arXiv:2301.01157v1 [math.AT] 3 Jan 2023

联系同伦函子与奇异同调函子的自然变换

BENJAMIN ENRIQUEZ 和 FLORENCE LECOMTE

Résumé. 带有两个标记点的拓扑空间范畴配备了两族函子 F_n 和 H_n，它们以整数 $n \geqslant 0$ 为指标，映到阿贝尔群范畴。第一族将对象 (X, x, y) 对应到 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x, y)$ 除以一个阿贝尔子群的商群，该子群与群代数 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x)$ 的增广理想的第 $n+1$-i`次幂相关联；第二族则将同一对象对应到 $n$-i`阶奇异相对同调群，其相对空间是根据部分对角线定义的子空间。我们构造了一族自然变换 $\nu_n : \mathrm{F}_n \to \mathrm{H}_n$。我们证明，将 ν_n `限制到代数簇子范畴并与 $\mathbb{Q}$ 张量化后得到的自然变换，正是 Beilinson 所给出的自然等价。

Table des matières

引言 2
1. 回顾 1.1. 拓扑空间与奇异同调 1.2. 拓扑空间对与相对奇异（上）同调 2. 相对同调中的一个恒等式 2.1. 基本材料与主要结果 2.2. 定理 2.3 的 (a) 部分证明 2.3. 组合构造 2.3.1. 涉及 $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0, n]\!]$ 对合的交换图 2.3.2. 与置换相关的构造和结果 2.3.3. 涉及映射 $(\underline{f}, \mathrm{sgn})$, $(\underline{f}, \widetilde{\ }\mathrm{sgn})$ 和 bij 的交换图 2.3.4. 洗牌与对换 2.3.5. 双射 bij 2.3.6. 涉及 $\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1}, \Delta^n) \times \{\pm 1\}$ 的交换图 2.4. 链群自同态的构造 2.4.1. 范畴中的态射 2.4.2. $\mathrm{div}^k_n \circ \partial_{n-1,n} = \partial_{n-1,n} \circ \mathrm{div}^k_{n-1}$ 的证明 2.4.3. $\mathcal{C}$ 中 $\mathrm{div}^k_\bullet$ 与 $id_\bullet$ 之间的关系 2.4.4. 奇异链群的自同态 2.5. 定理 2.3 的 (b) 部分证明 2.5.1. 路径的复合 2.5.2. $(\mathrm{div}^k_n)^*((\tilde{\gamma}_k * \cdots * \tilde{\gamma}_1)^{(n)})$ 的计算 2.5.3. $C_n(X^n)$ 中的一个等式 2.5.4. 定理 2.3 的 (b) 部分证明 3. 与 Beilinson 同构的联系 3.1. Beilinson 同构回顾 3.2. 定理 2.3 与 Beilinson 同构之间的关系 4. 自然变换的构造 参考文献
2 3 3 3 3 4 5 5 5 7 11 12 13 17 19 19 20 21 21 22 22 22 24 26 26 27 27 30 31

Date: 2023年1月3日。

Introduction

对于 X 一个连通拓扑空间以及 $a, b \in X$，记 $\pi_1(a,b)$ 为连接 a `到 $b$ 的路径类集合。于是， $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}\pi_1(a,b)$ 在群 $\pi_1(a) := \pi_1(a,a)$ 的群代数作用下构成一个右模，并且对于 $n \geqslant 0$, 定义 $\mathrm{F}_n(X,a,b)$ 为其商模，该商模是由群 $\pi_1(a)$ 的群代数增广理想的第 $n+1$-` 次幂作用所生成的子模 $\mathbb{Z}\pi_1(a,b) \cdot (\mathbb{Z}\pi_1(a))_+^{n+1}$ 的商。

若 X 是一条连通的可微流形，具有有限 CW 复形的同伦类型，则可将 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{F}_n(X,a,b), \mathbb{Q})$ 作上同调解释，形式为一个 $\mathbb{Q}$-向量空间同构

$$\mathrm{H}^n(X^n, Y_{ba}^{(n)}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{F}_n(X,a,b), \mathbb{Q}), \tag{0.0.1}$$

其中 ` 是由下式定义的 X^n 子集

$$Y_{ba}^{(n)} := \cup_{i=0}^n Y_{ba,i}^{(n)} \tag{0.0.2}$$

其中 $Y_{ba}^{(n)}{}_{,i} = \{(x_1,...,x_n) \in X^n | x_i = x_{i+1}\}$，其中 $x_0 = b$ 和 $x_{n+1} = a$，且 $\mathrm{H}^\bullet(-,-;\mathbb{Q})$ 表示系数取自 $\mathbb{Q}$ 的相对奇异上同调（ Beilinson 的工作，载于 [DG，BGFr]）。这一同构的构造依赖于层论技术：具体而言，构造一个 ${}_b\mathcal{K}_a \to_b \mathcal{K}_a$ 上的层复形态射以及一个同构 iso_{BGF}^{ba}： $\mathbb{H}^n(X^n, {}_b\tilde{\mathcal{K}}_a\langle n\rangle) \to \mathbf{H}^n(X^n, Y_{ba}^{(n)}; \mathbb{Q})$，其中 $\mathbb{H}(-,-)$ 表示层复形的超上同调（[BGFr], 引理 3.281）；随后通过复合构造 (0.0.1)

$$\mathrm{H}^n(X^n, Y_{ba}^{(n)}; \mathbb{Q}) \overset{(iso_{\mathrm{BGF}}^{ba})^{-1}}{\to} \mathbb{H}^n(X^n, {}_b\tilde{\mathcal{K}}_a\langle n\rangle) \to \mathbb{H}^n(X^n, {}_b\mathcal{K}_a\langle n\rangle) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{F}_n(X,a,b), \mathbb{Q}).$$

映射 (0.0.1) 的源和目标具有拓扑性质，这表明可以对该映射进行拓扑构造。本文旨在提供这样一种构造，并将其置于更一般的框架中： X 是一个拓扑空间，且我们在 $\mathbb{Z}$ 上进行研究。更确切地说，我们构造了一个 $\mathbb{Z}$-模态射

$$\mathbf{F}_n(X,a,b) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}),$$

其中 $\mathrm{H}_n(-,-)$ 是相对奇异同调（系数取自 $\mathbb{Z}$），参见定理 2.3。对于上述情形中 X 是一个可微流形的情况，我们证明了该态射与 (0.0.1) 相容，并且由 $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, \ldots, x_1)$ 给出的 X^n 自同构所诱导的同构 $\mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ba}^{(n)})$ 也与之相容（参见命题 3.1）。

本文的安排如下：第 1 节回顾奇异同调；主要部分是第 2 节，旨在证明定理 2.3；第 3 节阐明这一结果与 Beilinson 的同构 (0.0.1) 之间的联系（命题 3.1）；第 4 节研究定理 2.3 中所构造映射的函子性。

