arXiv:2301.01137v1 [math.CO] 3 Jan 2023

关于非退化的 Berge-Tur´án 问题

D´aniel Gerbner

阿尔弗雷德·雷尼数学研究所
gerbner.daniel@renyi.hu

摘要

给定一个超图 $\mathcal{H}$ 和一个图 G，若 $\mathcal{H}$ 与 G 之间存在一个双射，使得 $\mathcal{H}$ 的每条超边都包含其像，则称 $\mathcal{H}$ 为 Berge-G 。我们用 ex$_k(n,$ Berge-$F)$ 表示 k-一致且不含 Berge-F 的图中超边数的最大值。令 ex(n,H,F) 表示 n 个顶点且不含 F 的图中 H 的副本数的最大值。已知 ex(n,K_k,F) $\leq$ ex$_k(n,$ Berge-$F)$ $\leq$ex(n,K_k,F)+ex(n,F)，因此若 $\chi(F)>r$，则 ex$_k(n,$ Berge-$F)$ $=(1+o(1))$ex(n,K_k,F)。我们猜想在这种情况下，ex$_k(n,$ Berge-$F)$ $=$ex(n,K_k,F)。我们在若干情形下证明了这一猜想，包括 $k=3$ 和 $k=4$。我们证明了一般上界 ex$_k(n,$ Berge-$F)$ $=$ex(n,K_k,F) $+O(1)$。

关键词：Berge 超图，Tur´án

1 引言

给定一个超图 $\mathcal{H}$ 和一个图 G，如果存在 $\mathcal{H}$ 的超边与 G的边之间的一个双射，使得每条超边都包含其对应的边，则称 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个 Berge 副本（简称：Berge-G）。

Berge 超图由 Gerbner 和 Palmer [9] 引入，作为对 Berge 提出的超图圈概念的推广。

一个密切相关的领域是广义 Tur´án 问题。给定图 H 和 G，我们用 $\mathcal{N}(H,G)$表示 G 中 H的副本数。令 ex$(n,H,F):=\max\{\mathcal{N}(H,G):G$ 表示一个有 n个顶点且不含 F的图$\}$。Alon 和 Shikhelman [1] 在若干零星结果之后，开启了对这一主题的系统研究。

Berge-Tur´án 问题与广义 Tur´án 问题之间的联系由 Gerbner 和 Palmer [10],确立，他们证明了 ex(n,K_k,F) $\leq$ex$_k(n,$ Berge-$F)$ $\leq$ex(n,K_k,F) $+$ex(n,F)。F¨uredi、Kostochka 和 Luo [3]以及 Gerbner、Methuku 和 Palmer [8]独立地加强了上界。陈述这一结果需要先给出一些定义。

蓝红图 G 是指每条边都被染成蓝色或红色的图。我们用 G_{blue}表示由蓝色边构成的子图，用 G_{red} 表示由红

边构成的子图。若蓝红图 G 是 F-自由的，即 G 不包含 F（此处不考虑颜色），则称其为 F-自由。给定整数 $k \geq 3$，令 $g(G) := \mathcal{N}(K_k, G_{blue}) + |E(G_{red})|$。令 $\mathrm{ex}^{col}(n, F) := \max\{g(G) : G$ 是一个有 n 个顶点的 F-自由图$\}$。

引理 1.1 ([3],[8])。对于任意 F，我们有 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) \leq \mathrm{ex}^{col}(n, F)$。

如果超图 Tur´an 问题的极值函数的数量级小于可能达到的最大数量级，即在我们的情形下小于 n^k，那么该问题称为退化问题。由上述界可知，$\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = o(n^k)$ 当且仅当 $\mathrm{ex}(n, K_k, F) = o(n^k)$，而根据 Alon 和 Shikhelman 的结果 [1]，这又当且仅当 $\chi(F) \leq k$。Alon 和 Shikhelman 的另一项结果 [1] 表明，若 $\chi(F) = r + 1 > k$，则 $\mathrm{ex}(n, K_k, F) = (1 + o(1))\mathcal{N}(K_k, T(n, r)) = (1 + o(1))\binom{r}{k}\left(\frac{n}{r}\right)^k$。

在非退化情形下，对于 $k \geq 3$，我们有 $\mathrm{ex}(n, F) = O(n^2) = o(\mathrm{ex}(n, K_k, F))$，因此 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = (1 + o(1))\mathrm{ex}(n, K_k, F)$。我们认为还存在更强的联系。

猜想 1.2。 如果 $\chi(F) > k$，且 n 足够大，那么 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F$).

