arXiv:2301.01136v1 [math.OC] 3 Jan 2023

斯托克斯系统的最优控制问题：利用穿孔区域中的展开方法进行渐近分析

Swati Garg 和 Bidhan Chandra Sardar*印度理工学院鲁普纳加尔分校数学系，旁遮普邦鲁普纳加尔-140001，印度
swati.19maz0006@iitrpr.ac.in,
swatigargmks@gmail.com bcsardar@iitrpr.ac.in,
bcsardar31@gmail.com

2023年1月4日

摘要

本文研究周期穿孔区域中由定常斯托克斯方程约束的最优控制问题（OCP）的渐近分析。我们对其内部区域施加分布式控制。所考虑的斯托克斯算子在状态方程中包含振荡系数。我们刻画了最优控制，并通过采用周期展开方法，证明所研究的 OCP 的解收敛到由无孔域上的定常斯托克斯方程所支配的极限最优控制问题的解。我们还证明了代价泛函的收敛性。

关键词： 斯托克斯方程、均匀化、最优控制、穿孔区域、展开算子

1 引言

本文研究周期性穿孔区域中由广义定常斯托克斯方程支配的最优控制问题（OCP）$\mathcal{O}_\varepsilon^*$（见第2节，了解定义域的描述）。穿孔区域中孔洞的大小与周期同阶，且允许孔洞与区域边界相交。控制施加于区域内部，我们希望研究其渐近

美国数学学会学科分类：35B27, 35B40, 35Q93, 49J20, 76D07
*通讯作者

分析（均匀化），研究受振荡系数约束的定常斯托克斯方程所支配的内部最优控制问题。

文献中有多项关于穿孔区域上斯托克斯方程均匀化的研究。采用多尺度展开法， [16] 中的作者研究了多孔介质中带有孔洞边界狄利克雷边界条件的斯托克斯方程均匀化，并得到了均匀化介质中的极限定律——达西定律。在 [9], 中，作者考察了具有非齐次滑移边界条件的周期性穿孔区域上的斯托克斯系统，这些条件依赖于参数 γ。通过采用塔塔尔振荡测试函数法，他们得到了均匀化下的极限定律，即：达西定律（当 $\gamma < 1$时）、布林克曼定律（当 $\gamma = 1$时）以及斯托克斯型定律（当 $\gamma > 1$时）。在 [25], 中，作者采用 [10]的方法，在穿孔区域上利用周期展开研究了一个类似问题。此外， [9] 中所见的行为类型，作者在 [12] 中研究二维斯托克斯方程的齐次傅里叶边界条件时也已观察到。同样，在 [1, 2], 中，作者考察了穿孔区域上的斯托克斯方程，其中孔洞尺寸远小于小正参数 ε；在 [1] 中，他们将孔洞上的边界条件设为狄利克雷型，而在 [2]中则设为滑移型。这些研究中的定义域几何形状，具体而言即孔洞的尺寸，决定了极限定律的类型。此外， [6] 中的作者采用了 $\Gamma-$ 收敛技术，得到了可比的结果。

一些研究探讨了由椭圆系统支配的最优控制问题在周期性穿孔区域上的均匀化，这些区域的孔洞边界上具有不同类型的边界条件（孔洞尺寸与周期同阶）。在这方面，研究者采用了不同的技术，即 H_0- 收敛、 [18], 双尺度收敛以及 [23],展开方法 [7, 21], ，由此得到了非穿孔区域上的均匀化最优控制问题。此外，对于斯托克斯系统， [22]中的作者研究了满足斯托克斯方程且在孔洞边界上施加狄利克雷边界条件的最优控制问题的均匀化，其中孔洞尺寸与周期同阶。在此，他们得到的均质化系统仅适用于可容许控制集不受约束的情形。关于穿孔区域中最优控制问题均匀化的更多文献，读者可参阅 [13–15, 19, 24] 及其中的参考文献。

本文提出了一个定义在周期性穿孔区域中的内部最优控制问题，其约束条件为广义定常斯托克斯方程$\mathcal{O}_\varepsilon^*$。对于不与外边界相交的孔洞边界，施加齐次诺伊曼边界条件；对于边界的其余部分，则施加齐次狄利克雷边界条件。本文旨在研究该最优控制问题的均匀化。更具体地说，我们考虑对 L^2-代价泛函（3.1）进行最小化，该泛函受约束广义定常斯托克斯方程（3.2）约束。

斯托克斯方程在广义意义下得到推广：我们考虑具有振荡系数的散度形式二阶椭圆线性微分算子，即 $-$散度 $(A_\varepsilon \nabla)$，该算子最初是在固定区域中研究的，见 [4, 第 1], 章，而非经典拉普拉斯算子。

这里，标量算子 –散度 $(A_\varepsilon\nabla)$ 的作用以“对角”方式定义在任意向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n)$上，其分量为 $u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n$，且属于 H^1 Sobolev 空间。也就是说，对于$1\le i\le n$，有 (– 散度 ($A_\varepsilon\nabla\boldsymbol{u}))_i$ = −散度 $(A_\varepsilon\nabla u_i)$。均匀化过程中遇到的主要困难，是确定状态系统和伴随系统中出现的极限压力项。我们通过引入适当的校正函数来克服这一困难，这些函数求解了若干单胞问题。由此，我们得到了与无孔域中定常斯托克斯方程相关的极限最优控制问题。

本文的结构安排如下：下一节将介绍周期性穿孔区域 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 以及后文将用到的记号。第3 节将详细描述所考虑的最优控制问题，并推导最优性条件，随后刻画最优控制。第4节将给出所考虑的最优控制问题及其相应伴随问题解的先验估计。第5节回顾穿孔区域中周期展开方法的定义（参见 [8, 11]）及其若干性质。第6节讨论极限（均匀化）最优控制问题。最后，我们将在第7节给出主要收敛结果。

2 定义域描述与记号

2.1 定义域描述

设 $\{b_1,...,b_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n(n\ge 2)$, 的一组基，且 W 是相应的参考单元，其定义为 a s

$$W=\left\{w\in\mathbb{R}^n\,|\,w=\sum_{i=1}^n w_ib_i,\ (w_1,\ldots,w_n)\in(0,1)^n\right\}.$$

记 $\mathcal{O}$、 $W,$和 $W^*=W\backslash Y$分别为 $\mathbb{R}^n$的一个有界开子集、 W的一个紧子集以及穿孔参考单胞。假设 Y的边界是利普希茨连续的，且具有有限个连通分支。

此外，设 $\varepsilon>0$ 为一个收敛于零的序列，并令

$$\mathcal{T}=\left\{\zeta\in\mathbb{R}^n\,|\,\zeta=\sum_{i=1}^n z_ib_i,\ (z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{Z}^n\right\},\quad \mathcal{Z}_\varepsilon=\{\zeta\in\mathcal{T}\,|\,\varepsilon(\zeta+W)\subset\mathcal{O}\}.$$

我们考虑穿孔区域 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$（见图 1），其定义为 $\mathcal{O}_\varepsilon^*=\mathcal{O}\backslash Y_\varepsilon$，其中$\frown Y_\varepsilon=\cup_{\zeta\in\mathcal{T}}\varepsilon\ (\zeta+Y)$ 。现在，记 $\mathcal{O}_\varepsilon$ 为满足以下条件的最大 $\varepsilon\ (\zeta+W)$ 单元并集的内部： $\varepsilon\ (\zeta+W)\ \subset\mathcal{O}$，而 $\underline{\Lambda_\varepsilon}\subset\overline{\mathcal{O}}$ 则包含与边界 $\varepsilon\ (\zeta+W)$ 单元相交的部分$\widehat{\ }$。 $\partial\mathcal{O}$更准确地说，我们写作 $\Lambda_\varepsilon=\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}_\varepsilon$，其中

$$\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon=interior\left\{\cup_{\zeta\in\mathcal{Z}_\varepsilon}\varepsilon(\zeta+\overline{W})\right\}.$$

相应的穿孔区域定义为

$$\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon^*=\hat{\mathcal{O}}_\varepsilon\backslash Y_\varepsilon,\quad \hat{\Lambda}_\varepsilon^*=\mathcal{O}_\varepsilon^*\backslash\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon^*.$$

