止在其平衡位置。由此，该方案满足初始和最终条件。

III. 固定Ω下的最优性证明

首先考虑等价的逆问题：在满足第I节中的条件 (i) - (iii) 且对应于某一方案的情况下，寻找给定持续时间 $t_{\rm f}$ 内可达到的最大距离 d 。

对称性。考虑给定的 $t_{\rm f}$ 和 d。下文中，为方便起见，令时间从 $-\frac{1}{2}t_{\rm f}$流逝至 $\frac{1}{2}t_{\rm f}$。设 $x_{\rm h}$ 和 $x_{\rm w}$ 在某个 $a(t)$下满足方程 (1)，并满足$\pm\frac{1}{2}t_{\rm f}$处的边界条件。那么$\frac{1}{2}(x_{\rm h}(t) - x_{\rm h}(-t))$和$\frac{1}{2}(x_{\rm w}(t) - x_{\rm w}(-t) + d)$满足方程 (1)，其中 $a(t)$由$\frac{1}{2}(a(t) - a(-t))$取代，且边界条件相同。因此，不失一般性，可以假设 $x_{\rm h}$ 和 a 在时间反演下是反对称的，而 $\dot{x}_{\rm h}$ 和 $\dot{x}_{\rm w}$ 是对称的。

缩放变量。我们转而采用无量纲缩放变量。选取一个固定的长度单位 d_0 ，并令

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= a_{\max}/d_0 & \omega &= \Omega/\Omega_0 \\ \tau &= \Omega_0 t & u(\tau) &= a(t)/a_{\max} \\ \xi_1(\tau) &= x_{\rm h}(t)/d_0 & \xi_2(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\xi_1(\tau) \\ \xi_3(\tau) &= x_{\rm w}(t)/d_0 & \xi_4(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\xi_3(\tau) \end{aligned} \qquad (11)$$

使得 $u(\tau)$ 可在 -1 与 1 之间变化。由此得到

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 \equiv \frac{d^2}{d\tau^2}\xi_1 &= -\omega^2\xi_1 - u(\tau) \\ \ddot{\xi}_3 &= u(\tau)\ . \end{aligned} \qquad (12)$$

对于固定Ω，选取适当的 d_0 ，可以假设 $\Omega_0 = \Omega$，进而有 $\omega = 1$。

庞特里亚金最大值（或最小值）原理（庞特里亚金极大值原理）[24–26]。这是对变分法的重大推广，被视为控制理论中的里程碑。一个简单的例子是，一辆汽车在唯一条件——时变加速度（即“控制”）有界但不一定连续——下，以最短时间从静止的 A 点驶至静止的 B 点。

庞特里亚金极大值原理用于确定使给定代价函数 J 最小化的最优控制函数 $u^*(t)$（也可能是多个控制函数）的必要条件。该代价函数的形式为 $J = \int_0^T L(u(\tau)\ldots)\, d\tau$，其中 L 是控制 $u(\tau)$ 以及某些状态函数 ξ_i 和它们导数的函数。对于当前的距离最优控制问题，可以取 $L = \xi_4$ ，因为 $J = \int_0^T \dot{\xi}_3 d\tau$ 是（缩放后的）距离。为了使其最小化，庞特里亚金极大值原理考虑控制哈密顿量 H_c，

$$H_c = -L + p_1\dot{\xi}_1 + p_2\dot{\xi}_2 + p_3\dot{\xi}_3 + p_4\dot{\xi}_4, \qquad (13)$$

其中，将方程 (11-12) 中的 ξ_i 代入；伴随状态 p_i 是拉格朗日乘子，它们不可能全都恒等于零。然后，对于极值控制$u(\tau) = u*(t)$，哈密顿方程

$$\dot{p}_i = -\partial H_c/\partial\xi_i, \qquad \dot{\xi}_i = \partial H_c/\partial p_i \qquad (14)$$

成立。对于几乎所有的 $-\tau_{\rm f}/2 \le \tau \le \tau_{\rm f}/2$，函数$H_c(p_i(t)\ \xi_i(t)\ u(t))$ 在 $u(t) = u^*(t)$ 处取得最大值，且 H_c =为常数。为简便起见，我们省略 u^* 上的星号。代入 ξ_i 后， H_c 变为

$$H_c = -\xi_4 + p_1\xi_2 + p_2(-\omega^2\xi_1 - u) + p_3\xi_4 + p_4 u\ . \qquad (15)$$

由项 $(p_4 - p_2)\,u$ 可知，要取得最大值，若 $p_4 - p_2 > 0$ ，则必须选择 $u(\tau) = 1$ ；若$p_4 - p_2 < 0$，则选择 -1。当 $p_4 - p_2 = 0$，更确切地说，当$p_4 - p_2$ 变号时，u中会从 ± 1 切换到 ∓ 1 。哈密顿方程变为

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \omega^2 p_2, & \dot{p}_2 &= -p_1 \\ \dot{p}_3 &= 0, & \dot{p}_4 &= -p_3 + 1 \end{aligned} \qquad (16)$$

解为

$$\begin{aligned} p_2(\tau) &= A\cos\tau + B\sin\omega\tau, & p_1 &= -\dot{p}_2 \\ p_3 &= c_3, & p_4 &= (-c_3 + 1)\,\tau + c_4 \end{aligned} \qquad (17)$$

其中 A、 B、 c_3 和 c_4 为常数。如果 $p_4 - p_2 \equiv 0$在某个延展区间内成立，那么根据线性无关性， $p_4 = p_2 \equiv 0$。因此，不可能在某个延展区间内同时有 $u \equiv 0$和 $\xi_4 \equiv const$ ，从而只有孤立的切换。因此，根据u的反对称性，在 $\tau = 0$处会发生切换，即 $-p_2(0) + p_4(0) = 0$，从而 $A = c_4$。根据 $\pm\tau_{\rm f}/2$ 处 $\xi_{\rm i}$ 的边界条件， H_c 中只剩下含有 u 的项；由 u 的反对称性，这些项导出两个方程，并得到

$$A\,(\cos(\omega\tau_{\rm f}/2) - 1) = 0\ . \qquad (18)$$

因此，要么 $A = 0$ ，要么 $\omega\tau_{\rm f} = 4\pi n$。在后一种情形下，情况类似于例2，即谐振子可以完成 $2n$次完整振荡，且最优距离与没有振子的情况相同。因此，我们可以假设 $A = c_4 = 0$。对于 $\omega\tau_{\rm f} \ne 4\pi n$ ， u 至少切换两次，因此 $B \ne 0$ ，否则 $-c_3 + 1 = 0$、 $c_3 = 1$，且 $\xi_4 \equiv$ 为常数。无需给出 B 和 c_3 的显式数值，原则上可以在最后计算；只需讨论 $B < 0$ 和 $B > 0$ 两种情形。