1. Rappels

在第 1.1 节中，我们回顾奇异同调的构造；在第 1.2 节中，则回顾相对同调与相对上同调的构造。

1.1. 拓扑空间与奇异同调。记 Top 为拓扑空间范畴；若 X, Y 是两个拓扑空间，则将连续映射 $X \to Y$ 的集合记作 $\mathrm{Top}(X, Y)$。

对于 $n \geqslant 0$，记由 $\Delta^n := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1\}$ 给出的单形 Δ^n。若 X 是一个拓扑空间，则对于 $n \geqslant 0$，令 $C_n(X) := \mathbb{Z}\mathrm{Top}(\Delta^n, X)$，并且令 $C_{-1}(X) = 0$。X 的子集 Y 自然赋有诱导拓扑；记作 Y_X（若不会引起混淆，也可简称为 Y）相应的拓扑空间。于是有 $\mathrm{Top}(\Delta^n, Y_X) = \{f \in \mathrm{Top}(\Delta^n, X) | f(\Delta^n) \subset Y\}$，并且对于 $n \geqslant 0$，有 $C_n(Y_X) := \mathbb{Z}\mathrm{Top}(\Delta^n, Y_X) \subset C_n(X)$。

对于 X 一个拓扑空间和 $n \geqslant 0$，记 $\partial^*_{n,\ n-1} : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ 为奇异微分。复形 $(C_\bullet(X), \partial^*)$ 的同调即为奇异同调 $\mathrm{H}_\bullet(X)$。

记 AbGr 为分次阿贝尔群范畴。奇异同调定义了一个函子 $\mathrm{H}_\bullet : \mathrm{Top} \to$分次阿贝尔群范畴。

1.2. 拓扑空间对与相对奇异（上）同调。若 X 是一个拓扑空间，且 Y是 X的一个子集，则 $(C_\bullet(Y_X), \partial^*)$ 是 $(C_\bullet(X), \partial^*)$的一个子复形，而相对同调 $\mathrm{H}_\bullet(X, Y)$ 是商复形的同调

$$(C_\bullet(X)/C_\bullet(Y_X), \partial^*);$$

这是一个分次阿贝尔群。相对上同调 $\mathrm{H}^\bullet(X, Y)$ 是复形 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(X), \mathbb{Z})$的子复形$C_\bullet(Y_X)^\perp$ 的上同调，其微分由 ∂^* 的对偶微分给出；我们有配对 $\mathrm{H}_\bullet(X, Y) \otimes \mathrm{H}^\bullet(X, Y) \to \mathbb{Z}$。于是 $\mathrm{H}^\bullet(X, Y; \mathbb{Q}) = \mathrm{H}^\bullet(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(X), \mathbb{Q})$的子复形 $C_\bullet(Y_X)^\perp \otimes \mathbb{Q}$ 的上同调。

设 Paires 为拓扑空间对的范畴。Paires 的对象是对 (X, Y)，其中 X 是拓扑空间，Y是 X的子集。我们有 $\mathrm{Paires}((A, B), (A', B')) := \{f \in \mathrm{Ens}(A, A') | f$ 是连续的，且 $f(B) \subset B'\}$。于是 $(X, Y) \mapsto \mathrm{H}_\bullet(X, Y)$ 定义了一个函子 $\mathrm{H}_\bullet : \mathrm{Paires} \to$分次阿贝尔群范畴。记 $\mathrm{H}_\bullet(A, B) \to \mathrm{H}_\bullet(A', B')$ 为分次阿贝尔群范畴 AbGr 中与 Paires 中的态射 $f : (A, B) \to (A', B')$ 相对应的态射（记 $\mathrm{H}_\bullet(f)$ 见《Ha], pp.》第 108、124 页）。

恒等映射 id_{Δ^n} 在 $'$中定义了一个 $'$元素 $'$，其在 $C_n(\Delta^n)/C_n(\partial\Delta^n)$中的像 $C_n(\Delta^n)$是相对边界下的一个循环，因此定义了相对同调群$[\mathrm{id}_{\Delta^n}] \in \mathrm{H}_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$的一个 $'$元素 $'$。

2. Une identité en homologie relative

本节旨在证明定理 2.3。该结果在第 2.1 节中提出，其第一部分（定理 2.3(a)）在第 2.2 节中证明。本节其余

内容用于证明其第二部分（定理 2.3(b)）。第2.3节包含组合性结果，第2.4节则将这些结果应用于构造链复形的奇异链除法内自同态，使其满足同伦关系 (2.4.5)。这一关系应用于第 2. 节中定理 2.3(b) 的证明。

2.1. 基本材料与主要结果。在第 2.1 节中，固定一个拓扑空间X、若干元素 $a, b \in X$以及 $n \geqslant 1$。根据 (0.0.2) 定义子集 $Y_{ab}^{(n)} \subset X^n$。记 $\mathsf{Chem}(a,b)$ 为满足 $\tilde{\gamma}(0) = a$ 和 $\tilde{\gamma}(1) = b$的连续映射 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to X$的集合。

定义 2.1. 对于 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{Chem}(a,b)$，记 $\tilde{\gamma}^{(n)} \in \mathsf{Top}(\Delta^n, X^n)$ 为复合映射 ´ee$\Delta^n \xrightarrow{\mathrm{can}^n} [0,1]^n \xrightarrow{\tilde{\gamma}^n} X^n$ o`u $\mathrm{can}_n\colon \Delta^n \to [0,1]^n$，它是典范嵌入。

引理 2.2. $\partial^*_{n,n-1}(\tilde{\gamma}^{(n)}) \in C_{n-1}(Y_{ab}^{(n)})$.

证明。对于一个 $\partial^*_{n,n-1}(\tilde{\gamma}^{(n)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{\gamma}^{(n)} \circ \partial_i^n$，或对于 $i \in [\![0,n]\!]$，映射 ∂_i^n: $\Delta^{n-1} \to \Delta^n$ 定义为 $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \ldots, t_i, t_i, \ldots, t_{n-1})$（约定 $t_0 = 0$,$t_n = 1$）。验证可得 $\tilde{\gamma}^{(n)} \circ \partial_i^n = \partial^n_{,i}{}^X \circ \tilde{\gamma}^{(n-1)}$，其中 $\partial^n_{,i}{}^X$: 映射定义为 $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_{n-1})$（约定 $x_0 = a$, $x_n = b$），因此 $\partial^*_{n,n-1}(\tilde{\gamma}^{(n)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^n_{,i}{}^X \circ \tilde{\gamma}^{(n-1)}$。对任意 $i \in [\![0,n]\!]$，有关系 $\partial^n_{,i}{}^X(X^{n-1}) = {}^{Y_{ab}^{(n)}}{}_{,i} \subset Y_{ab}^{(n)}$，由此得到所述关系。□