已知当 F 有一条色临界边（删除该边会降低色数）时，上述猜想成立。图F的 k一致扩张 F^{+k} 是包含顶点数最多的特定 k一致 Berge 副本；也就是说，添加到 F 每条边上的 $k-2$ 个顶点，对于不同的边彼此不同，并且不同于 F的顶点。Pikhurko [19] 证明，当 $r \geq k$足够大时，K_{r+1}^{+k} 的 Tur´án 数等于 $\mathcal{N}(K_k, T(n, r))$。根据关于扩张的综述 [18]，Alon 和 Pikhurko 指出，Pikhurko 的证明可推广到 F 是带有一条色临界边的 $(r+1)$ 色图的情形。关于 Berge 情形的一个更简洁证明可见 [7]。

一般而言，上述观察表明，$\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F) + O(n^2)$。在 [4]中，这一结果被改进为 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F) + o(n^2)$。我们将在下一个结果中进一步改进这一界。

定理 1.3。$\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F) + O(1)$。

我们证明，如果 F 含有一个色临界顶点（删除该顶点会降低色数的顶点），则猜想 1.2成立。

定理 1.4。设 $\chi(F) > k$，并假设 F 含有一个色临界顶点。那么，当 n 充分大时，有 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F)$。

我们证明，猜想 1.2在3-均匀和4-均匀情形下成立。此外，在任意均匀性下，只要 F 的色数充分大，该猜想也成立。

定理 1.5. (i) 设 $\chi(F) > k$和 $k \leq 4$。那么，对于充分大的 n，$\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F)$。

(i) 设 k 和 r 足够大。若 $\chi(F) = r + 1$，则对足够大的 n，$\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathrm{ex}(n, K_k, F)$。

回顾一下，若 $\chi(F) > k$，则 ex(n, K_k, F) 的渐近行为已知，因此 ex$_k$(n, Berge-F) 的渐近行为也已知。即使猜想 1.2 成立，它也只会在 ex(n, K_k, F) 已知的少数情形下，将渐近结果改进为精确结果。除 F 有色临界边的情形外，我们只知道以下结果。令 $2K_{r+1}$ 表示两个顶点不相交的 K_{r+1} 副本，B_r,1 表示两个恰好共享一个顶点的 K_{r+1} 副本。Gerbner 和 Patk´os [12] 确定了 ex($n, K_k, 2K_{r+1}$) 和 ex(n, K_k, B_{r+1},1)。Gerbner [6] 将第一个结果推广到 ex(n, K_k, F)，其中 F 的每个连通分量要么色数为 $r+1$ 且包含一条色临界边，要么色数至多为 r。Gerbner [6] 还针对一类我们此处不作定义的图 Q_r 以及 k 的大多数取值，确定了 ex(n, K_k, Q_{r+1})。

对于上述图的 Berge 副本，我们可以证明猜想 1.2 成立。事实上，$B_{r+1,\ 1}$ 和 Q_r 各自都有一个色临界顶点，因此我们已在定理 1.4 中处理了它们。令 $K_i + T(n-i, r)$ 表示通过向 $T(n-i, r)$ 添加 i 个顶点并将它们与每个顶点相连而得到的图。

定理 1.6. 假设 F由 s个色数为 $r+1$且各自都有一条色临界边的连通分量，以及任意数量的色数至多为 r的连通分量组成。那么 ex$_k$(n, Berge-F) $= \mathcal{N}(K_k, K_{s-1} + T(n-s+1, r))$。

为了证明上述定理，我们使用以下关于极值图结构的结果，这些结果本身也很有趣。令 $\sigma(F)$ 表示对 F进行 $\chi(F)$-着色时颜色类可能达到的最小阶数。