注意：由式 (15) 后的注释可知，当直线 $p_4(\tau)$ 位于正弦曲线 $p_2(\tau)$ 上方时，$u(\tau) = 1$ ；当它位于曲线下方时， $u(\tau) = -1$ 。

情形 $B<0$。(i) 对于 $\tau<0$，在 $-\tau_1$ 处发生一次切换。于是，图 6 中记作 L_1 的直线 $p_4(\tau)$ 与负弦曲线 $p_2(\tau)$ 相交一次。

在缩放变量中，$\xi+\mathrm{i}\omega^{-1}\dot{\xi}$ 的方程 $\tau_\mathrm{f}/2$ 与初始时间 -$\tau_\mathrm{f}/2$ 及最终时间 0 对应的方程（9）类似，得到

$$\xi_1(0)=\cos(\omega\tau_\mathrm{f}/2)-2\cos(\omega\tau_1)+1. \tag{19}$$

由 ξ_1 的反对称性可知 $\xi_1(0)=0$，由此得到

$$\cos\omega\tau_1=\cos^2(\omega\tau_\mathrm{f}/4) \tag{20}$$

其中 $-\pi/2\omega<-\tau_1<0$。因此，图 6 中的直线 L_1 在此情形下是典型的，而直线 L_2 是不可能的。

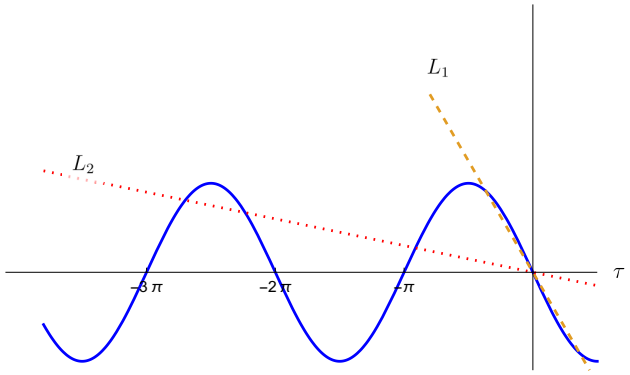

图 6：情形 $B<0$。其中 $\omega=1$。L_1 和 L_2 表示 $p_4(\tau)$ 的可能直线。它们与 $p_2(\tau)$（负弦曲线）的交点是可能的切换点。在 $p_4(\tau)$高于 $p_2(\tau)$的区域内，系统处于加速度状态；否则处于减速状态。只有 L_1 具有单次切换，因而是最优的。

（ii）如果对于 $\tau<0$ 存在两次或更多次切换，例如，如果$p_4(\tau)$由图 6 中的直线 L_2 给出，那么在 $\tau=0$ 之前的最后一段减速时间长于 $\pi/2\omega$。因此，总加速时间小于（i）中的加速时间，货车在 τ_f 期间的行驶距离也小于（i）中的行驶距离。因此，对于 $B<0$，只有一次切换，即 $\tau<0$。

情形 $B>0$。从图 7 可见，这是情形 $B<0$ 关于 τ 轴反射后的结果，其中 $u=\pm1$ 互换，因此 $B<0$ 的正货车行驶距离现在变为负值。不过，$B<0$也可能存在负距离，这对应于 $B>0$的正距离，因此需要进行更详细的讨论。这里我们使用 $\omega=1$。

(i) $\tau<0$的单次切换：与 $B<0$类似，对于固定的 τ_f只有一个解；这是相应的最优反向运动，其中 $p_4(\tau)$ 通常由图 7 中的L_3 给出。

(ii) $\tau<0$恰有两次切换。这种情况通常对应图 7 中的直线 L_4 和 L_5，切换点例如位于$-\tau_2<-\tau_1<0$。

a) Case $\tau_2-\tau_1>\pi/2$.

从图 7 中很容易看出 $\dot{\xi}_3(0)=\tau_\mathrm{f}/2-2(\tau_2-\tau_1)<\tau_\mathrm{f}/2-\pi$而从情形 $B<0$ 可知，$\xi_{3\mathrm{opt}}\geq\tau_\mathrm{f}/2-\pi$因为此处切换点位于 $-\pi/2$ 的右侧。因此，在情形 $B<0$ 中，距离更大。

b) 情形 $\tau_2-\tau_1<\pi/2$。

下面将证明这与谐振子的边界条件不相容。由反对称性可知，$\xi_1(0)=0$，而 $\dot{\xi}_1(0)\equiv\lambda$ 未知。将从 $\tau=0$ 到 $\tau=-\tau_2$ 的时间演化反向进行，可得

$$\begin{aligned}&\xi_1(-\tau_1)+\mathrm{i}\dot{\xi}_1(-\tau_1)=\exp[-\mathrm{i}\tau_1]\{\mathrm{i}\lambda+1\}-1\\&\xi_1(-\tau_2)+\mathrm{i}^{-1}\dot{\xi}_1(-\tau_2)=\\&\exp[\mathrm{i}(-\tau_1+\tau_2)]\{\xi_1(-\tau_1)+\mathrm{i}\dot{\xi}_1(-\tau_1)-1\}+1\\&=\exp[\mathrm{i}(-\tau_1+\tau_2)\{\exp[\mathrm{i}\tau_1](\mathrm{i}\lambda+1)-2\}+1\end{aligned} \tag{21}$$

由于它必须位于以 -1 为圆心且经过 0 的圆上，因此加上 1 后，右端成为模为 1 的数：

$$\begin{aligned}1&=|\exp[\mathrm{i}(-\tau_1+\tau_2)]\{\exp[\mathrm{i}\tau_1](\mathrm{i}\lambda+1)-2\}+2|\\&=|\mathrm{i}\lambda+1-2\exp[-\mathrm{i}\tau_1]+2\exp[-\mathrm{i}\tau_2]|\end{aligned} \tag{22}$$

因此实部的模

$$|1-2\cos\tau_1+2\cos\tau_2|, \tag{23}$$

必须小于或等于 1。然而，由图 7 可知 $-3\pi/2<-\tau_1<-\pi$，因此 $\cos\tau_1<0$。对于 $-2\pi<-\tau_2<-3\pi/2$，有 $\cos\tau_2>0$；而对于 $-3\pi/2<-\tau_2<-\pi$，有 $-2\cos\tau_1+2\cos\tau_2>0$。因此，公式（23）中的括号项大于 1，矛盾。故这种情形不可能出现。