我们回顾一下，$C_\bullet(Y_{ab}^{(n)})$ 是 $C_\bullet(X^n)$的一个子复形，并且商复形 $C_\bullet(X^n)/C_\bullet(Y_{ab}^{(n)})$ 的同调就是相对同调 $\mathrm{H}_\bullet(X^n, Y_{ab}^{(n)})$。

由引理 2.2 可知，$\tilde{\gamma}^{(n)}$ 在 $C_n(X^n)/C_n(Y_{ab}^{(n)})$ 中的等价类是商复形的一个循环，因此定义了一个等价类 $[\tilde{\gamma}^{(n)}] \in \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$。我们将 $\pi_1(a,b)$ 记为 $\mathsf{Chem}(a,b)$ 关于由两条路径之间的同伦所定义的等价关系取商所得的商群。

定理 2.3。（a）存在唯一的映射 $\pi_1(a,b) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$, $\gamma \mapsto F_n(\gamma)$，使得映射 $\mathsf{Chem}(a,b) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$, $\tilde{\gamma} \mapsto [\tilde{\gamma}^{(n)}]$ 可分解为 $\mathsf{Chem}(a,b) \to \pi_1(a,b) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$。因此，对于 $\tilde{\gamma} \in \mathsf{Chem}(a,b)$，并记 $\tilde{\gamma} \to [\tilde{\gamma}]$为典范映射 $\mathsf{Chem}(a,b) \to \pi_1(a,b)$,

$$[\tilde{\gamma}^{(n)}] = F_n([\tilde{\gamma}]). \tag{2.1.1}$$

(b) 对于 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \pi_1(a)$, 以及 $I \subset [\![0,n]\!]$，定义 $\prod_{i \in I} \alpha_i$的乘积 $\alpha_{i(1)} \cdots \alpha_{i(|I|)}$，其中 `u i是唯一的递增双射 $[\![1, |I|]\!] \to I$。于是

$$\sum_{I \subset [\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} F_n(\gamma \cdot \prod_{i \in I} \alpha_i) = 0$$

（在 $\mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$ 中的等式 ´egalit´e）。因此，我们将 F_n 分解为一个线性映射

$$\overline{F}_{ab}^{(n)} : \mathbb{Z}\pi_1(a,b)/(\mathbb{Z}\pi_1(a,b)(\mathbb{Z}\pi_1(a))_+^{n+1}) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}),$$

o`u $(\mathbb{Z}\pi_1(a))_+$ 是 $\mathbb{Z}\pi_1(a)$ 的增广理想。

2.2. 定理 2.3 的 (a) 的证明。

引理 2.4。（a）对于 $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Chem}(a,\ b)$，$\tilde{\gamma}^{(n)}$ 诱导出一个态射

$$\tilde{\gamma}^{(n),\mathbf{Paires}} : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X^n, Y_{ab}^{(n)})$$

在 Paires 中。

(b) 对于 $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Chem}(a,b)$，有 $[\tilde{\gamma}^{(n)}] = (\tilde{\gamma}^{(n),\ \mathbf{Paires}})_*([\text{恒等映射}_{\Delta^n}]) \in \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$。

证明。(a) 由引理 2.2 的证明得出。(b) 源于元素 ´el´ement $\tilde{\gamma}^{(n)} \in C_n(X^n)$ 是由 $\tilde{\gamma}^{(n)}$ 诱导的 Top 中的态射 $\Delta^n \to X^n$ 作用于恒等映射 $_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n)$ 所得的像。

□

因此，定理 2.3 的 (a) 可由下述引理得出：

引理 2.5. 映射 $\mathrm{Chem}(\underline{X}) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$，$\tilde{\gamma} \mapsto [\tilde{\gamma}^{(n)}]$ 在同伦下不变。

证明. 设 $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' \in \mathrm{Chem}(\underline{X})$. $\tilde{\gamma}$ 与 $\tilde{\gamma}'$ 之间的一个同伦会在对偶态射 $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X^n, Y_{ab}^{(n)})$ 之间诱导一个同伦，它们由 $\tilde{\gamma}^{(n),\mathbf{Paires}}$ 和 $(\tilde{\gamma}')^{(n),\mathbf{Paires}}$ 给出。根据相对同调的同伦不变性（见 [GrH] 中的命题 13.14），诱导同调的相关态射 $\mathrm{H}_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to \mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$，即 $\mathrm{H}_n(\tilde{\gamma}^{(n),\mathbf{Paires}})$ 和 $\mathrm{H}_n((\tilde{\gamma}')^{(n),\mathbf{Paires}})$，相等。因此，它们在 [恒等映射下的像也相等，而引理 2.4(b) 于是推出 $[\tilde{\gamma}^{(n)}] = [\tilde{\gamma}'^{(n)}]$. □

2.3. 组合构造。本节的目标是，对于任意一对 $(n、\ k)$，连同 $n、\ k \geqslant 1$，构造：(a) 一个集合 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}、\ \mathbb{R}^n)$，一个映射 $(\underline{f}、$ 符号 sgn$)$：$\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0、\ n]\!] \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}、\ \mathbb{R}^{n-1}) \times \{\pm 1\}$，以及一个定义在 $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0、\ n]\!]$ 上的对合 invol，使图表 (2.3.1) 交换；(b) 映射 $(\tilde{\underline{f}}、\ \tilde{}$ sgn$)$：$\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0、\ n]\!] \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}、\ \mathbb{R}^{n-1}) \times \{\pm 1\}$ 和 bij：$\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0、\ n]\!] \to \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0、\ n]\!]$，使图表 (2.3.17) 交换；(c) 一个子集 $\mathrm{Ens}_n^k \subset \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n$ 以及一个双射 bij：$\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0、\ n]\!] \xrightarrow{\sim} \{x \in \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0、\ n]\!] | \mathrm{invol}(x) \notin \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0、\ n]\!]\}$，使图表 (2.3.19) 交换；(d) $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}、\ \mathbb{R}^n)$ 的一个子集 $\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1}、\ \Delta^n)$，以及构造映射 f：$\mathrm{Ens}_n^k \times [\![0、\ n]\!] \to \mathrm{Aff}(\Delta^{n-1}、\ \Delta^n)$ 和 $\tilde{f}$：$\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0、\ n]\!] \to \mathrm{Aff}(\Delta^{n-1}、\ \Delta^n)$，使图表 (2.3.22) 交换。

2.3.1. 涉及 $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$ 的对合的交换图。记 Aff 为仿射空间范畴，其态射为仿射映射。

对于 $n \neq 0$，记 $(e_1^n, \ldots, e_n^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基；对于 $i \in [\![0,n]\!]$，定义E_i^n:
$= e_n^n + e_{n-1}^n + \cdots + e_{n-i+1}^n \in \mathbb{R}^n$（特别地，有 $E_0^n = 0$）。