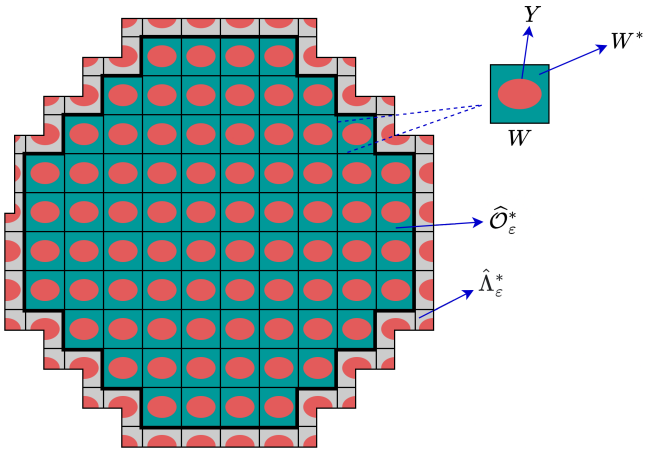


图 1：穿孔区域 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 和参考单元 W。

此外，我们将穿孔区域 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 的边界记为

$$\partial\mathcal{O}_\varepsilon^* = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_0^\varepsilon, \quad \text{where}\,\Gamma_1^\varepsilon = \partial\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon \cap \partial Y_\varepsilon \,\text{and}\, \Gamma_0^\varepsilon = \partial\mathcal{O}_\varepsilon^* \backslash \Gamma_1^\varepsilon,$$

这意味着，Γ_1^ε 表示包含在 $\mathcal{O}_\varepsilon$中的孔洞集合的边界。
见图1，$\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 和 Λ_ε^* 分别表示穿孔区域 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$中的深色穿孔部分和剩余部分。而 Γ_1^ε 和 Γ_0^ε 分别表示包含在 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 中的孔洞边界，以及包含在 Λ_ε^* 中的孔洞边界与外边界 $\partial\mathcal{O}$。下文将介绍本文中通篇使用的一些记号。

2.2 记号

- $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$ 在 $\mathcal{O}$中几乎处处成立，对所有 $\varepsilon > 0$均成立。
- $\boldsymbol{v_\varepsilon} = (v_{\varepsilon 1}、\ \ldots\ldots、\ v_{\varepsilon n})$，对于任意粗体符号向量函数 $\boldsymbol{v}_\varepsilon$。
- $\boldsymbol{v} = (v_1、\ \ldots\ldots、\ v_n)$，对于任意粗体符号向量函数 $\boldsymbol{v}$。
- $\boldsymbol{\eta_\varepsilon}$ 表示指向Γ_1^ε的外法向单位向量。
- $\boldsymbol{\eta}$ 表示指向 $\partial\mathcal{O}$ 的外法向单位向量。
- M^t 表示任意矩阵 M 的转置。
- ψ 是将任意函数 ψ 从 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 外部零延拓到整个 $\mathcal{O}$上的结果。
- $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1,\ \cdots,\ \psi_n)$，对于任意向量函数 $\boldsymbol{\psi}$。
- $|F|$是可测集 F的勒贝格测度。

- $\Theta = \frac{|W^*|}{|W|}$是穿孔参考单胞 W^*在参考单元 W中所占的比例。
- $\mathcal{M}_{W^*}(\phi)$是 ϕ在穿孔参考单胞 W^*上的平均值。
- $\mathcal{M}_{W^*}(\boldsymbol{\phi}) = (\mathcal{M}_{W^*}(\phi_1) \cdots, \mathcal{M}_{W^*}(\phi_n))$，其中向量函数为 $\boldsymbol{\phi}$。
- $\{D \to \mathbb{R}\}$，定义在定义域 D上的所有实值函数的集合。
- $\mathcal{D}(\Omega)$是Ω上的无穷次可微函数空间，其支集紧包含于Ω中；其中Ω为任意开集 $\in \mathbb{R}^n$。

3 问题描述与最优性条件

考虑以下与斯托克斯系统相关的最优控制问题：

$$\inf_{\boldsymbol{\theta_\varepsilon} \in (L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \left\{ J_\varepsilon(\boldsymbol{\theta_\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\boldsymbol{u_\varepsilon}(\boldsymbol{\theta_\varepsilon}) - \boldsymbol{u_d}|^2 + \frac{\tau}{2} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\boldsymbol{\theta_\varepsilon}|^2 \right\}, \tag{3.1}$$

满足

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u_\varepsilon}) + \nabla p_\varepsilon &= \boldsymbol{\theta_\varepsilon} \quad \text{in } \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u_\varepsilon}) &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \boldsymbol{\eta_\varepsilon} \cdot A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u_\varepsilon} - p_\varepsilon \boldsymbol{\eta_\varepsilon} &= \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_1^\varepsilon, \\ \boldsymbol{u_\varepsilon} &= \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中，期望状态 $\boldsymbol{u_d} = (u_{d_1}, \ldots, u_{d_n})$ 定义在空间 $(L^2(\mathcal{O}))^n$ 上，$\boldsymbol{\theta_\varepsilon}$ 是定义在空间 $(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 上的控制函数，$\tau > 0$ 是给定的正则化参数。这里，矩阵 $A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$，其中 $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \le i,\ j \le n}$ 定义在空间 $(L^\infty(\mathcal{O}))^{n \times n}$ 上，假定满足一致椭圆性条件：存在实常数 m_1、$m_2 > 0$，使得 $m_1||\lambda||^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \le m_2||\lambda||^2$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}^n$ 均成立，其中赋有欧几里得范数，记为 $||\cdot||$。此外，我们以“对角”方式理解标量边界算子 $\boldsymbol{\eta_\varepsilon} \cdot A_\varepsilon \nabla$ 对向量 $\boldsymbol{u_\varepsilon}|_{\Gamma_1^\varepsilon}$ 的作用：$(\boldsymbol{\eta_\varepsilon} \cdot A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u_\varepsilon})_i = \boldsymbol{\eta_\varepsilon} \cdot A_\varepsilon \nabla u_{\varepsilon i}$，其中 $1 \le i \le n$。

我们引入函数空间 $(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n := \{\boldsymbol{\phi} \in (H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n \mid \boldsymbol{\phi}|_{\Gamma_0^\varepsilon} = \boldsymbol{0}\}$。这是一个赋范的巴拿赫空间，其范数为

$$||\boldsymbol{\phi}||_{(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} := ||\nabla \boldsymbol{\phi}||_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n \times n}}, \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n.$$

定义 2.1。我们称一对 $(\boldsymbol{u_\varepsilon},\ p_\varepsilon) \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n \times L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$ 是以下内容的弱解若对于所有 $\boldsymbol{\phi} \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$，(3.2)

$$\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u_\varepsilon} : \nabla \boldsymbol{\phi}\, dx - \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} p_\varepsilon \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi})\, dx = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \boldsymbol{\theta_\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx, \tag{3.3}$$

并且，对于所有 $w \in L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$,

$$\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\ w\ dx = 0. \tag{3.4}$$

这里，$(:)$ 和 $(\cdot)$ 分别表示矩阵元素逐项相乘后求和，以及向量的通常标量积。系统 (3.2) 存在唯一弱解 $(\boldsymbol{u}_\varepsilon(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\ p_\varepsilon) \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n \times L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$，这一结论可仿照 [5, 定理 IV.7.1] 得出。此外，对每个 $\varepsilon > 0$，问题 (3.1) 都存在唯一解，其证明与 [20,第 2 章定理 1.2] 的证明类似。我们将问题 (3.1) 的最优解记为三元组 $(\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, \boldsymbol{\theta}_\varepsilon)$，其中 $\boldsymbol{u}_\varepsilon$、$p_\varepsilon$ 和 $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ 分别为最优状态、压力和控制。

最优性条件：最优性条件为 $J'_\varepsilon(\boldsymbol{\theta}) \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \geq 0$，对所有$\boldsymbol{\theta} \in (L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 均成立（见 [20, 第 2 章，第 48] 页）。该条件还可进一步简化为 $\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} (\boldsymbol{v}_\varepsilon + \tau\, \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \geq 0$，对所有 $\boldsymbol{\theta} \in (L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 均成立（见 [20, 第 2] 章），其中对 $(\boldsymbol{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ 是下列伴随问题的解：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A_\varepsilon^t \nabla \overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\right) + \nabla \overline{q}_\varepsilon &= \overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \boldsymbol{u_d} \quad \text{in } \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \cdot A_\varepsilon^t \nabla \overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon - \overline{q}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_\varepsilon &= \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_1^\varepsilon, \\ \overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon &= \boldsymbol{0} \quad \text{on } \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases} \tag{3.5}$$

我们称 $\overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon$ 和 q_ε分别为伴随状态和压力。现在可以采用与系统（3.2）类似的方法，证明（3.5）存在唯一的弱解（$\boldsymbol{v}_\varepsilon$，$q_\varepsilon$）。

下面的定理刻画了最优控制，其证明遵循 [20, 第 2 章定理 1.4]中给出的标准步骤。

定理 3.1。设 $(\boldsymbol{u}_\varepsilon,\ p_\varepsilon, \boldsymbol{\theta}_\varepsilon)$ 是问题 (3.1) 的最优解，且 $(\boldsymbol{v}_\varepsilon,\ q_\varepsilon)$满足 (3.5)，则最优控制由下式刻画：

$$\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = -\frac{1}{\tau}\overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon \ \ a.e.\ \ in \mathcal{O}_\varepsilon^*. \tag{3.6}$$