（iii）对于 $\tau<0$，有三个或更多次切换：图 7 中展示了一条典型直线L_5。从图 7 可以明显看出，曲线下方面积（即距离）减小。

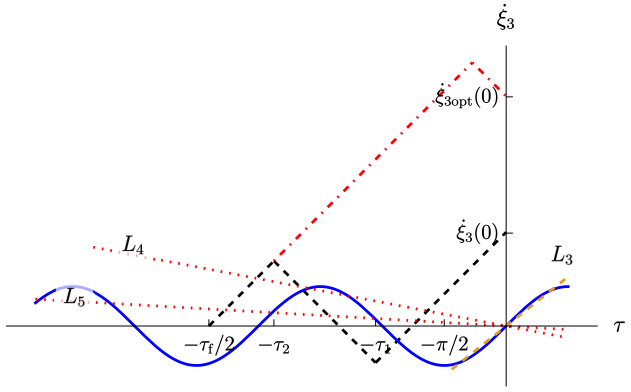

图 7：情形 $B>0$。其中 $\omega=1$。L_3、L_4 和 L_5 表示 $p_4(\tau)$ 的可能直线。它们与 $p_2(\tau)$（正弦曲线）的交点是可能的切换点。虚线：ξ_3，有 2 个交点 $-\tau_1$ 和 $-\tau_2$。点划线：情形 $B<0$ 中的 $\xi_{3\mathrm{opt}}$。对于 $\tau_2-\tau_1>\pi/2$，有 $\xi_{\mathrm{opt}}>\xi$。L_3 是最优反向运动的典型情况。

因此，情形 $B>0$ 不可能成立，而情形$B<0$ （i）给出了给定 $\tau_{\rm f}$ 且在缩放变量中固定 ω 时的唯一最优距离。该距离很容易计算得出为 $\tau_{\rm f}^2/4-2\tau_1^2$，其中 τ_1、$0\le\tau_1\le\pi/2$ 由公式（20）给出。在原始变量中，有

$$d=\frac{1}{4}a_{\max}t_{\rm f}^2-2a_{\max}t_1^2. \tag{24}$$

回到原始问题，可得到第二节的方案。

IV. 时变振子频率的协议

在这种情形下，除了允许 $a(t)$ 随时间变化外，还允许 $\Omega(t)$ 随时间变化，并希望在满足货车初始和最终均处于静止状态、振子在其平衡位置处于静止状态的条件下，以最短输运时间 $t_{\rm f}$ 输运距离 d 。这种情况更为复杂。如果 Ω 不受界限约束，那么对于 $\Omega\to\infty$，可得到与不存在振子时相同的绝对最短时间。因此，除 $|a(t)|\le a_{\max}$ 外，还施加界限

$$0\le\Omega_-\le\Omega(t)\le\Omega_+<\infty. \tag{25}$$

如果公式（2）中的某个“共振值”落在此区间内，那么根据例2，选择该值作为 Ω，即可得到绝对最短时间。

距离优化。我们再次先考虑寻找等价问题的解：找到一个方案，使其在给定时间 $t_{\rm f}$ 内使距离 d 最大，并令时间从 $-\frac{1}{2}t_{\rm f}$ 到 $\frac{1}{2}t_{\rm f}$。我们将寻找满足与第三节相同对称性性质的解，即假设 $\Omega(t)$ 对称。

使用与公式（11）中相同的缩放变量。引入

$$u_1(\tau)\equiv\omega^2(\tau) \tag{26}$$

作为第二个控制变量，公式（12）写作

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}_1\equiv\frac{d^2}{d\tau^2}\xi_1 &= -u_1(\tau)\xi_1-u(\tau)\\ \ddot{\xi}_3 &= u(\tau)\ .\end{aligned} \tag{27}$$

关于 $\Omega(t)$ 的条件变为 $\omega_-^2\le u_1(\tau)\le\omega_+^2$。此时，庞特里亚金极大值原理的控制哈密顿量写作

$$H_c=-\xi_4+p_1\xi_2+p_2(-u_1\xi_1-u)+p_3\xi_4+p_4u\ . \tag{28}$$

与之前一样可知，要取得最大值，必须选择$u(\tau)=1$，当 $p_4>p_2$ 时取该值，当 $p_4<p_2$时取 -1。当 $p_4-p_2=0$，更确切地说，当 p_4-p_2 变号时， u会从 ±1 切换到 ∓1 。类似地，当$p_2\xi_1<0$时取 $u_1=\omega_+^2$ ，当 $p_2\xi_1>0$时取 $u_1=\omega_-^2$ 。当 $p_2\xi_1$ 变号时会发生切换。

根据 $u_1=\omega_+^2$ 或 $u_1=\omega_-^2$的情况，相应 τ 区间内的哈密顿方程变为

$$\begin{aligned}\dot{p}_1&=\omega_\pm^2\,p_2, & \dot{p}_2&=-p_1\\ \dot{p}_3&=0, & \dot{p}_4&=-p_3+1.\end{aligned} \tag{29}$$

u_1 切换之间的解具有以下形式

$$p_2(\tau)=A_\pm\cos\omega_\pm\tau+B_\pm\sin\omega_\pm\tau=C_\pm\sin(\omega_\pm\tau-\varphi_\pm) \tag{30}$$

$$p_1=-\dot{p}_2,\quad p_3=c_3,\quad p_4=(-c_3+1)\,\tau+c_4$$

其中 c_3、c_4、$C_\pm$ 是常数，而 $A_\pm$、$B_\pm$、$\varphi_\pm$ 是常数，它们可能因相应区间而异。如果在某个区间内 $p_2(\tau)\equiv0$ ，那么它处处为零，因为它无法与公式（30）中的非零 p_2 连续衔接。

由于 $\omega(\tau)$ 是对称的，因此在 $\tau=0$ 左右两侧必定存在等长区间，且 $\omega(\tau)=\omega_+$ 紧邻其左右（也可能是 ω_- 个区间，但如后文所示，这并非最优）。因此，此区间内必须有 $\varphi_+=0$ ，因为此时 $\omega(\tau)$ 在 $\tau=\pm\pi/\omega_+$ 处发生切换，这是因为 $p_2\xi_1$ 在那里为零。它在 $\tau=0$ 处也为零，但由于 ξ_1 和 p_2 的反对称性，它不会改变符号；因此，尽管 u 在 $\tau=0$ 处发生切换， ω 却不会。于是， p_2 的形式为

$$p_2(\tau)=B_+\sin(\omega_+\tau) \tag{31}$$

在区间 $-\pi/\omega_+\le\tau\le\pi/\omega_+$ 内。

在 $\tau=-\pi/\omega_+$ 左侧有一个带有 ω_- 的区间，接着又是一个 ω_+ 区间，如此继续； $\tau=\pi/\omega_+$ 右侧也同样如此。由于 $p_2(\tau)$ 可微，必须相应地连接 p_2 的不同部分。由此得到一个反对称的 p_2 ，如图 8 所示。

