arXiv:2301.01155v1 [math.AG] 3 Jan 2023

平面曲线芽的隐式化

Joao Cabral - NOVA科学与技术学院，葡萄牙；jpbc@fct.unl.pt 和 Ana Casimiro - NOVA科学与技术学院，葡萄牙；amc@fct.unl.pt

Abstract. 设 $Y = \{f(x, y) = 0\}$ 为一条不可约平面曲线芽。我们提出一种算法，用以求得赋值与 Y的半群生成元相同的多项式。这些多项式按顺序构造，并以适当方式在前一个多项式上添加项。为构造该算法，我们对由 Puiseux定理导出的 Y 参数化进行截断。随后，将热带几何的一个平面曲线隐式化定理（ [4]的定理 1.1 ）应用于这些截断。局部环与 Y 的半群之间的对应关系在算法构造中发挥关键作用，使我们能够进行形式消元，并证明该过程必定有限。该消元过程的复杂度等于一个整数线性规划问题的复杂度。此算法还可用于求得级数 f的一个近似，其重数和特征指数均与原级数相同。我们给出该算法的伪代码及示例，并比较了本算法实现与通过 Gr¨obner 基进行消元的计算时间。

Acknowledgements

作者获得了葡萄牙科学技术基金会（FCT - Funda.c˜ao para a Ci^encia e a Tecnologia, I.P.）通过国家经费提供的支持，项目编号为 UIDB/00297/2020 和 UIDP/00297/2020（数学与应用中心）。

1. Introduction

隐式化的主要目标是从同样由 Laurent 多项式给出的参数表示中，获得将代数簇表示为 Laurent 多项式零点集的形式。B. Sturmfels 将隐式化描述为计算代数几何中的一项基本运算，并针对超曲面情形给出了隐式化问题的一般解法。在这种情形下，隐式化过程通常借助一个定理来刻画一个集合，该集合包含定义该零点集的 Laurent 多项式的支撑；随后运用数值线性代数计算该 Laurent 多项式的系数。

本文在局部解析几何的背景下研究隐式化，我们采用的方法将不同于以往的方法。Puiseux定理给出了一种算法，用于求得不可约平面曲线芽的参数化（见 [1] 第 8.3 节）；这种参数化包含拓扑信息，并且可以利用这些信息为不可约平面曲线关联一个半群。我们提出了一种过程，利用不可约平面曲线半群将隐式化归约为一个整数线性规划问题。以下示例说明了隐式化问题的重要性和难点。考虑一个具有特征（6; 8，9）的平面曲线芽 Y。接着，应用 O. Zariski 在 [14]，中提出的技巧，可得半群

Y 的半群由 $\{6,8,25\}$ 生成，并且该曲线具有如下类型的简化形式参数化：

$$x = t^6, y = t^8 + ct^9 + a_1t^{10} + a_2t^{11} + a_4t^{13} + a_{10}t^{19}, \tag{1}$$

其中 $c \in \mathbb{C}^*$ 和 $a_i \in \mathbb{C}$、 $i \in \{1,2,4,10\}$。根据 [6], 中的定理 2.64，这个简短的参数化诱导出 Y方程的唯一等奇异变形。获得与 (1) 相关方程的一种方法是使用计算机代数系统进行多项式计算，例如$Singular$（见 [3]），并利用 Gröbner 基应用消元理论。问题在于，这一过程的内存占用非常高，在标准 PC 上可能难以得到结果。
在第 2 节中，我们介绍不可约拟常规超曲面 Y的芽的基础知识，即特征指数、半群，以及在平面曲线的情形下赋值与半群之间的联系。在定理 3 中，我们针对超曲面情形给出了半群导子的替代物。我们还介绍了一些稍后将用到的结果。

从第 3 节开始，我们将范围限定在平面曲线的情形。沿用在 [14], 的定理 3.9 证明中关于截断具有 s 特征指数的分支的推理，我们在第 3 节引入参数化的截断 ι_i、 $i = 1$，……， s以及诱导赋值ϑ_{ι_i}。由于这些截断是多项式，我们应用热带几何中的一个定理，即 [4], 的定理 1。1，从而得到一个多边形 N_i ，它包含某个多项式 f_i 的支撑，并且满足 $\iota_i^* f_i = 0$。我们将多边形 N_i 与$Y_i = \{f_i = 0\}$的牛顿多边形（就普伊瑟展开而言）联系起来。

在第 4 节中，我们陈述主要结果——定理 8。该定理断言存在多项式 f_i、 $i \in \{0,\dots,s\}$，使得 f_{i-1}由 f_i得到，f_i的支撑包含于 N_i中，并且满足 $\iota_i^* f_i = 0$。此外，对于 $i = 1$，……， s，定理 8 给出了 $\vartheta_{\iota_j}(f_{i-1})$、 $j = i$，……， s以及Y_j的半群生成元之间的关系。这些多项式在乘以常数的意义下唯一。推论 9 表明，$\{f_s = 0\}$ 是 Y的一个代表元的“良好”近似。多项式 f_s 仅取决于我们对截断 ι_s的选择。我们在第 4.1 和第 4.2 小节中通过归纳法证明定理 8。在第 4.1 小节中，我们通过执行形式消元过程证明 f_i's 的存在性；该过程给出 f_i's 的形式版本，并由此证明 f_i's 这些多项式的存在性。第 4.2 小节致力于证明主要结果中的赋值部分。引理 15 给出了赋值 ϑ_{ι_i}之间的关系。得到这些关系的一个重要事实是引理 15 的陈述 *(B)* 中给出的分解，该分解也出现在 [14]的定理 3.9 的证明中。赋值 ϑ_{ι_i} 由多项式参数化诱导，因此可以在计算机上实现。

根据定理 8 的陈述*(B)* 证明中的步骤 2，我们在第 5 节给出一种算法，用于根据 f_{i-1} 计算 f_i 。步骤 2 中使用的消元过程是形式化的，而现在，我们利用多边形 N_i 的适当刻画以及引理 15 的陈述*(B)* 中给出的分解，算法1为我们提供了一个有限的消元过程，其计算复杂度仅取决于一个整数线性规划问题。具体而言，该问题是：在一个超平面的紧截面上寻找坐标为非负整数的点，其中该超平面的法向量由与 Y_i 相关的半群生成元给出。算法1 还依赖于计算赋值，但这些计算仅使用 ϑ_{ι_i}。最后，我们给出两个示例，对比算法1的实现与使用 $Singular$ 进行消元的计算时间。

作者计划在未来将本文的结果推广到拟常规超曲面。

2. Semi-group of a Quasi-Ordinary Hypersurface

令 $\mathbb{N}_0$ [$\mathbb{N}$] 为非负整数 [正整数]，并令 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ [$\mathbb{Q}_{>0}$] 为非负有理数 [正有理数]。我们在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予偏序

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

如果 $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ 且 $(a_1, \ldots, a_n) \neq (b_1, \ldots, b_n)$，则记 $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_n)$。注意，对于 $n = 1$，我们在 $\mathbb{R}$ 中采用通常的阶序。

置 $x = (x_1, \ldots, x_n)$。对于 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，置 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$，并且

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{3}$$

设 $f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$。我们将 的支撑定义为集合，并记作 Supp($f$)：

$$\mathrm{Supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : a_\alpha \neq 0\}.$$

根据定义，零级数的支撑是空集。写作 $f(x) = \sum_{i \geq m} f_i(x)$，其中 f_i 是次数为 i 的齐次多项式，对所有 $i \geq m$ 均成立；而 f_m 是非零多项式。我们将 ord(f) 定义为 f 的阶，即 m。若 $f \in \mathbb{C}\{x\}$ 将 $C_0(\{f(x) = 0\})$ 定义为 $\{f(x) = 0\}$ 的切锥，则它是代数簇$\{f_m(x) = 0\}$。对于多项式 $g \in \mathbb{C}[x]$，用 deg(g) 表示 g 的次数。

设 M 为维数 $n+1$ 的复流形， $o \in M$，且 Y 是 M 中的不可约超曲面。若存在一组以 o 为中心的局部坐标 (x, y)，使得 Y 关于映射 $p(x, y) = x$ 的判别式包含于 $\{x_1 \cdots x_n = 0\}$ 中，则 Y 在 o 处的芽称为准普通。从现在起， $Y = \{f(x, y) = 0\}$,$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ 表示原点处不可约准普通超曲面的芽。 f 的根称为 Y 的分支，是环 $\mathbb{C}\{x_1^{1/k}, \ldots, x_n^{1/k}\}$ 中的分数幂级数（我们将此记法简写为 $\mathbb{C}\{x^{1/k}\}$），其中 k 为某个正整数（见 [9]）。设 $\zeta(x^{1/k}) \in \mathbb{C}\{x^{1/k}\}$ 是 Y 的一个分支。存在 $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_s \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，使得

C1) $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$; *C2)*令 $M_0 = \mathbb{Z}^n$和 $M_i = M_0 + \mathbb{Z}^n \lambda_i$, $i = 1, \ldots, s$。对于所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$,$\lambda_i \notin M_{i-1}$; *C3)* f的阶为 $= k = k_1 k_2 \ldots k_s$, 其中 k_i 是满足$k_i \lambda_i \in M_{i-1}$的最小正整数; *C4)*对于所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$， x^{λ_i}在 $\zeta(x^{1/k})$ 中的系数非零。*C5)*设 $\alpha \in \mathbb{Q}^n_{>0} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$。如果 x^α 在 $\zeta(x^{1/k})$ 中的系数非零，那么存在 $i \in \{1, \ldots, s\}$ 使得 $\alpha \in M_i$。此外，如果 i是 $\{1, \ldots, s\}$ 中满足 $\alpha \in M_i$的最小元素，那么 $\lambda_i < \alpha$。

如果 $\xi(x^{1/k})$ 是 Y 的另一个分支，那么 $\xi(x^{1/k}) = \zeta(\theta x^{1/k})$，其中 θ 是 k 次单位根。遍历所有 k 次单位根，即可得到 Y 的全部分支。有理 n 元组 λ_1、……、λ_s 被称为 Y 的特征指数（见 [9] 的第 1 节）。此外，如果 $\zeta \in \mathbb{C}\{x^{1/k}\}$ 具有 λ_1、……、$\lambda_s \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$，并且它们满足$C1$)、 $C2$)、 $C4$) 以及 $C5$)，那么 ζ 是某个准普通超曲面的分支（见 [9] 的命题1.5）。经过如下类型的坐标变换

$$(x, y) \to (x, y - \varphi(x)), \varphi \in \mathbb{C}\{x\}, \tag{4}$$

我们可以假设， Y 的任何分支都不含具有正整数指数且系数非零的单项式。

默认情况下，本文中提到的所有半群都包含零。设 $e_0 = 1$和 $e_i = k_i e_{i-1}$, $i = 1$, ..., s。注意 $e_s = k$。令 u_1, ..., u_n为 $\mathbb{R}^n$的典范基。对于 $i \in \{1, \dots, s\}$, 将由 $e_i u_1$, ..., $e_i u_n$生成的半群记为 $\Gamma(\lambda_1$, ..., $\lambda_i)$,

$$\gamma_1^{(i)} = e_i\lambda_1 \text{ and } \gamma_{j+1}^{(i)} = k_j\gamma_j^{(i)} - e_i\lambda_j + e_j\lambda_{j+1} \text{ for } j = 1, \dots, i-1. \tag{5}$$

集合 $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ 是一个准普通曲面的半群，其特征指数为 $\lambda_1, \dots, \lambda_i$。我们也分别将 $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$（即 Y 的半群）的生成元 $\gamma_1^{(s)}, \dots, \gamma_s^{(s)}$记为 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$。对于 $i = 1, \dots, s$, 将由 $ku_1, \dots, ku_n$和$\gamma_j^{(s)}$, $j = 1, \dots, i$生成的 $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ 的子半群记为$\Gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$。下面的命题给出了 $\Gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ 与$\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$之间的关系。

命题 1. 对于所有 $i = 1, \dots, s-1$,

$$\Gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \frac{e_s}{e_i}\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_i). \tag{6}$$

证明。 我们立即得到以下关系

$$e_s u_j = \frac{e_s}{e_i}(e_i u_j),\ j = 0, 1, \dots, n,$$

$$\gamma_1^{(s)} = \frac{e_s}{e_i}(e_i\lambda_1) = \frac{e_s}{e_i}\gamma_1^{(i)},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{j+1}^{(s)} =& k_j\gamma_j^{(s)} - e_s\lambda_j + e_s\lambda_{j+1} = k_j\frac{e_s}{e_i}\gamma_j^{(i)} - \frac{e_s}{e_i}e_i\lambda_j + \frac{e_s}{e_i}e_i\lambda_{j+1} = \\ =& \frac{e_s}{e_i}\gamma_{j+1}^{(i)},\ j = 1 \dots, i-1.\end{aligned}$$

□

~根据定理 3，我们证明如下：设 Γ 为由$\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$生成的 $\mathbb{Z}^n$ 的子群，则存在 $c \in \mathbb{N}_0^n$使得

$$\forall a \in \widetilde{\Gamma}, c \le a \Rightarrow a \in \Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_s). \tag{7}$$

这一结果为平面曲线半群的导子提供了一种替代表达。证明定理 3 需要以下引理。

引理 2. 以下陈述成立。

(*A*) *For* $i = 0, \dots, s-1$,

$$\gamma_{i+1} = k\lambda_{i+1} + \sum_{j=1}^{i}(k_j - 1)\gamma_j. \tag{8}$$

(*B*) *For all* $i = 1, \dots, s$, $kM_i = k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i}\mathbb{Z}\gamma_j$.