反之，假设三元组 $(\check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon, \check{p}_\varepsilon, \check{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon) \in \left(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*)\right)^n \times L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*) \times (L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 以及一对 $(\check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon, \check{q}_\varepsilon) \in \left(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*)\right)^n \times L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$ 满足以下系统：

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(A_\varepsilon \nabla \check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon\right) + \nabla \check{p}_\varepsilon = -\dfrac{1}{\tau}\check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon & in\ \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ -\operatorname{div}\left(A_\varepsilon^t \nabla \check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\right) + \nabla \check{q}_\varepsilon = \check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \boldsymbol{u_d} & in\ \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \operatorname{div}(\check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon) = 0,\ \operatorname{div}(\check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) = 0 & in\ \mathcal{O}_\varepsilon^*, \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \cdot A_\varepsilon \nabla \check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon - \check{p}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \boldsymbol{0} & on\ \Gamma_1^\varepsilon, \\ \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \cdot A_\varepsilon^t \nabla \check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon - \check{q}_\varepsilon \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \boldsymbol{0} & on\ \Gamma_1^\varepsilon, \\ \check{\boldsymbol{v}}_\varepsilon = \boldsymbol{0},\ \check{\boldsymbol{u}}_\varepsilon = \boldsymbol{0} & on\ \Gamma_0^\varepsilon. \end{cases}$$

那么，三元组 $(\check{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \check{p}_{\varepsilon}, -\frac{1}{\tau}\check{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 是(3.1)的最优解。

4 先验估计

本节旨在推导问题 3.1 的最优解以及相应伴随问题 3.5 的解的估计。这些估计是一致的，并且与参数 ε无关。为实现这一目标，我们首先引出以下两个引理:

引理 4.1 （引理 A.4, [3]）。 存在一个常数 $C \in \mathbb{R}^+$，与 ε 无关，使得

$$||\boldsymbol{v}||_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)^n} \leq C||\nabla \boldsymbol{v}||_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}}, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n.$$

引理 4.2 （引理 5.1, [12]）。 对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $q_\varepsilon \in L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$，存在 $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 以及一个与 ε 无关的常数 $C \in \mathbb{R}^+$，使得

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) = q_\varepsilon \quad and \quad ||\nabla \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{\varepsilon}}||_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}} \leq C(\mathcal{O})\ ||q_\varepsilon||_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)}. \tag{4.1}$$

定理 4.3。 对于每个 $\varepsilon > 0$，令 $(\underline{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}}、\ p_\varepsilon、\ \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 为问题 （3.1）的最优解，且 $(\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}、\ q_\varepsilon)$ 求解相应的伴随问题 （3。5）。则有 $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \in （H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}（\mathcal{O}_\varepsilon^*）)^n$，并且存在一个常数 $C \in \mathbb{R}^+$，与 ε 无关，使得

$$\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq C, \tag{4.2}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_{(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq C, \tag{4.3}$$

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_{(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq C, \tag{4.4}$$

$$\|\bar{p}_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)} \leq C, \tag{4.5}$$

$$\|\bar{q}_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)} \leq C. \tag{4.6}$$

证明。令 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(0)$ 表示与 $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ 对应的 (3.2) 的解。根据引理 4.1，可以证明 $\|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(0)\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq 0$，即 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) = 0$属于 $(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$。利用这一点以及解 $(\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, p_\varepsilon, \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 对问题 (3.1) 的最优性，我们得到

$$\|\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\overline{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{d}}\|^2_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} + \tau\|\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq \|\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{d}}\|^2_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \leq C,$$

由此得到估计（4.2）。现在，令 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 作为（3.3）中的测试函数。考虑（4.2）以及矩阵 A_ε 的一致椭圆性条件，应用柯西-施瓦茨不等式并结合引理 4.1，可得:

$$m_1\|\nabla\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}} \leq \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} A_\varepsilon \nabla\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} : \nabla\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\ dx \leq C\ \|\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n}\|\nabla\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}},$$

由此可得估计式（4.3）。

由引理4.2，对于给定的 $p_\varepsilon^- \in L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$，存在 $\boldsymbol{g}_\varepsilon \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 满足散度 $\mathbf{(}\boldsymbol{g}_\varepsilon\mathbf{)} = p_\varepsilon$。对应于 $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$，在（3.3）中取 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}_\varepsilon$，可得

$$\|\overline{p}_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)} = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} A_\varepsilon \nabla \overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon : \nabla \boldsymbol{g}_\varepsilon \, dx - \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{g}_\varepsilon \, dx. \tag{4.7}$$

根据（4.1）、（4.2）和（4.3），以及矩阵 A_ε 满足一致椭圆性条件，由（4.7）并利用柯西-施瓦茨不等式和引理4.1，可得：

$$\|\overline{p}_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)} \leq \left(m_2 \|\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}} + C\|\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n} \right) \|\nabla \boldsymbol{g}_\varepsilon\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^{n\times n}},$$

由此得到估计式（4.5）。同理，根据上述讨论可容易地得到估计式（4.4）和（4.6）。最后，由（3.6），可得 $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \in (H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$。 □

5 穿孔区域的周期展开方法

我们回顾文献 [8, 11]中给出的周期展开算子的定义及其若干性质。给定 $x \in \mathbb{R}^n$，分别用 x 的最大整数部分和小数部分表示为 $[x]_W$ 和 $\{x\}_W$。也就是说，$[x]_W = \sum_{j=1}^n k_j b_j$ 是由周期构成的唯一整数线性组合，并且 $\{x\}_W = x - [x]_W$。特别地，对于 $\varepsilon > 0$，有

$$x = \varepsilon \left(\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_W + \left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}_W \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

定义 5。 1. 展开算子 $T_\varepsilon^*: \{\mathcal{O}_\varepsilon^* \to \mathbb{R}\} \to \{\mathcal{O} \times W^* \to \mathbb{R}\}$ 定义为 s

$$T_\varepsilon^*(u)(x,y) = \begin{cases} u\left(\varepsilon \left[\frac{x_1}{\varepsilon}\right]_W + \varepsilon y\right) & a.e. \ for \ (x,y) \in \widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon \times W^*, \\ 0 & a.e. \ for \ (x,y) \in \Lambda_\varepsilon \times W^*. \end{cases}$$

此外，对于任意定义域 $D \supseteq \mathcal{O}_\varepsilon^*$ 和向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n) \in (\{D \to \mathbb{R}\})^n$，我们将其展开定义为

$$T_\varepsilon^*(\boldsymbol{u}) := (T_\varepsilon^*(u_1), \cdots, T_\varepsilon^*(u_n)).$$

命题 5.2。 下面给出展开算子的性质：

(i) T_ε^* 是从 $L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$ 到 $L^2(\mathcal{O} \times W^*)$ 的线性连续映射。

(ii) 设 $u, v \in L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$。则 $T_\varepsilon^*(uv) = T_\varepsilon^*(u) T_\varepsilon^*(v)$。

(iii) 设 $u \in L^2(\mathcal{O})$。则 $T_\varepsilon^*(u) \to u$ 在 $L^2(\mathcal{O} \times W^*)$ 中强收敛。

(iv) 令 $u \in L^1(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$。则

$$\int_{\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon^*} u(x) \, dx = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} u(x) \, dx - \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} u(x) \, dx = \frac{1}{|W^*|} \int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(u)(x,y) \, dxdy.$$

(v) 对每个 $\varepsilon>0$，令 $\{u_\varepsilon\}\in L^2(\mathcal{O})$ 且 $u_\varepsilon\to u$ 在 $L^2(\mathcal{O})$中强收敛。则 $T_\varepsilon^*(u_\varepsilon)\to u$在 $L^2(\mathcal{O}\times W^*)$ 中强收敛。

(vi) 设 $v\in L^2(W^*)$为一个 W-周期函数，且 $v_\varepsilon(x)=v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$。那么，

$$T_\varepsilon^*(v_\varepsilon)(x,y)=\begin{cases} v(y) & a.e.\ for\ (x,y)\in\widehat{\mathcal{O}}_\varepsilon\times W^*,\\ 0 & a.e.\ for\ (x,y)\in\Lambda_\varepsilon\times W^*.\end{cases}$$

(vii) 设 $f_\varepsilon\in L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$一致有界。那么，存在 $f\in L^2(\mathcal{O}\times W^*)$，使得$T_\varepsilon^*(f_\varepsilon)\rightharpoonup f$在 $L^2(\mathcal{O}\times W^*)$ 中弱收敛，并且

$$\widetilde{f}_\varepsilon\rightharpoonup\frac{1}{|W|}\int_{W^*}f(\cdot,y)\,dy\ \ weakly\ in\ L^2(\mathcal{O}).$$

命题 5.3。 设 $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$ 有界且具有利普希茨边界。设 $f_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$ 满足 $f_\varepsilon=0$ 在 $\partial\mathcal{O}\cap\partial\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 上成立，并且满足，

$$\|\nabla f_\varepsilon\|_{(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n}\le C^{\S}.$$