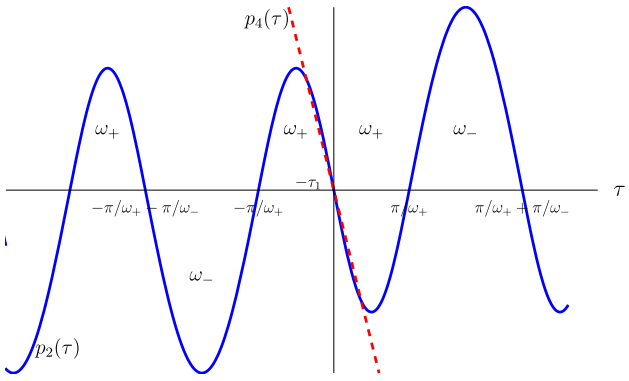

图 8：实线： $p_2(\tau)$，具有对称的 $\omega_\pm$ 序列。虚线：$p_4(\tau)$。

确定 τ_1 的过程利用了 ξ_1 的时间演化，并取决于$\frac{1}{2}\tau_{\rm f}$所在的区间。下面以 $\frac{1}{2}\tau_{\rm f}\le\pi/\omega_++\pi/\omega_-$为例说明。当$\frac{1}{2}\tau_{\rm f}\le\pi/\omega_+$ 时，情况与第三节相同，且 τ_1 由公式（20）给出，其中 ω 替换为 ω_+。

当$\pi/\omega_+ < \frac{1}{2}\tau_\mathrm{f} \le \pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$ 时，我们根据 $\xi_1(0)$和 $\xi_1 0$计算. $\xi_1(\tau_\mathrm{f}/2)$和 $\xi_1(\tau_\mathrm{f}/2)$。由反对称性可知 $\xi_1(0) = 0$，并令 $\xi_1(0) = \lambda$，其精确值无需用到。利用公式（8）可得

$$\begin{aligned}
\eta_1 &\equiv \xi_1(\tau_1) + \frac{\mathrm{i}}{\omega_+}\dot{\xi}_1(\tau_1) \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega_+(\tau_1 - 0)](\frac{\mathrm{i}}{\omega_+}\lambda + \frac{1}{\omega_+^2}) - \frac{1}{\omega_+^2} \\
\eta_2 &\equiv \xi_1(\pi/\omega_+) + \frac{\mathrm{i}}{\omega_+}\dot{\xi}_1(\pi/\omega_+) \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega_+(\frac{\pi}{\omega_+} - \tau_1)]\{\Re\eta_1 + \frac{\mathrm{i}}{\omega+}\omega_+\Im\eta_1 - \frac{1}{\omega_+^2}\} + \frac{1}{\omega_+^2} \\
\tilde{\eta}_3 &\equiv \xi_1(\tau_\mathrm{f}/2) + \frac{\mathrm{i}}{\omega_-}\dot{\xi}_1(\tau_\mathrm{f}/2) \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega_-(\tau_\mathrm{f}/2 - \frac{\pi}{\omega_+})]\{\Re\eta_2 + \frac{\mathrm{i}}{\omega_-}\omega_+\Im\eta_2 - \frac{1}{\omega_-^2}\} + \frac{1}{\omega_-^2}
\end{aligned} \tag{32}$$

根据 $\frac{1}{2}\tau_\mathrm{f}$ 处的边界条件，有 $\tilde{\eta}_3 = 0$，因此

$$0 = \Re\eta_2 + \frac{\mathrm{i}}{\omega_-}\omega_+\Im\eta_2 - \frac{1}{\omega_-^2} + \exp[\mathrm{i}\omega_-(\tau_\mathrm{f}/2 - \frac{\pi}{\omega_+})]\frac{1}{\omega_-^2}. \tag{33}$$

取其实部，经过简单计算可得

$$\cos[\omega_+\tau_1] = \frac{\omega_+^2}{2\omega_-^2}\{1 + \cos(\omega_-\tau_\mathrm{f}/2 + \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_+}\pi)\}. \tag{34}$$

左端不能超过 1，而当 $\tau_\mathrm{f} = \tau_\mathrm{opt}$ 时，右端变为 1，其中

$$\tau_\mathrm{opt}/2 = \frac{\pi}{\omega_+} + \frac{\pi}{\omega_-} - \frac{2}{\omega_-}\arccos[\frac{\omega_-}{\omega_+}], \tag{35}$$

它位于 π/ω_+和 $\pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$之间。于是 $\tau_1 = 0$，距离达到这一特定 $\tau_\mathrm{f} = \tau_\mathrm{opt}$下的绝对最优值。

例 3。设 $\omega_- = \omega_+/2$。那么公式（35）给出 $\tau_\mathrm{opt}/2 = \frac{5}{3}\pi/\omega_+$，距离 d/d_0变为 $\frac{1}{4}\tau_\mathrm{opt}^2$。如果只考虑 ω_+ 及相应的 τ_opt，则有 $\omega_+\tau_1 = \arccos[3/4] \neq 0$，距离会更小。

当公式（34）右侧大于 1 时，该如何处理? 为回答这个问题，我们回想一下， p_2 也有一个平凡解 $p_2(\tau) \equiv 0$。那么，对 $\omega(\tau)$ 的选择就没有限制。若将公式（34）右侧的 ω_+ 减小到 ω_-，右侧就会小于或等于 1。因此，必定存在一个中间值 ω，记为 $\tilde{\omega}_+$，使右侧等于 1。因此，若用 $[\omega_-, \tilde{\omega}_+]$ 代替 $[\omega_-, \omega_+]$，就能得到 τ_1 的一个解，即 $\tau_1 = 0$；于是，序列 ω_- 和 $\tilde{\omega}_+$ 对给定的 τ_f 产生最大距离。这意味着转而考虑 $[\omega, \omega_+]$ 的一个子区间 $[\omega_-, \tilde{\omega}_+]$ 可以使在这种情况下的距离达到最大。正如下文将进一步看到的，具有相同性质的子区间有很多。

