# 正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应的另一种证明*

Yohei ITO†

arXiv:2301.01138v1 [math.AG] 3 Jan 2023

摘要

本文利用 [DK16] 的不规则黎曼–希尔伯特对应，重新证明 [Kas84] 的正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应（另见 [Meb84]）。此外，我们还用相同的论证证明了代数情形的对应。为此，我们更详细地研究了 [Ito20, Ito21a] 的 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层。

## 1 引言

1984 年，M. Kashiwara [Kas84] 建立了解析正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应，即以下范畴等价（另见[Meb84]）。设 $X$ 为一个复流形。我们用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ 表示正则全纯 $\mathcal{D}_X$- 模的三角范畴，用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$ 表示 X 上 $\mathbb{C}$- 可构造层的三角范畴，并用 $\mathrm{Sol}_X$ 表示解函子。

事实 1.1（[Kas84，主要定理], 另见 [Meb84，定理 2.1.1]）。存在一个三角范畴的等价

$$\mathrm{Sol}_X : \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

事实 1.1 出现后，A. Beilinson 和 J. Bernstein 系统地发展了复数域 $\mathbb{C}$ 上光滑代数簇上的正则全纯 $\mathcal{D}$-模理论，并得到了事实 1.1 的代数版本，如下所述。设 $X$为 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数簇，并以 $X^{\mathrm{an}}$ 表示 $X$的底层复流形。我们用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ 表示正则全纯 $\mathcal{D}_X$-模的三角范畴，用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$ 表示 $X^{\mathrm{an}}$上的代数 $\mathbb{C}$-可构造层的三角范畴。

事实 1.2（[Be，主定理 C（c）] 以及 [Bor87，定理 14.4], 另见 [Sai89，§4]）。存在一个等价

$$\mathrm{Sol}_X : \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X),\ \mathcal{M} \mapsto \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) := \mathrm{Sol}_{X^{\mathrm{an}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}).$$

*2020 数学主题分类：32C38，32S60，35A27

†东京理科大学理学部第二部数学系，1-3，东京都新宿区神乐坂，邮编162-8601，日本。电子邮箱：yitoh@rs.tus.ac.jp

将黎曼–希尔伯特对应扩展到具有不规则奇点的全纯 $\mathcal{D}$-模这一情形的问题，已悬而未决 30 年。在 K.S. Kedlaya [Ked10，Ked11] 和 T. Mochizuki [Moc09，Moc11], 对不规则亚纯联络理论取得突破性进展之后，A. D'Agnolo 和 M. Kashiwara 在 [DK16] 中为解析不规则全纯 $\mathcal{D}$-模建立了如下黎曼–希尔伯特对应。设 $X$ 为一个复流形。我们将全纯 $\mathcal{D}_X$-模的三角范畴记为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，将 $X$上的 $\mathbb{R}$-可构造增强归纳层的范畴记为 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$。

事实 1.3（[DK16，定理 9.5.3]）。存在一个完全忠实嵌入

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op}\hookrightarrow \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X).$$

此外，T. Mochizuki 证明了 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X$ 的本质像可通过曲线检验 [Moc16] 来刻画。另一方面，在 [Kas16，定理 6.2], 中，M. Kashiwara 使用增强次解析层而非增强归纳层，证明了与事实 1.3 类似的结果；另见 [Ito21b]。在 [Kuwa18，定理 8.6], 中，T. Kuwagaki 通过不规则可构造层提出了不规则黎曼–希尔伯特对应的另一种方法。这些层由取值于诺维科夫环有限版本且带有特殊分次的 $\mathbb{C}$-可构造层定义。

在 [Ito20], 中，作者为复流形 $X$ 上的增强归纳层定义了 $\mathbb{C}$-可构造性，并证明它们恰好是 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X$ 的本质像中的对象。也就是说，我们得到如下范畴等价。我们用 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 表示 $X$ 上 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层的三角范畴。

定理 1.4（[Ito20，定理 3.26]）。存在一个范畴等价

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op}\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X).$$

此外，作者在 [Ito21a] 中证明了定理 1.4 的一个代数版本。设 $X^{\sim}$为光滑代数簇，并记 $X$ 为 $X$的光滑紧化。作者定义了带边空间 $X^{\mathrm{an}}_{\infty}=\widetilde{\ }(X^{\mathrm{an}},X^{\mathrm{an}})$ 上增强归纳层的代数 $\mathbb{C}$-可构造性，并证明了以下结果。我们用 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$ 表示 $X^{\mathrm{an}}_{\infty}$上代数 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层所成的三角范畴。

定理 1.5（[Ito21a，定理 3.11]）。存在一个范畴等 $ies$

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op}\xrightarrow{\sim}\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty}).$$

本文利用事实 1.3 和定理 1.4（分别为定理 1.5），在定理 3.5（分别为定理 3.11）中重新证明事实 1.1（分别为事实 1.2）。为此，我们在命题 3.1、3.2（分别为命题 3.7、3.8）中研究 [Ito20，定义 3.19]（分别为 [Ito21a，定义 3.10]）中的 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层。本文的关键结果是引理 3.4。

请注意，定理 3.3、3.5、3.9 和 3.11 的证明并非循环论证。证明思路与 Z.Mebkhout 在 Meb84 的定理 2.1.1] 中对正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应所采用的方法一致。具体而言，我们通过 d´evissage 和 [Hiro64] 的奇点消解，将问题归结为正则亚纯联络的情形。

# 致谢

我谨感谢九州大学的 Tauchi博士，感谢他与我进行了多次讨论并提出了许多意见。

本研究得到日本学术振兴会研究活动启动资助金（编号：21K20335）和青年科学家资助金（编号：22K13902）的支持。


# 2 预备概念与结果

## 2.1 带边空间

我们回顾带边空间的概念。详情请参阅 [DK16, §3.2] 和 [DK21, 2.1] 。

带边空间是由一个良拓扑空间 $\check{}M$ （即一个无穷远处可数且具有有限软维数的局部紧豪斯多夫空间）和一个开子集 $M \subset \check{}M$组成的二元组 $M_\infty = (M, \check{}M)$。带边空间之间的态射 $f\colon (M, \check{}M) \to (N, \check{}N)$ 是一个 $\check{}\check{}\check{}$ 连续映射 $f\colon M \to N$，使得图 $\Gamma_f$ 的闭包 $\overline{\Gamma}_f$ 中的第一投影 $M \times N \to M$ 是适当映射，其中 $\Gamma_f$ 是 $f$ 在 $M \times N$ 中的图。通过将 $M = (M, M)$ 相对应，良拓扑空间范畴嵌入带边空间范畴。注意，存在由嵌入 $M \hookrightarrow M$ 给出的带边空间态射 $j_{M_\infty}\colon M_\infty \to M$。有时我们将 $j_{M_\infty}$ 简记为 $j$。对于 $M$ 的一个局部闭子集 $Z \subset M$，定义 $Z_\infty := (Z, \overline{Z})$，其中 $\overline{Z}$ 是 $Z$ 在 $\check{}M$ 中的闭包，并将由嵌入 $Z \hookrightarrow \overline{Z}$ 给出的带边空间态射记为 $i_{Z_\infty}\colon Z_\infty \to \overline{Z}$。

根据定义，$M_\infty = (M, \check{}M)$的子集是 $M$的子集。若子集 $Z$of$M_\infty$ 在 $M$中是开集（分别为闭集、局部闭集），我们就称其为开集（分别为闭集、局部闭集）。此外，若子集 $Z$ of $M_\infty$ 包含于 $M$的某个紧子集中，则称其为相对紧子集。