那么，存在 $f\in H_0^1(\mathcal{O})$和 $\widehat{f}\in L^2\left(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)\right)$，其中 $\mathcal{M}_{W^*}(\widehat{f})=0$，使得在取一个子序列后，

$$\begin{cases} T_\varepsilon^*(\nabla f_\varepsilon)\rightharpoonup\nabla f+\nabla_y\widehat{f} & weakly\ in\ \left(L^2(\mathcal{O}\times W^*)\right)^n,\\ T_\varepsilon^*(f_\varepsilon)\to f & strongly\ in\ L^2\left(\mathcal{O};H^1(W^*)\right).\end{cases}$$

6 极限最优控制问题

本节介绍与我们在开篇所考虑的问题（3.1）相对应的极限（均质化）系统。

考虑函数空间

$$\left(H_0^1(\mathcal{O})\right)^n:=\left\{\boldsymbol{\varphi}\in(H^1(\mathcal{O}))^n\mid\boldsymbol{\varphi}|_{\partial\mathcal{O}}=\mathbf{0}\right\},$$

该空间在范数下为希尔伯特空间

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{(H_0^1(\mathcal{O}))^n}:=\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{(L^2(\mathcal{O}))^{n\times n}}\quad\forall\,\boldsymbol{\varphi}\in(H_0^1(\mathcal{O}))^n.$$

现在考虑与斯托克斯系统相关的极限最优控制问题

$$\inf_{\boldsymbol{\theta}\in(L^2(\mathcal{O}))^n}\left\{J(\boldsymbol{\theta})=\frac{\Theta}{2}\int_{\mathcal{O}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u_d}|^2\,dx+\frac{\tau\Theta}{2}\int_{\mathcal{O}}|\boldsymbol{\theta}|^2\,dx\right\},\tag{6.1}$$

[§]符号 C 表示一个正的一般常数，且与 ε无关。

满足

$$\begin{cases} -\sum_{j,\alpha,\beta=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(b_{ij}^{\alpha\beta}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\right)+\nabla p &= \boldsymbol{\theta} \quad \text{in } \mathcal{O}, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O}, \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial\mathcal{O}, \end{cases} \tag{6.2}$$

其中，张量 $B=(b_{ij}^{\alpha\beta})=(b_{ij}^{\alpha\beta})_{1\le i,\ j,\ \alpha,\ \beta\le n}$ 是常张量且为椭圆的，并且对于 $1\le i,\ j,\ \alpha,\ \beta\le n$，由下式给出

$$b_{ij}^{\alpha\beta}=a_{ij}^{\alpha\beta}-\frac{1}{|W^*|}\int_{W^*}A(y)\nabla_y\left(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{\chi}_j^\beta\right):\nabla_y\boldsymbol{\chi}_i^\alpha\,dy,$$

其中 $a_{ij}^{\alpha\beta}=\frac{1}{|W^*|}\int_{W^*}A(y)\nabla_y\left(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{\chi}_j^\beta\right):\ \nabla_y P_i^\alpha\,dy$ 为常张量 A^0 的各项，$\boldsymbol{P}_j^\beta=\boldsymbol{P}_j^\beta(y)$ $=(0,\ \ldots\ldots,\ \overline{y_j},\ \ldots\ldots,\ 0)$ 在第 β 个位置为 y_j；对于 $1\le j,\ \beta\le n$，校正子 $(\boldsymbol{\chi}_j^\beta,\ \Pi_j^\beta)\in(H^1(W^*))^n\times L^2(W^*)$ 满足单胞问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y\left(A(y)\nabla_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{\chi}_j^\beta)\right)+\nabla_y\Pi_j^\beta &= \mathbf{0} \quad \text{in } W^*, \\ \boldsymbol{\eta}\cdot A(y)\nabla_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{\chi}_j^\beta)-\Pi_j^\beta\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial W^*\backslash\partial W, \\ \operatorname{div}_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{\chi}_j^\beta) &= 0 \quad \text{in } W^*, \\ (\boldsymbol{\chi}_j^\beta,\Pi_j^\beta) &\quad W^*\text{- periodic}, \\ \mathcal{M}_{W^*}(\boldsymbol{\chi}_j^\beta) &= \mathbf{0}. \end{cases} \tag{6.3}$$

这一唯一对 $(\boldsymbol{u},p)\in(H_0^1(\mathcal{O}))^n\times L^2(\mathcal{O})$ 的存在性可见 [4, 第1] 章。此外，问题 (6.1) 是一个标准问题，且存在唯一的弱解；可参阅 [20, 第 2 章，定理 1.2] 中的论证。我们称三元组 $(\boldsymbol{u},\underline{p},\underline{\boldsymbol{\theta}})$–$\in(H_0^1(\mathcal{O}))^n\times L^2(\mathcal{O})\times(L^2(\mathcal{O}))^n$ 为 (6.1) 的最优解，其中 $\boldsymbol{u}$、p 和 $\boldsymbol{\theta}$ 分别_为最优状态、压力和控制。

现在，我们引入与（6.2）相关的极限伴随系统：求一对（$\boldsymbol{v}$，q）$\in$（H_0^1（$\mathcal{O}$）$^n\times L^{2\neg}(\mathcal{O})$，使其满足以下系统

$$\begin{cases} -\sum_{i,\alpha,\beta=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\left(b_{ji}^{\beta\alpha}\dfrac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_\alpha}\right)+\nabla\overline{q} &= \overline{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u_d} \quad \text{in } \mathcal{O}, \\ \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{v}}) &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O}, \end{cases} \tag{6.4}$$

其中，张量 $B^t=(b_{ji}^{\beta\alpha})=(b_{ji}^{\beta\alpha})_{1\le i,\ j,\ \alpha,\ \beta\le n}$ 为常数且椭圆的，对于 $1\le i,\ j,\ \alpha,\ \beta\le n$，其定义为

$$b_{ji}^{\beta\alpha}=a_{ji}^{\beta\alpha}-\frac{1}{|W^*|}\int_{W^*}A^t(y)\nabla_y\left(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{H}_j^\beta\right):\nabla_y\boldsymbol{H}_i^\alpha\,dy,$$

其中 $a_{ji}^{\beta\alpha}=\frac{1}{|W^*|}\int_{W^*}A^t(y)\nabla_y\left(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{H}_j^\beta\right):\ \nabla_y\boldsymbol{P}_i^\alpha\,dy$ 是常张量A_0^t的各项。此外，对于 $1\le j,\beta\le\overline{n}$，校正子 $(\boldsymbol{H}_j^\beta,Z_j^\beta)\in(H^1(W^*))^n\times L^2(W^*)$ 满足单胞

问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y\left(A^t(y)\nabla_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{H}_j^\beta)\right)+\nabla_y Z_j^\beta &= \mathbf{0} \quad \text{in } W^*, \\ \boldsymbol{\eta}\cdot A^t(y)\nabla_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{H}_j^\beta)-Z_j^\beta\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0} \quad \text{on } \partial W^*\backslash\partial W, \\ \operatorname{div}_y(\boldsymbol{P}_j^\beta-\boldsymbol{H}_j^\beta) &= 0 \quad \text{in } W^*, \\ (\boldsymbol{H}_j^\beta, Z_j^\beta) &\quad W^*\text{- periodic}, \\ \mathcal{M}_{W^*}(\boldsymbol{H}_j^\beta) &= \mathbf{0}. \end{cases} \tag{6.5}$$

下面我们给出一个类似于定理 3.1 的结果，该结果用伴随状态刻画最优控制 $\boldsymbol{\theta}$ ，其证明遵循 $\boldsymbol{v}$ 第 2 章定理 1 中所述的标准步骤 [20, 。4]。

定理 6.1。 设 $(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{p}, \boldsymbol{\theta})$ 是 (6.1) 的最优解，且 $(\boldsymbol{v}, q)$ 是 (6.4)的对应伴随解，则最优控制由下式刻画

$$\overline{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{\tau}\overline{\boldsymbol{v}} \ a.e. \ in \ \mathcal{O}. \tag{6.6}$$

反之，假设三元组 $(\check{\boldsymbol{u}}, \check{p}, \check{\boldsymbol{\theta}}) \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n \times L^2(\mathcal{O}) \times (L^2(\mathcal{O}))^n$ 以及一对$(\check{\boldsymbol{v}}, \check{q}) \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n \times L^2(\mathcal{O})$分别满足以下系统:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j,\alpha,\beta=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(b_{ij}^{\alpha\beta}\dfrac{\partial \check{u}_j}{\partial x_\beta}\right)+\nabla\check{p} &= -\frac{1}{\tau}\check{\boldsymbol{v}} \quad in \ \ \mathcal{O}, \\ \operatorname{div}(\check{\boldsymbol{u}}) &= 0 \quad in \ \mathcal{O}, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,\alpha,\beta=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_\beta}\left(b_{ji}^{\beta\alpha}\dfrac{\partial \check{v}_i}{\partial x_\alpha}\right)+\nabla\check{q} &= \check{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u_d} \quad in \ \ \mathcal{O}, \\ \operatorname{div}(\check{\boldsymbol{v}}) &= 0 \quad in \ \mathcal{O}. \end{cases}$$