在 $\pi/\omega_+ + \pi/\omega_- < \tau_\mathrm{f}/2 \le \pi/\omega_+ + \pi/\omega_- + \pi/\omega_+$的情形下，也就是说，若从 ω_+开始，切换到 ω_-，并在 $\tau = 0$之前切换到ω_+，即图 8 中的序列 $+-+|+-+$，那么公式（32）中的η_1 和 η_2 保持不变，而在 η_3 中，将 $\tau_\mathrm{f}/2$ 替换为 $\pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$，并且还会有一个额外的$\eta_4$,

$$\begin{aligned}
\eta_3 &= -\Re\eta_2 + 2/\omega_-^2 - \frac{\mathrm{i}}{\omega_-}\omega_-\Im\eta_2 \\
\eta_4 &\equiv \xi_1(\tau_\mathrm{f}/2) + \frac{\mathrm{i}}{\omega_+}\dot{\xi}_1(\tau_\mathrm{f}/2) \\
&= \exp[-\mathrm{i}\omega_+(\tau_\mathrm{f}/2 - \pi/\omega_+ - \pi/\omega_-)] \\
&\qquad \{\Re\eta_3 + \frac{\mathrm{i}}{\omega_+}\omega_-\Im\eta_3 + \frac{1}{\omega_+^2}\} - \frac{1}{\omega_+^2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

条件 $\eta_4 = 0$ 现在给出

$$\cos\omega_+\tau_1 = \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} - 1 + \frac{1}{2}\{1 + \cos(\omega_+\tau_\mathrm{f}/2 - \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_-}\pi)\}. \tag{37}$$

对于完整的 $\omega_\pm$ 区间，方程 (32) 和 (36) 中的指数项等于 -1，利用这一点即可轻松推广结果。特别是，对于 $\omega_\pm$序列 $-+-+|+-+-$，可得

$$\cos(\omega_+\tau_1) = \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} - 1 + \frac{\omega_+^2}{2\omega_-^2}\{1 + \cos(\omega_-\tau_\mathrm{f}/2 - 2\pi\frac{\omega_-}{\omega_+})\}. \tag{38}$$

时间优化。现在将这些结果应用于原始问题：距离固定为 d_0（现以此表示），并要求给定 $\Omega_\pm$ 时的最短输运时间。若将此 d_0 作为缩放变量的定义，则 d_0 变为 $\xi_3(\tau_\mathrm{f}/2) = 1$。根据例2，可能达到的绝对最短时间 τ_abs及其对应的 ω_res 为

$$\tau_\mathrm{abs} = 2 \qquad\qquad \omega_\mathrm{res} = 2\pi. \tag{39}$$

根据图2，时间为 τ_f时的行驶距离为 $\frac{1}{4}\tau_\mathrm{f}^2 - 2\tau_1^2$；若 τ_f 要达到最优，则必须满足

$$1 = \frac{1}{4}\tau_\mathrm{f}^2 - 2\tau_1^2 \tag{40}$$

其中 $\tau_\mathrm{f} = \tau_\mathrm{f}(\omega_-, \omega_+)$。给定 $\omega_\pm$后，根据尚未知的 $\tau_\mathrm{f}/2$ 所在的区间，可利用方程 (20、34、37) 及其推广形式求得 τ_1。若ω_res 或其整数倍 n 落在 $[\omega_-, \omega_+]$ 内，则选择 $\omega(\tau) \equiv n\omega_\mathrm{res}$，从而得到绝对最优的$\tau_\mathrm{abs}$。下面将讨论复杂程度逐渐增加的不同情形。

情形： $\omega_- = 0$, $0 < \omega_+ < 2\pi$ 以及距离 1。若弹簧常数为 0，那么在实验室参考系中，质点 m 不受力地运动；在车厢参考系中则受惯性力作用。可能最优的做法是

先从 ω_- 开始。随后， m 在实验室参考系中最初保持静止，直到切换到 ω_+ 。若时间演化从 ω_+ 开始，就不可能切换到 ω_- ，因为相应的时间间隔 π/ω_- 是无限的。因此在这种情形下，第二节和第三节的结果适用。从图4可见，随着 $\omega_+ < 2\pi$ 增大， $\tau_{\rm f}$ 减小。由于 $\tau_{\rm f}/2 \le \pi/\omega_+$ ，要达到最优，必须满足 $\tau_{\rm f} = 2\pi/\omega_+$ 和 $\tau_1 = 0$，依据方程（3、4）。由公式（40）可得 $\tau_{\rm f}^2 = 4$ ，因此在这种情形下必须有 $\omega_+ = \pi/\sqrt{2} \equiv \tilde{\omega}_+$。所以，如果 $\omega_+ > \tilde{\omega}_+$ ，就先从 $\omega_- = 0$ 开始，然后在稍后的某个时刻切换到 ω_+ 。在这种情形下，公式（34）对 τ_1 成立；当 $\tau_{\rm f} = \tau_{\rm opt}$ 取公式（35）给出的值时，公式（34）变为0。取极限 $\omega_- \to 0$ ，可得 $\tau_{\rm opt} = (2\pi + 4)/\omega_+$。这必须等于 $\tau_{\rm abs} = 2$，由此得到 $\omega_+ = \pi + 2 \equiv \omega_{\rm abs}$。从 ω_+ 这一数值起，便可得到绝对最短时间。最优时间随 ω_+ 变化的关系如图9所示。

方案。这取决于 ω_+ ，且当 $\omega_+ \le \tilde{\omega}_+$时与第二节中的方案相同。当 $\tilde{\omega}_+ < \omega_+ \le \omega_{\rm abs}$ 时，根据公式（37）和（40）确定 $\tau_{\rm f}$ 和 τ_1 ，以 $\omega_- = 0$ 开始，持续 $-\pi/\tilde{\omega}_+ + \tau_{\rm f}/2$ ，并设为 $u = 1$；然后切换至 ω_+ 并持续 $-\tau_1 + \pi/\tilde{\omega}_+$，再切换至 $u = -1$并持续 τ_1 ，之后分别通过对称性或反对称性继续。当 $\omega_{\rm abs} = 2 + \pi < \omega_+ \le \omega_{\rm res}$ 时，选择 $\omega_+ = \omega_{\rm abs}$的方案。

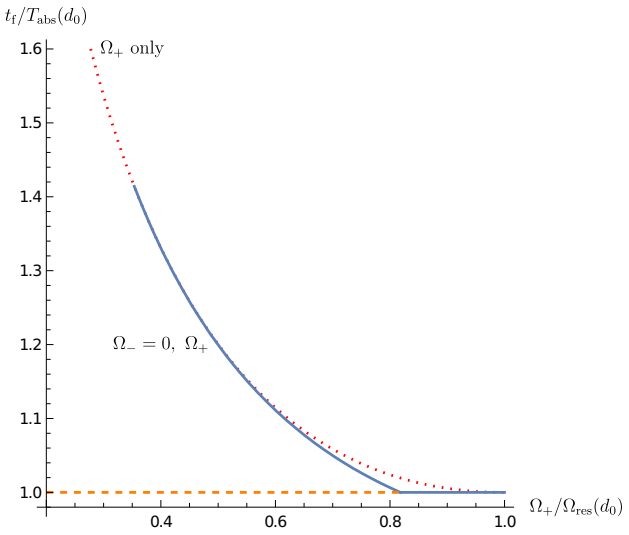

图9：固定距离 d_0、$\Omega_- = 0$ 和 $0 \le \Omega_+/\Omega_{\rm res}(d_0) \le 1$时的最短输运时间 $t_{\rm f}$。虚线：固定Ω+ 且不切换Ω时的 $t_{\rm f}$。实线：$\Omega_+/\Omega_{\rm res}(d_0) > \sqrt{2}/4$；初始时$\Omega(t) \equiv 0$ ，随后切换至Ω+。对于$1/2 + 1/\pi \le \Omega_+/\Omega_{\rm res}(d_0) \le 1$ ，有 $T_{\rm abs}(d)$。因此，切换Ω可使输运时间比单独使用Ω+ 更短。