定理 1.7. 设 $\chi(F) = r+1 > k$和 G是一个 n顶点的 F自由蓝红图，且$g(G) =$ ex^{col}(n, F)。则有以下结论。

(i) 对于 G 的每个顶点 u，包含 u的蓝色 k团的数量与红边的数量之和至少为$(1+o(1))\binom{r-1}{k-1}(\frac{n}{r})^{k-1}$。

(ii) 设 $\varepsilon > 0$ 足够小。则存在 $V(G)$的一个 r划分，划分为 A_1、.....、 A_r，一个常数 $K = K(F, \varepsilon)$，以及一个至多含有 $rK(\sigma(F)-1)$个顶点的集合 B，使得以下结论成立。对于每个 i，有$|A_i| = (1-o(1))n/r$；每条红边的两个端点都属于 B； B 的每个顶点在每一部中都至少与 εn 个顶点相邻，并且在除某一部以外的每一部中都至少与 cn 个顶点相邻，其中常数为 $c = c(F)$。此外， $A_i \setminus B$的每个顶点在 A_i 中至多与 εn 个顶点相邻，并且在 A_j 中除至多 $\varepsilon(2r^k+1)n$ 个顶点外，均满足 $j \neq i$。

(iii) 设 $\mathcal{H}$ 是一个 n 顶点的 k 均匀 Berge-F-自由超图，具有 ex$_k$(n, Berge-F) 条超边。那么 $\mathcal{H}$ 的每个顶点都至少包含在 $(1+o(1))\binom{r-1}{k-1}(\frac{n}{r})^{k-1}$ 条超边中。

2 证明

我们将使用 Ma 和 Qiu [17] 得出的以下稳定性结果。

定理 2.1（Ma, Qiu [17]）。设 $\chi(F) > k$，且 G 是一个有 n 个顶点的 F-自由图，其中包含 ex(n, K_k, F) $- o(n^k)$ 个 K_k 的副本。那么，通过添加和删除 $o(n^2)$ 条边，可以将 G 转化为 $T(n, r)$。

让我们先开始定理 1.7 的证明；为方便起见，我们在此重述该定理。

定理。设 $\chi(F) = r+1 > k$，且 G 是一个有 n 个顶点的 F-自由蓝红图，具有 $g(G) = \mathrm{ex}^{col}(n, F)$。则有以下结论。

(i) 对于 G 的每个顶点 u，包含 u 的蓝色 k-团数量与红边数量之和至少为 $(1+o(1))\binom{r-1}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}$。

(ii) 令 $\varepsilon > 0$ 足够小。则存在一个从 $V(G)$ 到 $A_1, \ldots, A_r$ 的 r-划分、一个常数 $K = K(F, \varepsilon)$ 以及一个至多包含 $rK(\sigma(F)-1)$ 个顶点的集合 B，使得以下性质成立。对于每个 i，均有 $|A_i| = (1-o(1))n/r$；每条红边都连接 B 中的两个元素；B 的每个顶点在每个部中都至少与 εn 个顶点相邻，并且在除一个部以外的所有部中都至少与 cn 个顶点相邻，其中某个常数为 $c = c(F)$。此外，$A_i \setminus B$ 的每个顶点在 A_i 中至多与 εn 个顶点相邻，并且在满足 $j \neq i$ 的 A_j 中，至多有 $\varepsilon(2r^k+1)n$ 个顶点不与其相邻。

(iii) 设 $\mathcal{H}$ 是一个具有 $\mathrm{ex}_k(n, \text{Berge-}F)$ 个超边的 n 阶 k-均匀 Berge-F-自由超图。那么，$\mathcal{H}$ 的每个顶点都至少属于 $(1+o(1))\binom{r-1}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}$ 个超边。

我们注意到，关于 $\mathrm{ex}(n, K_k, F)$ 的类似结果可见 [17]。对于 (i)，将 K_k 替换为其他一些图的推广结果可见 [5]；对于 (ii)，可见 [6]。我们的证明沿用了 [5] 和 [6] 中的证明。