那么，三元组 $\left(\check{\boldsymbol{u}}, \check{p}, -\frac{1}{\tau}\check{\boldsymbol{v}}\right)$ 是 (6.1)的最优解。

7 收敛结果

此处我们介绍通过第 5 节所述的穿孔区域周期展开方法，对问题（3.1）的最优解及其相应的伴随系统（3.5）进行收敛分析的主要发现。

定理 7.1。 给定 $\varepsilon > 0$，分别令三元组 $(\boldsymbol{u}_\varepsilon, p_\varepsilon, \boldsymbol{\theta}_\varepsilon)$ 和 $(\overline{\boldsymbol{u}}, p, \boldsymbol{\theta})$为

问题的最优解 (3.1)和 (6.1)。则

$$T_\varepsilon^*(A_\varepsilon) \to A \quad \textit{strongly in } (L^2(\mathcal{O}\times W^*))^{n\times n}, \tag{7.1a}$$

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon} \rightharpoonup \Theta\,\overline{\boldsymbol{\theta}} \quad \textit{weakly in } \left(L^2(\mathcal{O})\right)^n, \tag{7.1b}$$

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon} \rightharpoonup \Theta\,\overline{\boldsymbol{u}} \quad \textit{weakly in } (H_0^1(\mathcal{O}))^n, \tag{7.1c}$$

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}_\varepsilon} \rightharpoonup \Theta\,\overline{\boldsymbol{v}} \quad \textit{weakly in } (H_0^1(\mathcal{O}))^n, \tag{7.1d}$$

$$\widetilde{\overline{p}_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\Theta}{n}\,A_0\nabla\overline{\boldsymbol{u}}\colon I + \Theta\,\overline{p} \quad \textit{weakly in } L^2(\mathcal{O}), \tag{7.1e}$$

$$\widetilde{\overline{q}_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{\Theta}{n}\,A_0^t\nabla\overline{\boldsymbol{v}}\colon I + \Theta\,\overline{q} \quad \textit{weakly in } L^2(\mathcal{O}), \tag{7.1f}$$

其中 A^0 是第6节中定义的张量， I 是 $n\times n$ 单位矩阵， $\boldsymbol{\theta}$ 由(6.6) 刻画，而对$(\boldsymbol{v}_\varepsilon, q_\varepsilon)$ 和$(\boldsymbol{v}, q)$ 分别是系统 (3.5) 和 (6.4) 的解。此外，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon(\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon) = J(\overline{\boldsymbol{\theta}}). \tag{7.2}$$

证明。首先，对矩阵 A_ε 的各个元素应用命题 5.2 (*vi*)，在极限 $\varepsilon\to 0$ 过程中可得 (7.1a)。类似地，可以证明矩阵A_ε^t 在展开下的收敛。接下来，根据定理 4.3 以及三元组 $(\underline{\boldsymbol{u}_\varepsilon}, \underline{p_\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}_\varepsilon)$ 是问题 (3.1) 的最优解这一事实，可得序列 $\{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon\}$,$\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}$, $\{p_\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}_\varepsilon\}$ 和 $\{q_\varepsilon\}$ 分别在空间$(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$、$(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$、 $L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$、$(H^1_{\Gamma_0^\varepsilon}(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 和$L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*)$ 中的一致估计。

利用序列 $\{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon\}$ 在空间 $(L^2(\mathcal{O}_\varepsilon^*))^n$ 中的一致估计以及命题5.2 (*i*)，可知序列 $\{T_\varepsilon^*(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\}$ 在空间 $(L^2(\mathcal{O}\times W^*))^n$中一致有界。因此，根据弱紧性，存在一个不重新标记的子序列以及一个函数 $\boldsymbol{\theta}$ 属于 $(L^2(\mathcal{O}\times W^*))^n$，使得

$$T_\varepsilon^*(\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon) \rightharpoonup \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{weakly in } \left(L^2(\mathcal{O}\times W^*)\right)^n. \tag{7.3}$$

现在，利用命题 5.2(*vii*) 在 (7.3) 中可得

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{|W|}\int_{W^*} \hat{\boldsymbol{\theta}}(x,y)\,dy = \Theta\,\boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{weakly in } \left(L^2(\mathcal{O})\right)^n, \tag{7.4}$$

其中， $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathcal{M}_{W^*}(\boldsymbol{\theta})$.

利用命题 5.2（*i*），我们得到序列 $\{T^\varepsilon(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$、$\{T^\varepsilon(\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon)\}$ 和 $\{T^\varepsilon(p_\varepsilon)\}$ 在相应空间 $(L^2(\mathcal{O}; H^1(W^*)))^n$、$(L^2(\mathcal{O}\times W^*))^{n\times n}$ 和 $L^2(\mathcal{O}\times W^*)$ 中一致有界。此外，利用命题 5.3 和命题 5.2（*vii*），存在不再重新标记的子序列以及函数 $\hat{\boldsymbol{u}}$，满足 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{0}$、 $\boldsymbol{u_0}$，且 $\hat{p}$ 属于空间

$(L^2(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)))^n$，$(H^1_0(\mathcal{O}))^n$，以及 $L^2(\mathcal{O}\times W^*)$，分别满足

$$
\begin{aligned}
&T^*_\varepsilon(\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \to \boldsymbol{u_0} \quad \text{strongly in } (L^2(\mathcal{O}; H^1(W^*)))^n, && (7.5a)\\
&T^*_\varepsilon(\nabla\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rightharpoonup \nabla\boldsymbol{u_0} + \nabla_y\hat{\boldsymbol{u}} \quad \text{weakly in } (L^2(\mathcal{O}\times W^*))^{n\times n}, && (7.5b)\\
&\widetilde{\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rightharpoonup \Theta\,\boldsymbol{u_0} \quad \text{weakly in } (H^1_0(\mathcal{O}))^n, && (7.5c)\\
&T^*_\varepsilon(\overline{p}_\varepsilon) \rightharpoonup \hat{p} \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}\times W^*), && (7.5d)\\
&\widetilde{\overline{p}_\varepsilon} \rightharpoonup \Theta\,\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p}) \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}). && (7.5e)
\end{aligned}
$$

同样，对于相应的伴随对应项，即 $\boldsymbol{v_\varepsilon}$ 和 q_ε，可得存在未重新标记的子序列及函数 $\hat{}\boldsymbol{v}$，满足 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v_0}$,，且 $\hat{}q$ 分别属于空间 $(L^2(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)))^n$,、$(H^1_0(\mathcal{O}))^n$,和 $L^2(\mathcal{O}\times W^*)$，使得

$$
\begin{aligned}
&T^*_\varepsilon(\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \to \boldsymbol{v_0} \quad \text{strongly in } (L^2(\mathcal{O}; H^1(W^*)))^n, && (7.6a)\\
&T^*_\varepsilon(\nabla\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rightharpoonup \nabla\boldsymbol{v_0} + \nabla_y\hat{\boldsymbol{v}} \quad \text{weakly in } (L^2(\mathcal{O}\times W^*))^{n\times n}, && (7.6b)\\
&\widetilde{\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rightharpoonup \Theta\,\boldsymbol{v_0} \quad \text{weakly in } (H^1_0(\mathcal{O}))^n, && (7.6c)\\
&T^*_\varepsilon(\overline{q}_\varepsilon) \rightharpoonup \hat{q} \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}\times W^*), && (7.6d)\\
&\widetilde{\overline{q}_\varepsilon} \rightharpoonup \mathcal{M}_{W^*}(\hat{q}) \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}). && (7.6e)
\end{aligned}
$$

极限函数 $\hat{}\boldsymbol{u}$、$\hat{}\boldsymbol{v}$、$\hat{}p$、$\hat{}q$, $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{}p)$ 和 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{}q)$ 的确定将在后续步骤中进行。

步骤 1：（命题）： 对于所有 $\boldsymbol{\varphi}\in(H^1_0(\mathcal{O}))^n$, $\boldsymbol{\psi}\in\left(L^2\left(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)\right)\right)^n$,以及 $w\in L^2(\mathcal{O})$,，我们断言有序四元组 $(\boldsymbol{u_0},\hat{}\boldsymbol{u},\hat{}p,\boldsymbol{\theta_0})\in(H^1_0(\mathcal{O}))^n\times(L^2(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)))^n\times L^2(\mathcal{O}\times W^*)\times(L^2(\mathcal{O}))^n$ 是下列极限系统的唯一解:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{|W|}\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times W^*} A(y)\left(\nabla\boldsymbol{u_0}+\nabla_y\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y)\right):\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nabla_y\boldsymbol{\psi}\right)dx\,dy\\
-\dfrac{1}{|W|}\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times W^*}\hat{p}(x,y)\left(\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})+\operatorname{div}_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{\psi})\right)dx\,dy=\Theta\int_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\theta_0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx,\\
and,\displaystyle\int_{\mathcal{O}}\operatorname{div}(\boldsymbol{u_0})\,w\,dx=0,
\end{cases}
\tag{7.7}
$$