情形： $0 < \omega_- < \omega_+ < \omega_{\rm res} = 2\pi$。与前一情形一样，只有在 $\omega_+ \le \tilde{\omega}_+ = \pi/\sqrt{2}$时， ω_+ 才相关。于是， $\tau_{\rm f}(\omega_-,\omega_+)/2 \le \pi/\omega_+$，且与 ω_-无关。这就是图 10 中的上方密集区域。对于 $\omega_+ > \tilde{\omega}_+$ 在图 8 左侧，时间演化过程中存在两个或更多交替的 $\omega_\pm$。若有两个，其中一个以 ω_-开始，且初始时间 $-\tau_{\rm f}/2$ 满足 $\pi/\omega_+ \le \tau_{\rm f}/2 \le \pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$。此时适用方程（40）和（34）。若公式（34）左侧小于或等于1，则可以确定 τ_1 和 $\tau_{\rm f}(\omega_-,\omega_+)$，如图 10 中的粗网格区域所示。令 $\cos[\omega_+\tau_1] = 1$ ，再利用公式（34）中的 $\tau_{\rm f} = \tau_{\rm abs} = 2\pi$ ，即可得到粗网格曲面底部的边界曲线，该曲线与标记为 $T_{\rm abs}$的区域相邻。在此区域中， τ_1 无解。如前所述，此处可以使用解 $p_2(\tau) \equiv 0$ ，此时对 $\omega(\tau)$没有限制。若从点$\{\omega_-,\omega_+\}$ 出发，先减小 ω_+ ，直至到达边界曲线，然后同样增大 ω_- ，便可得到边界曲线上一段弧的两个终点。该弧上的每个点$\{\hat{}\omega_-、\hat{}\omega_+\}$ 都满足 $\{\omega_- \le \hat{}\omega_- \le \hat{}\omega_+ \le \omega_+\}$ ，并给出 $\tau_{\rm abs}$。因此，与单个 ω_+ 的情形相比，仍有改进。

如果存在第三个先行区间，即具有ω_+，那么 $\tau_{\rm f}(\omega_-,\omega_+)/2 > \pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$和 $\tau_{\rm f}$将大于仅有两个周期时的相应值。因此不会出现第三个周期。通过类似的计算，交换 ω_+ 和 ω_- 会得到更大的输运时间。

方案：当$\omega_+ \le \tilde{\omega}_+ = \pi/\sqrt{2}$ 时，按第二节中的方法处理ω_+ 。当 $\omega_+ > \tilde{\omega}_+$ 时，根据方程 (34) 和 (40) 确定$\tau_{\rm f}(\omega_-,\omega_+)$和 τ_1，前提是存在 τ_1 的解。此时得到一个形式为 $-+|+-$ 的 $\omega_\pm$ 序列，因此从时间 $-\tau_{\rm f}/2$ 到时间 $-\pi/\omega_+$ ，先采用 $u = 1$ 和ω_- ，随后切换到 ω_+。接着继续到时间 $-\tau_1$，切换到 $u = -1$ ，并继续到时间 $\tau = 0$ ，此时切换回 $u = 1$。对于 $\tau > 0$ ，则通过对称性（或反对称性）继续。当 τ_1无解时，即点 $\{\omega_-,\omega_+\}$ 位于图 10 中标记为 $T_{\rm abs}$ 的区域内时，可以为上述弧上的任意一点选择一个方案。这样会得到 $\tau_{\rm abs}$，此时方案并不唯一。

情形： $\omega_{\rm res} = 2\pi \le \omega_- < \omega_+ < 2\,\omega_{\rm res}$。按照前述方法，可得 $+-+|+-+$和 $-+-+|+-+-$作为可能的$\omega_\pm$ 序列。第一种序列适用方程（37），第二种序列适用方程（38）。现在，在$\tau_{\rm f}/2$位于最后一个 ω_+ 区间这一条件下，联立求解公式（40）和方程（37），得到 $\tau_{\rm f}$。图 11 中，这给出了左侧曲面；在该曲面之外， τ_1无解。类似地，可得到第二种序列对应的右侧曲面。在底部的边界曲线上，有 $\tau_{\rm abs}$ ，该曲线由 $\cos(\omega_+\tau_1) = 1$ 得出。两种 $\omega_\pm$ 序列由曲面下方的虚线曲线分隔。将$\tau_{\rm f}/2 = 2\pi/\omega_+ + \pi/\omega_-$ 代入方程（37、40）即可得到该曲线。它在边界曲线上的终点为 $\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\}\,\omega_{\rm res}$，在对角线上的终点为 $\frac{1}{4}\sqrt{34}\,\omega_{\rm res}$。

在标记为 $T_{\rm abs}$ 的区域中，对于 τ_1 不存在解。同样，可以选择如前所述构造的弧上的任意点 $\{\hat{}\omega_-、\hat{}\omega_+\}$ ，从而得到 $\tau_{\rm abs}$。将序列反向为 $-+-|-+-$ 会导致更长的输运时间。