证明。注意到 G 至少包含 $\mathrm{ex}(n, K_k, F) - \mathrm{ex}(n, F)$ 个 K_k 的蓝色副本，因此，根据定理 2.1，通过添加和删除 $o(n^2)$ 条边，可以将 G_{blue} 转化为一个完全 r 部图。注意，在顶点集 $V(G)$ 上，可能存在多个可以用这种方式得到的不同完全 r 部图；我们选取其中各部内部边数最少的一个，并将其记为 G'。容易看出，每一部的阶数均为 $(1-o(1))n/r$，否则蓝色团的数量至多为 $\binom{r}{k}\left(\frac{n}{r}\right)^k - \Theta(n^k)$。令 $A_1, \ldots, A_r$ 表示这些部，并令 $f(v)$ 表示以 v 为关联顶点、且在此过程中被删除的红边和蓝色 k-团的数量。于是有 $\sum_{v \in V(G)} f(v) = o(n^k)$。考虑 A_1 中一个由 $|V(F)|$ 个顶点组成的集合 S，使得 $\sum_{v \in S} f(v)$ 最小。于是，由平均值原理，$\sum_{v \in S} f(v) \leq \frac{|S|}{|V_1|}\sum_{v \in V_1} f(v) = o(n^{k-1})$。

考虑恰好包含一个来自 s of S的顶点 k的蓝色团，以及其余顶点位于 G中 S 的公共邻域内的红边。令 $d_G(k, S)$表示这样的蓝色团和红边的数量。注意，S 中的每个顶点都属于 $d_{G_{(k,S)}}|S|$ 个这样的蓝色团和红边。显然，$d_{T(n,r)_{(k,S)}}|S| = (1+o(1))\binom{r-1}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}$。

令 x 表示包含 u 和来自 S的一个顶点的蓝色 k团与红边的数量，则 $x = O(n^{k-2})$。现在我们应用 Zykov 对称化的一种变体 [23]。如果$d_G(k, u) < d_G(k,S)|S| - x$，那么我们从 G中移除与 u 相 incident 的边。接着，对于每个与 S 中的每个顶点都以蓝色边相连的顶点 v，我们用蓝色边连接 u 和 v。对于每个与 S 中的每个顶点都以红边相连的顶点 w，我们用红边连接 u 和w。这样不会产生 F的任何副本，因为该副本应包含 u，但可以用 S 中尚未出现在该副本里的任意顶点替换 u，从而在 G中生成 F的一个副本。我们移除了 $d_G(k, u)$ 个蓝色 k 团与红边，但至少新增了 $d_G(H,S)|S| - x$ 蓝色 k团与红边，这就产生了矛盾。

因此，包含 u 的蓝色 k团与红边的总数至少为

$$\frac{d_G(k,S)}{|S|} - x \geq \frac{d_{T(n,r)}(k,S)}{|S|} - \sum_{v\in S} f(v) - x = \frac{d_{T(n,r)}(k,S)}{|S|} - o(n^{k-1}).$$

至此，(i) 的证明完成。

(iii) 的证明类似。我们以相同的方式选取 S，但不再计数蓝色 k-团和红边，而是计数包含 u的超边，令 $d_{\mathcal{H}}(k,u)$ 表示它们的数量。令 y 表示包含 u 以及来自 S的一个顶点的超边数量。如果 $d_{\mathcal{H}}(k,u) < {}^{d_{\mathcal{H}}(k,\ S)|S|} \quad - x$，那么我们移除包含 u 的超边，并对每个恰好包含一个顶点 $v \in S$的超边 H，添加 $(H \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ 作为一条超边。然后，按照上述相同的推理即可完成 (iii) 的证明。

令 B 表示这样一个顶点集：其中的顶点在其所在部 A_i中至少与 εn 个顶点相邻。注意，根据 G'的选取， B 中的顶点在其他每个部中都至少与 εn 个顶点关联。令 $B_i = B \cap A_i$。

断言 2.2. 存在一个依赖于 ε 和 F的 K，使得 $|B| \leq K(\sigma(F) - 1)$。

关于无色图的类似断言，即 $\mathrm{ex}(n, K_k, F)$ 个 K_k 副本的情形，见 [17]。然而，该断言的证明并未用到 G_0 是极值图，只用到 G_0 包含 $\mathrm{ex}(n, K_k, F)$ 个 $-o(n^k)$ 副本。由于 G 也满足这一点，故断言得证。