且有序三元组 $(\boldsymbol{v_0},\ \hat{}\boldsymbol{v},\ \hat{}q)\in(H^1_0(\mathcal{O}))^n\times(L^2(\mathcal{O};\ H^1_{per}(W^*)))^n\times L^2(\mathcal{O}\times W^*)$ 是以下极限伴随系统的唯一解:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{|W|}\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times W^*} A^t(y)\left(\nabla\boldsymbol{v_0}+\nabla_y\widehat{\boldsymbol{v}}(x,y)\right):\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}+\nabla_y\boldsymbol{\psi}\right)dx\,dy\\
-\dfrac{1}{|W|}\displaystyle\int_{\mathcal{O}\times W^*}\hat{q}(x,y)\left(\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})+\operatorname{div}_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{\psi})\right)dx\,dy=\Theta\int_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{u_0}-\boldsymbol{u_d})\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx,\\
and,\displaystyle\int_{\mathcal{O}}\operatorname{div}(\boldsymbol{v_0})\,w\,dx=0.
\end{cases}
\tag{7.8}
$$

命题的证明：为证明 (7.7)，考虑测试函数 $\boldsymbol{\varphi} \in (\mathcal{D}(\mathcal{O}))^n$属于 (3.3)，并利用命题 (i)、(ii)以及 (iv) 的性质，得到5。2

$$\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(A_\varepsilon)\, T_\varepsilon^*(\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \colon T_\varepsilon^*(\nabla \boldsymbol{\varphi})\, dx\, dy + \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx - \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} p_\varepsilon \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\, dx$$
$$-\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(\overline{p}_\varepsilon)\; T_\varepsilon^*(\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}))\, dx\, dy = \frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot T_\varepsilon^*(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\, dx\, dy + \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} \overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx. \tag{7.9}$$

ˆ 利用命题 5.2(iii)、$\lim_{\varepsilon\to 0}|\Lambda_\varepsilon^*| = 0$这一事实，以及收敛关系 (7.3)、(7.1a)、(7.5b)、(7.5d)，在取极限后，我们得到 $\varepsilon \to 0$ 式 (7.9)

$$\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} A(y)\,(\nabla \boldsymbol{u_0} + \nabla_y \widehat{\boldsymbol{u}}(x,y)) : \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx\, dy$$
$$-\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} \hat{p}(x,y)\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\, dx\, dy = \Theta \int_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\theta_0}\cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx, \tag{7.10}$$

由稠密性可知，这对每个 $\boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n$ 都成立。
现在，考虑函数 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(x) = \varepsilon\phi(x)\boldsymbol{\xi}(\frac{x}{\varepsilon})$，其中 $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ 且 $\boldsymbol{\xi} \in (H^1_{per}(W^*))^n$。利用命题 5.2 的性质 (ii)、(iii) 和 (vi)，可以很容易地得到

$$T_\varepsilon^*(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)(x,y) \to \mathbf{0} \quad \text{strongly in } (L^2(\mathcal{O}\times W^*))^n, \tag{7.11a}$$
$$T_\varepsilon^*(\nabla\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)(x,y) \to \phi(x)\nabla_y\boldsymbol{\xi}(y) \quad \text{strongly in } (L^2(\mathcal{O}\times W^*))^{n\times n}. \tag{7.11b}$$

在式 (3.3) 中取测试函数 $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$，并利用$(i)$、$(ii)$和$(iv)$ 命题5.2的性质，得到

$$\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(A_\varepsilon)\, T_\varepsilon^*(\nabla \overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \colon T_\varepsilon^*(\nabla \boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\, dx\, dy + \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} A_\varepsilon \nabla \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \colon \nabla \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\, dx - \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} p_\varepsilon \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\, dx$$
$$-\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(\overline{p}_\varepsilon)\; T_\varepsilon^*(\operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon))\, dx\, dy = \frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot T_\varepsilon^*(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)\, dx\, dy + \int_{\hat{\Lambda}_\varepsilon^*} \overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\, dx. \tag{7.12}$$

ˆ 在式 (7.12) 中，Λ_ε^* 上的每个积分的绝对值均有上界，其阶数为 ˆ ˆ ˆ $\varepsilon|\Lambda_\varepsilon^*|$ 或$|\Lambda_\varepsilon^*|$。结合 $\lim_{\varepsilon\to 0}|\Lambda_\varepsilon^*| = 0$这一事实以及收敛关系 (7.3)、(7.1a)、(7.5b)、(7.5d) 和 (7.11)，取极限后得到 $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} A(y)\,(\nabla \boldsymbol{u_0} + \nabla_y \widehat{\boldsymbol{u}}(x,y)) : \nabla_y \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy - \frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*} \hat{p}(x,y)\operatorname{div}_y(\boldsymbol{\psi})\, dx\, dy = 0, \tag{7.13}$$

这对所有 $\phi\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\psi} \in (L^2(\mathcal{O}; H^1_{per}(W^*)))^n$，仍然成立，这可由稠密性
y。此外，对于所有 $w \in L^2(\mathcal{O})$，我们有

$$\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) w\, dx = 0. \tag{7.14}$$

现在，对(7.14)应用展开，并利用命题(i)、(ii)和(iii) 的性质5.2 以及收敛性(7.5b)，取极限可得 $\varepsilon \to 0$

$$\frac{1}{|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*}(\operatorname{div}(\boldsymbol{u_0})+\operatorname{div}_y(\hat{\boldsymbol{u}}))\,w\,dx\,dy=0,$$

利用$\hat{}\boldsymbol{u}$ 是 W^*- 周期性的事实，最终可得，对于所有 $w\in L^2(\mathcal{O})$：

$$\int_{\mathcal{O}}\operatorname{div}(\boldsymbol{u_0})w\,dx=0. \tag{7.15}$$

最后，将（7.10）与（7.13）相加，并结合（7.15），即可得到（7.7）。同样，可以容易地得到（7.8）。至此，命题得证。

步骤 2： 首先，我们将确定极限函数$\hat{}\boldsymbol{u}$、$\hat{}\boldsymbol{v}$、$\hat{}p$和$\hat{}q$。接下来，利用这些确定结果，我们将确定 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{}p)$和 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{}q)$。

确定 $\hat{}\boldsymbol{u}$、$\hat{}\boldsymbol{v}$、$\hat{}p$、$\hat{}q$的确定： 在（$\boldsymbol{\varphi}\equiv 0$ 和 $\boldsymbol{\psi}\equiv 0$ 中依次取7.7，得到 s

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y))+\nabla_y\widehat{p}(x,y)=\operatorname{div}_y(A(y))\nabla\boldsymbol{u_0}(x) \quad \text{in } \mathcal{O}\times W^*,\\
-\operatorname{div}_x\left(\displaystyle\int_{W^*}A(y)(\nabla\boldsymbol{u}_0(x)+\nabla_y\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y))dy\right)+\nabla\widehat{p}(x,y)=|W^*|\,\boldsymbol{\theta_0} \quad \text{in } \mathcal{O},\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{u_0})=0 \quad \text{in } \mathcal{O},\\
\widehat{\boldsymbol{u}}(x,\cdot) \quad \text{is } W^*-\text{ periodic.}
\end{cases} \tag{7.16}$$

在（7.16）的第一行中，我们利用了 y-独立性以及 $\nabla\boldsymbol{u_0}$（x）和运算子的线性性，即散度和梯度，这表明 $\widehat{\boldsymbol{u}}$（x，y）和 $\widehat{p}$（x，y）应具有以下形式（例如参见 [17, 第 15]页）：

$$\begin{cases}
\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y)=-\displaystyle\sum_{j,\beta=1}^{n}\boldsymbol{\chi}_j^{\beta}(y)\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}+\boldsymbol{u_1}(x),\\
\widehat{p}(x,y)=\displaystyle\sum_{j,\beta=1}^{n}\Pi_j^{\beta}(y)\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}+p_0(x).
\end{cases} \tag{7.17}$$