定义 2.6. 设 $n, m \geqslant 0$。对于 $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^m$，记 $[P_0, \ldots, P_n] \in \underline{\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$ 为满足 $E_i^n \mapsto P_i$ 的唯一仿射映射 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，其中 $i = 0, \ldots, n$。

定义 2.7. 对于 $i \in [\![0,n]\!]$，定义 $\underline{\partial}_i^n := [E_0^n, \dots, E_{n-i-1}^n, E_{n-i+1}^n, \dots, E_n^n] \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$。

设 $\mathfrak{S}_n$ $[\![1,n]\!]$ 的置换群为 $\mathfrak{S}_n$。对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$，记 $\mathbb{R}^n$ 的置换 σ^* 为 $\sigma^*(t_1, \dots, t_n) := (t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ 所定义。于是有 $\sigma^*(e_i^n) = e_{\sigma^{-1}(i)}^n$，且对于 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$，有 $(\sigma\tau)^* = \tau^* \circ \sigma^*$。

定义 2.8。对于 $(v,\sigma) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n$，定义 $\underline{c}_k(v,\sigma) \in \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 为从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的映射，由 $x \mapsto (1/k)(v + \sigma^*(x))$ 给出。

于是，对于 $(v,\sigma) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n$，有 $\underline{c}_k(v,\sigma) = [\underline{(1/k)(v+\sigma^* E_0^n), \dots, (1/k)(v+\sigma^* E_n^n)}]$。

定义 2.9. 记

$$\underline{f} : \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] \to \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathrm{sgn} : \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] \to \{\pm 1\}$$

由下式给出的映射

$$\underline{f}(v,\sigma,i) := \underline{c}_k(v,\sigma) \circ \underline{\partial}_i^n, \quad \mathrm{sgn}(v,\sigma,i) := (-1)^i \epsilon(\sigma).$$

定义 2.10. 记 invol 为从 $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$ 到自身的映射，由下式给出

$$\mathrm{invol}(v,\sigma,i) := (v, s_{i,i+1} \circ \sigma, i) \quad \text{pour} \quad (v,\sigma,i) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![1,n-1]\!],$$

其中 $s_{i,i+1} \in \mathfrak{S}_n$ 是 i 和 $i+1$ 的置换，

$$\mathrm{invol}(v,\sigma,n) := (v + \sigma^*(e_n^n), c \circ \sigma, 0) \quad \text{pour} \quad (v,\sigma) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n,$$

其中 $c \in \mathfrak{S}_n$ 是由 $c(i) := i+1$ 给出的 n-循环，其中 $i \neq n$, $c(n) = 1$，且

$$\mathrm{invol}(v,\sigma,0) := (v - \sigma^*(e_1^n), c^{-1} \circ \sigma, n) \quad \text{pour} \quad (v,\sigma) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n.$$

引理 2.11. (a) invol 是 $\mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$ 上的一个对合。

(b) 下图表可交换

(2.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow{\quad \mathrm{invol} \quad} & \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] \\ & {\scriptstyle (\underline{f},\mathrm{sgn})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (\underline{f},-\text{符号})} & \\ & \text{仿射映射}\ (\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^{n-1}) \times \{\pm 1\} & \end{array}$$

证明。(a) 设 $(v,\sigma,i) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$。若 $i \neq 0, n$，则 $s_{i,i+1}^2 = id$ 蕴含 $\mathrm{invol} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma, i) = (v,\sigma,i)$。若 $i = n$，则 $\mathrm{invol} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma,n) = \mathrm{invol}(v + \sigma^*(e_n^n), c \circ \sigma, 0) = (v + \sigma^*(e_n^n) - (c\circ\sigma)^*(e_1^n), c^{-1} \circ c \circ \sigma, n) = (v,\sigma,n)$，因为 $(c\circ\sigma)^*(e_1^n) = \sigma^* \circ c^*(e_1^n) = \sigma^*(e_n^n)$；而若 $i = 0$，则有 $\mathrm{invol} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma,0) = \mathrm{invol}(v - \sigma^*(e_1^n), c^{-1} \circ \sigma, n) = (v - \sigma^*(e_1^n) + (c^{-1}\circ\sigma)^*(e_n^n), c \circ c^{-1} \circ \sigma, 0) = (v,\sigma,0)$，因为 $(c^{-1}\circ\sigma)^*(e_n^n) = \sigma^* \circ (c^{-1})^*(e_n^n) = \sigma^*(e_1^n)$。因此，在所有情况下，均有 $\mathrm{invol} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma,i) = (v,\sigma,i)$。

(b) 设 $(v,\sigma,i) \in \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$。

若 $i \neq 0, n$，则由于 $\epsilon(s_{i,\ i+1}) = -1$，有 $\mathrm{sgn} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma,i) = -\mathrm{sgn}(v,\sigma,i)$。若 $i = n$，则有 $\mathrm{sgn} \circ \mathrm{invol}(v,\sigma,n) = \mathrm{sgn}(v + \sigma^*(e_1^n), c^{-1} \circ \sigma, 0) = (-1)^n \epsilon(c^{-1} \circ \sigma) = -(-1)^0 \epsilon(\sigma) =$

$-\mathrm{sgn}(v,\sigma,n)$，由于 $\epsilon(c)=(-1)^{n-1}$，且 $\mathrm{sgn}\circ\mathrm{invol}(v,\sigma,0)=\mathrm{sgn}(v-\sigma^*(e_n^n),c\circ\sigma,n)=(-1)^0\epsilon(c\circ\sigma)=-(-1)^n\epsilon(\sigma)=-\mathrm{sgn}(v,\sigma,0)$，理由相同。因此，在所有情况下都有 $\mathrm{sgn}\circ\mathrm{invol}(v,\sigma,i)=-\mathrm{sgn}(v,\sigma,i)$。

若 $i\neq 0,n$，则

$$\underline{f}\circ\mathrm{invol}(v,\sigma,i)=\underline{f}(v,s_{i,i+1}\circ\sigma,i)=[\underline{(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_0^n)/k,\ldots,(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_n^n)/k}]$$
$$\circ[\underline{E_0^n,\ldots,E_{n-i-1}^n,E_{n-i+1}^n,\ldots,E_n^n}]=[\underline{(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_0^n)/k,\ldots,(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_{n-i-1}^n)/k,}$$
$$\underline{(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_{n-i+1}^n)/k,\ldots,(v+(s_{i,i+1}\circ\sigma)^*(E_n^n)/k}]$$
$$=[\underline{(v+\sigma^*(E_0^n)/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_{n-i-1}^n)/k,(v+\sigma^*(E_{n-i+1}^n)/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_n^n)/k}]=\underline{f}(v,\sigma,i)$$

利用 $(\sigma\cdot\tau)^*=\tau^*\circ\sigma^*$ 和 $s_{i,\ i+1}^*(E_j^n)=E_j^n$ 对于 $j\in[\![0,n]\!]$ 和 $j\neq n-i$。