证明. 我们将对 i 归纳，以证明这两个陈述。先证明陈述*(A)* 。由 (5),

$$\begin{aligned}\gamma_{i+1} =&k_i\gamma_i - k\lambda_i + k\lambda_{i+1} = (k_i-1)\gamma_i + \gamma_i - k\lambda_i + k\lambda_{i+1} = \\ =&(k_i-1)\gamma_i + k\lambda_i + \sum_{j=1}^{i-1}(k_j-1)\gamma_j - k\lambda_i + k\lambda_{i+1} = k\lambda_{i+1} + \sum_{j=1}^{i}(k_j-1)\gamma_j.\end{aligned}$$

现在我们来证明陈述*(B)* 。设 $a \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i+1}\mathbb{Z}\gamma_j$。存在整数 α_j, $j = 1,\dots,n$ 和 β_j, $j = 1,\dots,i+1$，使得

$$a = \sum_{j=1}^{n} k\alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{i+1}\beta_j\gamma_j. \tag{9}$$

令 $b = \sum_{j=1}^{n} k\alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{i}\beta_j\gamma_j$。应用等式 (5)，得到

$$a = b + \beta_{i+1}k_i\gamma_i - \beta_{i+1}k\lambda_i + \beta_{i+1}k\lambda_{i+1}.$$

由归纳假设，由于 $b+\beta_{i+1}k_i\gamma_i \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i}\mathbb{Z}\gamma_j$，存在 $\delta \in kM_i$，使得

$$a = \delta - \beta_{i+1}k\lambda_i + \beta_{i+1}k\lambda_{i+1}.$$

因此 $a \in kM_{i+1}$。
现在假设 $a \in kM_{i+1}$。考虑到由 (5) 可得等式 $k\lambda_{j+1} = k\lambda_j - k_j\gamma_j + \gamma_{j+1}$，证明 $a \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i+1}\mathbb{Z}\gamma_j$ 的方法与前面类似。□

定理 3. 设 $i = 1,\dots,s$ 和 $a \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i}\mathbb{Z}\gamma_j$。存在整数 $\alpha_j, j = 1,\dots,n$，以及 β_j, $j = 1,\dots,i$，使得 $0 \le \beta_j \le k_j - 1$ 和 $a = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j k u_j + \sum_{j=1}^{i}\beta_j\gamma_j$。此外，若 $a \ge \sum_{j=1}^{i}(k_j-1)\gamma_j$，则对所有 $j = 1,\dots,n$，都有 $\alpha_j \ge 0$。

证明。我们将对 i 使用归纳法证明该结论。存在整数 α'_j, $j = 1,\dots,n$，以及 β'_j, $j = 1,\dots,i$，使得

$$a = \sum_{j=1}^{n}\alpha'_j k u_j + \sum_{j=1}^{i}\beta'_j\gamma_j. \tag{10}$$

设 ℓ 为满足 $0 \le \beta_i - \ell k_i < k_i$ 的整数。我们可以将 (10) 改写为

$$a = \sum_{j=1}^{n}\alpha'_j k u_j + \sum_{j=1}^{i-1}\beta'_j\gamma_j + (\beta'_i - \ell k_i)\gamma_i + \ell k_i\gamma_i.$$

由 (8),

$$k_i\gamma_i = k_i k\lambda_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_i(k_j-1)\gamma_j.$$

由于 $k_i\lambda_i \in M_{i-1}$，根据引理 2 的陈述*(B)*， $k(k_i\lambda_i) \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{Z}\gamma_j$。利用归纳假设，存在 $\alpha_j, j = 1,\dots,n$，以及 $\beta_j, j = 1,\dots,i-1$，使得 $0 \le \beta_j \le k_j - 1$ 且

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha'_j k u_j + \sum_{j=1}^{i-1}\beta'_j\gamma_j + \ell k_i\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j k u_j + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\gamma_j.$$

令 $\beta_i = \beta_i' - \ell k_i$。假设

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j k u_j + \sum_{j=1}^{i} \beta_j \gamma_j \geq \sum_{j=1}^{i} (k_j - 1)\gamma_j.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j k u_j \geq \sum_{j=1}^{i} (k_j - (\beta_j + 1))\gamma_j.$$

由于对于所有 $j = 1, \ldots, i,\quad 0 \leq \beta_j \leq k_j - 1$ 且 $k_j \geq 2$，我们得出，对于所有 $j = 1, \ldots, n,\quad \alpha_j \geq 0$。□

在下面的命题中，我们证明一些有用的性质。陈述*(C)* 将在定理 8 的陈述（A）的证明中发挥重要作用。陈述*(D)*将用于引理10的证明。

命题 4. 对于所有 $i = 1, \ldots, s,$ 以下陈述成立：

(A) $\sum_{\ell=1}^{i} (k_\ell - 1)\gamma_\ell = k_i\gamma_i - k\lambda_i;$

(B) $k_i\gamma_i > \sum_{\ell=1}^{i} (k_\ell - 1)\gamma_\ell;$

(C) $k_i\gamma_i \in \Gamma_{i-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, *for all* $i = 1, \ldots, s;$

(D) *For* $s \geq 2$ *and* $i = 1, \ldots, s,$

$$e_{i-1}\gamma_s - e_{s-1}\gamma_i > 0.$$

证明。 根据引理 2 的陈述*(A)*，

$$\sum_{\ell=1}^{i} (k_\ell - 1)\gamma_\ell = (k_i - 1)\gamma_i + \sum_{\ell=1}^{i-1} (k_\ell - 1)\gamma_\ell = (k_i - 1)\gamma_i + \gamma_i - k\lambda_i = k_i\gamma_i - k\lambda_i.$$

陈述（B）由陈述（A）立即得到。

我们对 i 使用归纳法证明（C）。根据（5），等式

$$k_{i+1}\gamma_{i+1} = k_{i+1}(k_i\gamma_i) - k_{i+1}(k\lambda_i) + k(k_{i+1}\lambda_{i+1})$$

成立。由归纳假设，$k_i\gamma_i$ 属于 Γ_{i-1}（λ_1，……，λ_s），而后者是 Γ_i（λ_1，……，λ_s）的子半群。鉴于 $k\lambda_i \in kM_i$，引理 2 的陈述 （*B*）蕴含 $k\lambda_i \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i} \mathbb{Z}\gamma_j$。由于 $k_{i+1}\lambda_{i+1} \in M_i$，再次由引理 2 的陈述 （*B*），我们得到 k（$k_{i+1}\lambda_{i+1}$）$\in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i} \mathbb{Z}\gamma_j$。因此$k_{i+1}\gamma_{i+1} \in k\mathbb{Z}^n + \sum_{j=1}^{i} \mathbb{Z}\gamma_j$。根据陈述（$B$），

$$k_{i+1}\gamma_{i+1} > \sum_{\ell=1}^{i+1} (k_\ell - 1)\gamma_\ell.$$

此外，不等式

$$\sum_{j=1}^{i+1} (k_j - 1)\gamma_j \geq \sum_{j=1}^{i} (k_j - 1)\gamma_j$$

显然成立。因此，根据定理 3，我们可以得出结论：$k_{i+1}\gamma_{i+1}$ 属于半群 Γ_i(λ1，……，λ_s)。

为了证明陈述（D），我们将量 $e_{i-1}\gamma_s - e_{s-1}\gamma_i$ 按如下方式重写：

$$e_{i-1}\gamma_s - e_{s-1}\gamma_i = e_{i-1}\gamma_s - e_{s-1}\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{s-1}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\gamma_j - \sum_{j=i+1}^{s-1}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\gamma_j =$$
$$= \sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\gamma_j - \sum_{j=i}^{s-1}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\gamma_j = \sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\gamma_j - \sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-2}}e_{s-1}\gamma_{j-1} =$$
$$= \sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\left(\gamma_j - \frac{e_{j-1}}{e_{j-2}}\gamma_{j-1}\right) = \sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\left(\gamma_j - k_{j-1}\gamma_{j-1}\right).$$

根据定义，对于所有 $i = 1, \ldots, s$， $k_i > 0$ 这意味着 $e_i > 0$。此外，由（5）我们得出 $\gamma_i - k_{i-1}\gamma_{i-1} > 0$。因此

$$\sum_{j=i+1}^{s}\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}e_{s-1}\left(\gamma_j - k_{j-1}\gamma_{j-1}\right) > 0.$$

□

在本文余下部分，我们将假设 $n = 1$，因此 Y 是原点处的一个不可约平面曲线芽。坐标变换（4）使我们可以假设 $C_0(Y) = \{y = 0\}$。不可约平面曲线的特征指数是等奇异性不变量（见 [1]的定理21）。关于特征指数的普伊苏特征版本，参见 [12]的第3.1节和 [14]的第 3 节。对于 Y 的一个分支 $\zeta(x^{1/k})$，我们关联一个参数化 ι，它由 $x = t^k$， $y = \zeta(t)$ 定义。根据 *C4)* 和 *C5)*，我们可以将参数化 ι 写成

$$x = t^k,\ y = c_1 t^{k\lambda_1} + \varphi_1(t) + c_2 t^{k\lambda_2} + \varphi_2(t) + \cdots + c_s t^{k\lambda_s} + \psi, \tag{11}$$

其中

($p1$). c_1、……、 $c_s \in \mathbb{C}^*$, φ_1、……、 $\varphi_{s-1} \in (t)\mathbb{C}[t]$ 以及 $\psi \in (t)\mathbb{C}\{t\}$；($p2$)。对所有 $i \in \{1, \ldots, s-1\}$， $\mathrm{ord}(\varphi_i) > k\lambda_i$ 且 $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset kM_i$。此外， $\mathrm{ord}(\psi) > k\lambda_s$ 且 $\mathrm{Supp}(\psi) \subset kM_s$；($p3$)。对所有 $i \in \{1, \ldots, s-1\}$， $\deg(\varphi_i) < k\lambda_{i+1}$。

参数化 ι 诱导出一个映射 ϑ_ι： $\mathbb{C}[[x, y]] \to \mathbb{N}_0^n \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$\vartheta_\iota(f) = \mathrm{ord}(\iota^* f).$$

按照约定， $\vartheta_\iota(0) = +\infty$。该映射满足

$$\vartheta_\iota(fg) = \vartheta_\iota(f) + \vartheta_\iota(g), \tag{12}$$
$$\vartheta_\iota(f+g) \geq \min\{\vartheta_\iota(f), \vartheta_\iota(g)\}, \tag{13}$$

也就是说， ϑ_ι 是一个赋值。Zariski 在 [14] 的定理 3.9 中证明了

$$\vartheta_\iota(\mathbb{C}[[x, y]]) = \Gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \cup \{+\infty\}. \tag{14}$$

这个等式将在第4节中发挥重要作用。

3. Newton Polytope of the Equation

设 ι 如式 (11) 所示。令 $e_0 = 1$ 和 $e_i = k_i e_{i-1}$, $i = 1, \ldots, s$ （见第 2 节）。对于$i = 1, \ldots, s$, 将 ι_i 定义为多项式参数化

$$x = t^{e_i},\ y = c_1 t^{e_i\lambda_1} + \varphi_1(t^{e_i/k}) + \cdots + c_i t^{e_i\lambda_i} + \varphi_i(t^{e_i/k}), \tag{15}$$

其中 $\mathrm{Supp}(\varphi_s) \subseteq \mathrm{Supp}(\psi)$。参数化 ι_i, $i \in \{1, \ldots, s\}$, 对应于一条不可约平面曲线 Y_i （参见 [9] 的命题 1.5 ），其特征指数为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$, 重数为 e_i, 且为分支

$$\zeta(x^{1/e_i}) = c_1 x^{\lambda_1} + \varphi_1(x^{1/e_i}) + \cdots + c_i x^{\lambda_i} + \varphi_i(x^{1/e_i}). \tag{16}$$

此外，根据我们对坐标的选取， $C_0(Y_i) = \{y = 0\}$。如果只想研究 Y 的拓扑，那么可以将 φ_s 视为零级数。

根据 $i \in \{1, \ldots, s\}$ 的定理 1.1，存在 $f_i \in (x, y)\mathbb{C}[x, y]$, 使得$\iota_i^* f_i = 0$, 也就是说， $Y_i = \{f_i(x, y) = 0\}$。此外， [4] 的定理 1.1 允许我们计算出一个集合 N_i, 使得 $\mathrm{Supp}(f_i) \subseteq N_i$。

对于 $h \in \mathbb{C}\{t\}$ 和 $a \in \mathbb{C}$, 定义 $m_a(h)$ 为 a 作为 h 的零点的重数，且$m_\infty(h) = -\deg(h)$。对于 $i = 1, \ldots, s$, 若 φ_i 非零，则定义

$$\mu_i = \frac{1}{e_i}\deg(\varphi_i(t^{e_i/k})) \in M_i,$$

否则定义 $\mu_i = \lambda_i$。

固定 $i \in \{1, \ldots, s\}$。令 a_j, $j = 1, \ldots, \tau_i$为 $t^{-e_i\lambda_1}\iota_i^* y$的零点，其中 $t^{-e_i\lambda_1}\iota_i^* y$是常数项非零的多项式 c_1。设 $\kappa_j = m_{a_j}(t^{-e_i\lambda_i}\iota_i^* y) \neq 0$。令

$$\vec{v}_0 = (m_0(\iota_i^* x), m_0(\iota_i^* y)) = (e_i, e_i\lambda_1),$$

$$\vec{v}_{a_j} = (m_{a_j}(\iota_i^* x), m_{a_j}(\iota_i^* y)) = (0, \kappa_i),\ j = 1, \ldots, \tau_i,$$

and

$$\vec{v}_\infty = (m_\infty(\iota_i^* x), m_\infty(\iota_i^* y)) = (-e_i, -e_i\mu_i).$$

根据构造

$$\sum_{j=1}^{\tau_i} \vec{v}_{a_j} = (0, e_i\mu_i - e_i\lambda_1).$$

如 [4], 第1节所述，我们将向量 $\vec{v}_0$, $\vec{v}_\infty$ 和 $\vec{v}_{a_j}$, $j = 1, \ldots, \tau_i$顺时针旋转 90 度，并沿逆时针方向按其方向依次连接，得到一个多面体 B_i。对 B_i 进行平移，使新多面体 B_i 位于第一象限内并与坐标轴相交。因此，B_i 是 $\{(0, e_i), (e_i\lambda_1, 0), (e_i\mu_i, 0)\}$的凸包。设

$$N_i = B_i \cap \mathbb{Z}^2 = \tag{17}$$
$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^2 : k_1\alpha + (k_1\lambda_1)\beta \geq e_i(k_1\lambda_1) \wedge e_i\alpha + (e_i\mu_i)\beta \leq e_i(e_i\mu_i)\}.$$

我们给出集合 N_i 的另一个有用刻画。令 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0^2 \setminus \{(0, 0)\}$。我们有

$$\mathrm{Supp}(\iota_i^* x^\alpha y^\beta) = \left\{ e_i\alpha + \sum_{\ell=1}^{\beta} a_\ell : a_1, \ldots, a_\beta \in \mathrm{Supp}(\iota_i^* y) \right\}.$$

因此

$$\min \mathrm{Supp}(\iota_i^* x^\alpha y^\beta) = e_i\alpha + (e_i\lambda_1)\beta,\ \max \mathrm{Supp}(\iota_i^* x^\alpha y^\beta) = e_i\alpha + (e_i\mu_i)\beta.$$

因此， $\in N_i$ 当且仅当

$$\mathrm{Supp}(\iota_i^* x^\alpha y^\beta) \subset [e_i(e_i\lambda_1), e_i(e_i\mu_i)] \tag{18}$$