方案：如果对于给定的 $\{\omega_-,\omega_+\}$，有 $\omega_- \le (\frac{1}{2} +$

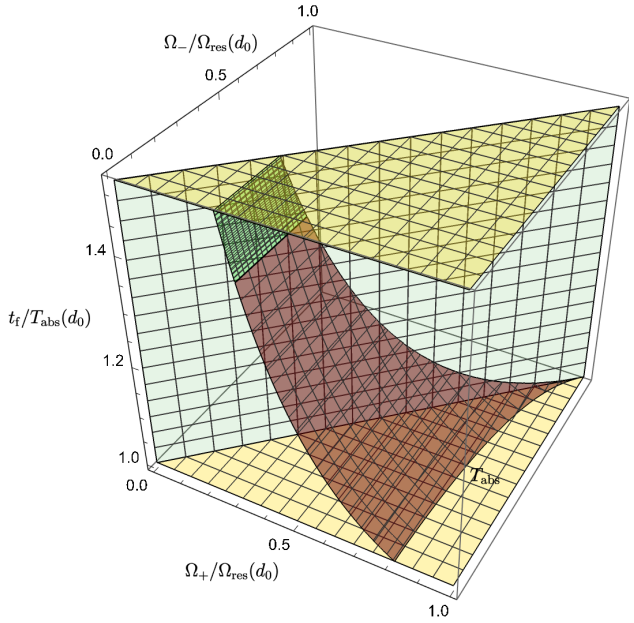

图10：固定距离 $t_{\rm f}$ 时的最短输运时间 d_0和 $0 \le \Omega_-/\Omega_{\rm res}(d_0) \le \Omega_+/\Omega_{\rm res}(d_0) \le 1$。对于 $\Omega_+/\Omega_{\rm res}(d_0) \le \pi/\sqrt{2}$，只有 Ω+，没有切换（密集区域）。对于 {Ω−，在右侧由 $T_{\rm abs}$ 标示的区域内，Ω_+} 对应最短时间$T_{\rm abs}$。该曲面与前平面的交线是图9中的曲线，与对角平面的交线则是图4中曲线的左侧部分，直到 1。

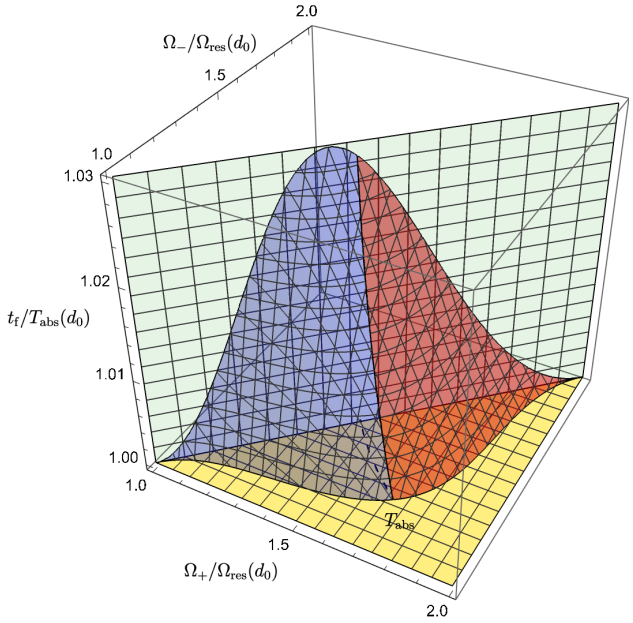

图 11：固定距离 d_0 和 $1 \le \Omega_-/\Omega_{\rm res}(d_0) \le \Omega_+/\Omega_{\rm res}(d0) \le 2$ 时的最短输运时间 $t_{\rm f}$。曲面的左侧属于 $\Omega_\pm$ 序列 $+-+|+-+$，右侧属于 $-+-+|+-+-$，两者由底面中的虚线分隔。对于 {Ω−，Ω_+}，在标记为 $T_{\rm abs}$ 的区域内，通过转至边界上对应于 [Ω−、Ω_+] 的某个子区间的点，可获得最短时间$T_{\rm abs}$。

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$) $\omega_{\rm res}$，或者方程（37）中存在 τ_1 的解，则可得到一个序列 $+-+|+-+$，见图 11。如果存在解，则该方案与上述前一种情形类似。如果不存在解，则像之前一样，在边界曲线上的弧上选取一点 {$\hat{}\omega_-$、$\hat{}\omega_+$}，并对该点采用 $\tau_{\rm f} = \tau_{\rm abs}$ 的方案。否则，可得到一个序列 $-+-+|+-+-$，其过程类似。

V. 总结与讨论

本文推导了使一类经典简谐振子在距离 d 上实现最快输运的方案，其中初始和最终状态下所有物体均处于静止状态；也就是说，简谐振子的位置静止，且简谐振子位于其平衡位置并处于静止状态。假设加速度 $a(t)$ 满足 $-a_{\max} \le a(t) \le a_{\max}$。

首先，在谐振子频率 Ω 固定时，为了达到最短输运时间，最优加速度在 $\pm a_{\max}$ 之间交替。研究表明，起始时采用 $a_{\max}$，且有三次切换；或者在 Ω 的特殊取值 $= n\Omega_{\rm res}(d) = 2\pi n\sqrt{a_{\max}/d}$, $n = 1, 2, \cdots$ 下，仅有一次切换。切换时刻已确定。

发现了最短输运时间（记作 $t_{\rm f}$）对 d、Ω 和 $a_{\max}$ 的依赖关系，参见图 3 和图 4。最优时间 $t_{\rm f}$ 与 $1/\sqrt{a_{\max}}$成正比，并发散当 Ω $\to 0$ 时；而当 Ω $\to \infty$ 时，正如预期，收敛到 $T_{\rm abs}(d) = 2\sqrt{d/a_{\max}}$，即不含谐振子的货车的最优时间。函数 $t_{\rm f}(d)$在 d较大时趋近于 $T_{\rm abs}(d)$。令人惊讶的是，有时倒退一段距离反而更有利，但不会退回到初始位置那么远。

其次，除了 $a(t)$ 之外，还考虑了满足 $\Omega_- \le \Omega(t) \le \Omega_+$ 的时变 Ω(t)。在这种情况下，$t_{\rm f}$ 的行为对 $\Omega_\pm$ 极为敏感。如果 $n\Omega_{\rm res}(d)$ 位于区间 [Ω− 内，那么对于某个 n，选择 $n\Omega_{\rm res}(d)$ 将得到最短时间 $T_{\rm abs}(d)$。

如果 $\Omega_+ \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\Omega_{\rm res}$，那么 $\Omega(t) \equiv \Omega_+$，Ω 中不会发生切换，且 Ω− 不会参与其中。否则，当 $\Omega_+ < \Omega_{\rm res}$ 时，有两种可能：（i）先从 Ω− 开始，切换到 Ω+，然后再切换回 Ω−。（ii）或者，根据 $\Omega_\pm$，存在 $\Omega_\pm$，使得 $\Omega_- \le \Omega_- \le \tilde{\Omega}_+ \le \Omega_+$；此时先从 Ω− 开始，切换到 Ω+，然后再切换回 Ω−。这种情况下可得到最短时间 $T_{\rm abs}(d)$。在 Ω− –Ω+ 平面上，对于{Ω−，Ω_+} 在一个区域内会出现这种情况，参见图 10。

如果 $n\Omega_{\rm res} < \Omega_- \le \Omega_+ < (n+1)\Omega_{\rm res}$，情况同样复杂，如图 11 所示，$n = 1$。