若 $i=n$，则

$$\begin{aligned}
&\underline{f}\circ\mathrm{invol}(v,\sigma,n)=\underline{f}(v+\sigma^*(e_n^n),c\circ\sigma,0)\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(e_n^n)+(c\circ\sigma)^*(E_0^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(e_n^n)+(c\circ\sigma)^*(E_n^n))/k}]\circ[\underline{E_0^n,\ldots,E_{n-1}^n}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(e_n^n)+(c\circ\sigma)^*(E_0^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(e_n^n)+(c\circ\sigma)^*(E_{n-1}^n))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(e_n^n+c^*(E_0^n)))/k,\ldots,(v+\sigma^*(e_n^n+c^*(E_{n-1}^n)))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(E_1^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_n^n))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(E_0^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_n^n))/k}]\circ[\underline{E_1^n,\ldots,E_n^n}]=\underline{f}(v,\sigma,n)
\end{aligned}$$

由于 $c^*(E_i^n)+e_n^n=E_{i+1}^n$ 对于 $i\in[\![0,n-1]\!]$。

若 $i=0$，则

$$\begin{aligned}
&\underline{f}\circ\mathrm{invol}(v,\sigma,0)=\underline{f}(v-\sigma^*(e_1^n),c^{-1}\circ\sigma,n)\\
&=[\underline{(v-\sigma^*(e_1^n)+(c^{-1}\circ\sigma)^*(E_0^n))/k,\ldots,(v-\sigma^*(e_1^n)+(c^{-1}\circ\sigma)^*(E_n^n))/k}]\circ[\underline{E_1^n,\ldots,E_n^n}]\\
&=[\underline{(v-\sigma^*(e_1^n)+(c^{-1}\circ\sigma)^*(E_1^n))/k,\ldots,(v-\sigma^*(e_1^n)+(c^{-1}\circ\sigma)^*(E_n^n))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(-e_1^n+(c^{-1})^*(E_1^n)))/k,\ldots,(v+\sigma^*(-e_1^n+(c^{-1})^*(E_n^n)))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(E_0^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_{n-1}^n))/k}]\\
&=[\underline{(v+\sigma^*(E_0^n))/k,\ldots,(v+\sigma^*(E_n^n))/k}]\circ[\underline{E_0^n,\ldots,E_{n-1}^n}]=\underline{f}(v,\sigma,0)
\end{aligned}$$

由于 $(c^{-1})^*(E_i^n)-e_1^n=E_{i-1}^n$ 对于 $i\in[\![1,n]\!]$。因此，在所有情况下都有 $f\circ$逆序集$(v,\sigma,i)=f(v,\sigma,i)$。□

注释 2.12. 可以直接验证，invol 没有不动点；这也可由 $\mathrm{sgn}\circ\mathrm{invol}=-\mathrm{sgn}$ 以及 $\{\pm1\}$ 在变号下没有不动点这一事实得出。

2.3.2. 关于置换的构造和结果。

引理 2.13. 设 $\tau\in\mathfrak{S}_{n-1}$。对于 $i\in[\![1,n-1]\!]$，设逆序集$(\tau,i):=\{j\in[\![1,n-1]\!]|(j-i)(\tau(j)-\tau(i))<0\}$。那么 $|\text{逆序集}(\tau,i)|\equiv\tau(i)-i$(模 2)。

证明。证明该′陈述′，对 i 作归纳。若 $i=1$，逆序集$(\tau,1)=\{j\in[\![1,n-1]\!]|\tau(j)<\tau(1)\}=\tau^{-1}([\![1,\tau(1)-1]\!])$，因此 |逆序集$(\tau,1)|=|\tau^{-1}([\![1,\tau(1)-1]\!])|=|[\![1,\tau(1)-1]\!]|$ =$\tau(1)-1$或第二个等式′由 τ 的双射性得出，这意味着对 $i=1$ 的陈述成立。

设 $1\leqslant i<n-1$：假设该命题对 i 成立，并证明它对 $i+1$ 也成立。为此，记 $\mathrm{A}_0:=\{j|j<i$ 和 $\tau(j)>\tau(i)\}$，$\mathrm{A}_1:=\{j|j<i$ 和 $\tau(j)>\tau(i+1)\}$，$\mathrm{B}_0:=\{j|j>i+1$ 和 $\tau(j)<\tau(i)\}$，$\mathrm{B}_1:=\{j|j>i+1$ 和 $\tau(j)<\tau(i+1)\}$；注意到对所有的 α、$\beta\in\{0、1\}$，$\mathrm{A}_\alpha\cap\mathrm{B}_\beta=\varnothing$。

有两种情况：

• 有 $\tau(i)<\tau(i+1)$。于是有 $i+1\notin$逆序集$(\tau,\ i)$ 和 $i\notin$逆序集$(\tau,\ i+1)$，这意味着逆序集 $(\tau,\ i)$ $=\mathrm{A}_0\cup\mathrm{B}_0$ 和 逆序集 $(\tau,\ i+1)$ $=\mathrm{A}_1\cup\mathrm{B}_1$。记 $\triangle$ 为对称差运算′，得到

$$\mathbf{inv}(\tau,i)\triangle\mathbf{inv}(\tau,i+1)=(\mathbf{A}_0\triangle\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_0\triangle\mathbf{B}_1), \tag{2.3.2}$$

考虑到 $(X_0\cup Y_0)\triangle(X_1\cup Y_1)=(X_0\triangle X_1)\cup(Y_0\triangle Y_1)$ 对于满足 $X_\alpha\cap Y_\beta=\varnothing$的所有集合 X_0,X_1，Y_0,Y_1。由于 $\tau(i)<\tau(i+1)$，有 $\mathrm{A}_1\subset\mathrm{A}_0$ 和 $\mathrm{B}_1\supset\mathrm{B}_0,$，这意味着

$$(\mathbf{A}_0\triangle\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_0\triangle\mathbf{B}_1)=(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_0). \tag{2.3.3}$$

于是

$$\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1=\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)]\!])\cap\{j|j<i\},\quad \mathbf{B}_1-\mathbf{B}_0=\tau^{-1}([\![\tau(i),\tau(i+1)-1]\!])\cap\{j|j>i+1\}.$$

由于 $\tau(i+1)\notin\tau(\{j|j<i\})$和 $\tau(i)\notin\tau(\{j|j>i+1\})$，由此可得′

$$\mathrm{A}_0-\mathrm{A}_1=\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!])\cap\{j|j<i\},\ \mathrm{B}_1-\mathrm{B}_0=\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!])\cap\{j|j>i+1\},$$

因此 $(\mathrm{A}_0-\mathrm{A}_1)\cup(\mathrm{B}_1-\mathrm{B}_0)=\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!])\cap\{j|j\neq i,i+1\}$。考虑到$\{i,i+1\}\cap\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!])=\varnothing$，由此可得′

$$(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_0)=\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!]). \tag{2.3.4}$$