例5. 设 $c_\ell \in \mathbb{C}^*$, $\ell = 1,2,3$和 $\zeta = c_1x^{3/2} + c_2x^{5/3} + c_3x^{23/12}$。那么 ζ是一个不可约平面曲线 Y 的分支，其特征指数为 $\lambda_1 = 3/2$、$\lambda_2 = 5/3$ 和 $\lambda_3 = 23/12$。我们有 $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 3$。由于

$$2\lambda_3 = 2\lambda_2 + \lambda_1 - 1 \in M_2$$

那么 $k_3 = 2$。半群 $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2)$ 由 $\{6, 9, 19\}$ 生成，而 $\Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$由 $\{12, 18, 38, 117\}$生成。我们分别在图（*1*）和图（*2*）中展示 N_2 和 N_3 。

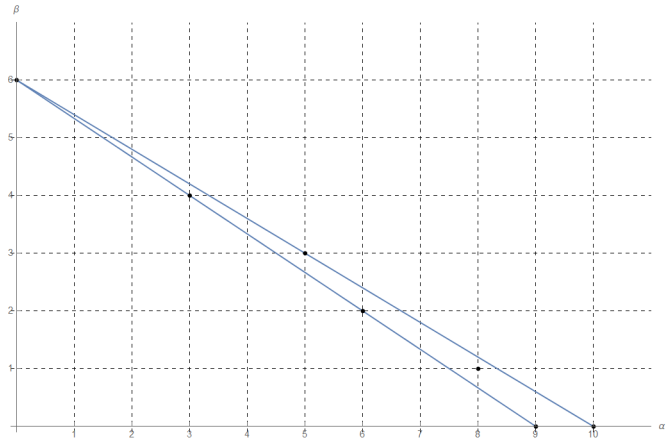


FIGURE 1. N_2

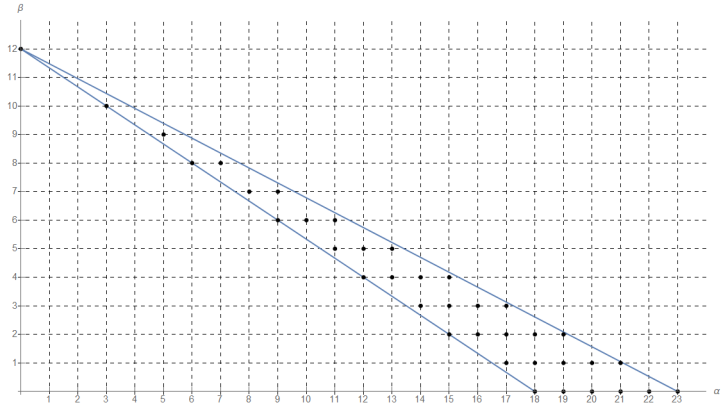


FIGURE 2. N_3

例6。 令 $c_\ell \in \mathbb{C}^*$、 $\ell = 1$、2、3和 $\zeta = c_1x^{3/2} + c_2x^{5/2} + c_3x^{8/3} + c_4x^{10/3}$。我们有

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{2} + 1 \ and \ \frac{10}{3} = 2\frac{8}{3} - 2.$$

那么， ζ 是不可约平面曲线 Y 的一个分支，其特征指数为$\lambda_1 = 3/2$ 和 $\lambda_2 = 8/3$。此外， $k_1 = 2$ 和 $k_2 = 3$。半群 $\Gamma(\lambda_1)$ 由 $\{2, 3\}$ 生成，而 $\Gamma(\lambda_1、\ \lambda_2)$ 由 $\{6, 9, 25\}$生成。我们分别在图（*3*）和（*4*）中给出了 N_1 和 N_2。

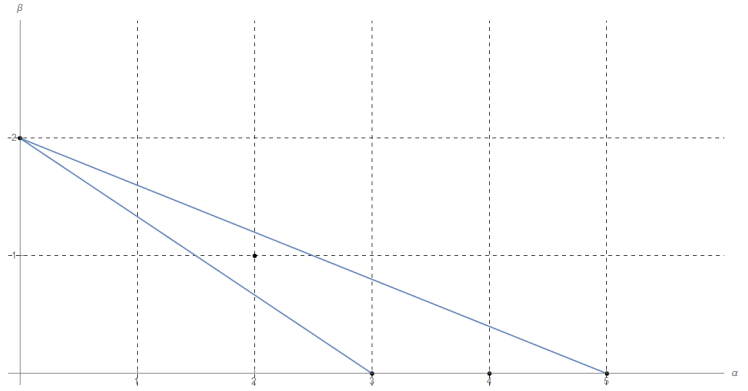


FIGURE 3. N_1

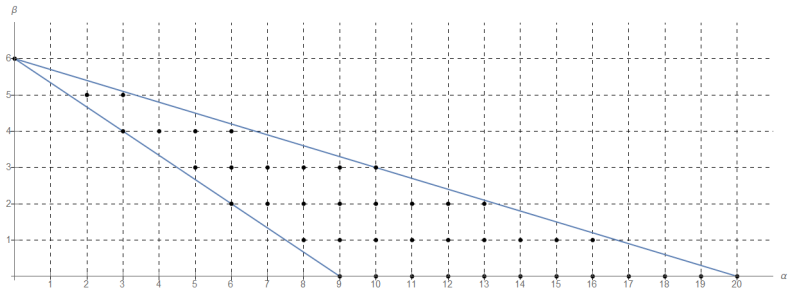


FIGURE 4. N_2

设 $n \in \mathbb{N}$。如果对于所有 $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$， $g(x,\ y) = y^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell(x) y^\ell \in \mathbb{C}[[x]][y]$ 是关于变量 y 的魏尔斯特拉斯多项式，且 $a_\ell(0) = 0$，则称 n 为 g的次数。

设 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 为 $\mathbb{R}^2$的特殊多边形，即集合的凸包

$$\mathrm{Supp}(f_i) + \mathbb{R}^2_{\geq 0}.$$

这个定义是热带几何中牛顿多胞体在局部解析几何中的版本（参见 [10] 的定义 1.1.3）。由于 Y_i 不可约，具有重数 e_i 和首个特征指数 λ_1， N_i 与 N_i 共享一个紧面，即连接 $(0,\ e_i)$ 和 $(0,\ e_i\lambda_1)$ 的线段（参见 [1] 的第 8.3 节）。因此

$$\{(0, e_i), (e_i\lambda_1, 0)\} \subset \mathrm{Supp}(f_i) \tag{19}$$

此外，点 $(0,\ \beta)$ 属于 N_i 当且仅当 $\beta = e_i$。因此，存在 $a_\ell \in \mathbb{C}[x]$、$\ell \in \{0,\dots,e_i-1\}$ 和 $a \in \mathbb{C}^*$，使得

$$f_i(x,y) = ay^{e_i} + \sum_{\ell=0}^{e_i-1} a_\ell(x)y^\ell \tag{20}$$

并且，对所有 $\ell \in \{0,\dots,e_i-1\}$, $a_\ell(0) = 0$。次数的概念可以推广为 y 在 $p \in \mathbb{C}[[x]][y]$ 中出现且系数非零的最高次幂。我们将这种次数记为 $\deg_y(p)$。若 $p(x,\ y)$ 是零多项式，则规定 $\deg_y(p) = +\infty$。将 f_i 乘以 $1/a$ 后，我们可以假设 $a = 1$ 和 f_i 是关于变量 y 的魏尔斯特拉斯多项式，其次数为 e_i。从现在起，我们始终假设 f_i 是魏尔斯特拉斯多项式。

4. Main Result

本节将介绍主定理，即定理 8。为突出定理 8 证明中的一些关键事实，我们将先举一个例子。

例 7. 我们回到例5。参数化 ι 定义为

$$x = t^{12},\ y = c_1t^{18} + c_2t^{20} + c_3t^{23}.$$

诱导参数化为

$$\iota_1 : x = t^2,\ y = c_1t^3,\ \iota_2 : x = t^6,\ y = c_1t^9 + c_2t^{10}$$

且 ι_3 与 ι相同。令 $\delta_2(x,y) = -2c_2^3y^3x^5 - 6c_1^2c_2^3yx^8 + c_2^6x^{10}$, $f_1(x,y) = y^2 - c_1^2x^3$ 以及 $f_2(x,y) = f_1^3(x,y) + \delta_2(x,y)$。注意，$\iota_1^* f_1 = 0$。我们对 δ_2 关于 f_1 的最高次幂进行魏尔斯特拉斯除法，使其阶不大于 δ_2的阶；也就是说，我们用 f_1 作除数，得到

$$\delta_2(x,y) = -2c_2^3yx^5f_1(x,y) - 8c_1^2c_2^3yx^8 + c_2^6x^{10}.$$

在我们的情形中，除法余式的阶严格小于 f_1的阶。我们将证明此分解是唯一的。通过 Mathematica 进行简单计算（见 [13]），或使用Singular，可得 $\vartheta_{\iota_2}(f_1) = 19$, $\iota_2^* f_2 = 0$,

$$\vartheta_{\iota_2}(f_1^3) = \vartheta_{\iota_2}(-8c_1^2c_2^3yx^8 + c_2^6x^{10}) < \vartheta_{\iota_2}(-2c_2^3yx^5f_1)$$

以及 $\vartheta_{\iota_3}(f_2) = 117$。在第 5 节中，我们将介绍一种基于定理 8 证明的算法，该算法使我们能够从 $f_1^3(x,y)$得到 $f_2(x,y)$。

设 $w \in (x,y)\mathbb{C}\{x,y\}$、$C = \{w(x,y) = 0\}$ 为曲线，且 τ为由 C 的一个分支诱导的参数化（见（11））。我们还可以将一个理想与曲线 C 关联起来：在环 $\mathbb{C}[[x,y]]$中，由 w 在 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 中生成的主理想，记为 $\mathcal{I}_C\mathbb{C}[[x,y]]$。由于 $\mathbb{C}\{x,y\}$ 是 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 的子环，因此存在从 $\mathcal{I}_C\mathbb{C}\{x,y\}$ 到 $\mathcal{I}_C\mathbb{C}[[x,y]]$的典范注入。设 $h \in \mathbb{C}[[x,y]]$，那么 $h \in \mathcal{I}_C\mathbb{C}[[x,y]]$ 当且仅当 h属于典范同态 $\mathbb{C}[[x,y]] \to {}^{\mathbb{C}[[x,y]]}/_{\mathcal{I}_C\mathbb{C}[[x,y]]}$的核，这等价于 $\tau^* h = 0$。

令 ι 如式 (11) 所示，ι_i 和 f_i, $i = 1,\dots,s$ 如第 3 节所示。对于 $i \in \{1,\dots,s\}$，令 e_i，$\gamma_1^{(i)}$，…，$\gamma_i^{(i)}$ 为式 (5) 中半群 $\Gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ 的生成元。令$f_0(x,\ y) = y \in \mathbb{C}[x,y]$。

定理 8（主定理）。对所有 $i \in \{1,\dots,s\}$，以下陈述成立：（A）存在 $\delta_i \in \mathbb{C}[x,y]$，使得 支撑（$\delta_i$）$\subset N_i \setminus \{(0,\ e_i)\}$ 且 $f_i(x,\ y) = f_{i-1}^{k_i}(x,\ y) + \delta_i(x,\ y)$。

(B) *For all* $j \in \{i, \dots, s\}$, $\vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}) = \gamma_i^{(j)}$ *and* $\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}) = \gamma_i^{(j)} - e_j\lambda_i$.

此外，若 g_i 是一个多项式，使得 $\iota_i^* g_i = 0$ 且 支撑（g_i） $\subseteq N_i$，则存在 $a \in \mathbb{C}^*$，使得 $g_i = af_i$。

定理 8 的证明分为两个小节。我们在第 4.1 小节中证明 f_1 的存在性（定理 8 证明的步骤 1），并在第 4.2 小节中证明陈述（B）对 f_1 成立（引理 13）。对于 $i \in \{2, \dots, s\}$，我们采用归纳法。假设定理 8 对 $i-1$ 之前的情形成立，我们在第 4.1 小节中证明陈述（A）中 f_i 的存在性。然后，假设陈述（A）对 i 之前的情形成立，且陈述（B）对 $i-1$ 之前的情形成立，我们在第 4.2 小节中证明陈述（B）对 f_i 成立。我们还在第 4.1 和第 4.2 小节中证明了主要证明所需的一些结果。引理 15 对于第 5 节所述算法的构造尤其有用。

下面的推论表明，我们可以将定理 8 中得到的 f_s 扩展为平面曲线的一个代表。我们可以将 f_s 视为 f的近似。当然， $\iota_s^* y$ 的次数越高，近似效果就越好。我们不详细说明推论 9 的证明，因为其中重复了定理 8 的证明中许多推理（陈述 *(A)*，我们将在第 4.1 小节末尾给出证明。

推论 9. 令 $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$, $Y = \{f(x, y) = 0\}$ 为平面曲线的芽，ι 如式 *(11)* 所示，且 $f_s(x, y)$ 如定理 *8* 所示。则存在 $\delta \in \mathbb{C}\{x, y\}$ 使得$\vartheta_\iota(f_s) = \vartheta_\iota(\delta)$ 且 $f(x, y) = f_s(x, y) + \delta(x, y)$..