现在考虑满足以下条件的顶点集 U_i：其中的顶点 v 与某个 A_j 中少于 $|A_j| - \varepsilon(2r^k + 1)$ 个 n 顶点相邻。由于部之间缺少 $o(n^2)$ 条边，我们有 $|U_i| = o(n)$。

断言 2.3. 对每个 i，都有 $U_i = \emptyset$。

断言的证明。设 $V_i = A_i \setminus (B_i \cap U_i)$，则有 $|V_i| \geq |A_i| - \varepsilon n$。

我们删除每个 $v \in U_i$ 到 A_i 的边，并将 v 与每个 V_j、$j \neq i$ 中的每个顶点用蓝色边相连。我们断言所得图 G'' 是无 F 图。事实上，考虑 U_i 中顶点数最少的一个 F 副本 F_0。显然， F_0 包含一个顶点 $v \in U_i$，因为所有新边都与这样的顶点关联。设 F_0 中与 G' 里的 v 相邻的顶点集为 Q。这些顶点都来自 $\cup_{j\neq i} V_j$。它们在 V_i 中的公共邻域大小为 $\frac{n}{r} - o(n)$。因此，至少有一个公共邻点不在 F_0 中，于是我们可以用该顶点替换 v，得到另一个来自 $\cup_{i=1}^{r} U_i$ 的顶点更少的 F 副本，矛盾。

对于每个顶点 $v \in U_i$，我们至多删去了 εn^{k-1} 个蓝色 k-团和红边，因为它们各自都包含一条与 v 在 U_i 内相邻的边，而这样的边少于 ϵn 条。我们声称添加的蓝色 k-团多于 εn^{k-1} 个。我们只考虑包含 v 的蓝色 k-团，其中 v 是 v 在 V_j 中的一个新邻点，且 V_j 带有 $j \neq i$；此外，这些团还包含来自其他集合 V_ℓ 的 $k-2$ 个顶点。邻点至少有 $2r^k \varepsilon n$ 种选择，其他顶点至少有 $n/r - \varepsilon n$ 种选择。如果 ε 足够小，那么我们确实能得到多于 εn 个新的蓝色 k-团，因此 $g(G'') > g(G')$，除非 U_i 为空集，否则矛盾。■

现在我们证明，存在一个常数 $c = c(F)$，使得每个顶点在除一个部以外的所有部中，至少与 cn 个顶点相邻。假设 v 在 A_1 和 A_2 中相邻的顶点少于 cn 个。那么包含 v 的蓝色团数量至多为 $\binom{r-2}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}+\binom{r-2}{k-2}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-2}cn+\binom{r-2}{k-3}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-3}cn^2$；若 c 足够小，这与 (i) 矛盾。

接下来只需证明，每条红边的两个端点都属于 B。假设 $u \notin B$ 和 uv是一条红边。我们将它改为蓝色。接下来，我们用贪心法找出不止一个新的蓝色 k-团。不失一般性，我们可以假设 $u \in A_1$ 和 v 要么在 A_1 中，要么在A_2中。注意，在 V_3内部的 G_{blue}中， u 和 v 至少有 $cn-\varepsilon(2r^k+2)n$ 个公共邻点；我们选取其中一个。这三个顶点在 V_4内部的 G_{blue} 中至少有 $cn-2\varepsilon(2r^k+2)n$ 个公共邻点；我们选取其中一个，以此类推。当$cn-(k-2)\varepsilon(2r^k+2)n>0$时，我们可以选取 k 个顶点；只要 ε足够小，这个条件就成立。显然，用这种方法可以选出不止一个蓝色 k-团，从而完成 (ii) 的证明。■

定理 1.3 可由定理 1.7 的 (ii) 轻易推出，因为在一个无 F、有 n 个顶点的蓝红图中，蓝色 k 团的数量至多为 $\mathrm{ex}(n, K_k, F)$，而 B 内红边的数量为 $O(1)$。定理 1.4 也可由定理 1.7 的 (ii) 推出，因为色临界顶点意味着 $\sigma(F)=1$，因此 $|B|=0$，于是不存在红边。