那么

$$|\mathbf{inv}(\tau,i+1)|-|\mathbf{inv}(\tau,i)|\equiv|\mathbf{inv}(\tau,i)\triangle\mathbf{inv}(\tau,i+1)|=|(\mathbf{A}_0-\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_0)|$$
$$=|\tau^{-1}([\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!])|=|[\![\tau(i)+1,\tau(i+1)-1]\!]|=\tau(i+1)-\tau(i)-1 \tag{2.3.5}$$

模 2，其中第一条等式由此得出。

$$|A\triangle B|\equiv|B|-|A|\bmod 2\text{ pour }A,B\text{ ensembles finis}, \tag{2.3.6}$$

第二个等式由 (2.3.2) 和 (2.3.3) 的组合得出，第三个等式由 (2.3.4) 得出，第四个等式由 τ 的双射性得出；

• 有 $\tau(i+1)<\tau(i)$。于是 $\mathrm{A}_1\supset\mathrm{A}_0$ 和 $\mathrm{B}_1\subset\mathrm{B}_0,$，这意味着

$$(\mathbf{A}_0\triangle\mathbf{A}_1)\cup(\mathbf{B}_0\triangle\mathbf{B}_1)=(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_0)\cup(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_1). \tag{2.3.7}$$

那么

$$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_0=\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)]\!])\cap\{j|j<i\},\quad \mathbf{B}_0-\mathbf{B}_1=\tau^{-1}([\![\tau(i+1),\tau(i)-1]\!])\cap\{j|j>i+1\}.$$

而 $\tau(i)\notin\tau(\{j|j<i\})$、 $\tau(i+1)\notin\tau(\{j|j>i+1\})$, 因此

$\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_0=\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!])\cap\{j|j<i\}$, $\mathrm{B}_0-\mathrm{B}_1=\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!])\cap\{j|j>i+\quad 1\}$.

因此 $(\mathrm{A}_1-\mathrm{A}_0)\cup(\mathrm{B}_0-\mathrm{B}_1)=\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!])\cap\{j|j\neq i,i+1\}$。考虑到 $\{i,i+1\}\cap\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!])=\varnothing$, 可推得

$$(\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_0)\cup(\mathbf{B}_0-\mathbf{B}_1)=\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!]). \tag{2.3.8}$$

此外, 由于 $\tau(i+1)<\tau(i)$, 有 $\mathrm{inv}(\tau,i)=\mathrm{A}_0\cup\mathrm{B}_0\cup\{i+1\}$ 和 $\mathrm{inv}(\tau,i+1)=\mathrm{A}_1\cup\mathrm{B}_1\cup\{i\}$。又有 $i\notin\mathrm{inv}(\tau,i)$ 和 $i+1\notin\mathrm{inv}(\tau,i+1)$, 因此

$$\mathbf{inv}(\tau,i)\triangle\mathbf{inv}(\tau,i+1)=((\mathbf{A}_0\cup\mathbf{B}_0)\triangle(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{B}_1))\cup\{i,i+1\}. \tag{2.3.9}$$

于是

$$\begin{aligned}&|\text{逆序集}(\tau,i)|-|\text{逆序集}(\tau,i+1)|\equiv|\text{逆序集}(\tau,i)\triangle\text{逆序集}(\tau,i+1)|=|(\mathrm{A}_0\cup\mathrm{B}_0)\triangle(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{B}_1)|-2\\&\equiv|(\mathbf{A}_0\cup\mathbf{B}_0)\triangle(\mathbf{A}_1\cup\mathbf{B}_1)|=|\tau^{-1}([\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!])|=|[\![\tau(i+1)+1,\tau(i)-1]\!]|=\tau(i)-\tau(i+1)-1.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

第一个 ′等式′由 (2.3.6) 得出, 且模 2; 第二个 ′等式′由 (2.3.9) 结合′ ′得出; $i+1\}\cap((\mathrm{A}_0\cup\mathrm{B}_0)\triangle(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{B}_1))\subset\{i,i+1\}\cap\{j|j\neq i,i+1\}=\varnothing$; 第四个′等式′由 (2.3.2) 和 (2.3.7) 的组合得出; 第五个 ′等式′由τ的双射性得出。

由第一种情况中的等式 (2.3.5) 和第二种情况中的等式 (2.3.10), 可推出模 2 的等式 $|\mathrm{inv}(i+1)|-\tau(i+1)+i+1\equiv|\mathrm{inv}(i)|-\tau(i)+i$。根据归纳假设, 有 $|\mathrm{inv}(\tau,i)|-\tau(i)+i\equiv0$, 模 2, 因此可得 $|\mathrm{inv}(\tau,i+1)|-\tau(i+1)+i+1\equiv0$, 模 2。□

定义 2.14。设 $i\in[\![1,n-1]\!]$。

(a) 记 p_i: $[\![1,n]\!]\to[\![1,n-1]\!]$ 为由以下规则给出的映射: 当 $x\leqslant i$ 时取 $p_i(x)=x$, 当 $x\geqslant i+1$ 时取 $p_i(x)=x-1$。

(b) 记 st_i: $[\![1,n-1]\!]\to[\![1,n]\!]$ 为映射, 定义为 $x\mapsto x$ 当 $x\leqslant i$ 且 $x\mapsto x+1$ 当 $x\geqslant i+1$。

引理—定义 2.15. 设 $\tau\in\mathfrak{S}_{n-1}$ 和 $i\in[\![0,n]\!]$。存在唯一的 ′元 ′, 满足以下条件:

(a) $p_{\tau(i)}\circ\tau^{(i)}=\tau\circ p_i$ *et* $\tau^{(i)}(i)=\tau(i)$, $\tau^{(i)}(i+1)=\tau(i)+1$ *si* $i\neq0,n$ *;*
(b) $\tau^{(0)}(1)=1$ *et* $\tau^{(0)}(x)=\tau(x-1)+1$ *pour tout* $x\in[\![2,n]\!]$ *si* $i=0$ *;*
(c) $\tau^{(n)}(n)=n$ *et* $\tau^{(n)}(x)=\tau(x)$ *pour tout* $x\in[\![1,n-1]\!]$ *si* $i=n$.