4.1. 陈述 (A) 的定理 8 证明。 证明定理8的陈述（A）需要以下两个结果。

引理10。设 $m(x_0, \dots, x_{i-1}) = \sum_{\ell=0}^{i-1} e_\ell x_\ell$ 且

$$\mathcal{R} = \{(x_0, \dots, x_{i-1}) \in \mathbb{R}^i : (x_0, \dots, x_{i-1}) \geq (0, \dots, 0) \wedge \sum_{\ell=0}^{i-1} \gamma_{\ell+1}^{(i)} x_\ell \geq k_i \gamma_i^{(i)}\}.$$

则 $m(\mathcal{R})$ 存在最小值，等于 e_i，且该值仅在点$(0, \dots, 0, k_i)$处取得。

证明。 注意， $m(0, \dots, 0, k_i) = k_i e_{i-1} = e_i$。 设 $(h_0, \dots, h_{i-1}) \in \mathbb{R}^i$，使得

$$(h_0, \dots, h_{i-1}) + (0, \dots, 0, k_i) \in \mathcal{R}.$$

则对所有 $\ell \in \{0, \dots, i-2\}$、 $h_{i-1} + k_i \geq 0$和， $h_\ell \geq 0$

$$(h_{i-1} + k_i)\gamma_i^{(i)} + \sum_{\ell=0}^{i-2} \gamma_{\ell+1}^{(i)} x_\ell \geq k_i \gamma_i^{(i)}. \tag{21}$$

不等式 (21) 等价于

$$h_{i-1} \geq -\sum_{\ell=0}^{i-2} \frac{\gamma_{\ell+1}^{(i)}}{\gamma_i^{(i)}} h_\ell. \tag{22}$$

因此

$$m(h_1,\dots,h_{i-2},h_{i-1}+k_i)=(h_{i-1}+k_i)e_{i-1}+\sum_{\ell=0}^{i-2}e_\ell h_\ell\geq$$
$$\geq e_i-e_{i-1}\sum_{\ell=0}^{i-2}\frac{\gamma_{\ell+1}^{(i)}}{\gamma_i^{(i)}}h_\ell+\sum_{\ell=0}^{i-2}e_\ell h_\ell=e_i+\sum_{\ell=0}^{i-2}\left(e_\ell-\frac{\gamma_{\ell+1}^{(i)}}{\gamma_i^{(i)}}e_{i-1}\right)h_\ell.$$

根据命题 4 的陈述（D），对于所有 $\ell\in\{0,\dots,i-2\}$,

$$e_\ell-\frac{\gamma_{\ell+1}^{(i)}}{\gamma_i^{(i)}}e_{i-1}>0.$$

因此，若存在 $\ell\in\{0,\dots,i-2\}$ 使得 $h_\ell>0$，我们便可得出

$$m(h_1,\dots,h_{i-2},h_{i-1}+k_i)>e_i.$$

假设 $h_1=\dots=h_{i-2}=0$。那么不等式 (22) 推出 $h_{i-1}\geq 0$。若$h_{i-1}>0$，则有

$$m(0,\dots,0,h_{i-1}+k_i)=h_{i-1}e_{i-1}+e_i>e_i.$$

由此可得，结论成立。 □

命题 11. 设 $i\in\{1,\dots,s\}$ 和 $(w_j)^{j\in\mathbb{N}_0}$ 是$\mathbb{C}[[x,y]]$ 中的一列元素，使得对所有 $j\in\mathbb{N}_0$, $\vartheta_{\iota_i}(w_{j+1})>\vartheta_{\iota_i}(w_j)$。那么

$$\vartheta_{\iota_i}\left(\sum_{j\geq 0}w_j\right)=\vartheta_{\iota_i}(w_0).$$

证明。令$\kappa_j=\vartheta_{\iota_i}(w_j)$。根据$\vartheta_{\iota_i}$的定义，存在 $u_j\in\mathbb{C}[[t]]$ 使得$u_j(0)\neq 0$且 $\iota_i^*w_j=t^{\kappa_j}u_j(t)$。于是

$$\iota_i^*\sum_{j\geq 0}w_j=\sum_{j\geq 0}t^{\kappa_j}u_j(t)=t^{\kappa_0}\left(u_0(t)+\sum_{j\geq 1}t^{\kappa_j-\kappa_0}u_j(t)\right).$$

Set

$$\theta(t)=u_0(t)+\sum_{j\geq 1}t^{\kappa_j-\kappa_0}u_j(t)$$

由于 $\kappa_{j+1}>\kappa_j$，因此 $\theta\in\mathbb{C}[[t]]$ 且 $\theta(0)=u_0(0)\neq 0$。因此，根据 ϑ_{ι_i}的定义即可得出结果。□

定理 8 的陈述(A) 的证明。步骤 1：假设 $i=1$。
我们有

$$\min_{(\alpha,\beta)\in N_1}\{\vartheta_{\iota_1}(x^\alpha y^\beta)\}=\min\{k_1\alpha+(k_1\lambda_1)\beta:(\alpha,\beta)\in N_1\}=k_1(k_1\lambda_1) \tag{23}$$

and

$$\max_{(\alpha,\beta)\in N_1}\{\vartheta_{\iota_1}(x^\alpha y^\beta)\}=k_1(k_1\mu_1).$$

线段

$$\mathcal{L}=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2:k_1\alpha+(k_1\lambda_1)\beta=k_1(k_1\lambda_1)\}$$

~是 N_1 和 N_1的公共面。由于 k_1 是满足$k_1\lambda_1 \in \mathbb{Z}$的最小正整数，因此 $\mathcal{L}$的唯一整点是 $(0,\ k_1)$ 和 $(k_1\lambda_1,\ 0)$。因此存在 $a_{\alpha,\ \beta} \in \mathbb{C}$、 $(\alpha,\ \beta) \in N_1$，使得 $a_{0,\ k_1},\ a_{k_1\lambda_1,\ 0} \in \mathbb{C}^*$ 以及

$$f_1(x,y) = a_{0,k_1}y^{k_1} + a_{k_1\lambda_1,0}x^{k_1\lambda_1} + \sum_{\ell=k_1(k_1\lambda_1)+1}^{k_1(k_1\mu_1)} \left(\sum_{\substack{k_1\alpha+(k_1\lambda_1)\beta=\ell \\ (\alpha,\beta)\in N_1}} a_{\alpha,\beta}x^{\alpha}y^{\beta} \right).$$

等式 $\iota_1^* f_1 = 0$ 和 (23) 表明

$$a_{0,k_1}c_1^{k_1} + a_{k_1\lambda_1,0} = 0.$$

取 $a_{0,\ k_1} = 1$ 和 $a_{k_1\lambda_1,\ 0} = -c_1^{k_1}$。因此存在 $\widetilde{\delta}_1 \in \mathbb{C}[x,y]$，使得

~支撑$(\delta_1) \subset N_1 \setminus \mathcal{L}$，$\vartheta_{\iota_1}(\delta_1) > k_1(k_1\lambda_1)$ 并且

$$f_1(x,y) = y^{k_1} - c_1^{k_1}x^{k_1\lambda_1} + \widetilde{\delta}_1(x,y).$$

令 $\delta_1(x,\ y) = -c_1^{k_1}x^{k_1\lambda_1} + \widetilde{\delta}_1(x,\ y)$。

设 $i \in \{2,\ldots,s-1\}$。假设定理 8 对 $i-1$ 成立。

~步骤 *2*（形式消元过程）：我们证明存在 $\delta_i \in \mathbb{C}[[x,y]]$，使得 $f_{i-1}^{k_i}(x,\ y) + \widetilde{\delta}_i(x,\ y) \in \mathcal{I}_C\mathbb{C}[[x,y]]$。

令 $f_{i,0}(x,y) = f_{i-1}^{k_i}(x,y)$。根据定理 8 的陈述 (B) 的归纳假设，

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,0}(x,y)) = k_i\gamma_i^{(i)}. \tag{24}$$

此外，由于 $\mathrm{ord}(f_{i-1}) = e_{i-1}$ 且 $C_0(Y_{i-1}) = \{y=0\}$，因此

~ ~ ~$f_{i,0}(x,y)$ 的阶为 e_i，且 $C_0(\{f_{i,0}(x,y) = 0\}) = \{y=0\}$。我们通过一个从 $f_{i,0}$ 开始的形式消元过程，证明 δ_i~ 的存在性。

令 $j \in \mathbb{N}_0$。若 $j \neq 0$，假设 $I = \{1,\ldots,j\}$，并且对于所有 $\ell \in I$，存在~ ~$f_{i,\ell},\delta_{i,\ell} \in \mathbb{C}[[x,y]]$，使得

$$\mathrm{ord}(\widetilde{f}_{i,\ell}) = e_i,\ C_0(\{\widetilde{f}_{i,\ell}(x,y) = 0\}) = \{y=0\}, \tag{25}$$

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,\ell-1}) < \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,\ell}) \neq +\infty, \tag{26}$$

$$\widetilde{f}_{i,\ell}(x,y) - \widetilde{f}_{i,\ell-1}(x,y) = \widetilde{\delta}_{i,\ell}(x,y) \text{ and } \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{\delta}_{i,\ell}) = \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,\ell-1}). \tag{27}$$

由（14），$\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j}) \in \Gamma(\lambda_1,\ldots,\lambda_i)$。因此，根据归纳假设，存在非负整数 $\alpha^{(j+1)},\ \beta_0^{(j+1)},\ldots,\ \beta_{i-1}^{(j+1)}$，使得

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j}) = \vartheta_{\iota_i}\left(x^{\alpha^{(j+1)}}f_0^{\beta_0^{(j+1)}}\cdots f_{i-1}^{\beta_{i-1}^{(j+1)}}\right) = e_i\alpha^{(j+1)} + \sum_{\ell=0}^{i-1}\gamma_{\ell+1}^{(i)}\beta_\ell^{(j+1)}.$$

若 $j = 0$ 我们将选择 $\alpha^{(1)},\ \beta_0^{(1)},\ldots,\ \beta_{i-1}^{(1)}$，使得 $\beta_{i-1}^{(1)} = 0$。我们可以作出这一选择，因为等式 (24) 和命题 4 的陈述 (C)。令 $I = \{1,\ldots,j,j+1\}$，

$$\widetilde{\delta}_{i,j+1}(x,y) = x^{\alpha^{(1)}}f_0^{\beta_0^{(1)}}(x,y)\cdots f_{i-2}^{\beta_{i-2}^{(1)}}(x,y)$$

~ ~ ~并且 $f_{i,j+1}(x,y)=f_{i,j}(x,y)+a_{j+1}\delta_{i,j+1}(x,y)$，其中 $a_{j+1}\in\mathbb{C}$。现在我们证明~$a_{j+1}\in\mathbb{C}^*$，并通过证明 $f_{i,j+1}(x,y)$ 不是零函数来说明

$$\mathrm{Supp}(\widetilde{f}_{i,j+1})\neq\emptyset. \tag{28}$$

~ ~令 $\kappa=\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j})=\vartheta_{\iota_i}(\delta_{i,j+1})$。存在 $u,\theta\in\mathbb{C}[t]$ 使得 $u(0)\neq 0$, $\theta(0)\neq 0$,~ ~$\iota_i^*f_{i,j}=t^\kappa u(t)$ 且 $\iota_i^*\delta_{i,j+1}=t^\kappa\theta(t)$。于是

$$\begin{aligned}\iota_i^*\widetilde{f}_{i,j+1}&=t^\kappa(u(t)+a_{j+1}\theta(t))=\\&=t^\kappa(u(0)+a_{j+1}\theta(0))+t^\kappa(u(t)-u(0)+a_{j+1}(\theta(t)-\theta(0))).\end{aligned}$$

注意，$u(t)-u(0)+a_{j+1}(\theta(t)-\theta(0))\in(t)$。由于 $u(0)$ 和 $\theta(0)$ 均非零，方程 $u(0)+a_{j+1}\theta(0)=0$ 关于 a_{j+1} 有一个解，且该解非零。取 a_{j+1} 为该解。于是

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j+1})\geq\kappa+1>\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j}).$$

~ ~由于 $(0,e_i)\in$支撑$(f_{i,j})$，要证明 (28)，只需证明 $(0,e_i)\notin$支撑$(\delta_{i,j+1})$。若 $\alpha^{(j+1)}\neq 0$，则支撑$(\widetilde{\delta}_{i,j+1})\subseteq\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2:\ \alpha\neq 0\}$，从而得出 $(0,e_i)\notin$支撑$(\widetilde{\delta}_{i,j+1})$。假设 $\alpha^{(j+1)}=0$。令

$$m(\beta_0,\dots,\beta_{i-1})=\sum_{\ell=0}^{i-1}e_\ell\beta_\ell \tag{29}$$

and

$$\mathcal{R}=\{(\beta_0,\dots,\beta_{i-1})\in\mathbb{R}^i:(\beta_0,\dots,\beta_{i-1})\geq(0,\dots,0)\wedge\sum_{\ell=0}^{i-1}\gamma_{\ell+1}^{(i)}\beta_\ell\geq k_i\gamma_i^{(i)}\}. \tag{30}$$

注意到，由于 $\mathrm{ord}(f_\ell)=e_\ell$，$\widetilde{\delta}_{i,j+1}$ 的阶为 $m(\beta_0^{(j+1)},\dots,\beta_{i-1}^{(j+1)})$。若 $j=0$，由引理10可知

$$m(\beta_0^{(1)},\dots,\beta_{i-2}^{(1)},0)>e_i.$$

若 $j\neq 0$，不等式

$$\sum_{\ell=0}^{i-1}\gamma_{\ell+1}^{(i)}\beta_\ell^{(j+1)}=\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j})>k_i\gamma_i^{(i)}$$

以及引理10推出 $m(\beta_0^{(j+1)},\dots,\beta_{i-1}^{(j+1)})>e_i$。在这两种情况下我们都得到 $(0,e_i)\notin$支撑$(\widetilde{\delta}_{i,1})$，否则将有 $m(\beta_0^{(j+1)},\dots,\beta_{i-1}^{(j+1)})\leq e_i$。

~ ~ ~ ~若 $\iota_i^*f_{i,j+1}=0$令 $f_i(x,y)=f_{i,j+1}(x,y)$。若 $\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j+1})\neq+\infty$，我们重复这一过程。若此过程未在有限步内结束，则 $I=\mathbb{N}$ 并且

$$\widetilde{f}_i(x,y)=f_{i-1}^{k_i}(x,y)+\sum_{\ell\geq 1}a_\ell\widetilde{\delta}_{i,\ell}. \tag{31}$$

~剩下要证明的只有在这种情况下 $\iota_i^*f_i=0$。令 $\ell\in\mathbb{N}$。根据（26），~$(\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 是一个严格递增的正整数序列。因此，我们可以~选择足够大的 j，使得 $\vartheta_{\iota_i}(f_{i,j})>\ell$。根据（27），我们可以将等式（31）改写为

$$\widetilde{f}_i(x,y)=\widetilde{f}_{i,j}(x,y)+\sum_{\ell\geq j+1}a_\ell\widetilde{\delta}_{i,\ell}.$$

因此

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_i) \geq \min\left\{\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j}), \vartheta_{\iota_i}\left(\sum_{\ell\geq j+1} a_\ell \widetilde{\delta}_{i,\ell}\right)\right\}.$$

由 (26) 和 (27)，$(\vartheta_{\iota_i}(\delta_{i,\ j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ 也是一个严格递增序列。因此，应用命题 11，可得

$$\vartheta_{\iota_i}\left(\sum_{\ell\geq j+1} a_\ell \widetilde{\delta}_{i,\ell}\right) = \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{\delta}_{i,j+1}) = \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j}).$$

因此

$$\vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_i) \geq \vartheta_{\iota_i}(\widetilde{f}_{i,j}) > \ell$$

并且我们得出 $\vartheta_{\iota_i}(f_i) = +\infty$，即 $\iota_i^* f_i = 0$。令 $\delta_i(x,\ y) = \sum_{\ell\in I} a_\ell \delta_{i,\ \ell}(x,\ y)$。正如在构造 $\delta_{i,\ \ell}$ 时所见，对所有 $\ell \in I$，$(0,\ e_i) \notin$ 支撑$(\delta_{i,\ j+1})$。因此 $(0,\ e_i) \notin$ 支撑(δ_i)。