我们继续证明定理 1.5。回顾一下，该定理指出，若 $\chi(F)>k$ 且 $k\le 4$，或者 $\chi(F)$ 足够大，则猜想 1.2 成立。

定理 1.5 的证明。设 $\chi(F)=r+1$。我们将使用引理 1.1。设 G 是一个蓝红 F-自由图，且 $g(G)=\mathrm{ex}^{col}(n,F)$。假设 G 中有一条红边 uv，现在应用定理 1.7 的 (ii)。我们得到 $V(G)$ 到 $A_1,\dots,A_r$ 的一个划分，使得 $|A_i|=(1+o(1))n/r$，并且各部内部有 $o(n)$ 条边；此外，存在一个由 B 个顶点组成的集合，使得 $|B|=o(n)$，且每个不在 B 中的顶点，在其他每一部中都与除 $o(n)$ 个顶点外的所有顶点相邻。

假设 u和 v在至少 $k-2$个集合 $A_1,\dots,A_r$中各自拥有 $\Omega(n)$ 个公共邻点，例如 $A_1,\dots,A_{k-2}$。这些顶点中至少有 $\Omega(n)$ 个不在 B中，我们只使用这些顶点。我们先在 $A_1\setminus B$中选取一个公共邻点，那么它在 A_2中与 u和 v至少有 $\Omega(n)$ 个公共邻点。因此，我们可以在 $A_2\setminus B$中选取一个公共邻点，依此类推。所得的团不包含 B中的任何顶点，因此，将 uv 染成蓝色后，我们得到多个蓝色k团，于是 $g(G)$ 增大，矛盾。

我们得到， u和 v在至多 $k-3$ 个集合 A_i中各自拥有 $\Omega(n)$ 个公共邻点，例如 $A_1,\dots,A_{k-3}$。在剩余的 $r-k+3$个集合 A_i中，它们共有 $o(n)$ 个公共邻点，因此其中至少有一个（设为 u）在 $A_{k-2},\dots,A_r$中的邻点数至多为 $(1+o(1))(r-k+3)n/2r$。现在考虑包含 u的蓝色 k团的数量。存在 $o(n^{k-1})$ 个蓝色 k团，它们包含 u 以及某个 A_i 内部的一条边，且该边不与 u关联。因此，我们可以只考虑包含 u的那些蓝色 k团，其余 $k-1$ 个顶点分别来自不同的部。

设 K为这样一个蓝色的 k-团，并假设 K包含来自 A_1、.....、A_{k-3}的 i个顶点。选取这样一个 i-集合至多有 $(1+o(1))\binom{k-3}{i}\left(\frac{n}{r}\right)^i$种方式。对于 K剩余的 $k-1-i$个顶点，我们必须从剩余的 $r-k+3$个集合中的 $k-1-i$ 个集合里，为 u 选取一个邻点；总计而言， u 在这些集合中有 $(1+o(1))(r-k+3)n/2r$ 个邻点。因此，$(k-1-i)$-团的数量至多为 $\mathrm{ex}((1+o(1))(r-k+3)n/2r, K_{k-1-i}, K_{r-k+4})$。一个定理

Zykov 的 [23] 指出，$\mathbf{ex}(n, K_s, K_t) = \mathcal{N}(K_s, T(n, t-1)) = (1+o(1))\binom{t-1}{s}\left(\frac{n}{t-1}\right)^s$，因此选取这个 $(k-1-i)$-团至多有 $(1+o(1))\binom{r-k+3}{k-i-1}\left(\frac{n}{2r}\right)^{k-1-i}$ 种方式。

我们应用定理 1.7 的 (i)，因此可知，每个顶点 v 都属于至少 $(1+o(1))\binom{r-1}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}$ 个蓝色 k- 团。因此，

$$(1+o(1))\sum_{i=0}^{k-3}\binom{k-3}{i}\left(\frac{n}{r}\right)^i\binom{r-k+3}{k-i-1}\left(\frac{n}{2r}\right)^{k-1-i} \geq (1+o(1))\binom{r-1}{k-1}\left(\frac{n}{r}\right)^{k-1}.$$