## 2.2 带边空间上的归纳层

我们将回顾 DK16 §3.2] 中关于 [带边空间上的归纳层的概念。

我们用 $\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}$ 表示带边空间$M_\infty = (M, \check{}M)$上的归纳层所成的阿贝尔范畴，并用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$表示它们所成的三角范畴。对于带边空间的态射 $f\colon M_\infty \to N_\infty$，我们有带边空间上归纳层的 Grothendieck 运算$\otimes$、R$\mathcal{I}hom$、R$f_*$、R$f_{!*}$、$f^{-1}$、$f^!$。注意，存在一个嵌入函子 $\iota_{M_\infty}\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M) \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$。有时，当 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$ 被视为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 的全子范畴时，我们将其记作 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_\infty})$。注意，$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$上存在标准 t-结构。还要注意，嵌入函子 $\iota_{M_\infty}$ 有一个左伴随函子 $\alpha_{M_\infty}\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$。

## 2.3 增强归纳层

我们将回顾带边空间上增强归纳层的一些基本概念及相关结果。参见 [KS16a] 和 [DK19, DK21]。此外，关于良拓扑空间上增强归纳层的概念，也参见[DK16] 和 [KS16b] 。

设 $M_\infty = (M, \check{M})$ 为一个带边空间。我们记 $\mathbb{R}_\infty := (\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}})$ 为 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$，并令 $t \in \mathbb{R}$ 为仿射坐标。考虑由投影映射 $\pi\colon M \times \mathbb{R} \to M, (x,t) \mapsto x$ 给出的带边空间的态射$\pi\colon M_\infty \times \mathbb{R}_\infty \to M_\infty$。则带边空间 $M_\infty$ 上的增强归纳层三角范畴定义为

$$\mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) := \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty \times \mathbb{R}_\infty}) / \pi^{-1}\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}).$$

商函子 $\mathrm{Q}_{M_\infty}\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty \times \mathbb{R}_\infty}) \to \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 具有全忠实的左伴随与右伴随 $\mathrm{L}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}, \mathrm{R}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}\colon \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty \times \mathbb{R}_\infty})$，分别对应于左、右伴随。有时，为简便起见，我们将 $\mathrm{Q}_{M_\infty}$（分别将 $\mathrm{L}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}, \mathrm{R}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}$）简记为 Q（分别简记为 $\mathrm{L}^{\mathrm{E}}, \mathrm{R}^{\mathrm{E}}$）。于是，$\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 上有由 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty \times \mathbb{R}_\infty})$ 上的标准 t-结构诱导的标准 t-结构。我们将关于标准 t-结构的 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 的心记为 $\mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$，并将 $\mathcal{H}^n\colon \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) \to \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 记作第 $n$ 阶上同调函子。对于带边空间之间的态射 $f\colon M_\infty \to N_\infty$，我们有带边空间上的增强归纳层的 Grothendieck 运算 $\overset{+}{\otimes}, \mathrm{R}\mathcal{I}hom^+, \mathrm{E}f^{-1}, \mathrm{E}f_*, \mathrm{E}f^!, \mathrm{E}f_{!!}$。此外，对于 $F \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 和 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 中的对象

$$\pi^{-1}F \otimes K := \mathbf{Q}_{M_\infty}(\pi^{-1}F \otimes \mathbf{L}^{\mathrm{E}}_{M_\infty} K),$$
$$\mathbf{R}\mathcal{I}hom(\pi^{-1}F, K) := \mathbf{Q}_{M_\infty}\big(\mathbf{R}\mathcal{I}hom(\pi^{-1}F, \mathbf{R}^{\mathrm{E}}_{M_\infty} K)\big)$$

在 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 中定义良好。我们记

$$\mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{M_\infty} := \mathbf{Q}_{M_\infty}\Big(\text{“}\varinjlim_{a \to +\infty}\text{”}\ \mathbb{C}_{\{t \geq a\}}\Big) \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$$

$\check{}$，其中 $\{t \geq a\}$ 表示 $\{(x,t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \geq a\} \subset M \times \overline{\mathbb{R}}$。此外，对于定义在开子集 $U \subset M$ 上的连续函数 $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$，我们记

$$\mathbb{E}^{\varphi}_{U|M_\infty} := \mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{M_\infty} \overset{+}{\otimes} \mathbf{Q}_{M_\infty}\big(\mathbb{C}_{\{t+\varphi=0\}}\big),$$

其中 $\{t+\varphi = 0\}$ 表示 $\{(x,t) \in \check{M} \times \overline{\mathbb{R}} \mid t \in \mathbb{R}, x \in U, t + \varphi(x) = 0\}$。

我们有一个自然嵌入 $e_{M_\infty}\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) \to \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$，其定义为

$$e_{M_\infty}(F) := \mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{M_\infty} \otimes \pi^{-1}F,$$

细节参见 [DK19, 引理 2.8。2]（另见 [KS16a, 命题 2.20]）。另请注意，对于带边空间之间的态射 $f\colon M_\infty \to N_\infty$，以及对象 $F \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$、$G \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{N_\infty})$，我们得到

$$\mathrm{E}f_{!!}(e_{M_\infty}F) \simeq e_{N_\infty}(\mathrm{R}f_{!!}F),\ \mathrm{E}f^{-1}(e_{N_\infty}G) \simeq e_{M_\infty}(f^{-1}G),\ \mathrm{E}f^!(e_{N_\infty}G) \simeq e_{M_\infty}(f^! G),$$

利用 [KS16a，命题 2.18]。令 $i_0\colon M_\infty \to M_\infty \times \mathbb{R}_\infty$ 为由 $M \to M \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0)$ 诱导的带边空间包含映射。我们设

$$\mathrm{sh}_{M_\infty} := \alpha_{M_\infty} \circ i_0^! \circ \mathbf{R}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}\colon \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty}) \to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$$

并称其为带边空间上的增强归纳层层化函子。我们将在 §3 中使用以下事实。

**Fact 2.1** ([DK21，命题 3.8 (i)])。对于任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$，存在一个同构

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{sh}_{M_\infty}(e_{M_\infty}(\iota_{M_\infty}(\mathcal{F}))).$$

以下概念由 [DK21] 引入。

定义 2.2（[DK21，定义 3.4 (ii)]）。若存在一个对象 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_\infty})$，使得 $K \simeq e_{M_\infty}(\iota_{M_\infty}(\mathcal{F}))$，则称 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 为层型。

## 2.4 $\mathbb{R}$-可构造增强归纳层

我们将回顾增强归纳层的 $\mathbb{R}$-可构造性这一概念及相关结果。参考文献见 [DK16、DK19]。

在本小节中，我们假设带边空间 $M_\infty = (M, \check{}M)$ 是亚解析带边空间。也就是说，$M$ 是亚解析空间，且 $M$ 是 $\check{}M$的开亚解析子集。详细内容见 [DK19, 定义 3.1.1]

定义 2.3（[DK19, 定义 3.1.2]）。我们用 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathbb{C}_{M_\infty})$ 表示 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_\infty})$ 中由满足以下条件的对象 $\mathcal{F}$ 构成的全子范畴：$\mathrm{R}j_{M_\infty !}\mathcal{F}$ 是 $\check{}M$上的 $\mathbb{R}$-可构造层。

$\check{}$ 回顾一下，$Z$ 是 $M_\infty$ 的亚解析子集，当且仅当它是 $M$中的亚解析子集。

定义 2.4（[DK19, 定义 3.3.1]）。我们称 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 是 $\mathbb{R}$-可构造的，如果对于 $M_\infty$ 的任意相对紧亚解析开子集 $U$，都存在一个同构 $\mathrm{E}i_{U_\infty}^{-1}K \simeq \mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{U_\infty} \overset{+}{\otimes} \mathcal{F}$，其中某个 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathbb{C}_{U_\infty \times \mathbb{R}_\infty})$。

我们将 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 记为 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 的全三角子范畴，其对象为$\mathbb{R}$-可构造的增强归纳层。注意，三角范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 具有标准 t-结构，该结构由 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 上的标准 t-结构诱导。我们将 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$ 关于标准 t-结构的心记为 $\mathrm{E}^{0}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{M_\infty})$。