步骤 *3*：我们证明存在 $a \in \mathbb{C}^*$ 和 $\delta_i \in \mathbb{C}[x,y]$，使得 $\mathrm{Supp}(\delta_i) \subseteq N_i \setminus \{(0,\ e_i)\}$，且 $f_i(x,\ y) = a f_{i-1}^{k_i}(x,\ y) + \delta_i(x,\ y)$。
设 $\widetilde{f}_i(x,\ y) = f_{i-1}^{k_i}(x,\ y) + \widetilde{\delta}_i(x,\ y)$ 如步骤 2 所述，且 f_i 如第 3 节所述。由于 $f_i \in I_C\mathbb{C}[[x,y]] = (f_i)\mathbb{C}[[x,y]]$，因此存在 $u \in \mathbb{C}[[x,y]]$，使得

$$f_i(x,y) = u(x,y)\widetilde{f}_i(x,y). \tag{32}$$

根据构造，$\mathrm{ord}(f_i) = e_i$。如第 3 节所述，$\mathrm{ord}(f_i) = e_i$。因此 $\mathrm{ord}(u) = 0$，由此可知 u 是 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 的单位元。因此存在 $a \in \mathbb{C}^*$，且$\varepsilon \in (x,\ y)\mathbb{C}[[x,y]]$，使得 $u(x,\ y) = a + \varepsilon(x,\ y)$。我们将等式 (32) 改写为

$$f_i(x,y) = a f_{i-1}^{k_i}(x,y) + [a\widetilde{\delta}_i(x,y) + \varepsilon(x,y)(f_{i-1}^{k_i}(x,y) + \widetilde{\delta}_i(x,y))].$$

令 $\delta_i(x,y) = f_i(x,y) - a f_{i-1}^{k_i}(x,y)$。由于 $f_i, f_{i-1}^{k_i} \in \mathbb{C}[x,y]$，我们得出 $\delta_i \in \mathbb{C}[x,y]$。要证明 $\mathrm{Supp}(\delta_i) \subseteq N_i \setminus \{(0,e_i)\}$，已知 $\mathrm{Supp}(f_i) \subseteq N_i$，只需证明 $\mathrm{Supp}(f_{i-1}^{k_i}) \subseteq N_i$ 以及 $\{(0,e_i)\} \notin \mathrm{Supp}(\delta_i)$。由多项式定理可得

$$\mathrm{Supp}(f_{i-1}^{k_i}) \subseteq \sum_{j=1}^{k_i} \mathrm{Supp}(f_{i-1}).$$

根据归纳假设，$\mathrm{Supp}(f_{i-1}) \subseteq N_{i-1}$，因此

$$\sum_{j=1}^{k_i} \mathrm{Supp}(f_{i-1}) \subseteq \sum_{j=1}^{k_i} N_{i-1}.$$

令 $(\alpha_j, \beta_j) \in N_{i-1}$, $j = 1, \ldots, k_i$。根据（17），不等式

$$k_1 \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j + (k_1\lambda_1) \sum_{j=1}^{k_i} \beta_j = \sum_{j=1}^{k_i} (k_1\alpha_j + (k_1\lambda_1)\beta_j) \geq k_i e_{i-1}(k_1\lambda_1) = e_i(k_1\lambda_1) \tag{33}$$

以及不等式

$$e_i\sum_{j=1}^{k_i}\alpha_j+(e_i\mu_{i-1})\sum_{j=1}^{k_i}\beta_j=k_i\sum_{j=1}^{k_i}(e_{i-1}\alpha_j+(e_{i-1}\mu_{i-1})\beta_j)\leq \tag{34}$$
$$\leq k_i^2e_{i-1}(e_{i-1}\mu_{i-1})=e_i(e_i\mu_{i-1})$$

固定。令

$$\widetilde{N}_i=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2:k_1\alpha+(k_1\lambda_1)\beta\geq e_i(k_1\lambda_1)\wedge e_i\alpha+(e_i\mu_{i-1})\beta\leq e_i(e_i\mu_{i-1})\}.$$

由于 $\mu_{i-1}<\mu_i$ 那么 $N_i\subset N_i$。由不等式 (33) 和 (34) 可得

$$\sum_{j=1}^{k_i}N_{i-1}\subseteq\widetilde{N}_i.$$

注意，$\mathrm{Supp}(f_i)\subseteq N_i$ 且 $\varepsilon\in(x,y)\mathbb{C}[[x,y]]$ 意味着 $\{(0,e_i)\}\notin\mathrm{Supp}(\varepsilon f_{i-1}^{k_i})$。此外，根据构造，$\{(0,e_i)\}\notin\mathrm{Supp}(a\delta_i)$。因此，考虑到 δ_i 的定义，要证明 $\{(0,e_i)\}\notin\mathrm{Supp}(\delta_i)$，只需证明 $\{(0,e_i)\}\notin\widetilde{\mathrm{Supp}}(\varepsilon\delta_i)$。由此立即可知，对于所有 $\ell\in I$，如在构造 δ_i 时所证明的，$\widetilde{\ell}$、$\widetilde{\ell}$，若 $\mathrm{Supp}(\delta_i,\ell)\not\subseteq\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}_0^2:\alpha\neq0\}$ 则 $\mathrm{ord}(\delta_i,\ell)>e_i$。

步骤 *4*：多项式 f_i 在相差一个非零常数倍的意义下唯一。设 $g_i\in\mathbb{C}[x,y]$ 满足 $\iota_i^*g_i=0$ 且 $\mathrm{Supp}(g_i)\subseteq N_i$。由于 $\mathcal{I}_{Y_i}\mathbb{C}\{x,y\}=(f_i)\mathbb{C}\{x,y\}=(g_i)\mathbb{C}\{x,y\}$，存在 $a\in\mathbb{C}^*$ 和 $\varepsilon\in(x,y)\mathbb{C}\{x,y\}$，使得

$$g_i(x,y)=(a+\varepsilon(x,y))f_i(x,y). \tag{35}$$

假设 ε 非零。令 $n=$ 为 $\mathrm{ord}(\varepsilon)$。存在 $\theta\in(x,y)^{e_i+1}\mathbb{C}\{x,y\}$、$\varphi\in(x,y)^{n+1}\mathbb{C}\{x,y\}$ 以及一个阶为 n 的齐次多项式 $\widetilde{\varepsilon}$，使得 $f_i(x,y)=y^{e_i}+\theta(x,y)$，且 $\varepsilon(x,y)=\widetilde{\varepsilon}(x,y)+\varphi(x,y)$。我们将等式 (35) 改写为

$$g_i(x,y)=af_i(x,y)+y^{e_i}\widetilde{\varepsilon}(x,y)+y^{e_i}\varphi(x,y)+\theta(x,y)\varphi(x,y).$$

根据定义，$y^{e_i}\widetilde{\varepsilon}$是一个阶为 e_i+n的齐次多项式，$\mathrm{ord}(y^{e_i}\varphi)=e_i+n+1$且$\mathrm{ord}(\theta\varphi)=e_i+n+2$。于是

$$\mathrm{Supp}(y^{e_i}\widetilde{\varepsilon})\subseteq\mathrm{Supp}(y^{e_i}\widetilde{\varepsilon}+y^{e_i}\varphi+\theta\varphi)$$

集合 $\mathrm{Supp}(y^{e_i}\widetilde{\varepsilon})$ 等于

$$\{(0,e_i)\}+\mathrm{Supp}(\widetilde{\varepsilon})$$

因此

$$N_i\cap\mathrm{Supp}(y^{e_i}\widetilde{\varepsilon})=\emptyset.$$

由于 $\mathrm{Supp}(f_i)\subset N_i$，我们得出

$$\mathrm{Supp}(y^{e_i}\widetilde{\varepsilon})\subseteq\mathrm{Supp}(g_i),$$

这与 $\mathrm{Supp}(g_i)\subseteq N_i$ 这一事实矛盾。因此，ε 必为零级数。□

推论 *9* 的证明。如果 $\iota^*f_s=0$ 那么 $\delta(x,y)=0$，结论得证。否则，我们重复步骤 2 中的形式消元过程，得到 $\delta\in\mathbb{C}[[x,y]]$，使得 $\widetilde{(\iota^*)}=0$。应用步骤 3 中的类似推理，我们构造一个$\delta\in\mathbb{C}\{x,y\}$，使得 $f(x,y)=f_s(x,y)+\delta(x,y)$。□

4.2. 定理 8 的陈述 (B) 的证明。 我们将关于变量 y 的偏导算子记为 ∂_y。

命题 1 表明，存在一个自然的单射映射 $\Gamma(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{i-1})$ 到 $\Gamma(\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_i)$，它将 n 映入 $\frac{e_i}{e_{i-1}} n$。我们可以问，是否存在赋值层面的此类映射，也就是说，给定 $g \in \mathbb{C}[[x,y]]$，$\vartheta_{\iota_i}(g) = \frac{e_i}{e_{i-1}} \vartheta_{\iota_{i-1}}(g)$。答案并不简单，例 7 中便可见一斑，其中 $\vartheta_{\iota_1}(f_2) = 19$，$\vartheta_{\iota_2}(f_2) = +\infty$，且 $\vartheta_{\iota_3}(f_2) = 117$。我们先考察一些简单情形。设 $g(x) \in \mathbb{C}[[x]]$。那么，对所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$ 和 $j \in \{i, \ldots, s\}$，

$$\vartheta_{\iota_j}(g) = e_j \mathrm{ord}(g) = \frac{e_j}{e_i} e_i \mathrm{ord}(g) = \frac{e_j}{e_i} \vartheta_{\iota_i}(g). \tag{36}$$

对所有 $i \in \{1, \ldots, s\}$、$j \in \{i, \ldots, s\}$、$d \in \mathbb{N}_0$ 和 $\ell \in \{0, \ldots, d\}$，

$$\begin{aligned} \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^\ell y^d) = (d-\ell)\vartheta_{\iota_j}(y) = (d-\ell)\mathrm{ord}(\iota_j^* y) = (d-\ell)e_j\lambda_1 = \\ = (d-\ell)\frac{e_j}{e_i} e_i\lambda_1 = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(\partial_y^\ell y^d). \end{aligned} \tag{37}$$

设 $n \in \mathbb{N}$ 和 U 是以零为中心的任意小的 $\mathbb{C}$ 开圆盘。对于$t \in U$，定义映射 $\chi_n(t) = t^n$。设 $g \in \mathbb{C}[[x,y]]$ 和 $h \in \mathbb{C}[[t]]$。注意，$\mathrm{ord}(\chi_n^* h) = n\,\mathrm{ord}(h)$；并且若对于某个 $i \in \{1, \ldots, s\}$，有 $\iota_i^* g = 0$，那么 $(\iota_i \circ \chi_n)^* g = 0$。

引理 12. 设 α，$\beta \in \mathbb{N}_0$，a，$b \in \mathbb{C}[[x]]$ 且

$$g(x,y) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x) y^\ell \in \mathbb{C}[[x]][y]$$

使得 $0 \le n < e_1$ 且次数$y(g) = n$。以下陈述成立：

(*A*) 若 $\vartheta_{\iota_1}(ay^\alpha) = \vartheta_{\iota_1}(ay^\beta)$，则 $\alpha - \beta$ 是 e_1的倍数。

(*B*) </style}存在唯一一个 次数$(g)\}$，使得

$$\vartheta_{\iota_1}(g) = \vartheta_{\iota_1}(a_{\tau_0}(x) y^{\tau_0}).$$

此外，对所有 $j \in \{1, \ldots, s\}$，

$$\vartheta_{\iota_j}(g) = \frac{e_j}{e_1} \vartheta_{\iota_1}(g) \tag{38}$$

并且，如果 $\tau_0 \neq 0$，那么

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y g) = \vartheta_{\iota_j}(g) - e_j\lambda_1, \tag{39}$$

否则

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y g) > \vartheta_{\iota_j}(g) - e_j\lambda_1. \tag{40}$$

(*C*) 对所有 $j \in \{1, \ldots, s\}$ 和 $\sigma \in \mathbb{N}$，

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y^\sigma g) \ge \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j \lambda_1. \tag{41}$$

证明。我们先证明陈述 (*A*)。等式 (12) 允许我们将$\vartheta_{\iota_1}(ay^\alpha) = \vartheta_{\iota_1}(ay^\beta)$改写为

$$\vartheta_{\iota_1}(a) + \alpha\vartheta_{\iota_1}(y) = \vartheta_{\iota_1}(b) + \beta\vartheta_{\iota_1}(y). \tag{42}$$

我们可以假设 $\alpha \ge \beta$。将 $\vartheta_{\iota_1}(a)$、$\vartheta_{\iota_1}(b)$ 和 $\vartheta_{\iota_1}(y)$ 分别代入式 (42)，可得

$$(\alpha - \beta) e_1 \lambda_1 = e_1 \mathrm{ord}(b) - e_1 \mathrm{ord}(a).$$

因此， $\vartheta_{\iota_1}(ay^\alpha) = \vartheta_{\iota_1}(ay^\beta)$ 当且仅当 $(\alpha-\beta)\lambda_1 =$ 阶(b) −阶(a)。设 q 和 $r \in \{0,\dots,e_1-1\}$ 为唯一的非负整数，使得

$$\alpha - \beta = qe_1 + r.$$

将此等式代入 $(\alpha-\beta)\lambda_1 = \mathrm{ord}(b)$ $-\mathrm{ord}(a)$，我们得到

$$r\lambda_1 = \mathrm{ord}(b) - \mathrm{ord}(a) - q(e_1\lambda_1) \in \mathbb{Z}. \tag{43}$$

陈述 *C3)*（见第 2 节）表明，当且仅当 $r=0$ 时，(43) 成立。现在证明陈述 (B)。假设 $n \neq 0$。令

$$\rho_d = \min\{\vartheta_{\iota_1}(a_\ell y^\ell) : a_\ell \neq 0 \text{ and } \ell \in \{d,\dots,n\}\},\ d = 0,1. \tag{44}$$

由于 $n < e_1$，陈述 *(A)* 表明存在唯一一个 $\tau_d \in \{d,\dots,n\}$,$d = 0$,1，使得

$$\vartheta_{\iota_1}(a_{\tau_d} y^{\tau_d}) = \rho_d. \tag{45}$$

因此 $\vartheta_{\iota_1}(g) = \rho_0$。如果 $\tau_0 \neq 0$，那么 $\tau_1 = \tau_0$, $\rho_1 = \rho_0$，并且

$$\vartheta_{\iota_1}(\partial_y g) = \vartheta_{\iota_1}(a_{\tau_1} y^{\tau_1-1}) = \vartheta_{\iota_1}(a_{\tau_1}) + (\tau_1-1)e_1\lambda_1 = \rho_1 - e_1\lambda_1. \tag{46}$$