这只有在

$$\sum_{i=0}^{k-3}\binom{k-3}{i}\binom{r-k+3}{k-i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-i} \geq \binom{r-1}{k-1}. \tag{1}$$

若 $k=3$，则 $i=0$ 和 $\binom{r}{k-1}/4 \geq \binom{r-1}{k-1}$，矛盾。

若 $k=4$，则 (1) 给出 $\binom{r-1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{r-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \binom{r-1}{3}$。若 $r \geq 6$，则 $\binom{r-1}{2} \leq \binom{r-1}{3}$，因此$\binom{r-1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{r-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \binom{r-1}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) < \binom{r-1}{3}$，矛盾。若 $r=5$或 $r=4$，也很容易导出矛盾。至此，(i) 的证明完成。

还有几个其他的数对（k，r），我们也可以用类似的方法得到矛盾。然而，如果 $k=r$，左边会有一项 $\binom{k-3}{k-4}/8$。如果 $k \geq 11$，那么仅这一项就大于右边，因此一般而言无法得到矛盾。事实上，很容易看出，对于 $k=r=5$，我们得不到任何矛盾。另一方面，如果固定k，而 r 增大，那么（1）的左边只有一项的阶为 r^{k-1}，即 $r^{k-1}/2^{k-1}(k-1)!$。由于右边的首项为 $r^{k-1}/(k-1)!$，当 r 足够大时，我们便得到矛盾，从而证明（ii）。■

让我们继续证明定理 1.6。为方便起见，我们在此重述该定理 .

定理。（i）假设 F由 s 个色数为 $r+1$且各含一条色临界边的分支，以及任意数量的色数至多为 r的分支组成。那么 $\mathbf{ex}_k(n, \text{Berge-}F) = \mathcal{N}(K_k, K_{s-1}+T(n-s+1, r))$。

(ii) $\mathbf{ex}_k(n, \text{Berge-}B_{r+1,\,1}) = \mathcal{N}(K_k, T^+(n, r))$。

相应的广义 Turán 结果已在 [6] 中得到证明，我们将由此扩展这些证明。我们省略一些细节。值得指出的是，在 [6], 中，对结论 $\mathbf{ex}(n, K_k, F) = \mathcal{N}(K_k, K_{s-1}+T(n-s+1, r))$ 的证明还表明了更多内容：如果一个有 n个顶点且不含 F的图 G不是 $K_{s-1}+T(n-s+1, r)$ 的子图，那么它包含 $\mathcal{N}(K_k, K_{s-1}+T(n-s+1, r))-\Omega(n^{k-1})$ 个 K_k的副本。这立即推出，对我们而言，G_{blue} 是 $K_{s-1}+T(n-s+1, r)$ 的子图。将 $K_{s-1}+T(n-s+1, r)$ 中任意一条蓝色边改为红色，会破坏 $\Theta(n^{k-2})$ 个 K_k 的副本，因此会使 $g(G)$ 减少。这给出了定理 1.6 （ i ）的另一种证明。

证明。我们先证明 (i)。设 G 是一个蓝色-红色 F-自由图，其 $g(G) = \mathbf{ex}^{col}(n, F)$。我们应用定理 1.7 的 (ii)。先假设部内存在 s 条独立边 $u_1v_1, \ldots, u_sv_s$，使得对每个 i，u_i 和 v_i 中至少有一个不属于 B。注意到 u_i

并且 v_i 在除包含它们的部之外的每个部中都有 Ω(n) 个公共邻点。利用这一点，我们可以轻松地将每条边扩展为 F 的一个 ($r+1$)-色临界分量，其中 u_iv_i 起色临界边的作用。我们还可以找到其他分量，从而在 G 中得到 F 的一个副本，矛盾。

若 $|B|\geq s$，则我们可以在其邻点中找到 s 个不属于 B 的不同顶点，从而得到矛盾。类似地，部内但在 B 之外不存在 $s-|B|$ 条独立边。因此，与 B 中任何顶点都不相接的部内边至多构成 $s-1-|B|$ 个星，再加上 O(1) 条边。由于 B 之外的顶点与部内的 $o(n)$ 条边相接，包含此类顶点的 $o(n^{k-1})$ k-团共有 $o(n^{k-1})$ 个。这意味着，若删去所有与 B 不相接的部内边，我们会失去 $o(n^{|V(H)|-1})$ 个 H 的副本。若 $|B|< s-1$，则我们可以向 B 添加一个顶点，从而产生 $\Theta(n^{|V(H)|-1})$ 个 H 的副本，矛盾。由此我们得到 $|B|= s-1$，因此部内但在 B 之外没有边。这意味着 G 是 $K_{s-1}+T(n-s+1,r)$ 的子图，证明完毕。■