## 2.5 $\mathcal{D}$-模

本节回顾一些关于 $\mathcal{D}$-模的基本概念和结果。关于解析 $\mathcal{D}$-模，可参阅 [Bj¨o93], [DK16，第§§ 8, 9], [KS01，第§7], [KS16b，第§§3, 4, 7]；关于代数 $\mathcal{D}$-模，可参阅[Be], [Bor87], [HTT08] 。

### 2.5.1 解析 $\mathcal{D}$-模

设 $X$ 为复流形，记其复维数为 $d_X$。记 $\mathcal{O}_X$为全纯函数层，$\mathcal{D}_X$ 为 $X$上的全纯微分算子层。将左 $\mathcal{D}_X$-模的有界导出范畴记为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$。此外，将 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ 的全三角子范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$、$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ 分别记为其上同调具有相干性、全纯性和正则全纯性的对象所成的子范畴。对于复流形之间的态射 $f\colon X \to Y$，将$\overset{D}{\otimes}$、$\mathrm{D}f_*$、$\mathrm{D}f^*$ 记为解析 $\mathcal{D}$-模的标准运算。

对于解析超曲面 $D$ 位于 $X$，我们用 $\mathcal{O}_X(*D)$ 表示 $X$ 上极点位于 $D$ 的亚纯函数层。于是对于 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$，我们定义

$$\mathcal{M}(*D) := \mathcal{M} \overset{D}{\otimes} \mathcal{O}_X(*D).$$

我们称一个 $\mathcal{D}_X$-模是沿 $D$ 的 $X$ 上的亚纯联络，若它作为 $\mathcal{O}_X$-模同构于一个相干的 $\mathcal{O}_X(*D)$-模。我们用 $\mathrm{Conn}(X; D)$ 表示沿 $D$ 的亚纯联络范畴，用 $\mathrm{Conn}^{\mathrm{reg}}(X; D)$ 表示沿 $D$ 的正则亚纯联络范畴。此外，我们定义

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X(D)}) := \{\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X) \mid \mathcal{H}^i(\mathcal{M}) \in \mathrm{Conn}(X; D) \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\}.$$

在 $X$ 上的经典解函子定义为

$$\mathrm{Sol}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X), \quad \mathcal{M} \longmapsto \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X).$$

以下定理的一个关键部分由 Deligne 在 [De70] 中证明。我们用 Loc($X \setminus D$) 表示 $X \setminus D$ 上局部系统的范畴。以下定理用于命题 3.1 的证明。

事实 2.5（例如参见 [HTT08, Cor. 5.2.21]）。存在一个阿贝尔范畴等价

$$\mathcal{S}\colon \mathrm{Conn}^{\mathrm{reg}}(X; D) \to \mathrm{Loc}(X \setminus D),\ \mathcal{M} \to \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})|_{X\setminus D}.$$

我们用 $\mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X$ 表示温和全纯函数的增强归纳层 [DK16, Def.8.2.1]，并用 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X$ 表示 $X$ 上的增强解函子：

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X), \quad \mathcal{M} \longmapsto \mathbf{R}\mathcal{I}hom_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X),$$

[DK16, Def. 9.1.1]（另见 [Ito21a, Lem. 3.15]）。我们将在 §3 中用到以下事实。

事实 2.6（[DK16, Thm. 9.1.2 前紧接的方程，Prop. 9.1.3]（另见 [Ito21a, Prop. 3.14] 的最后一部分）[1]）。对于任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$，存在一个同构

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) \simeq e_X\big(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})\big).$$

事实 2.7（[DK16，引理 9.5.5]）。对于 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$，我们有一个同构 $m$

$$\mathrm{sh}_X\big(\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})\big) \simeq \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}).$$

在本小节末尾，我们来回顾一下 $\mathcal{M}_{\mathrm{reg}}$ 的概念。我们用 $\mathcal{D}^{\infty}_X$ 表示 $X$ 上无限阶微分算子的环层，并定义

$$\mathcal{M}^{\infty} := \mathcal{D}^{\infty}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}.$$

那么，对于全纯 $\mathcal{D}_X$-模 $\mathcal{M}$，一个 $\mathcal{D}_X$-模

$$\mathcal{M}_{\mathrm{reg}} := \{s \in \mathcal{M}^{\infty} \mid \mathcal{D}_X \cdot s \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)\}$$

是一个正则全纯 $\mathcal{D}_X$-模。注意，我们有

$$(\mathcal{M}_{\mathrm{reg}})^{\infty} \simeq \mathcal{M}^{\infty}$$

因此

$$\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}_{\mathrm{reg}}) \simeq \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}).$$

详细内容参见 [KK81, 定理 5.2。1], 另见 [Kas84, 命题 5。7]

[1]请注意，[Ito21a，命题 3.14] 最后一部分的断言是在未使用事实 1.2 的情况下证明的。

### 2.5.2 代数 $\mathcal{D}$-模

设 $X$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数簇，并记 $d_X$ 为其复维数。记 $\mathcal{O}_X$ 为正则函数层，记 $\mathcal{D}_X$ 为 $X$上的代数微分算子层。记 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ 为左$\mathcal{D}_X$-模的有界导出范畴。此外，记 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$、$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$ 和 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ 为 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ 的全三角子范畴，分别由具有相干上同调、全纯上同调和正则全纯上同调的对象组成。对于光滑代数$D$簇之间的态射 $f\colon X \to Y$，记 $\otimes$、$\mathrm{D}f_*$、$\mathrm{D}f^*$ 为代数 $\mathcal{D}$-模的标准运算。

我们将 $X^{\mathrm{an}}$记作 $X$的底层复流形，并将 $\widetilde{\iota}\colon (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ 记作环化空间的态射。由于存在 $\widetilde{\iota}^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$上的层态射 $X^{\mathrm{an}}$，我们得到一个规范态射 $\widetilde{\iota}^{-1}\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}$。于是我们定义

$$\mathcal{M}^{\mathrm{an}} := \mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\widetilde{\iota}^{-1}\mathcal{D}_X} \widetilde{\iota}^{-1}\mathcal{M}$$

对于 $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$，得到一个函子 $(\cdot)^{\mathrm{an}}\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}})$。它称为 $X$上的解析化函子。由于层 $\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}$ 在 $\widetilde{\iota}^{-1}\mathcal{D}_X$上忠实平坦，解析化函子是忠实且正合的，因此我们得到

$$(\cdot)^{\mathrm{an}}\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X) \to \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}}).$$

注意 c. 到解析化函子保持相干性和全纯性的性质

在本小节末尾，我们将回顾代数亚纯联络。设 $D$ 是 $X$的一个因子，且 $j\colon X \setminus D \hookrightarrow X$ 是自然嵌入。于是我们定义 $\mathcal{O}_X(*D) := j_*\mathcal{O}_X$，并且还定义

$$\mathcal{M}(*D) := \mathcal{M} \overset{D}{\otimes} \mathcal{O}_X(*D)$$

对于 $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$。注意，我们有 $\mathcal{M}(*D) \simeq \mathrm{D}j_*\mathrm{D}j^*\mathcal{M}$。若一个 $\mathcal{D}_X$-模作为 $\mathcal{O}_X$-模同构于一个相干的 $\mathcal{O}_X(*D)$-模，我们称它为沿 $D$ 的 $X$ 上的亚纯联络。我们用 $\mathrm{Conn}(X; D)$ 表示沿 $D$的 $X$ 上的亚纯联络范畴。注意，它是 $\mathrm{Mod}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$ 的满阿贝尔子范畴。此外，我们定义

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X(D)}) := \{\mathcal{M} \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X) \mid \mathcal{H}^i(\mathcal{M}) \in \mathrm{Conn}(X; D) \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\}.$$

我们注意到，如果 $X$ 完备，则亚贝尔范畴 $\mathrm{Conn}(X; D)$ 与沿 $D^{\mathrm{an}}$ 的 $X^{\mathrm{an}}$上的有效亚纯联络范畴之间存在范畴等价，由 [HTT08, §5.3] 给出。然而，根据 [Mal96, Thm. 3.3.1]，任何解析亚纯联络都是有效的。因此，我们有：