采用了庞特里亚金极大值原理，首先针对恒定 Ω，将 $a(t)$ 作为控制变量；随后将 $a(t)$ 和 Ω(t) 作为控制变量。对称性

性质发挥了重要作用：这些性质已针对恒定 Ω 得到证明，并以类似形式假定适用于时变 Ω。

还可以对速度 $\dot{x}_{\mathrm{w}}$ 和 $\dot{x}_{\mathrm{h}}$，或对谐振子 h.o. 的相对位移 x_{h} 施加限制。在庞特里亚金极大值原理中，这可以通过拉格朗日乘子来表述。在 [28] 中，相对位移被假定为有界，并作为唯一的控制。然而，在这种情况下，切换时作用于谐振子 h.o. 的力类似于 $\delta(t)$，且不会发生振荡。

上述关于恒定 Ω 的结果可直接应用于起重机的载荷小角度振荡问题，其中绳长 l 保持恒定。对于时变的 $l(t)$，则需要进行修正，因为 $l(t)$ 与频率 $\Omega(t)$ 的关系不同于弹簧常数与频率的关系。

这里所考虑的简谐振子是一个理想化系统。不过，它可以作为更现实模型的基准，例如在切换过程较短但平滑、而非瞬时完成的情况下。

[1] D. Gu´ery-Odelin、A. Ruschhaupt、A. Kiely、E. Torrontegui、S. Mart´ınez-Garaot 和 J.G. Muga，《绝热捷径：概念、方法与应用》，《现代物理评论》91，045001（2019年）。[2] E. Torrontegui、S. Iba˜nez、S. Mart´ınez-Garaot、M. Mod- ugno、A. del Campo、D. Gu´ery-Odelin、A. Ruschhaupt、X. Chen 和 J. G. Muga，《绝热捷径》，《原子、分子与光学物理进展》62，117（2013年）。[3] Yue Ban、Xi Chen、E. Torrontegui、E. Solano 和 J. Casanova，《通过绝热捷径加速量子感知器》，《科学报告》第11卷，文章编号：5783（2021年）。[4] N.N. Hegade、K. Paul、Yongcheng Ding、M. Sanz、F. Al- barr´an-Arriagada、E. Solano 和 Xi Chen，《数字化绝热量子计算中的绝热捷径》，《物理评论应用》15，024038（2021年）。[5] J. G. Muga、X. Chen、A. Ruschhaupt 和 D. Gu´ery-Odelin，《快速势阱变化下玻色-爱因斯坦凝聚体的无摩擦动力学》，《物理学杂志B辑》42，241001（2009年）。[6] X. Chen、A. Ruschhaupt、S. Schmidt、A. del Campo、D. Gu´ery-Odelin 和 J. G. Muga，《简谐势阱中的快速最优无摩擦原子冷却》，《物理评论快报》104，063002（2010年）。[7] D. Gu´ery-Odelin、J. G. Muga、M. J. Ruiz-Montero 和 E. Trizac，《时变外力作用下玻尔兹曼方程的精确非平衡解》，《物理评论快报》112，180602（2014年）。[8] D. Gu´ery-Odelin 和 J. G. Muga，《简谐势阱中的输运：绝热捷径与鲁棒方案》，《物理评论 A》90，063425（2014年）。[9] A. Ruschhaupt、X. Chen、D. Alonso 和 J. G. Muga，《二能级量子系统中布居反转的最优鲁棒绝热捷径》，《新物理学杂志》14，093040（2012年）。[10] S. Mart´ınez-Garaot、E. Torrontegui、X. Chen、M. Mod- ugno、D. Gu´ery-Odelin、Shuo-Yen Tseng 和 J. G. Muga，《超冷原子的振动模式复用》，《物理评论快报》111，213001（2013年）。[11] M. Demirplak 和 S. A. Rice，《反绝热场的一致性、极值性与整体性质》，《化学物理学杂志》129，154111（2008年）。[12] M. V. Berry，《无跃迁量子驱动》，《物理学杂志A辑》42，365303（2009年）。[13] X. Chen、I. Lizuain、A. Ruschhaupt、D. Gu´ery-Odelin 和 J. G. Muga，《二能级和三能级原子中的绝热传输捷径》，《物理评论快报》105，123003（2010年）。

[14] E. Carolan、A. Kiely 和 S. Campbell，《冲击区间中的反绝热控制》，《物理评论 A》105，012605（2022年）[15] S. Masuda 和 K. Nakamura，《量子力学中绝热动力学的快进》，《英国皇家学会学报 A 辑》466，1135（2010年）。[16] S. Masuda 和 K. Nakamura，《电磁场中绝热量子动力学的加速》，《物理评论 A》84，043434（2011年）。[17] Katsuhiro Nakamura、Jasur Matrasulov 和 Yuki Izu- mida，《随机热机的快进方法》，《物理评论 E》102，012129（2020年）。[18] E. Torrontegui、S. Mart´ınez-Garaot、A. Ruschhaupt 和 J. G. Muga，《绝热捷径：快进方法》，《物理评论 A》86，013601（2012年）。[19] G.C. Hegerfeldt，《量子速度极限下的驱动：二能级系统的最优控制》，《物理评论快报》111，260501（2013年）[20] E. Dionis 和 D. Sugny，《通过分段常数脉冲对二能级量子系统进行时间最优控制》，arXiv.2211.09167[21] G.C. Hegerfeldt，《二能级系统的高速驱动》，《物理评论 A》90，032110（2014年）。[22] Xi Chen、Yue Ban 和 G.C. Hegerfeldt，《非线性二能级系统的时间最优量子控制》，《物理评论 A》94，023624（2016年）[23] S. Gonz´alez-Resines、D. Gu´ery-Odelin、A. Tobalina、I. Lizuain、E. Torrontegui 和 J.G. Muga，《起重机控制参数的基于不变量的逆向工程》，《物理评论应用》8，054008（2017年）。[24] L. S. Pontryagin、V. G. Boltyanskii、R. V. Gamkrelidze 和 E. F. Mishchenko，*The Mathematical Theory of Optimal Processes* 1962，Interscience（）。[25] L.M. Hocking，*Optimal control: an introduction to the theory with applications*，Clarendon出版社（牛津，1991年）[26] U. Boscain、M. Sigalotti 和 D. Sugny，《量子最优控制庞特里亚金极大值原理简介》，《PRX Quantum》2，030203（2021年）[27] E. Torrontegui、I. Lizuain、S. Gonz´alez-Resines、A. To- balina、A. Ruschhaupt、R. Kosloff 和 J. G. Muga，《绝热捷径的能量消耗》，《物理评论 A》96，022133（2017年）[28] Xi Chen、E. Torrontegui、D. Stefanatos、Jr-Shin Li 和 J. G. Muga，《无末态激发的高效原子输运最优轨迹》，《物理评论 A》84，043415（2011年）。