证 ′明。(a) 对于 $j\in[\![0,n]\!]$, $\mathrm{st}_j\circ p_j$ 是从 $[\![1,n]\!]$ 到其自身的映射, 使得$x\mapsto x$ 对于 $x\neq j+1$ 和 $j+1\mapsto j$成立。若 $\tau^{(i)}$ 是从 $[\![1,n]\!]$ 到其自身且满足上述条件的映射, 则有 $\mathrm{st}_{\tau(i)}\circ\circ p_{\tau(i)}\circ\tau^{(i)}=\mathrm{st}\tau^{(i)}\circ\tau\circ p_i$, 这意味着$\tau^{(i)}(x)=$对所有 $x\neq i,i+1$ 以及 $\tau^{(i)}(i)=\tau(i)$, $\tau^{(i)}(i+1)=\tau(i)+1$均有 $\mathrm{st}_{\tau(i)}\circ\tau\circ p_i(x)$。因此, 上述条件唯一确定了作为从 $[\![1,n]\!]$ 到其自身映射的 $\tau^{(i)}$。

于是可验证 $\tau^{(i)} \in \mathfrak{S}_n$。(b,c) 对于 $i = 0, n$，映射 $\tau^{(i)}$是两个置换的并置，因此也是一个置换。□

引理 2.16. 若 $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$和 $i \in [\![1, n-1]\!]$，则 $\epsilon(\tau^{(i)}) = \epsilon(\tau)(-1)^{\tau(i)-i}$。

证明。若 $p \geqslant 1$和 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$，记 $\mathbf{inv}(\sigma) := \{(a,b) \in [\![1,p]\!]^2 | a < b$和 $\sigma(a) > \sigma(b)\}$。于是有

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{|\mathbf{inv}(\sigma)|}. \tag{2.3.11}$$

若 $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$和 $i \in [\![1, n-1]\!]$，则有一个划分

$$\mathbf{inv}(\tau) = A \sqcup B, \tag{2.3.12}$$

其中 $A := \{(a,b) \in \mathbf{inv}(\tau) | a \neq i$和 $b \neq i\}$，以及 $B := \{(a,b) \in \mathbf{inv}(\tau) | a = i$或 $b = i\}$。类似地，我们有一个划分

$$\mathbf{inv}(\tau^{(i)}) = A' \sqcup B' \sqcup B'', \tag{2.3.13}$$

avec

$$A' := \{(a,b) \in \mathbf{inv}(\tau^{(i)}) | a \notin \{i, i+1\} \text{ et } b \notin \{i, i+1\}\},$$

$$B' := \{(a,b) \in \mathbf{inv}(\tau^{(i)}) | (a = i \text{ et } b \notin \{i, i+1\}) \text{ ou } (b = i \text{ et } a \notin \{i, i+1\})\}$$

$$B'' := \{(a,b) \in \mathbf{inv}(\tau^{(i)}) | (a = i+1 \text{ et } b \notin \{i, i+1\}) \text{ ou } (b = i+1 \text{ et } a \notin \{i, i+1\})\}$$

这是因为 $(i, i+1) \notin$逆序集$(\tau^{(i)})$因为 $\tau^{(i)}(i+1) = 1 + \tau^{(i)}(i)$。

我们还得到一些双射

$$A \xrightarrow{\sim} A', \quad B \xrightarrow{\sim} B', \quad B \xrightarrow{\sim} B'' \tag{2.3.14}$$

分别由 $(a,b) \mapsto (\mathsf{st}_i(a)$、$\mathsf{st}_i(b))$（映射 $A \to A'$），$(a,i) \mapsto (a,i)$ 和 $(i,b) \mapsto (i, b+1)$（映射 $B \to B'$），$(a,i) \mapsto (a, i+1)$ 和 $(i,b) \mapsto (i+1, b+1)$（映射$B \to B''$）诱导。最后，我们有一个双射

$$\mathbf{inv}(\tau, i) \xrightarrow{\sim} B \tag{2.3.15}$$

定义为：若 $a < i$，则为 $a \mapsto (a,i)$；若 $i < a$，则为 $a \mapsto (i,a)$。

于是

$$|\mathbf{inv}(\tau^{(i)})| = |A'| \sqcup |B'| \sqcup |B''| = (|A| \sqcup |B|) \sqcup |B| = |\mathbf{inv}(\tau)| + |\mathbf{inv}(\tau, i)| \equiv |\mathbf{inv}(\tau)| + \tau(i) - i \tag{2.3.16}$$

模 2，其中第一（分别为第二、第三、第四）个等式由 (2.3.13)（分别由 (2.3.14)、(2.3.15)、引理 2.13）推出。于是

$$\epsilon(\tau^{(i)}) = (-1)^{|\mathbf{inv}(\tau^{(i)})|} = (-1)^{|\mathbf{inv}(\tau)| + \tau(i) - i} = (-1)^{|\mathbf{inv}(\tau)|}(-1)^{\tau(i)-i} = \epsilon(\tau)(-1)^{\tau(i)-i}.$$

où 第一个（分别为第二个、最后一个）等式由（2.3.11）（分别由（2.3.16）、（2.3.11）得出 ）). □

2.3.3. 涉及映射($\underline{f}$、符号), ($\underline{f}$ 符号)和双射的交换图。

定义 2.17。记

$$\underline{\tilde{f}} : \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0,n]\!] \to \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{sgn}} : \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0,n]\!] \to \{\pm 1\}$$

由.....给出的映射

$$\underline{\tilde{f}}(\tilde{v}, \tilde{\sigma}, i) := \underline{\partial}_i^n \circ \underline{c}_k(\tilde{v}, \tilde{\sigma}), \quad \widetilde{\mathrm{sgn}}(\tilde{v}, \tilde{\sigma}, i) := (-1)^i \epsilon(\tilde{\sigma}).$$

定义 2.18。记 $w \mapsto w^{(0)}$ 和 $w \mapsto w^{(n)}$ 为由 $\mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}^n$ 给出的映射$w^{(0)} := (0, w)$ 和 $w^{(n)} := (w, k-1)$。

定义 2.19。记 bij : $\mathbb{Z}^{n-1} \times \underline{\mathfrak{S}_{n-1}} \times [\![0,n]\!] \to \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!]$ 为由 $(w, \tau, i) \mapsto (w \circ p_i, \tau^{(i)}, \tau(i))$ 给出的映射; 若 $i \neq 0, n$, 则为 $(w, \tau, 0) \mapsto (w^{(0)}, \tau^{(0)}, 0)$; 而$(w, \tau, n) \mapsto (w^{(n)}, \tau^{(n)}, n)$。

引理 2.20。下图可交换

(2.3.17)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow{\underline{\mathrm{bij}}} & \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] \\ & {\scriptstyle \underline{(f,\frown}_{\text{符号})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (\tilde{f}\text{符号})}} & \\ & \text{仿射映射}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}) \times \{\pm 1\} & \end{array}$$

证明。设 $(w, \tau, i) \in \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0,n]\!]$。假设 $i \neq 0, n$。那么

$$\mathrm{sgn} \circ \underline{\mathrm{bij}}(w, \tau, i) = \mathrm{sgn}(w \circ p_i, \tau^{(i)}, \tau(i)) = \epsilon(\tau^{(i)})(-1)^{\tau(i)} = \epsilon(\tau)(-1)^i = \widetilde{\mathrm{sgn}}(w, \tau, i)$$