事实 2.8 ([HTT08, (5.3.2)], [Mal96, Thm. 3.3.1])。若 $X$ 完备，则存在阿贝尔范畴之间的等价

$$(\cdot)^{\mathrm{an}}\colon \mathrm{Conn}(X; D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conn}(X^{\mathrm{an}}; D^{\mathrm{an}}).$$

此外，这会诱导出三角范畴等价

$$(\cdot)^{\mathrm{an}}\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X(D)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X^{\mathrm{an}}(D^{\mathrm{an}})}).$$

## 2.6 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层

本节中，我们回顾增强归纳层的 $\mathbb{C}$-可构造性定义，以及 [Ito20] 和 [Ito21a] 的主要结果。

### 2.6.1 解析情形

设 $X$ 为复流形， $D \subset X$ 为其上的正规交叉除子。取 $X$ 的局部坐标 $(u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_{d_X - l})$，使得 $D = \{u_1 u_2 \cdots u_l = 0\}$，并设 $Y = \{u_1 = u_2 = \cdots = u_l = 0\}$. 。我们在集合 $\mathbb{Z}^l$ 上定义偏序 $\leq$，如下

$$a \leq a' \iff a_i \leq a'_i \ (1 \leq {}^{\forall} i \leq l),$$

对于 $a = (a_1, \ldots, a_l)$ $a' = (a'_1, \ldots, a'_l) \in \mathbb{Z}^l$。于是，对于沿着 $D$ 的 $X$ 上的亚纯函数 $\varphi \in \mathcal{O}_X(*D)$，其洛朗展开为

$$\varphi = \sum_{a \in \mathbb{Z}^l} c_a(\varphi)(v) \cdot u^a \ \in \mathcal{O}_X(*D)$$

关于 $u_1, \ldots, u_l$，其中 $c_a(\varphi)$ 是 $Y$ 上的全纯函数，我们将其阶 $\mathrm{ord}(\varphi) \in \mathbb{Z}^l$ 定义为最小值

$$\min\Big(\{a \in \mathbb{Z}^l \mid c_a(\varphi) \neq 0\} \cup \{0\}\Big)$$

$\tilde{}$若其存在。对于任意 $f \in \mathcal{O}_X(*D)/\mathcal{O}_X$，取任意一个提升 $f$到 $\mathcal{O}_X(*D)$，并定义 $\mathrm{ord}(f) := \tilde{}\mathrm{ord}(f)$，前提是右端存在。注意，这与提升的选择无关 $\tilde{}f$。若 $\mathrm{ord}(f) \neq 0$，则 $c_{\mathrm{ord}(f)}(f)$ 与提升 $f$的选择无关，记作$c_{\mathrm{ord}(f)}(f)$。

定义 2.9（[Moc11，定义 2.1.2]）。在上述情形下，有限子集 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X(*D)/\mathcal{O}_X$ 称为（$X, D$）上的良好不规则值集，若其满足以下条件：

- 对每个元素 $f \in \mathcal{I}$，$\mathrm{ord}(f)$ 存在。若 $f \neq 0$属于 $\mathcal{O}_X(*D)/\mathcal{O}_X$，则 $c_{\mathrm{ord}(f)}(f)$ 在 $Y$ 上可逆。- 对于两个不同的 $f$、$g \in \mathcal{I}$，$\mathrm{ord}(f-g)$ 存在，且$c_{\mathrm{ord}(f-g)}(f-g)$ 在 $Y$ 上可逆。- 集合 $\{\mathrm{ord}(f-g) \mid f, g \in \mathcal{I}\}$ 关于上述偏序 $\leq$，在 $\mathbb{Z}^l$ 上是全序。

定义 2.10（[Ito20，定义 3.5]）。在上述情形下，若增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 沿 $D$ 具有标准形，则满足以下三个条件：

(i) $\pi^{-1}\mathbb{C}_{X \setminus D} \otimes K \xrightarrow{\sim} K$，(ii) 对于任意 $x \in X \setminus D$，存在 $x$ 的一个开邻域 $U_x \subset X \setminus D$ 以及一个非负整数 $k$，使得 $K|_{U_x} \simeq (\mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{U_x})^{\oplus k}$,

(iii) 对于任意 $x \in D$，存在 $x$ 的一个开邻域 $U_x \subset X$、一个位于 $(U_x, D \cap U_x)$ 上的良好不规则值集 $\{\varphi_i\}_i$，以及 $U_x \backslash D$ 的一个有限扇形开覆盖 $\{U_{x,j}\}_j$，使得

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{U_{x,j}} \otimes K|_{U_x} \simeq \bigoplus_i \mathbb{E}^{\mathrm{Re}\,\varphi_i}_{U_{x,j}|U_x} \quad \text{for any } j.$$

在 [Ito20，定义 3.5], 中，我们假设 $K$ 是 $\mathbb{R}$-可构造的，关于 $\mathbb{R}$-可构造增强归纳层的定义，参见 [DK19，定义 3.3.1]（另见定义 2.4）。然而，这并非必要：

命题 2.11. 任何沿 $D$ 具有标准形的增强归纳层，都是$\mathbb{R}$-可构造增强归纳层。

证明. 设 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 是沿$D$具有标准形的增强归纳层。由于增强归纳层的 $\mathbb{R}$-可构造性是局部性质（详情参见 [DK16，推论 4.9.8]），只需证明：对任意 $x \in X$，存在 $x$ 的一个开子集$U_x \subset X$，使得 $K|_{U_x} \in \mathrm{E}^0_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{U_x})$。

由于 $K$ 满足定义 2.10 中的条件 (ii)，且常值增强归纳层 $\mathbb{C}^{\mathrm{E}}$ 是 $\mathbb{R}$-可构造的，因此对任意 $x \in X \setminus D$，存在 $x$ 的一个开邻域 $U_x \subset X \setminus D$，使得 $K|_{U_x} \in \mathrm{E}^0_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{U_x})$。

由于 $K$ 满足定义 2.10 中的条件 (iii)，对于任意 $x \in D$，存在一个开邻域 $U_x \subset X$、 $L_x \in \mathrm{E}^0_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{U_x})$ 以及 $U_x \setminus D$ 的有限扇形开覆盖 $\{U_{x,j}\}$，使得

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{U_{x,j}} \otimes K|_{U_x} \simeq \pi^{-1}\mathbb{C}_{U_{x,j}} \otimes L_x$$

对于任意 $j$。这里我们利用了如下事实：根据事实 1.3 和 [DK16, Cor. 9.4.12]，对于任意亚纯函数 $\varphi \in \mathcal{O}_{U_x}(*(D \cap U_x))$，增强归纳层 $\mathbb{E}^{\mathrm{Re}\,\varphi}_{U_x \backslash D|U_x}$ 都是 $\mathbb{R}$-可构造的。我们将证明 $K|_{U_x}$ 是 $\mathbb{R}$-可构造的。注意，由于 $K$ 满足定义 2.10 中的条件 (i)，我们有

$$K|_{U_x} \simeq \pi^{-1}\mathbb{C}_{U_x \backslash D} \otimes K|_{U_x}.$$

因此，利用 [DK16, Prop. 4.9.3] 以及层的 Mayer–Vietoris列（例如参见 [KS90, Prop. 2.3.6 (vii)]），只需证明 $\pi^{-1}\mathbb{C}_{U_{x,\,j}} \otimes K|_{U_x} \in \mathrm{E}^0_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{U_x})$。然而，这可由 $\pi^{-1}\mathbb{C}_{U_{x,\,j}} \otimes L_x \in \mathrm{E}^0_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{U_x})$ 得出。 □