资助：本研究得到国家研究、开发与创新办公室（NKFIH）资助，项目编号为 SNN 129364、FK 132060 和 KKP-133819。

参考文献

[1] N. Alon, C. Shikhelman. 无 H 的图中的许多 T 副本。《组合理论杂志》B辑，121，146–172，2016。[2] J. I. Brown, A. Sidorenko. 完全二部图的诱导性。图论杂志，18(6)，629–645，1994。[3] Z. F¨uredi, A. Kostochka, R. Luo. 避免长 Berge 圈，《组合理论杂志》B辑 137，55–64，2019。[4] D. Gerbner. 广义 Tur´an 问题中的多图计数。arXiv 预印本 arXiv:2007.11645，2020。[5] D. Gerbner. 广义 Tur´an 问题中的一些稳定性与精确结果。arXiv 预印本 arXiv:2204.04600，2022。[6] D. Gerbner. 非退化广义 Tur´an 问题的一些精确结果。arXiv 预印本 arXiv:2209.03426，2022。[7] D. Gerbner. F 在 H族中的彩虹副本。arXiv 预印本 arXiv:2211.01565，2022。[8] D. Gerbner, A. Methuku, C. Palmer. Berge-Tur´an 超图问题的一般引理。《欧洲组合学杂志》86，文章编号 103082，2020。

[9] D. Gerbner, C. Palmer. Berge 超图的极值结果。《SIAM 离散数学杂志》，31，2314–2327，2017。[10] D. Gerbner, C. Palmer. 无 F 图中固定子图的副本计数。《欧洲组合学杂志》82（2019），文章编号 103001。[11] D. Gerbner, C. Palmer. 广义 Tur´an 问题的一些精确结果。《欧洲组合学杂志》，103，103519，2022。[12] D. Gerbner, B. Patk´os. 相交团的广义 Tur´an 结果，arXiv 预印本 arXiv:2101.08094，2021。[13] E. Gy˝ori, J. Pach, and M. Simonovits. 无K_r图中特定子图的最大数量。《图与组合》，7(1)，31–37，1991。[14] Doudou Hei, Xinmin Hou, Boyuan Liu. 路径的广义 Tur´an 数的一些精确结果，arXiv 预印本 arXiv:2112.14895，2021。[15] B. Lidick´y, K. Murphy. 无 K_r图中五圈数量的最大化。《欧洲组合学杂志》，97，103367，2021。[16] H. Liu, O. Pikhurko, M. Sharifzadeh, and K. Staden. 通过图对称化论证获得的稳定性及其在诱导性研究中的应用。arXiv 预印本 arXiv:2012.10731，2020。[17] J. Ma, Y. Qiu. 关于广义 Tur´an 数的一些尖锐结果。《欧洲组合学杂志》，84，103026，2018。[18] D. Mubayi, J. Verstra¨ete. 关于扩张的 Tur´an 问题综述。《组合学最新趋势》，117–143，2016。[19] O. Pikhurko. 扩张完全 2-图的超图 Tur´an 函数的精确计算，《组合理论杂志》B辑，103(2)，220–225，2013。[20] M. Simonovits. 求解图论极值问题的一种方法：稳定性问题。《图论》，蒂豪尼会议录，1966，学术出版社，纽约，279–319，1968。[21] M. Simonovits. 具有对称极值图的极值图问题：附加色数条件。《离散数学》7，349–376，1974。[22] P. Tur´an. Egy gr´afelm´eleti sz´els˝o´ert´ekfeladatr´ol.《数学与物理学报》，48，436–452，1941。[23] A. A. Zykov. 关于线性复形的一些性质。《数学文集》66(2)，163–188，1949。