如果 $\tau_0 = 0$，那么 $\tau_1 > \tau_0$, $\rho_1 > \rho_0$，并且

$$\vartheta_{\iota_1}(\partial_y g) = \rho_1 - e_1\lambda_1 > \rho_0 - e_1\lambda_1. \tag{47}$$

等式 (36) 和 (37) 表明，对所有 $j \in \{1,\dots,s\}$ 和 $\ell \in \{0,\dots,n\}$,

$$\vartheta_{\iota_j}(a_\ell y^\ell) = \frac{e_j}{e_1}\vartheta_{\iota_1}(a_\ell y^\ell) \text{ and } \vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y(a_\ell y^\ell)\right) = \frac{e_j}{e_1}\vartheta_{\iota_1}\left(\partial_y(a_\ell y^\ell)\right).$$

因此

$$\vartheta_{\iota_j}(g) = \frac{e_j}{e_1}\rho_0 \text{ and } \vartheta_{\iota_j}(\partial_y g) = \frac{e_j}{e_1}(\rho_1 - e_1\lambda_1) = \frac{e_j}{e_1}\rho_1 - e_j\lambda_1.$$

于是 (38) 和 (39) 成立。在 $\tau_0 = 0$ 的条件下，由不等式 (47) 可得

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y g) = \frac{e_j}{e_1}(\rho_1 - e_1\lambda_1) > \frac{e_j}{e_1}(\rho_0 - e_1\lambda_1) = \frac{e_j}{e_1}\rho_0 - e_j\lambda_1$$

并且 (40) 得证。

若 $n = 0$，等式 (38) 的证明仍然成立。若$n = 0$，不等式 (40) 显然成立。

我们对 $\sigma \in \{1,\dots,n\}$ 使用归纳法证明陈述 (C)。注意，陈述 (C) 在 $\sigma = 1$ 的情形已在陈述 (B) 中证明；对于 $\sigma \geq n+1$，不等式 (41) 显然成立。假设 $\sigma \in \{2,\dots,n\}$。于是 $0 \leq deg_y\left(\partial_y^{\sigma-1} g\right) < n < e_1$，并且根据陈述 (B),

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y(\partial_y^{\sigma-1} g)\right) \geq \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\sigma-1} g) - e_j\lambda_1.$$

根据归纳假设,

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\sigma-1} g) \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - (\sigma-1)e_j\lambda_1.$$

Thus

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y(\partial_y^{\sigma-1} g)\right) \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j\lambda_1.$$

□

引理 13. 假设存在 $\delta_1 \in \mathbb{C}[x,y]$，使得 支撑$(\delta_1) \subset N_1 \setminus \{(0,\ e_1)\}$且 $f_1(x,\ y) = y^{e_1} + \delta_1(x,\ y)$。那么，对所有 $j \in \{2,\dots,s\}$, $\vartheta_{\iota_j}(f_1) = \gamma_2^{(j)}$和$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_1) = \gamma_2^{(j)} - e_j\lambda_2$。

证明. 提醒读者， $e_1 = k_1$。令 δ_1 如定理 8 的陈述*(A)* 中所述。我们必有

$$\vartheta_{\iota_1}(\delta_1) = \vartheta_{\iota_1}(y^{e_1}), \tag{48}$$

否则， $\vartheta_{\iota_1}(f_1) = \min\{\vartheta_{\iota_1}(\delta_1)\ \vartheta_{\iota_1}(y^{e_1})\} \neq +\infty$ ，这与 $\iota_1^* f_1 = 0$ 矛盾。注意， $\vartheta_{\iota_1}(y^{e_1}) = e_1\gamma_1^{(1)}$ 。将 δ_1 写成 $\mathbb{C}[x][y]$ 的一个元素，并令 $n = \deg_y(\delta_1)$。那么存在 $a_\ell \in \mathbb{C}[x]$, $\ell \in \{0, , \dots, n\}$，使得

$$\delta_1(x, y) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x) y^n.$$

由于 $\mathrm{Supp}(\delta_1) \subset N_1 \setminus \{(0, e_1)\}$ ，因此 $0 \leq n < e_1$。于是，根据引理 12 的陈述 *(B)* ，令 τ_0 为 $\{0, \dots, n\}$ 中唯一满足 $\vartheta_{\iota_1}(\delta_1) = \vartheta_{\iota_1}(a_{\tau_0} y^{\tau_0})$ 的元素。由于 $\vartheta_{\iota_1}(\delta_1) = \vartheta_{\iota_1}(y^{e_1})$，引理 12 的陈述 *(A)* 推出 $e_1 - \tau_0$ 是 e_1 的倍数。鉴于 $\tau_0 \in \{0, \dots, e_1 - 1\}$ ，因此必有 $\tau_0 = 0$。令 $j \in \{2, \dots, s\}$。设

$$\epsilon_{1,j} = c_2 t^{e_j\lambda_2} + \varphi_2(t^{e_j/k}) + \dots + c_j t^{e_j\lambda_j} + \varphi_j(t^{e_j/k}).$$

因此

$$\iota_j^* x = (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* x \text{ and } \iota_j^* y = (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y + \epsilon_{1,j}.$$

注意， $\mathrm{ord}(\epsilon_{1,j}) = e_j\lambda_2$。根据泰勒公式，

$$\begin{aligned} \iota_j^* f_1 = (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* f_1(x, y) + k_1\epsilon_{1,j}(\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-1} + \\ + \sum_{\ell=2}^{e_1} \frac{k_1!}{(k_1-\ell)!\ell!}\epsilon_{1,j}^\ell (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!}\epsilon_{1,j}^\ell (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* \partial_y^\ell \delta_1(x, y). \end{aligned} \tag{49}$$

由于 $\iota_1^* f_1 = 0$ ，因此

$$(\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* f_1 = 0. \tag{50}$$

对于所有 $\ell \in \{2, \dots e_1\}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}\left(\epsilon_{1,j}^\ell (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-\ell}\right) - \mathrm{ord}\left(\epsilon_{1,j}(\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-1}\right) = \\ &= \ell e_j\lambda_2 + \frac{e_j}{e_1}(k_1 - \ell)e_1\lambda_1 - \left(e_j\lambda_2 + \frac{e_j}{e_1}(k_1 - 1)e_1\lambda_1\right) = \\ &= (\ell - 1)e_j(\lambda_2 - \lambda_1) > 0. \end{aligned} \tag{51}$$

不等式 (40) 表明

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y^\ell \delta_1) > \vartheta_{\iota_j}(\delta_1) - \ell e_j\lambda_1 = (k_1 - \ell)e_j\lambda_1. \tag{52}$$

因此，对于所有 $\ell \in \{1, \dots n\}$,

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}\left(\epsilon_{1,j}^\ell (\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* \partial_y^\ell \delta_1\right) - \mathrm{ord}\left(\epsilon_{1,j}(\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-1}\right) > \\ &> \ell e_j\lambda_2 + \frac{e_j}{e_1}(k_1 - \ell)e_1\lambda_1 - \left(e_j\lambda_2 + \frac{e_j}{e_1}(k_1 - 1)e_1\lambda_1\right) = \\ &= (\ell - 1)e_j(\lambda_2 - \lambda_1) \geq 0. \end{aligned} \tag{53}$$

应用等式 (50) 和不等式 (51)、(53)，我们得出

$$\vartheta_{\iota_j}(f_1) = \mathrm{ord}(\iota_j^* f_1) = \mathrm{ord}\left(\epsilon_{1,j}(\iota_1 \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* y^{k_1-1}\right) = e_j\lambda_2 + (k_1 - 1)\gamma_1^{(j)} = \gamma_2^{(j)}.$$

由 (52) 可得

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y\delta_1) > (k_1-1)e_j\lambda_1 = \vartheta_{\iota_j}(y^{k_1-1}).$$

因此,

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_1) = \vartheta_{\iota_j}(y^{k_1-1}) = (k_1-1)\gamma_1^{(j)} = \gamma_2^{(j)} - e_j\lambda_2.$$

□

为证明引理 12 的一个更一般版本，我们需要应用魏尔斯特拉斯除法算法，因此需要重新熟悉该算法（形式版本见 [7]的定理 6.2.6 及其证明）。我们只关注这样的情形：用次数关于 y严格小于 y中 g 的次数的魏尔斯特拉斯多项式 p 去除 $g \in \mathbb{C}[[x]][y]$ 。设 $n = \deg_y(g)$, $m = \deg_y(p)$,

$$g(x,y) = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x)y^\ell \text{ and } p(x,y) = y^m + \sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell(x)y^\ell.$$

令 $w(x,y) = -\sum_{\ell=0}^{m-1} b_\ell(x)y^\ell$。给定 $s(x,y) = \sum_{\ell\geq 0} c_\ell(x)y^\ell \in \mathbb{C}[[x]][[y]]$, 定义

$$h(s)(x,y) = \frac{1}{y^m}\sum_{\ell\geq m} c_\ell(x)y^\ell = \sum_{\ell\geq 0} c_{\ell+m}(x)y^\ell,\ H(s)(x,y) = h(sw)(x,y)$$

并且，对于 $\ell \in \mathbb{N}$, H^ℓ，定义为 H 与自身复合 ℓ 次。令

$$u(x,y) = h(g)(x,y) = \sum_{\ell=0}^{n-m} a_{\ell+m}(x)y^\ell.$$

魏尔斯特拉斯除法算法告诉我们，存在唯一确定的$q \in \mathbb{C}[[x,y]]$ 和 $r \in \mathbb{C}[[x]][y]$，使得 $g(x, y) = q(x, y)p(x, y) + r(x, y)$，且 $\deg_y(r) < m$。此外

$$q(x,y) = u(x,y) + \sum_{\ell\geq 1} H^\ell(u)(x,y). \tag{54}$$

命题 *14.* 设 $p, g \in \mathbb{C}[[x]][y]$，使得 p 是一个魏尔斯特拉斯多项式，$\deg_y(p) = m$ 且 $\deg_y(g) = n$。假设 $n > m$。那么存在唯一确定的 $q \in \mathbb{C}[[x]][y]$ 和 $r \in \mathbb{C}[[x]][y]$，使得 $g(x, y) = q(x, y)p(x, y)+r(x, y)$，$\deg_y(r) < m$ 且 $\deg_y(q) < n - m$。此外，若 g 和 p 都属于 $\mathbb{C}[x][y]$，则 $q \in \mathbb{C}[x][y]$。

证明。我们应用魏尔斯特拉斯除法算法，将 g 除以 p。于是存在唯一确定的 $q \in \mathbb{C}[[x,y]]$ 和 $r \in \mathbb{C}[[x]][y]$，使得 $g(x,y) = q(x,y)p(x,y) + r(x,y)$，$\deg_y(r) < m$，且 q 由 (54) 给出。根据构造，$u, w \in \mathbb{C}[[x]][y]$，$\deg_y(u) \leq n - m$，且 $\deg_y(w) \leq m - 1$。于是 $h(uw) \in \mathbb{C}[[x]][y]$，并且其关于 y 的次数至多为 $n-m+m-1-m = n-m-1$。重复这一推理，我们得出存在 $\tau \in \mathbb{N}_0$，使得

$$q = u + \sum_{\ell=1}^{\tau} H^\ell(u).$$

注意，根据定义：

（i）若 $p \in \mathbb{C}[[x]][y]$，则 $w \in \mathbb{C}[[x]][y]$；若 $p \in \mathbb{C}[x][y]$，则 $w \in \mathbb{C}[x][y]$;

（ii）若 $g \in \mathbb{C}[[x]][y]$，则 $u \in \mathbb{C}[[x]][y]$；若 $g \in \mathbb{C}[x][y]$，则 $u \in \mathbb{C}[x][y]$。

于是，若 p，$g \in \mathbb{C}[[x]][y]$，则 $h(uw) \in \mathbb{C}[[x]][y]$；若 p，$g \in \mathbb{C}[x][y]$，则 $h(uw) \in \mathbb{C}[x][y]$。因此，对所有 $\ell \in \{1,\dots,\tau\}$，若 p，$g \in \mathbb{C}[[x]][y]$，则 $H^{\ell}(u) \in \mathbb{C}[[x]][y]$；若$p$，$g \in \mathbb{C}[x][y]$，则 $H^{\ell}(u) \in \mathbb{C}[x][y]$。□

对于下面的引理，我们假设定理 8 的陈述 (*A*) 成立到$i \in \{2,\dots,s\}$ 为止，且定理 8 的陈述 (*B*) 成立到 $i-1$为止。提醒读者，$f_0(x,\ y) = y$。对于 $j \in \{1,\dots,s\}$，令 $\Gamma_0(\lambda_1,\ \dots\dots,\ \lambda_j)$ 为由 e_j 生成的 $\Gamma(\lambda_1,\ \dots\dots,\ \lambda_j)$ 的子半群。

引理 15. 对于所有 $i \in \{1,\dots,s-1\}$，以下陈述成立：

(A) 设 $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$。设 $a(x,y)\ b(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ 非零，使得 $\vartheta_{\iota_i}(a)\ \vartheta_{\iota_i}(b) \in \Gamma_{i-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$。若 $\vartheta_{\iota_i}(af_{i-1}^{\alpha}) = \vartheta_{\iota_i}(bf_{i-1}^{\beta})$，则 $\alpha-\beta$ 是 k_i 的倍数。*(B)* 设 $g \in \mathbb{C}[[x]][y]$ 非零，使得 $e_{i-1} \le n < e_i$。则存在唯一确定的 $d \in \mathbb{N}$ 和 $a_\ell \in \mathbb{C}[[x]][y]$, $\ell \in \{0,\dots,d\}$，使得 $d < k_1$,

$$g(x,y) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell(x,y) f_{i-1}^{\ell}(x,y), \tag{55}$$

$\vartheta_{\iota_i}(g) \in \Gamma(\lambda_1,\ \dots\dots,\ \lambda_i)$ 并且，对于 $a_\ell \neq 0$，y的次数$(a_\ell) < e_{i-1}$。此外，对于所有 $j \in \{i,\dots,s\}$ 和 $\sigma \in \mathbb{N}$,

$$\vartheta_{\iota_j}(g) = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(g) \ \textit{and}\ \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\sigma} g) \ge \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j \lambda_i.$$

证明。我们将对 i 使用归纳法来证明该引理。关于 $i=1$ 的这个引理已在引理 12 中证明。

我们先证明陈述（A）。我们可以假设 $\alpha \ge \beta$。等式 $\vartheta_{\iota_i}(af_{i-1}^{\alpha}) = \vartheta_{\iota_i}(bf_{i-1}^{\beta})$ 等价于

$$(\alpha-\beta)\gamma_i^{(i)} = \vartheta_{\iota_i}(b) - \vartheta_{\iota_i}(a). \tag{56}$$