$X$ 沿着复流形 $U$ 上因子 $D$ 的分歧，是一个有限映射 $r\colon U^{\mathrm{rm}} \to U$，其形式为 $z' \mapsto z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) = r(z') = (z_1'^{m_1}, \ldots, z_k'^{m_k}, z'_{k+1}, \ldots, z'_n)$，其中某些 $(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{Z}_{>0})^k$ 满足：$(z'_1, \ldots, z'_n)$ 是 $U^{\mathrm{rm}}$ 的局部坐标系，且 $(z_1, \ldots, z_n)$ 是 $U$ 的局部坐标系，使得 $D \cap U = \{z_1 \cdots z_k = 0\}$。

定义 2.12（[Ito20，定义 3.11]）。我们称增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 沿着 $D$ 具有准正规形式，如果它满足定义 2.10 中的 (i) 和 (ii)，并且对于任意$x \in D$，都存在 $x$ 的一个开邻域 $U_x \subset X$，以及一个分歧 $r_x\colon U_x^{\mathrm{rm}} \to U_x$，它是$U_x$ 沿着 $D_x := U_x \cap D$ 的分歧，使得 $\mathrm{E}r_x^{-1}(K|_{U_x})$ 沿着 $D_x^{\mathrm{rm}} := r_x^{-1}(D_x)$ 具有标准形。

注意，任何沿着 $D$ 具有准正规形式的增强归纳层，都是 $X$ 上的 $\mathbb{R}$-可构造增强归纳层。详情见 [Ito20，第 3.12] 条命题。

相对于解析超曲面 $H$ 的 $X$ 的修正，是一个射影映射 $m\colon X^{\mathrm{md}} \to X$，它从复流形 $X^{\mathrm{md}}$ 映到 $X$，满足 $D^{\mathrm{md}} := m^{-1}(H)$ 是 $X^{\mathrm{md}}$ 的正规交叉除子，并且 $m$ 诱导一个同构 $X^{\mathrm{md}} \setminus D^{\mathrm{md}} \xrightarrow{\sim} X \setminus H$。

定义 2.13（[Ito20，定义 3.14]）。若增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 满足定义 2.10 中的 (i) 和 (ii)，并且对任意 $x \in H$，都存在 $x$ 的一个开邻域 $U_x \subset X$ 以及一个修正 $m_x\colon U_x^{\mathrm{md}} \to U_x$，它沿 $H_x := U_x \cap H$ 对 $U_x$ 进行修正，使得 $\mathrm{E}m_x^{-1}(K|_{U_x})$ 沿 $D_x^{\mathrm{md}} := m_x^{-1}(H_x)$ 具有准正规形式，则称其沿 $H$ 具有修正准正规形式。

注意，任何沿 $H$具有修正准正规形式的增强归纳层，都是 $X$ 上的 $\mathbb{R}$-可构造增强归纳层。详情参见 [Ito20，命题 3.15] 。此外，我们有：

命题2.14（[Ito20，引理 3.16]）。增强解函子 $\mathrm{Sol}_X^{\mathrm{E}}$ 在 $\mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 中由沿 $H$ 具有修正准正规形式的对象构成的全子范畴与亚纯联络阿贝尔范畴 $\mathrm{Conn}(X; H)$ 之间诱导出一个阿贝尔范畴等价；该亚纯联络定义在 $X$ 上，并沿 $H$ 具有极点。

我们将 $\mathrm{E}^0_{\mathrm{mero}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X(H)})$ 记为以下对象的本质像

$$\mathrm{Sol}_X^{\mathrm{E}} \colon \mathrm{Conn}(X; H)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X).$$

由命题2.14，这个阿贝尔范畴不过是 $\mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 的全子范畴，由沿 $H$ 具有修正准正规形式的增强归纳层构成。此外，我们设

$$\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X(H)}) := \{K \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \mid \mathcal{H}^i(K) \in \mathbf{E}^0_{\mathrm{mero}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X(H)}) \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\}.$$

由于范畴 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X(H)})$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$ 的全三角子范畴，且范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X(H)})$ 是 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 的全三角子范畴，下面的命题可由对复形长度归纳而显然得到：

命题2.15。增强解函子 $\mathrm{Sol}_X^{\mathrm{E}}$ 诱导出三角范畴之间的一个等价

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathcal{D}_{X(H)})^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{mero}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X(H)}).$$

$X$ 的复解析分层是指 $X$ 的一个局部有限划分 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$，由局部闭解析子集 $X_\alpha$ 构成，并满足：对于任意 $\alpha \in A$，$X_\alpha$ 是光滑的，$\overline{X}_\alpha$ 和 $\partial X_\alpha := \overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ 是复解析子集，且对于某个子集 $B \subset A$，$\overline{X}_\alpha = \bigsqcup_{\beta\in B} X_\beta$。

定义2.16（[Ito20，定义3.19]）。我们称增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 是$\mathbb{C}$-可构造的，若存在一个复解析分层 $\{X_\alpha\}_\alpha$，使得 $X$

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{\overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}} \setminus D_\alpha} \otimes \mathbf{E}b_\alpha^{-1}K$$

对于任意 $\alpha$，沿 $D_\alpha$ 具有修正准正规形式，其中 $b_\alpha\colon \overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}} \to X$ 是沿 $\partial X_\alpha = \overline{X_\alpha} \setminus X_\alpha$ 对 $\overline{X_\alpha}$ 进行的复爆破，且 $D_\alpha := b_\alpha^{-1}(\partial X_\alpha)$。也就是说，$\overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}}$ 是复流形，$D_\alpha$ 是 $\overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}}$ 的正规交叉除子，而 $b_\alpha$ 是一个射影映射，它诱导同构 $\overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}} \setminus D_\alpha \xrightarrow{\sim} X_\alpha$ 并满足 $b_\alpha\big(\overline{X}_\alpha^{\mathrm{bl}}\big) = \overline{X_\alpha}$。

我们称这样的族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为适配于 $K$的复解析分层。

REMARK 2.17. 定义2.16不依赖于 $b_\alpha$ 的复爆破选择；参见[Ito20，Sublem. 3.22]。

我们将 $\mathrm{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 记为 $\mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 的全子范畴，其对象是 $\mathbb{C}$-可构造的且

$$\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) := \{K \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \mid \mathcal{H}^i(K) \in \mathbf{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X).$$

注意，范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 是 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 的全三角子范畴。详情请参见[Ito20, 命题 3.21] 。

定理 2.18（[Ito20, 命题 3.25，定理 3.26]）。对于任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，其增强解复形 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ 是一个 $\mathbb{C}$-可构造的增强归纳层。

另一方面，对于任意 $\mathbb{C}$-可构造的增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$，存在 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，使得

$$K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}).$$

因此，我们得到三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X \colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op} \to \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X).$$

### 2.6.2 代数情形

$X$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数簇，记 $X$ 的底层复解析流形为 $X^{\mathrm{an}}$ 。回顾一下，$X$ 的代数分层是 $X$ 的一个 Zariski 局部有限划分 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ，其各部分为局部闭子簇 $X_\alpha$ ，并且对于任意 $\alpha \in A$，$X_\alpha$ 都是光滑的，且 $\overline{X}_\alpha = \bigsqcup_{\beta\in B} X_\beta$ 对某个子集 $B \subset A$ 成立。此外， $X$ 的代数分层 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 诱导出 $X^{\mathrm{an}}$ 的复解析分层 $\{X^{\mathrm{an}}_\alpha\}_{\alpha\in A}$。

定义 2.19（[Ito21a，定理 3.1]）。如果存在 $X$ 的一个代数分层 $\{X_\alpha\}_\alpha$ ，使得增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}})$ 满足

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha)^{\mathrm{an}}\setminus D^{\mathrm{an}}_\alpha} \otimes \mathbf{E}(b^{\mathrm{an}}_\alpha)^{-1}K$$