其中，有序对（$\boldsymbol{u_1}$，p_0）$\in$（$H^1(\mathcal{O})$）$^n\times L^2(\mathcal{O})$，并且对于 $1\le j,\ \beta\le n$，有序对（$\boldsymbol{\chi}_j^{\beta}$，$\Pi_j^{\beta}$）满足单胞问题（6.3）。同样，我们可以得到相应的伴随弱形式（7.8）：

$$\begin{cases}
-\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y\widehat{\boldsymbol{v}}(x,y))+\nabla_y\widehat{q}(x,y)=\operatorname{div}_y(A(y))\nabla\boldsymbol{v_0}(x) \quad \text{in } \mathcal{O}\times W^*,\\
-\operatorname{div}_x\left(\displaystyle\int_{W^*}A(y)(\nabla\boldsymbol{v_0}(x)+\nabla_y\widehat{\boldsymbol{v}}(x,y))dy\right)+\nabla\widehat{q}(x,y)=|W^*|\,(\boldsymbol{u_0}-\boldsymbol{u}_d) \quad \text{in } \mathcal{O},\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{v_0})=0 \quad \text{in } \mathcal{O},\\
\widehat{\boldsymbol{v}}(x,\cdot) \quad \text{is } W^*-\text{ periodic,}
\end{cases} \tag{7.18}$$

and,

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{v}}(x,y) = -\sum_{j,\beta=1}^{n} \boldsymbol{H}_j^{\beta}(y)\dfrac{\partial v_{0j}}{\partial x_\beta} + \boldsymbol{v_1}(x), \\ \widehat{q}(x,y) = \sum_{j,\beta=1}^{n} Z_j^{\beta}(y)\dfrac{\partial v_{0j}}{\partial x_\beta} + q_0(x), \end{cases} \tag{7.19}$$

其中，有序对（$\boldsymbol{v_1}$，q_0）$\in$（H^1（$\mathcal{O}$））$^n \times L^2$（$\mathcal{O}$），并且对于 $1 \le j$，$\beta \le n$，有序对（$\boldsymbol{H}_j^{\beta}$，Z_j^{β}）满足单胞问题（6.5）。

识别 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p})$ 和 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{q})$： 在（$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ 作为测试函数代入（6.3）的弱形式，得到

$$\sum_{i,l,k,\alpha=1}^{n} \int_{W^*} a_{lk}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(P_j^{\beta} - \boldsymbol{\chi}_j^{\beta}\right)\cdot\frac{\partial P_i^{\alpha}}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha}\,dy = n\int_{W^*}\Pi_j^{\beta}\,dy. \tag{7.20}$$

根据（7.5e）、（7.17）和（7.20），我们注意到

$$\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p}) = \frac{1}{|W^*|}\sum_{i,j,l,k,\alpha,\beta=1}^{n}\int_{W^*} a_{lk}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(P_j^{\beta} - \boldsymbol{\chi}_j^{\beta}\right)\cdot\frac{\partial P_i^{\alpha}}{\partial y_l}\frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\,dy + p_0,$$

利用 $a_{ij}^{\alpha\beta}$ 的定义可得

$$\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p}) = \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n} a_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\frac{\partial y_i}{\partial y_\alpha} + p_0. \tag{7.21}$$

Al因此，将方程（7.21）改写，可得 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p})$ 的识别式为

$$\mathcal{M}_{W^*}(\hat{p}) = A^0\nabla\boldsymbol{u_0} : I + p_0. \tag{7.22}$$

同理，可得 $\mathcal{M}_{W^*}(\hat{q})$的识别式为

$$\mathcal{M}_{W^*}(\hat{q}) = A_0^t\nabla\boldsymbol{v_0} : I + q_0. \tag{7.23}$$

因此，由（7.5e）和（7.22）；（7.6e）和（7.23），我们得到以下弱收敛：

$$\widetilde{\overline{p}}_\varepsilon \rightharpoonup \frac{\Theta}{n}A_0\nabla\boldsymbol{u_0} : I + \Theta\, p_0 \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}), \tag{7.24a}$$

$$\widetilde{\overline{q}}_\varepsilon \rightharpoonup \frac{\Theta}{n}A_0^t\nabla\boldsymbol{v_0} : I + \Theta\, q_0 \quad \text{weakly in } L^2(\mathcal{O}). \tag{7.24b}$$

步骤 3：（命题）： 对（$\boldsymbol{u_0}$，p_0）和（$\boldsymbol{v_0}$，q_0）分别是以下系统（6.2）和（6.4）的解。

命题的证明：现在证明数对 $(\boldsymbol{u_0}, p_0)$ 满足系统 (6.2)。证明如下：

数对 $(\boldsymbol{v_0}, q_0)$ 满足系统 (6.4) 的证明类似。将表达式 (7.17) 中的$\widehat{\boldsymbol{u}}(x,y)$ 和 $\widehat{p}(x,y)$ 的值代入方程 (7.10)，得到

$$\frac{1}{|W|}\sum_{l,k=1}^{n}\int_{\mathcal{O}\times W^*} a_{lk}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u_0}}{\partial x_k}-\sum_{j,\beta=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j^{\beta}}{\partial y_k}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_l}\,dx\,dy-\frac{1}{|W|}\sum_{j,\beta=1}^{n}\int_{\mathcal{O}\times W^*}\Pi_j^{\beta}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\,dx\,dy$$
$$-\Theta\int_{\mathcal{O}} p_0\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\,dx=\Theta\int_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\theta_0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx. \tag{7.25}$$

Wi对 $P_j^{\beta}=(0,\ \ldots,\ y_j,\ \ldots,\ 0)$，我们可以将项 $\frac{\partial \boldsymbol{u_0}}{\partial x_k}$，$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_l}$和 $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})$ 表示为 as

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{u_0}}{\partial x_k}&=\sum_{j,\beta=1}^{n}\frac{\partial P_j^{\beta}}{\partial y_k}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta},\\
\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_l}&=\sum_{i,\alpha=1}^{n}\frac{\partial P_i^{\alpha}}{\partial y_l}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha},\\
\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})&=\sum_{i,\alpha=1}^{n}\operatorname{div}_y(P_i^{\alpha})\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}.
\end{aligned}$$

将这些表达式代入（7.25），得到

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|W^*|}\sum_{l,k=1}^{n}\int_{W^*}a_{lk}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(P_j^{\beta}-\boldsymbol{\chi}_j^{\beta}\right)\frac{\partial P_i^{\alpha}}{\partial y_l}\,dy\right)\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}\,dx$$
$$-\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|W^*|}\int_{W^*}\Pi_j^{\beta}\operatorname{div}_y(P_i^{\alpha})\,dy\right)\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}\,dx-\int_{\mathcal{O}}p_0\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\,dx=\int_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\theta_0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx. \tag{7.26}$$

现在，在（6.3）的弱形式中选取测试函数 $\boldsymbol{\chi}_i^{\alpha}$，利用 $\operatorname{div}_y(\boldsymbol{\chi}_i^{\alpha})=\operatorname{div}_y(P_i^{\alpha})=\delta_{i\alpha}$，其中 δ 表示克罗内克δ函数，可得:

$$\int_{W^*}A(y)\nabla_y\left(P_j^{\beta}-\boldsymbol{\chi}_j^{\beta}\right):\nabla_y\boldsymbol{\chi}_i^{\alpha}\,dy=\int_{W^*}\Pi_j^{\beta}\delta_{i\alpha}\,dy. \tag{7.27}$$

此外，将（7.27）代入（7.26），得到

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{|W^*|}\sum_{l,k=1}^{n}\int_{W^*}a_{lk}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(P_j^{\beta}-\boldsymbol{\chi}_j^{\beta}\right)\frac{\partial}{\partial y_l}\left(P_i^{\alpha}-\boldsymbol{\chi}_i^{\alpha}\right)\,dy\right)\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}\,dx$$
$$-\int_{\mathcal{O}}p_0\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\,dx=\int_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\theta_0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx. \tag{7.28}$$

此外，我们可以将方程 (7.28) 写成

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n}\int_{\mathcal{O}}b_{ij}^{\alpha\beta}\frac{\partial u_{0j}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha}\,dx-\int_{\mathcal{O}}p_0\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})\,dx=\int_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\theta_0}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx, \tag{7.29}$$

这对所有 $\boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n$ 均成立。此外，由方程 (7.15) 可知，对每个 $w \in L^2(\mathcal{O})$，都有 $\int_{\mathcal{O}} \text{散度}(\boldsymbol{u}) w \, dx = 0$。结合方程 (7.29) 可得，对于 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_0}$，数对 $(\boldsymbol{u_0}, p_0) \in (H_0^1(\mathcal{O}))^n \times L^2(\mathcal{O})$ 满足系统 (6.2) 的变分形式。

因此，我们得到最小化问题（6.1）的最优性系统。此外，根据定理 6.1，我们得出三元组（$\boldsymbol{u}_0$，p_0，$\boldsymbol{\theta_0}$）确实是问题（6.1）的一个最优解。最后，考虑到最优解的唯一性，我们证明以下两组三元组相等：

$$(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}, \overline{\boldsymbol{\theta}}) = (\boldsymbol{u_0}, p_0, \boldsymbol{\theta_0}). \tag{7.30}$$

因此，将（7.5c）、（7.6c）、（7.24a）、（7.24b）和（7.4）与（7.30）进行比较，我们分别得到收敛关系（7.1c）、（7.1d）、（7.1e）、（7.1f）和（7.1b）。