令 q 和 $r \in \{0,\dots,k_i-1\}$ 为满足下列条件的唯一非负整数

$$\alpha - \beta = qk_i + r. \tag{57}$$

将 (57) 和 (5) 应用于 (56)，得到

$$e_i(r\lambda_i) = \vartheta_{\iota_i}(b) - \vartheta_{\iota_i}(a) - qe_i(k_i\lambda_i) - (\alpha-\beta)(k_{i-1}\gamma_{i-1}^{(i)} - e_i\lambda_{i-1}). \tag{58}$$

根据假设，$\vartheta_{\iota_i}(b) - \vartheta_{\iota_i}(a) \in e_i\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{Z}\gamma_j^{(i)}$。引理 2 的陈述 *C3)*（见第 2 节）和陈述 *(B)* 告诉我们，$qe_i(k_i\lambda_i)$ 和 $e_i\lambda_{i-1}$ 属于$e_i\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{Z}\gamma_j^{(i)}$。由命题 4 的陈述（$C$），我们知道 $k_{i-1}\gamma_{i-1}^{(i)} \in e_i\mathbb{N}_0 + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{N}_0\gamma_j^{(i)}$。由 (58) 可得 $e_i(r\lambda_i) \in e_i\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{i-1}\mathbb{Z}\gamma_j^{(i)}$；再根据引理 2 的陈述 *(B)*，这等价于 $r\lambda_i \in M_{i-1}$。由于 $r \in \{0,\dots,k_i-1\}$，第 2 节的陈述 *C3) of Section 2* 蕴含 $r=0$。

现在证明陈述 *(B)*。设 $\deg_y(g) = n$ and d,p 为满足 $n = d\,e_{i-1} + p$ and $p < e_{i-1}$的唯一非负整数。由于 $e_{i-1} \le n < e_i$，因此 $1 \le d < k_i$。事实 f_{i-1} 是一个魏尔斯特拉斯多项式，其 $\deg_y(f_{i-1}) = e_{i-1}$ 且系数属于 $\mathbb{C}[x]$，这意味着 f_{i-1}^{d} 是一个魏尔斯特拉斯多项式，其 $\deg_y(f_{i-1}^{d}) = de_{i-1}$ 且系数属于 $\mathbb{C}[x]$。根据命题 14，存在唯一确定的q和 r，它们属于 $\mathbb{C}[[x]][y]$，满足 $g = qf_{i-1}^{d} + r$、$\deg_y(r) < d\,e_{i-1}$以及 $\deg_y(q) < n - d\,e_{i-1} = p$。如果 $\deg_y(r) < e_{i-1}$，则结论得证。否则，我们通过适当次幂的 f_{i-1}除以 r，迭代这一过程。由于魏尔斯特拉斯除法所得余式的次数严格递减，该过程会在

有限步后结束。因此，存在唯一确定的 $d$and $a_\ell \in \mathbb{C}[[x]][y]$, $\ell \in \{0,\dots,d\}$，使得 (55) 成立，且 $\deg_y(a_\ell) < e_{i-1}$。根据归纳假设，对于 $a_\ell \neq 0$，存在 $i_\ell \leq i-1$ 使得 $\vartheta_{\iota_{i_\ell}}(a_\ell) \in \Gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_{i_\ell})$。此外，

$$\vartheta_{\iota_i}(a_\ell) \in \frac{e_i}{e_{i_\ell}}\Gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_{i_\ell}).$$

由命题 1,

$$\vartheta_{\iota_i}(a_\ell) \in \Gamma_{i_\ell}(\lambda_1,\dots,\lambda_i).$$

由于 $i_\ell \leq i-1$，因此 $\Gamma_{i_\ell}(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ 是 $\Gamma_{i-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ 的子半群，由此得出 $\vartheta_{\iota_i}(a_\ell) \in \Gamma_{i-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$。

Set

$$\rho = \min\{\vartheta_{\iota_i}(a_\ell f_{i-1}^\ell) : a_\ell \neq 0 \text{ and } \ell \in \{0,\dots,d\}\}. \tag{59}$$

陈述 *(A)* 意味着存在唯一一个 $\tau \in \{0,\dots,n\}$，使得

$$\vartheta_{\iota_i}(a_\tau f_{i-1}^\tau) = \rho. \tag{60}$$

因此 $\vartheta_{\iota_i}(g) = \rho$。由于 $\vartheta_{\iota_i}(a_\tau)$ 属于 $\Gamma_{i-1}(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$，而后者是 $\Gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_i)$ 的子半群，因此

$$\vartheta_{\iota_i}(g) = \vartheta_{\iota_i}(a_\tau) + \tau\gamma_i^{(i)} \in \Gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_i).$$

对于所有 $j \in \{i,\dots,s\}$ 和 $\ell \in \{0,\dots,d\}$，归纳假设蕴含

$$\vartheta_{\iota_j}(a_\ell f_{i-1}^\ell) = \vartheta_{\iota_j}(a_\ell) + \ell\vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}) = \frac{e_j}{e_{i_\ell}}\vartheta_{\iota_{i_\ell}}(a_\ell) + \ell\gamma_i^{(j)}.$$

应用命题 1，我们得到

$$\gamma_i^{(j)} = \frac{e_j}{e_i}\gamma_i^{(i)}.$$

我们再次应用归纳假设，得出

$$\frac{e_j}{e_{i_\ell}}\vartheta_{\iota_{i_\ell}}(a_\ell) = \frac{e_j}{e_i}\frac{e_i}{e_{i_\ell}}\vartheta_{\iota_{i_\ell}}(a_\ell) = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(a_\ell).$$

Thus

$$\vartheta_{\iota_j}(a_\ell f_{i-1}^\ell) = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(a_\ell) + \frac{e_j}{e_i}\ell\gamma_i^{(i)} = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(a_\ell f_{i-1}^\ell).$$

我们得出

$$\vartheta_{\iota_j}(g) = \frac{e_j}{e_i}\rho = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(g).$$

在继续之前，先计算一下 $\ell \in \mathbb{N}$和 $j \in \{i,\dots,s\}$,$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}^\ell)$ 会很有用。根据定理 8 的陈述 (B),

$$\begin{aligned}\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}^\ell) &= \vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}^{\ell-1}) + \vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}) = (\ell-1)\gamma_i^{(j)} + \gamma_i^{(j)} - e_j\lambda_i = \\ &= \vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}^\ell) - e_j\lambda_i.\end{aligned} \tag{61}$$

设 $\sigma \in \{1,\dots,n\}$。现在我们证明以下不等式

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y^\sigma g) \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j\lambda_i \tag{62}$$

也对 σ 使用归纳法（提醒读者，我们假设该引理对不超过 $i-1$ 的情形成立）。注意，对于 $\ell \geq n+1$, (62) 显然成立。

我们首先用 $\sigma = 1$ 证明不等式 (62)。对于 $\ell \in \{0,\dots,d\}$，由于 $i_\ell \leq i-1$且 *C1)* 成立，因此 $\lambda_{i_\ell} \leq \lambda_{i-1} < \lambda_i$。根据关于 i 的归纳假设,

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y a_0) \geq \vartheta_{\iota_j}(a_0) - e_j\lambda_{i_0} > \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(a_0) - e_j\lambda_i \geq \frac{e_j}{e_i}\rho - e_j\lambda_i. \tag{63}$$

对于 $\ell \in \{1,\dots,d\}$，由不等式

$$\begin{aligned}&\vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}^{\ell}\partial_y a_\ell) - \vartheta_{\iota_j}(a_\ell \partial_y f_{i-1}^{\ell}) \geq \\ &\geq \left(\vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}^{\ell}) + \vartheta_{\iota_j}(a_\ell) - e_j\lambda_{i_\ell}\right) - \left(\vartheta_{\iota_j}(a_\ell) + \vartheta_{\iota_j}(f_{i-1}^{\ell}) - e_j\lambda_i\right) = \\ &= e_j(\lambda_i - \lambda_{i_\ell}) > 0\end{aligned}$$

我们得到

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y(a_\ell f_{i-1}^{\ell})\right) = \vartheta_{\iota_j}(a_\ell \partial_y f_{i-1}^{\ell}) = \frac{e_j}{e_i}\vartheta_{\iota_i}(a_\ell f_{i-1}^{\ell}) - e_j\lambda_i \geq \frac{e_j}{e_i}\rho - e_j\lambda_i. \tag{64}$$

由不等式（63）和（64）可得

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y g) \geq \frac{e_j}{e_i}\rho - e_j\lambda_i = \vartheta_{\iota_j}(g) - e_j\lambda_i.$$

假设 $\sigma \in \{2,\dots,n-e_{i-1}+1\}$。那么 $\deg_y(\partial^{\ell-1}g) \geq e_{i-1}$。根据关于 σ 的归纳假设，

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y(\partial_y^{\sigma-1}g)\right) \geq \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\sigma-1}g) - e_j\lambda_i \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j\lambda_i.$$

现在假设 $\sigma \in \{n-e_{i-1}+2,\dots,n\}$。令 $\varsigma = n-e_{i-1}+1$。那么 $\deg_y(\partial^{\varsigma}g) < e_{i-1}$。根据关于 i的归纳假设，

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y^{\sigma-\varsigma}(\partial_y^{\varsigma}g)\right) \geq \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\varsigma}g) - (\sigma-\varsigma)e_j\lambda_{i-1} > \vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\varsigma}g) - (\sigma-\varsigma)e_j\lambda_i.$$

另一方面，根据关于 σ 的归纳假设，

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y^{\varsigma}g) \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - \varsigma e_j\lambda_i.$$

Thus

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y^{\sigma-\varsigma}(\partial_y^{\varsigma}g)\right) \geq \vartheta_{\iota_j}(g) - \sigma e_j\lambda_i$$

□

我们想提醒读者注意以下事实：

*R*1) 在引理 15 的陈述 *(B)* 中，若我们考虑 $g \in \mathbb{C}[x][y]$，则（55）中的 a_ℓ 都是 $\mathbb{C}[x,y]$ 的元素。在该陈述的证明中，由于 f_{i-1} 也是 $\mathbb{C}[x][y]$ 的元素，命题 14 保证 $q \in \mathbb{C}[x][y]$，因此 $r \in \mathbb{C}[x][y]$。

*R*2) 一旦确定了 $f_1,\dots,f_{i-1}$，分解（55）便使我们能够通过归纳法将 g 唯一地写成如下类型的线性组合

$$\sum_{\ell=1}^{\widetilde{d}} c_\ell x^{\alpha_\ell} y^{\beta_{0,\ell}}(x,y) f_1^{\beta_{1,\ell}}(x,y)\cdots f_{i-1}^{\beta_{i-1,\ell}}(x,y),$$

其中 $\widetilde{d} \in \mathbb{N}$、$c_\ell \in \mathbb{C}^*$ 和 $(\alpha_\ell, \beta_{0,\ell},\dots,\beta_{i-1,\ell}) \in \mathbb{N}_0^{i+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$，对所有 $\sim\ell \in \{1,\dots,d\}$ 均成立。

陈述 (*B*) 的主定理证明。引理 13 证明了对于 $i=1$，定理 8 的陈述 (*B*) 成立。设 $i \in \{2,\dots,s-1\}$。假设定理 8 的陈述 (*A*) 在 i 之前成立，且定理 8 的陈述 (*B*) 在 $i-1$ 之前成立。那么引理 15 在 $i-1$ 之前成立。引理 12 和引理 15 的证明中所做的一些计算对本证明也有帮助，因此我们会引用这些计算。

设 δ_i 如定理 8 的陈述*(A)* 所述，且 $n =$ 次数$_y(\delta_i)$。采用与证明等式 (48) 相似的推理，我们可以得出

$$\vartheta_{\iota_i}(\delta_i) = k_i\gamma_i^{(i)} = \vartheta_{\iota_i}(f_{i-1}^{k_i}).$$

由于支撑$(\delta_i) \subset N_i \setminus \{(0, e_i)\}$，因此 $n < e_i$，我们可以写成

$$\delta_i(x, y) = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell(x, y) f_{i-1}^{\ell}(x, y)$$

如引理 15 的陈述 (B) 所述。注意，若 $n < e_{i-1}$，则 $d = 0$。设 ρ 如式 (59) 所述。鉴于 $\tau \in \{0, \dots, d\}$ 且 $d < k_i$，引理 15 的陈述 (A) 意味着存在唯一的 τ 使得 (60) 成立。此外，$\vartheta_{\iota_i}(\delta_i) = \rho$，这意味着

$$\vartheta_{\iota_i}(a_\tau f_{i-1}^{\tau}) = \vartheta_{\iota_i}(f^{k_i}).$$

因此，再次由引理 15 的陈述 (A)，我们得出 $\tau = 0$。令 $j \in \{i+1, \dots, s\}$，并设

$$\epsilon_{i,j} = c_i t^{e_j \lambda_{i+1}} + \varphi_{i+1}(t^{e_j/k}) + \cdots + c_j t^{e_j \lambda_j} + \varphi_j(t^{e_j/k}).$$

因此

$$\iota_j^* x = (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* x \text{ and } \iota_j^* y = (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* y + \epsilon_{i,j}.$$

由泰勒公式，

$$\begin{aligned} \iota_j^* f_i =& (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* f_i(x, y) + \epsilon_{i,j} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y f_{i-1}^{k_i} + \\ &+ \sum_{\ell=2}^{e_i} \frac{1}{\ell!} \epsilon_{i,j}^{\ell} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y^{\ell} f_{i-1}^{k_i} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell!} \epsilon_{i,j}^{\ell} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* \partial_y^{\ell} \delta_i(x, y). \end{aligned} \tag{65}$$

根据构造，$\iota_i^* f_i = 0$，这意味着 $(\iota_i \circ \chi_{e_j})^* f_i = 0$。我们来证明 $_{e_i}$

$$\operatorname{ord}(\iota_j^* f_i) = \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y f_{i-1}^{k_i} \right). \tag{66}$$

为此，只需证明对所有 $\ell \in \{1, \dots, n\}$,

$$\operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}^{\ell} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_1}})^* \partial_y^{\ell} \delta_i \right) > \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y f_{i-1}^{k_i} \right) \tag{67}$$

并且对所有 $\ell \in \{2, \dots, e_i\}$,

$$\operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}^{\ell} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y^{\ell} f_{i-1}^{k_i} \right) > \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y f_{i-1}^{k_i} \right) \tag{68}$$