对于任意 $\alpha$，沿 $D^{\mathrm{an}}_\alpha$ 具有修正准正规形式，其中 $b_\alpha\colon \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \to X$ 是沿 $\partial X_\alpha := \overline{X_\alpha} \setminus X_\alpha$、$D_\alpha := b_\alpha^{-1}(\partial X_\alpha)$ 对 $\overline{X_\alpha}$ 进行的爆破，且 $D^{\mathrm{an}}_\alpha := \big(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\big)^{\mathrm{an}} \setminus \big(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha\big)^{\mathrm{an}}$。也就是说，$\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数簇，$D_\alpha$ 是 $\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha$ 的正规交叉除子，而 $b_\alpha$ 是一个射影映射，它诱导出同构 $\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha \xrightarrow{\sim} X_\alpha$ 并满足 $b_\alpha\big(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\big) = \overline{X_\alpha}$。

我们将 $\mathrm{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 记为 $\mathrm{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}})$ 的全子范畴，其对象满足条件 (AC)。注意，$\mathrm{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 是阿贝尔范畴 $\mathrm{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}})$ 的全子范畴，该范畴由 $X^{\mathrm{an}}$ 上的 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层组成。此外，我们定义

$$\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) := \{K \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}) \mid \mathcal{H}^i(K) \in \mathbf{E}^0_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}).$$

定理 2.20（[Ito21a，定理 3.7]）。设 $X$ 是$\mathbb{C}$上的光滑完备代数簇。那么存在一个三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X \colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X),\ \mathcal{M} \mapsto \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) := \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X^{\mathrm{an}}}(\mathcal{M}^{\mathrm{an}}).$$

多亏了 Hironaka消解定理 [Hiro64]（另见 [Naga62，定理 4.3]），
~ ~ ~我们可以取一个光滑完备代数簇 $X$，使得 $X \subset X$ 并且 $D := X \setminus X$ 是 $X$的正规交叉除子。我们来考虑一个带边空间

$$X_\infty^{\mathrm{an}} = (X^{\mathrm{an}}, \widetilde{X}^{\mathrm{an}})$$

以及定义在 $X_\infty^{\mathrm{an}}$ 上的增强归纳层三角范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$。注意，$\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$ 不依赖于 $\widetilde{X}$ 的选择，详情见 [Ito21a, §2.3] 。
~我们将 $j\colon X \hookrightarrow X$ 记为开嵌入，将 $j^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \hookrightarrow X^{\mathrm{an}}$ 记为解析空间 $j$ 的对应态射。于是得到带边空间的态射

$$j^{\mathrm{an}}\colon X_\infty^{\mathrm{an}} \to \widetilde{X}^{\mathrm{an}}$$

~由嵌入 $j^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \hookrightarrow X^{\mathrm{an}}$ 给出。

定义 2.21（[Ito21a, 定义 3.10]）。若增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$ 在 $X_\infty^{\mathrm{an}}$ 上满足代数 $\mathbb{C}$-构造性，即 $\mathrm{E}j_{!!}^{\mathrm{an}}K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}})$ 是 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$ 的一个对象，则称之为

我们用 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$ 表示 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$ 中由定义在 $X_\infty^{\mathrm{an}}$ 上的代数 $\mathbb{C}$-构造性增强归纳层组成的全三角子范畴。注意，三角范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$ 是 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$ 的全三角子范畴，详情见 [Ito20, 命题 3.21]。

令

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M}) := \mathbf{E}(j^{\mathrm{an}})^{-1}\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}(\mathbf{D}j_*\mathcal{M}) \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty^{\mathrm{an}}})$$

对任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$。

定理 2.22（[Ito21a，定理 3.11]）。对任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，$\mathcal{M}$ 的增强解复形 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})$ 是代数的 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层。

另一方面，对任意代数的 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$，存在 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，使得

$$K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M}).$$

此外，我们还得到三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty}).$$

# 3 主要结果

本文的主要结果是定理 3.3、3.5、3.9 和 3.11。

## 3.1 解析情形

在本小节中，设 $X$ 是一个复流形。首先，我们将证明自然嵌入函子 $e_X \circ \iota_X$ 和层化函子 $\mathrm{sh}_X$ 保持 $\mathbb{C}$-可构造性。

下面的命题 3.1（分别地，命题 3.2）已在 [Ito20，推论 3.27]（分别地，[Ito20，推论 3.28]）中借助事实 1.1 得到证明。本文将不借助事实 1.1 来证明它们。

命题 3.1. 对任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$，有 $e_X(\iota_X(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$。

证明. 对复形的长度作归纳，只需证明 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathbb{C}$-可构造层（而非复形）的情形。

设 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathbb{C}$-可构造层。则存在 $X$ 的复解析分层 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使得 $\mathcal{F}|_{X_\alpha}$ 是一个局部系统。我们将证明 $K := e_X(\iota_X(\mathcal{F}))$ 是一个 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层。对于每个 $\alpha \in A$，令 $b_\alpha\colon \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \to X$ 为沿 $\partial X_\alpha := \overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ 对 $\overline{X}_\alpha$ 进行的复爆破，并设 $D_\alpha := b_\alpha^{-1}(\partial X_\alpha)$，如 $\mathbb{C}$-可构造性的定义（定义2.16）中的条件(iii)所述。则有同构

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\otimes \mathbf{E}b_\alpha^{-1}K &\simeq e_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\iota_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\otimes b_\alpha^{-1}(\mathcal{F})\right)\right)\\ &\simeq e_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\iota_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(i_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha!}(b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha})^{-1}(\mathcal{F}|_{X\alpha})\right)\right),\end{aligned}$$

根据 $e_X$ 与 $\iota_X$ 在各种运算下的交换性，其中 $i_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\colon \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha \to \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha$ 是自然嵌入。由于 $(b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha})^{-1}(\mathcal{F}|_{X\alpha})$ 是 $\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha$ 上的一个局部系统，存在一个对象 $\mathcal{M}_\alpha \in \mathsf{Conn}^{\mathrm{reg}}(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha; D_\alpha)$，使得

$$(b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha})^{-1}(\mathcal{F}|_{X\alpha}) \simeq \mathrm{Sol}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha)|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}$$

根据事实 2.5。因此，存在同构

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\otimes \mathbf{E}b_\alpha^{-1}K &\simeq e_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\iota_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(i_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha!}\mathrm{Sol}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha)|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\right)\right)\\ &\simeq e_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\iota_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\otimes \mathrm{Sol}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha)\right)\right)\\ &\simeq e_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\iota_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}\left(\mathrm{Sol}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha)\right)\right) \simeq \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M}_\alpha),\end{aligned}$$

其中，第三个同构由 $\mathcal{M}_\alpha \simeq \mathcal{M}_\alpha(*D_\alpha)$ 得出，最后一个同构由事实 2.6 得出。由于 $\mathcal{M}_\alpha \in \mathsf{Conn}(\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha; D_\alpha)$，根据命题2.14，增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha}(\mathcal{M})$ 沿着 $D_\alpha$ 具有修正准正规形式。

因此，增强归纳层

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha\setminus D_\alpha}\otimes \mathbf{E}b_\alpha^{-1}K \in \mathbf{E}^0(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha})$$

沿着 $D_\alpha$ 对每个 $\alpha \in A$ 都有修正准正规形式，因此增强归纳层 $K = e_X(\iota_X(\mathcal{F}))$ 是 $\mathbb{C}$-可构造的。 □

命题 3.2. 对任意 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$，我们有 $\mathrm{sh}_X(K) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。

证明。对复形的长度作归纳，只需证明在 $K \in \mathrm{E}^{0}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 的情形下成立。