步骤 4： 现在，我们将给出 L^2- 代价泛函的能量收敛证明。在系统（$\boldsymbol{u_\varepsilon} - \boldsymbol{u_d}$）的弱形式中选取测试函数（3.5），经过展开并令 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{u_d}|^2 \, dx = \frac{1}{|W|} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(A_\varepsilon^t)\, T_\varepsilon^*(\nabla \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}) : T_\varepsilon^*(\nabla(\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{u_d}))\, dx\, dy \\ + \frac{1}{|W|} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}\times W^*} T_\varepsilon^*(\overline{q}_\varepsilon)\; T_\varepsilon^*(\operatorname{div}(\boldsymbol{u_d}))\, dx\, dy,\end{aligned}$$

由此，结合（7.30）、命题 5.2（*iii*），以及收敛关系（7.6a）、（7.5b）和（7.6d）

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{u_d}|^2 \, dx = \frac{1}{|W|} \int_{\mathcal{O}\times W^*} A^t(y)\, (\nabla \overline{\boldsymbol{v}} + \nabla_y \widehat{\boldsymbol{v}}(x,y)) : \nabla_y(\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u_d})\, dx\, dy \\ + \frac{1}{|W|} \int_{\mathcal{O}\times W^*} \hat{q}(x,y) \operatorname{div}(\boldsymbol{u_d})\, dx\, dy.\end{aligned} \tag{7.31}$$

此外，将（7.19）代入（7.31），并结合（7.30），经化简可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{u_d}|^2 \, dx = \Theta \left(\sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^{n} \int_{\mathcal{O}} b_{ji}^{\beta\alpha} \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial (\overline{u} - u_d)_j}{\partial x_\beta}\, dx - \int_{\mathcal{O}} \overline{q} \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u_d})\, dx \right). \tag{7.32}$$

现在，将测试函数（$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_d$）代入系统（6.4）的弱形式，并与方程（7.32）的右端进行比较，可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*} |\overline{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{u_d}|^2 \, dx = \Theta \int_{\mathcal{O}} |\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u_d}|^2 \, dx. \tag{7.33}$$

此外，结合（3.6）、（7.6a）和（7.30），在取极限的过程中进行展开，我们得到

极限 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tau}{2}\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*}|\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*}|T_\varepsilon^*(\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}})|^2\,dx\,dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\tau|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*}|T_\varepsilon^*(\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\varepsilon}})|^2\,dx\,dy\\ &= \frac{1}{2\tau|W|}\int_{\mathcal{O}\times W^*}|\overline{\boldsymbol{v}}|^2\,dx\,dy. \qquad (7.34)\end{aligned}$$

此外，由于 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 与 y 无关，并比较（7.34）与（6.6）右端可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tau}{2}\int_{\mathcal{O}_\varepsilon^*}|\overline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}|^2\,dx = \frac{\Theta\tau}{2}\int_{\mathcal{O}}|\overline{\boldsymbol{\theta}}|^2\,dx. \qquad (7.35)$$

因此，由方程（7.33）和（7.35），可得（7.2）。
至此，定理 7.1 的证明完成。 □

8 结论

我们研究了与 nD（$n \geq 2$）周期性穿孔区域中的斯托克斯方程对应的内部最优控制问题的极限行为 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$，所采用的方法是在穿孔区域中使用周期展开法（见 [8, 11]）。我们在穿孔区域边界的一部分采用了诺伊曼边界条件。首先，我们用伴随状态刻画了最优控制。其次，我们推导出了控制、状态、压力及其相应的伴随状态和压力函数的先验最优界。随后，采用穿孔区域中的周期展开法，对所考虑的最优控制问题进行了极限分析。我们观察到，在穿孔区域 3.1上提出的问题的最优解 $\mathcal{O}_\varepsilon^*$ 收敛于无孔域 6.1上由定常斯托克斯方程支配的极限问题的最优解 $\mathcal{O}$。最后，我们证明了与 L^2–代价泛函对应的能量收敛。

9 致谢

第一作者谨向印度政府教育部提供的总理研究奖学金（PMRF-2900953）表示感谢。第二作者谨向印度政府科学与工程研究委员会（SERB）提供的支持（SRG/2019/000997）表示感谢。

参考文献

[1] G. Allaire，穿孔区域中周期分布的小孔内斯托克斯方程的均匀化，《巴黎科学院通报》系列 I 数学，309 (1989)，第 11 期，741–746 页。[2] ,带滑移边界条件的纳维–斯托克斯方程的均匀化，《纯粹与应用数学通讯》44 (1991)，第 6 期，605–641 页。[3] G. Allaire 和 F. Murat，具有非孤立孔洞的诺伊曼问题的均匀化，《渐近分析》7 (1993)，第 2 期，81–95 页，附录由 A. K. Nandakumar 合著。[4] A. Bensoussan、J.-L. Lions 和 G. Papanicolaou，周期结构的渐近分析，《数学及其应用研究》第 5 卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1978 年。[5] F. Boyer 和 P. Fabrie，研究不可压缩纳维–斯托克斯方程及相关模型的数学工具，《应用数学科学》第 183 卷，施普林格，纽约，2013 年。[6] A. Brillard，多孔介质中不可压缩黏性流体流动的渐近分析：通过上图收敛方法得到布林克曼定律，《图卢兹数学科学院年刊》（第 5 系列）8 (1986/87)，第 2 期，225–252 页。[7] B. Cabarrubias，利用周期展开法对穿孔区域中的最优控制问题进行均匀化，《应用分析》95 (2016)，第 11 期，2517–2534 页。[8] D. Cioranescu、A. Damlamian、P. Donato、G. Griso 和 R. Zaki，具有孔洞的区域中的周期展开法，《工业与应用数学学会数学分析杂志》44 (2012)，第 2 期，718–760 页。[9] D. Cioranescu、P. Donato 和 H. I. Ene，具有非齐次滑移边界条件的斯托克斯问题的均匀化，《数学方法与应用科学》19 (1996)，第 11 期，857–881 页。[10] D. Cioranescu、P. Donato 和 R. Zaki，穿孔区域中的周期展开与罗宾问题，《巴黎科学院数学通报》342 (2006)，第 7 期，469–474 页。[11] , 穿孔区域中的周期展开法，《葡萄牙数学》（新系列）63 (2006)，第 4 期，467–496 页。[12] C. Conca，均匀化理论在一类流体力学问题中的应用，《纯粹与应用数学杂志》（第 9 系列）64 (1985)，第 1 期，31–75 页。[13] C. Conca、P. Donato、E. C. Jose 和 I. Mishra，穿孔区域中半线性问题最优控制的渐近分析，《拉马努金数学学会杂志》31 (2016)，第 3 期，265–305 页。

[14] *J. I. Diaz*、*A. V. Podolskiy* 和 *T. A. Shaposhnikova*，《当均匀化过程产生某些奇异项时，若干非均质最优控制问题中控制和成本泛函的收敛》，《数学分析与应用杂志》*506 (2022*年*)*，第*1*期，论文编号*125559*，*13*页。[15] ,《任意形状临界尺寸孔洞穿孔区域中最优控制问题的均匀化》，《数学文献》*105 (2022*年*)*，第*1*期，*6–13*页。[16] *H. I. Ene* 和 *E. S´anchez-Palencia*，《多孔介质模型中流动的表面方程与现象》，*J. M´ecanique 14 (1975*年*)*，*73–108*页。[17] *S. Gu*，《具有周期系数的斯托克斯系统的均匀化》，*ProQuest LLC*，安娜堡，密歇根州，*2016*年，博士论文—肯塔基大学。[18] *S. Kesavan* 和 *J. Saint Jean Paulin*，《最优控制问题的均匀化》，《*SIAM*控制与优化杂志》*35 (1997*年*)*，第*5*期，*1557–1573*页。[19] ,《穿孔区域上的最优控制》，《数学分析与应用杂志》*229 (1999*年*)*，第*2*期，*563–586*页。[20] *J.-L. Lions*，《由偏微分方程支配的系统的最优控制》，《数学科学基础丛书》第*170*卷，施普林格出版社，纽约—柏林，*1971*年。[21] *I. Mishra*，《边界最优控制问题的均匀化》，《电子微分方程杂志》*12 (2022*年*)*，*1–23*页。[22] *T. Muthukumar* 和 *A. K. Nandakumaran*，《与最优控制问题相关的达西型定律》，《电子微分方程杂志》*(2008*年*)*，第*16*号，*12*页。[23] ,《穿孔区域上低成本控制问题的均匀化》，《数学分析与应用杂志》*351 (2009*年*)*，第*1*期，*29–42*页。[24] *J. Saint Jean Paulin* 和 *H. Zoubairi*，《穿孔区域中斯托克斯问题的最优控制与“奇异项”》，《葡萄牙数学》*(*新系列*) 59 (2002*年*)*，第*2*期，*161–178*页。[25] *R. Zaki*，《通过周期展开法对多孔介质中斯托克斯问题进行均匀化》，《渐近分析》*79 (2012*年*)*，第*3–4*期，*229–250*页。