我们首先证明（67）。令 $\delta_i = \delta_i(x, y) - a_0(x, y)$。于是，$\delta_i$ 要么为空，要么满足引理 15 的陈述（B）中的条件。此外，次数 $\deg_y(a_0) < e_{i-1}$。令 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 i_0 为满足 $\deg_y(a_0) < e_{i_0}$ 的最小非负整数。则 $i_0 \leq i - 1$，并且再次根据引理 15 的陈述（B），对所有 $\sigma \in \{i, \dots, s\}$，$\vartheta_{\iota_\sigma}\left(\partial_y^{\ell} a_0\right) \geq \vartheta_{\iota_\sigma}(a_0) - \ell e_\sigma \lambda_{i_0}$。由于 $\lambda_{i_0} \leq \lambda_{i-1}$ 且 $\tau = 0$，于是 $\vartheta_{\iota_i}(a_0) - \ell e_i \lambda_{i_0} \geq k_i \gamma_i^{(i)} - \ell e_i \lambda_{i-1}$。因此

$$\vartheta_{\iota_i}\left(\partial_y^{\ell} a_0\right) \geq k_i \gamma_i^{(i)} - \ell e_i \lambda_{i-1}, \tag{69}$$

由（69）和（61），我们得出

$$\begin{aligned} &\operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}^{\ell} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y^{\ell} a_0 \right) - \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j} (\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^* \partial_y f_{i-1}^{k_i} \right) \geq \\ &\geq \left(\ell e_j \lambda_{i+1} + \frac{e_j}{e_i} \left(k_i \gamma_i^{(i)} - \ell e_i \lambda_{i-1} \right) \right) - \left(e_j \lambda_{i+1} + \frac{e_j}{e_i} \left(k_i \gamma_i^{(i)} - e_i \lambda_i \right) \right) = \\ &= e_j \left((\ell - 1)(\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}) + \lambda_i - \lambda_{i-1} \right) > 0. \end{aligned} \tag{70}$$

如果 δ_i 非零，那么对于所有 $\sigma \in \{i, \dots, s\}$,

$$\vartheta_{\iota_\sigma}\left(\partial_y^\ell \overline{\delta}_i\right) \geq \vartheta_{\iota_\sigma}\left(\overline{\delta}_i\right) - \ell e_\sigma \lambda_i. \tag{71}$$

此外，由于 $\tau = 0$, $\vartheta_{\iota_i}\left(\delta_i\right) > \vartheta_{\iota_i}(a_0)$。因此

$$\vartheta_{\iota_i}\left(\partial_y^\ell \overline{\delta}_i\right) > k_i\gamma_i^{(i)} - \ell e_i\lambda_i. \tag{72}$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}^\ell(\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^*\partial_y^\ell \overline{\delta}_i\right) - \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}(\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^*\partial_y f_{i-1}^{k_i}\right) > \\ > \left(\ell e_j\lambda_{i+1} + \frac{e_j}{e_i}\left(k_i\gamma_i^{(i)} - \ell e_i\lambda_i\right)\right) - \left(e_j\lambda_{i+1} + \frac{e_j}{e_i}\left(k_i\gamma_i^{(i)} - e_i\lambda_i\right)\right) = \\ = e_j(\ell-1)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \geq 0.\end{aligned} \tag{73}$$

不等式 (70) 和 (73) 蕴含 (67) 成立。

令 $\ell \geq 2$。为证明 (68)，注意到 $\deg_y(\partial_y^\ell f_{i-1}^{k_i}) < e_i$，并且 $\partial_y^\ell f_{i-1}^{k_i}$ 满足引理 15 的陈述 (B) 的条件。使用与不等式 (72) 的证明中类似的论证，我们证明

$$\vartheta_{\iota_i}\left(\partial_y^\ell f_{i-1}^{k_i}\right) \geq k_i\gamma_i^{(i)} - \ell e_i\lambda_i.$$

因此

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}^\ell(\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^*\partial_y^\ell f_{i-1}^{k_i}\right) - \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}(\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^*\partial_y f_{i-1}^{k_i}\right) \geq \\ \geq e_j(\ell-1)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) > 0.\end{aligned}$$

由等式 (66) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta_{\iota_j}(f_i) =& \operatorname{ord}(\iota_j^* f_i) = \operatorname{ord}\left(\epsilon_{i,j}(\iota_i \circ \chi_{\frac{e_j}{e_i}})^*\partial_y f_{i-1}^{k_i}\right) = \\ =& e_j\lambda_{i+1} + \frac{e_j}{e_i}k_i\gamma_i^{(i)} - e_j\lambda_i = \frac{e_j}{e_i}\left(e_i\lambda_{i+1} + k_i\gamma_i^{(i)} - e_i\lambda_i\right) = \frac{e_j}{e_i}\gamma_{i+1}^{(i)}.\end{aligned}$$

根据命题 1，$\frac{e_j}{e_i}\gamma_{i+1}^{(i)} = \gamma_{i+1}^{(j)}$。因此 $\vartheta_{\iota_j}(f_i) = \gamma_i^{(j)}$。

现在证明 $\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_i) = \gamma_{i+1}^{(j)} - e_j\lambda_{j+1}$。设 $\ell \in \{1, \dots, d\}$。若 δ_i 非零，则考虑到 (71) 以及引理 15 的陈述 (B),

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y^\ell \overline{\delta}_i\right) > \frac{e_j}{e_i}k_i\gamma_i^{(i)} - e_j\lambda_i. \tag{74}$$

将不等式 (74) 与 (64) 结合可得

$$\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y^\ell \overline{\delta}_i\right) - \vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}^{k_i}) > 0. \tag{75}$$

由 (69) 可得

$$\begin{aligned}\vartheta_{\iota_j}\left(\partial_y a_0\right) - \vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}^{k_i}) \geq& \frac{e_j}{e_i}k_i\gamma_i^{(i)} - e_j\lambda_{i-1} - \left(\frac{e_j}{e_i}k_i\gamma_i^{(i)} - e_j\lambda_i\right) = \\ =& e_j(\lambda_i - \lambda_{i-1}) > 0.\end{aligned} \tag{76}$$

不等式 (75) 和 (76) 意味着 $\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_i) = \vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_{i-1}^{k_i})$。因此

$$\vartheta_{\iota_j}(\partial_y f_i) = \frac{e_j}{e_i}k_i\gamma_i^{(i)} - e_j\lambda_i = k_i\gamma_i^{(j)} - e_j\lambda_i.$$

但是，由 (5)，$k_i\gamma_i^{(j)} - e_j\lambda_i = \gamma_{i+1}^{(j)} - e_j\lambda_{j+1}$，结果得证。 □

5. Computational Application

本节将介绍一种基于定理 8 证明的算法，即算法1，用于计算 f_i。我们还将给出两个示例，比较该算法的实现与使用 Gr¨obner 基的消元理论的计算时间。

作为该算法的输入，我们需要多项式 f_0、.....、f_{i-1}，特征指数 λ_1、.....、λ_{i-1} 的列表 CE_{i-1}，与特征指数 CE_{i-1}相关联的半群生成元列表 SG_{i-1}，由 x_{i-1} 和 y_{i-1}给出的参数化 ι_{i-1}，特征指数 λ_i，正整数 k_i 以及多项式 φ_i。现在我们来解释该算法

第 *1* 至 *6* 行：我们更新列表 CE_{i-1} 和 SG_{i-1}。我们计算 ι_i 并将其存储在 x_i 和 y_i中。

第 *7* 至 *11* 行：列表 LS_i 存储多项式 $\iota_i^* x$、$\iota_i^* f_0$、.....、$\iota_i^* f_{i-1}$的次数。这些次数将在消元过程中发挥重要作用。列表VE 和 VC 包含后续计算所需的变量。

第 *12* 至 *14* 行：我们开始定理 8 证明的第 2 步。为便于跟踪，j 记录目前已进行的迭代次数，n 记录我们当前用于消元过程的赋值。为了了解算法的运行情况，我们决定显示当前正在消去的赋值。

第 *15* 至 *16* 行：我们开始一个循环，只有在得到满足$\vartheta_{\iota_i}(g) = +\infty$的 g 时才会结束。对于第 15 行，我们假设可以使用一个记为 **intregion** 的过程，它能在超平面的一个紧区域上计算所有分量为正整数的（$i+1$）元组，并将这些元组存入列表 E。等式

$$VE \cdot SG_i == n$$

据此定义与当前正在消去的赋值相对应的超平面。g 的支撑必须包含在集合 N_i中。这一事实由不等式保证：

$$VE \cdot LS_i \leq SG_i(1) * \mathbf{Deg}(y_i(t))$$

该不等式来自对 N_i的刻画（18）。因此，这个消元算法是有限的。该算法的主要计算复杂度来自求得列表 E的整数线性规划问题。

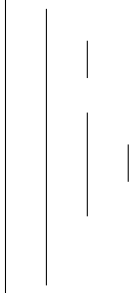
第 *17* 至 *24* 行：在此循环中，我们根据列表 E 中的元素计算备注 $R2$）中所述的分解。我们还将每次循环中引入的分解系数更新到列表 VC 中。在 **While** 循环的第一次迭代中，$(\mathbf{0}, \ldots, k_i)$ 是 E 的一个元素，因此不能使用。

第 *25* 至 *30* 行：我们求解一个以 VC 中的元素为变量的齐次线性方程，该方程由要求 $\iota_i^* g$ 中 t^n 的系数为零而得到。出于计算上的考虑，我们假设该齐次线性方程的解以规则形式给出，因此将其应用于 g。

对于接下来的两个示例，我们在*Mathematica* 中实现了算法1，并将计算时间与在*Singular*中使用全序 Gröbner 基进行消元的计算时间进行了比较。

例16。设 ζ 如例*6*所示。假设已知 f_1 。在Mathe-matica实现中，计算 f_2大约耗时*3*秒。在Singular中，经过一小时仍未算出 f_2 ，因此作者决定终止计算。作者决定再次运行Singular，这次为 ζ的系数赋值，并在大约一秒内得到了 f_2 。

算法1：消元过程 输入： k_i, λ_i, φ_i, x_{i-1}, y_{i-1}, SG_{i-1}, CE_{i-1}, $f_0, \ldots, f_{i-1}$ 输出： f_i1 List $CE_i = CE_{i-1} \cup \{\lambda_i\}$; 2 List $SG_i = k_i \cdot SG_{i-1}$; 3 Int $\gamma_i = k_i * SG_{i-1}(i) - SG_i(1) * CE_{i-1}(i-1) + SG_i(1) * \lambda_i$; 4 List $SG_i = SG_{i-1} \cup \{\gamma_i\}$; 5 Poly $x_i(t) = x_{i-1}(t^{k_i})$; 6 Poly $y_i(t) = y_{i-1}(t^{k_i}) + c_i t^{SG_i(1)*\lambda_i} + \varphi_i(t)$; 7 List $LS_i = \{SG_i(1), \mathrm{Deg}(y_i(t))\}$; 8 for $\ell = 1$ to $i-1$ do 9 List $LS_i = LS_i \cup \{\mathrm{Deg}(f_\ell(x_i(t)\ y_i(t)))\}$10 end 11 List $VE = \{\alpha, \beta_0, \ldots, \beta_{i-1}\}$; List $VC = \{\}$; 12 Poly $g(x,y) = f_{i-1}^{k_i}(x,y)$; 13 Int $j = 1$; Int $n =$阶 $(g(x_i(t)\ y_i(t)))$; 14 Display(n); 15 while $n \neq +\infty$ do 16 List E=IntRegion($VE \cdot SG_i == n \wedge VE \cdot LS_i \leq SG_i(1)$*次数$(y_i(t)) \wedge VE \geq \{0, \ldots, 0\}$); 17 for $\ell = 1$ to Length(E) do 18 if $j \neq 1$ then 19 Poly $g(x,y) = g(x,y) + e_j, {}_\ell x^{E(\ell)(1)} \prod_{m=2}^{i+1} f_{m-2}^{E(\ell)(m)}$ 20 else 21 if $E(\ell) \neq \{0, \ldots, 0, k_i\}$ then 22 Poly $g(x,y) = g(x,y) + e_j, {}_\ell x^{E(\ell)(1)} \prod_{m=2}^{i+1} f_{m-2}^{E(\ell)(m)}$ 23 end 24 end 25 List $VC = VC \cup \{e_{j,\ell}\}$; 26 end 27 Rule S= LinSolve(Coef($g(x_i(t)\ y_i(t))\ n$)==0,VC); 28 Poly g(x,y)= ApplyRule(S,$g(x,y)$); 29 Int $n =$阶$(g(x_i(t)\ y_i(t)))$; 30 Int $j = j+1$; 31 Display(n); 32 end 33 Poly $f_i(x,y) = g(x,y)$;



例17. 设 $c_\ell \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, 2, 3$和 $\zeta = c_1 x^{\frac{6}{5}} + c_2 x^{\frac{3}{2}} + c_3 x^{\frac{5}{3}}$。这个分支有三个特征指数。假设已知 f_1 和 f_2 。在Mathematica实现中，计算f_3大约花了*6*分*33*秒。在Singular中，一个小时后仍未算出 f_3 （即使已为系数赋值），因此作者决定终止计算。

References

[1] Brieskorn, E., Kn¨orrer, H.：《平面代数曲线》。Birkh¨auser Verlag，瑞士（1986）。[2] Cabral, J., Neto, O.：平面曲线的微局部整体变形 $y^k = x^n$。《巴黎科学院报告，I辑》347，1409–1414（2009）。[3] Decker, W., Greuel, G. -M., Pfister, G., Sch¨onemann, H.：Singular 4-2-1——用于多项式计算的计算机代数系统。 http://www.singular.uni-kl.de （2022）[4] D'Andrea, C., Sombra, M.：有理平面曲线的牛顿多边形。《Math.Comput.Sci.》4，3–24（2010）。[5] Gonz´alez P´erez, P.：准普通超曲面的半群。《J. Inst. Math. Jussieu》2(3)，383–399（2003）。[6] Greuel, G. -M., Lossen, C., Shustin, E.：《奇点与变形导论》。Springer，海德堡（2007）。[7] Greuel, G. -M., Pfister, G.：《交换代数的 Singular 入门》。Springer，海德堡（2008）。[8] Jong, T., Pfister, G.：《局部解析几何》。Vieweg，不伦瑞克/威斯巴登（2000）。[9] Lipman, J.：嵌入曲面的准普通奇点。博士论文，哈佛大学，马萨诸塞州（1965）。[10] Maclagan, D., Sturmfels, B.：《热带几何导论》。数学研究生丛书161，美国数学学会，罗得岛州（2015）[11] Sturmfels, B., Tevelev, J., Yu, J.：隐式方程的牛顿多胞体。《莫斯科数学杂志》7，327–346（2007）。[12] Wall, C.T.C.：平面曲线的奇异点。伦敦数学学会学生教材63，剑桥大学出版社，纽约（2004）。[13] Wolfram Research, Inc.：Mathematica，版本 13 2 https://www.wolfram.com/ 。。，mathematica 2022 伊利诺伊州尚佩恩（）。[14] Zariski, O.：《平面分支的模空间问题》。大学讲座丛书39，美国数学学会，罗得岛州（2006）。