设 $K \in \mathrm{E}^{0}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$，并令 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 为与 $K$ 适配的复解析分层。我们将证明，对于每个 $\alpha \in A$，$\mathrm{sh}_X(K)|_{X_\alpha}$ 都是局部系统。对每个 $\alpha \in A$，令 $b_\alpha\colon \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \to X$ 为沿 $\partial X_\alpha := \overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ 对 $\overline{X}_\alpha$ 作的复爆破，并设 $D_\alpha := b_\alpha^{-1}(\partial X_\alpha)$，如定义 $\mathbb{C}$-可构造性（定义2.16）的条件 (iii) 所述。由于 $b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha}\colon \overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha \xrightarrow{\sim} X_\alpha$ 是同构，只需证明 $(b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha})^{-1}(\mathrm{sh}_X(K)|_{X_\alpha})$ 是 $\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha$ 上的局部系统。然而，这由下式推出

$$(b_\alpha|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha})^{-1}(\mathrm{sh}_X(K)|_{X_\alpha}) \simeq \mathrm{sh}_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha}\left((\mathbf{E}b_\alpha^{-1}K)|_{\overline{X}^{\mathrm{bl}}_\alpha \setminus D_\alpha}\right)$$

根据 [DK21, 引理 3.3 (1)], 定义 2.13 中的条件 (ii)（另见定义 2.10），以及对任意带边空间 $\check{M}_\infty = (M, M)$，存在同构 $\mathrm{sh}_{M_\infty}(\mathbb{C}^{\mathrm{E}}_{M_\infty}) \simeq \mathbb{C}_M$。 □

下述定理可作为 [Kas78, 定理 4.8] 的推论证明（另见[Kas75, 定理 3.5]）。本文将通过使用命题 3.2 给出另一种证明。

定理 3.3. 对任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，有 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。

证明. 设 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$。由定理 2.18，得 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$。由事实 2.7，存在一个同构

$$\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{sh}_X(\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}))$$

因此，由命题 3.2，我们得到 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。 □

下面的引理是本文的一个关键引理。

引理 3.4. 设 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$。增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ 是层型，当且仅当 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。

证明. 根据事实 2.6，若 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$，则增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ 是层型。

我们假设 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ 是层型。根据定义（见定义 2.2），存在 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$，使得

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) \simeq e_X(\iota_X(\mathcal{F})).$$

根据事实 2.1 和事实 2.7，我们有 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}$。注意到存在同构 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}_{\mathrm{reg}})$，见 §2.5.1 末尾。因此，我们有同构

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) \simeq e_X(\iota_X(\mathcal{F})) \simeq e_X(\iota_X(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}_{\mathrm{reg}}))) \simeq \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}_{\mathrm{reg}}),$$

其中，最后一个同构由事实 2.6 得出。因此，根据事实 1.3，我们有 $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}_{\mathrm{reg}}$，从而 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。 □

让我们重新证明事实 1.1（Kas 的正则全纯$\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应 [84]）。

定理 3.5. 存在一个三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

证明。由定理 3.3，只需证明函子 $\mathrm{Sol}_X\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$ 是全忠实且本质满。

设 $\mathcal{M},\mathcal{N} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。于是我们有同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)}\left(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{N}),\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})\right) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)}\left(e_X(\iota_X(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{N}))), e_X(\iota_X(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})))\right)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)}\left(\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{N}),\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})\right)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right),\end{aligned}$$

其中，第一个同构由以下事实得出：根据 [DK16, Prop. 4.7.15], [KS01, Prop. 3.3.4] 和命题 3.1，函子 $e_X \circ \iota_X\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X) \to \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ 是全忠实的；第二个同构由事实 2.6 得出，最后一个同构由事实 1.3 得出。因此，函子 $\mathrm{Sol}_X$ 是全忠实的。

设 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。由命题 3.1，我们有 $e_X(\iota_X(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$，因此存在 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，使得根据定理 2.18，$e_X(\iota_X(\mathcal{F})) \simeq \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$。由于根据引理 3.4，$\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$，我们得到一个同构

$$e_X(\iota_X(\mathcal{F})) \simeq e_X(\iota_X(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})))$$

由事实 2.6 可知，因此，应用层化函子 $\mathrm{sh}_X$并利用事实 2.1，我们有 $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})$。这意味着函子 $\mathrm{Sol}_X$ 是本质满的。

因此，存在一个三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

□

## 3.2 代数情形

在本小节中，令 $X$ 为 $\mathbb{C}$上的光滑代数簇。首先，我们将证明自然嵌入函子 $e_{X^{\mathrm{an}}_\infty} \circ \iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}$ 和层化函子 $\mathrm{sh}_{X^{\mathrm{an}}_\infty}$ 保持代数 $\mathbb{C}$-可构性。

下面的命题 3.7（分别为命题 3.8）已在 [Ito21a, Prop. 3.14] （分别为[Ito21a, Prop.3.16]）中利用事实 1.2 得到证明。在本文中，我们将不借助事实 1.2 来证明它们。

利用事实 2.8 以及命题 3.1、3.2 的相同论证，可以证明以下引理。我们略去该引理的证明。

引理 3.6。如果 $X$ 是完备的，则有：

(1) 对于任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$，有 $e_{X^{\mathrm{an}}}(\iota_{X^{\mathrm{an}}}(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$。
(2) 对于任意 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$，有 $\mathrm{sh}_{X^{\mathrm{an}}}(K) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。

再次，设 $X$ 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑代数簇（不一定完备）。

命题 3.7. 对任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$，有 $e_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$。

证明。设 $\mathcal{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$，并令 $K := e_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}})$。根据定义 2.21，只需证明 $\mathrm{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$。由于 $j^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}}_{\infty} \to \widetilde{X}^{\mathrm{an}}$ 是半真的（参见 [DK19，定义 2.3.5]（半真的定义亦见 [KS16a，定义 2.4]）），存在一个同构

$$\mathbf{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K \simeq e_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\iota_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{R}j^{\mathrm{an}}_{!}(\mathcal{F})))$$

根据 [KS16a，命题 2.18 (i)] 和 [DK19，注 2.4.3]。由于 $\mathrm{R}j^{\mathrm{an}}_{!}(\mathcal{F}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$（见 [HTT08，定义 4.5.8 (iii)], ），我们有

$$e_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\iota_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{R}j^{\mathrm{an}}_{!}(\mathcal{F}))) \in \mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$$

根据引理 3.6 (1)。因此，我们有 $\mathrm{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$，从而 $K = e_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\mathcal{F})) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$。 □

命题 3.8。对于任意 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$，我们有 $\mathrm{sh}^{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(K) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。

证明。设 $K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$。回顾一下，存在一个同构

$$\mathrm{sh}_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(K) \simeq (j^{-1})^{\mathrm{an}}(\mathrm{sh}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K))$$

根据层化函子的定义。根据三角范畴 $\mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$ 的定义（见定义 2.21），我们有 $\mathrm{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$，从而

$$\mathrm{sh}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K) \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_{\widetilde{X}})$$

根据引理 3.6 (2)。此外，根据 [HTT08, Thm. 4.5.8 (ii)], ，我们有

$$(j^{-1})^{\mathrm{an}}(\mathrm{sh}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}K)) \in \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

因此，我们有 $\mathrm{sh}^{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(K) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。 □

下述定理已在 [Be, 主定理 C (a)] 中得到证明。本文将利用命题 3.8 给出另一种证明。

定理 3.9. 对任意 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，都有 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。

证明。设 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$。由定理 2.22，得到 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M}) \in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$。根据 [Ito21a, 引理 3.15], ，我们有一个同构

$$\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{sh}_{X^{\mathrm{an}}_{\infty}}(\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M}))$$

因此，由命题 3.8 可得 $\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M}) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。 □

引理 3.10. 设 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$。增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})$ 是层型，当且仅当 $\mathcal{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。

证明. 根据 [Ito21a，命题 3.14][2]，的最后一部分，增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})$ 若满足 $\mathcal{M}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$，则是层型。

我们假设 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})$ 是层型。根据定义（见定义 2.2），存在 $\mathcal{F}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$，使得

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})\simeq e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathcal{F})).$$

应用函子 $\mathrm{E}j^{\mathrm{an}}_{!!}$，我们得到一个同构

$$\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}((\mathbf{D}j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})\simeq e_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\iota_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}(\mathbf{R}j^{\mathrm{an}}_!(\mathcal{F}))).$$

因此，增强归纳层 $\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}}((\mathrm{D}j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}})\in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}})$ 是层型。由引理 3.4，得到 $(\mathrm{D}j_*\mathcal{M})^{\mathrm{an}}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_{\widetilde{X}^{\mathrm{an}}})$。这意味着，根据 [HTT08，定理 6.1.12]，$\mathcal{M}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。

□

我们重新证明事实 1.2（正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应的代数版本）。

定理 3.11。存在一个三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{op}\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

证明。由定理 3.9，只需证明函子 $\mathrm{Sol}_X\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}}\to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$ 是全忠实且本质满的。

设 $\mathcal{M},\mathcal{N}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$。那么我们有同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)}\left(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{N}),\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})\right)&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})}\left(e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{N}))),e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})))\right)\\&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})}\left(\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{N}),\mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})\right)\\&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right),\end{aligned}$$

其中，第一个同构由以下事实得出：函子 $e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}\circ\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)\to \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$ 根据 [DK19, 引理 2.8.2] (另见 [KS16a, 命题 2.20])、[KS16a, (2.6)]和命题 3.7 是全忠实的；第二个同构由 [Ito21a, 命题 3.14][3] 的最后一部分得出；最后一个同构由定理 2.22 得出。因此，函子 $\mathrm{Sol}_X$ 是全忠实的。

设 $\mathcal{F}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X)$。由命题 3.7，我们有 $e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathcal{F}))\in \mathrm{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathrm{I}\mathbb{C}_{X_\infty})$，因此存在 $\mathcal{M}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X)$，使得根据定理 2.22，$e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathcal{F}))\simeq \mathrm{Sol}^{\mathrm{E}}_{X_\infty}(\mathcal{M})$。由于根据引理 3.10，$\mathcal{M}\in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$，我们得到一个同构

$$e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathcal{F}))\simeq e_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\iota_{X^{\mathrm{an}}_\infty}(\mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})))$$

根据 [Ito21a，命题 3.14] 的最后一部分，因此通过应用层化函子 $\mathrm{sh}^{X^{\mathrm{an}}_\infty}$ 并使用事实 2.1，我们有 $\mathcal{F}\simeq \mathrm{Sol}_X(\mathcal{M})$。这意味着函子 $\mathrm{Sol}_X$ 是本质满的。

因此，存在三角范畴等价

$$\mathrm{Sol}_X\colon \mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}}\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-}c}(\mathbb{C}_X).$$

□

[2]注意，[Ito21a，命题 3.14] 的最后一部分（图中省略了 iota）这一断言的证明并未使用事实 1.2。
[3]注意，[Ito21a，命题 3.14] 的最后一部分（图中省略了 iota）这一断言的证明并未使用事实 1.2。

# 参考文献

[Be] Joseph Bernstein, 《代数 $\mathcal{D}$-模理论》, 未发表笔记。[Bj¨o93] Jan-Erik Bj¨ork, 《解析 $\mathcal{D}$-模及其应用》, 数学及其应用丛书, 247, 克吕维尔学术出版社集团, 1993年。[Bor87] Armand Borel 等, 《代数 D-模》, 数学展望丛书, 2, Academic Press, 1987年。[De70] P. Deligne, 《正则奇点处的微分方程》, 数学讲义丛书, 163, 施普林格出版社, 1970年。[DK16] Andrea D'Agnolo 和 Masaki Kashiwara, 《全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应》, Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci., 123(1), 69–197, 2016年。[DK19] Andrea D'Agnolo 和 Masaki Kashiwara, 《增强的倾斜层》, 纯粹与应用数学杂志（克雷尔杂志）, 751, 185–241, 2019年。[DK21] Andrea D'Agnolo 和 Masaki Kashiwara, 《全纯´-模正则化的拓扑对应物》, Journal de l'Ecole polytechnique Math $\mathcal{D}$ematiques, 8, 27–55, 2021年[Hiro64] Heisuke Hironaka, 《特征为零的域上代数簇的奇点消解 I、II》, 数学年刊, 79(1), I: 109–203, 1964年, II: 205–326, 1964年。[HTT08] Ryoshi Hotta、Kiyoshi Takeuchi 和 Toshiyuki Tanisaki, 《 $\mathcal{D}$-模、倾斜层与表示论》, 数学进展丛书, 236, Birkhäuser, 2008年。[Ito20] Yohei Ito, 《 $\mathbb{C}$-可构造增强归纳层》, Tsukuba Journal of Mathematics, 44(1), 155–201, 2020年。[Ito21a] Yohei Ito, 《代数非正则黎曼–希尔伯特对应札记》, 帕多瓦大学数学研讨会报告, 2021年, 即将刊出, arXiv:2004.13518, 共52页。[Ito21b] 《增强归纳层与增强次解析层之间关系札记》, arXiv:2109.13991, 共84页。[Kas75] Masaki Kashiwara, 《最大超定线性微分方程组 I》, 京都大学数理科学研究所出版物, 10, 563–579, 1975年。[Kas78] Masaki Kashiwara, 《线性微分方程的全纯系统 II》, Inventiones math., 49, 121–135, 1978年。[Kas84] Masaki Kashiwara, 《全纯系统的黎曼–希尔伯特问题》, 数理科学研究所出版物, 20(2), 319–365, 1984年。[Kas16] Masaki Kashiwara, 《非正则全纯 $\mathcal{D}$-模的黎曼–希尔伯特对应》, 日本数学杂志, 11, 13–149, 2016年。

[KK81] M. Kashiwara 和 Takahiro Kawai，《微分微分方程的全纯系统 III——具有正则奇点的系统》，数理科学研究所出版物，17，813–979，1981。[KS90] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《流形上的层》，数学科学基础丛书，292，施普林格出版社，1990。[KS01] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《归纳层》，Ast´erisque，271，2001。[KS06] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《范畴与层》，数学科学基础丛书，332，施普林格出版社，2006。[KS16a] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《不规则全纯核与拉普拉斯变换》，Selecta Math.，22(1)，55–109，2016。[KS16b] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira，《正则与不规则全纯 $\mathcal{D}$模》，伦敦数学会讲义系列，433，剑桥大学出版社，2016。[Ked10] Kiran S. Kedlaya，《平坦亚纯联络的良好形式结构，I：曲面》，Duke Math. J.，154(2)，343–418，2010。[Ked11] Kiran S. Kedlaya，《平坦亚纯联络的良好形式结构，II：优良概形》，J. Amer. Math. Soc.，24(1)，183–229，2011。[Kuwa18]Tatsuki Kuwagaki，《不规则拟 pervers 层》，Compositio Mathematica，157(3)，573–624，2021。[Mal96] Bernard Malgrange，《Connexions m´eromorphes，II：le r´eseau canonique》，Invent. Math. 124，367–387，1996。[Meb84] Zoghman Mebkhout，《另一种范畴等 ´价》，Compositio Math. 51(1)，63–88，1984。[Moc09] Takuro Mochizuki，《光滑射影曲面上亚纯平坦联络的良好形式结构》，载于《代数分析及其相关领域》，Adv. Stud. Pure Math.，54，223–253，2009。[Moc11] Takuro Mochizuki，《野调和丛与野纯 twistor $\mathcal{D}$模》，Ast´erisque，340，2011。[Moc16]Takuro Mochizuki，《增强归纳层与全纯 $\mathcal{D}$模的曲线检验，I、II》，高等师范学校科学年刊，55(3)，575–738，2022。[Naga62] Masayoshi Nagata，《将抽象簇嵌入完备簇》，J. Math. Kyoto Univ. 2，1–10，1962。[Sai89] Morihiko Saito，《诱导 D-模与微分复形》，法国数学会通报，117-3（1989），361–387。