根据引理 2.16。此外

$$\begin{aligned} &\underline{f} \circ \underline{\mathrm{bij}}(w, \tau, i) = \underline{f}(w \circ p_i, \tau^{(i)}, \tau(i)) = \underline{c}_k(w \circ p_i, \tau^{(i)}) \circ \underline{\partial}_{\tau(i)}^n \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w \circ p_i + (\tau^{(i)})^*(t_1, \ldots, t_{\tau(i)}, t_{\tau(i)}, \ldots, t_{n-1}))/k] \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w \circ p_i + (\tau^{(i)})^*(t_{p_{\tau(i)}(1)}, \ldots, t_{p_{\tau(i)}(n)}))/k] \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w \circ p_i + (t_{p_{\tau(i)} \circ \tau^{(i)}(1)}, \ldots, t_{p_{\tau(i)} \circ \tau^{(i)}(n)}))/k] \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w \circ p_i + (t_{\tau \circ p_i(1)}, \ldots, t_{\tau \circ p_i(n)}))/k] \\ &= \underline{\partial}_i^n \circ [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w + (t_{\tau(1)}, \ldots, t_{\tau(n-1)}))/k] \\ &= \underline{\partial}_i^n \circ [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w + \tau^*(t_1, \ldots, t_{n-1}))/k] = \underline{\partial}_i^n \circ \underline{c}_k(w, \tau) = \underline{\tilde{f}}(w, \tau, i) \end{aligned}$$

其中第六个等式来自 $\tau \circ p_i = p_{\tau(i)} \circ \tau^{(i)}$ （映射 $[\![1,n]\!] \to [\![1, n-1]\!]$ 的等式）, 第七个等式则由 $\underline{\partial}_i^n(x) = x \circ p_i$ 对于 $x \in \mathbb{R}^{n-1} = \mathbf{Appl}([\![1, n-1]\!], \mathbb{R})$ 得出。

若 $i = 0$, 则

$$\begin{aligned} &\underline{f} \circ \underline{\mathrm{bij}}(w, \tau, 0) = \underline{f}(w^{(0)}, \tau^{(0)}, 0) = \underline{c}_k(w^{(0)}, \tau^{(0)}) \circ \underline{\partial}_0^n \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (w^{(0)} + (\tau^{(0)})^*(0, t_1, \ldots, t_{n-1}))/k] \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto ((0, w) + (0, \tau^*(t_1, \ldots, t_{n-1})))/k] \\ &= [(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (0, w + \tau^*(t_1, \ldots, t_{n-1}))/k] = \underline{\partial}_0^n \circ \underline{c}_k(w, \tau) = \underline{\tilde{f}}(w, \tau, 0). \end{aligned}$$

若 $i=n$，则

$$\begin{aligned}&\underline{f}\circ\underline{\mathrm{bij}}(w,\tau,n)=\underline{f}(w^{(n)},\tau^{(n)},n)=\underline{c}_k(w^{(n)},\tau^{(n)})\circ\underline{\partial}_n^n\\&=[(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto(w^{(n)}+(\tau^{(n)})^*(t_1,\dots,t_{n-1},1))/k]\\&=[(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto((w,k-1)+(\tau^*(t_1,\dots,t_{n-1}),1))/k]\\&=[(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto(w+\tau^*(t_1,\dots,t_{n-1}),k)/k]\\&=[(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto((w+\tau^*(t_1,\dots,t_{n-1}))/k,1)]\\&=\underline{\partial}_n^n\circ[(t_1,\dots,t_{n-1})\mapsto(w+\tau^*(t_1,\dots,t_{n-1}))/k]=\underline{\partial}_n^n\circ\underline{c}_k(w,\tau)=\underline{\tilde{f}}(w,\tau,n).\end{aligned}$$

□

2.3.4. 洗牌与对换。

定义 2.21. 若 $n\geqslant 1$ 和 $n_1,\dots,n_k$ 是满足 $n_1+\cdots+n_k=n$ 的非负整数，则记 $\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}$ 为满足以下条件的 ′个′元素 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ 的集合：对任意 $i=1,\dots,k$，从 σ `到 $n_1+\cdots+n_{i-1}+[\![1,n_i]\!]$ 的限制是递增的。

若 $n_i=0$，则集合 $[\![1,n_i]\!]$ 为空，因此关于 `到 i 的条件自动满足。

引理 2.22. 设 $n_1,\dots,n_k$ 是 $\geqslant 1$ 的整数，且 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}$ 以及 $i\in[\![1,n-1]\!]$ 满足 $n:=n_1+\cdots+n_k$。则 $s_{i,i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}$ 当且仅当 $\sigma^{-1}(i)\notin\{n_1,n_1+n_2,\dots,n_1+\cdots+n_k\}$ 以及 $\sigma^{-1}(i+1)=\sigma^{-1}(i)+1$。

D ′证明。设 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\ .....,\ n_k}$ 以及 $i\in[\![1、\ n-1]\!]$。设 $j:=\sigma^{-1}(i)$、$j':=\sigma^{-1}(i+1)$。对于 $\alpha\in[\![1、\ k]\!]$，记 $I_\alpha:=n_1+\cdots+n_{\alpha-1}+[\![1、\ n_\alpha]\!]$。于是得到一个划分 $[\![1、\ n]\!]=\sqcup_{\alpha=1}^k I_\alpha$。设 α、$\alpha'\in[\![1、\ k]\!]$ 为满足 $j\in I_\alpha$、$j'\in I_{\alpha'}$ 的指标。为证明所述的等价性，先证明等价性 ′′，然后证明等价性 ′$(\alpha=\alpha')\iff(s_{i,\ i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{n_1,\ .....,\ n_k})$，最后证明等价性 ′$(\alpha=\alpha')\iff(\sigma^{-1}(i)\notin\{n_1、\ n_1+n_2、\ .....、\ n_1+\cdots+n_k\}$ 以及 $\sigma^{-1}(i+1)=\sigma^{-1}(i)+1$。

第一 `步：′等价关系 $(\alpha=\alpha')\iff(s_{i,\ i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{n_1,\ .....n_k})$。（a）假设 $\alpha=\alpha'$。那么有 $j,j'\in I_\alpha$。$\sigma_{|I_\alpha}$ 的限制是严格递增的，且 $\sigma(j)=i,\sigma(j')=i+1$，因此 $j<j'$。此外，若有 $j'>j+1$，则 $j+1\in I_\alpha$ 且 $\sigma(j)<\sigma(j+1)<\sigma(j')$，因此$i<\sigma(j+1)<i+1$，这是不可能的，因为 $\sigma(j+1)$ ′是整数。因此 $j'=j+1$。由于$j+1\in I_\alpha$，必然有 $j\neq n_1+\cdots+n_\alpha$。此外，$s_{i,\ i+1}\circ\sigma$ `到 I_α 的限制满足 $j\mapsto i+1$ 且 $j+1\mapsto i$；因此该限制并非严格递增，所以$s_{i,\ i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{n_1,\ .....n_k}$。

假设 $\alpha\neq\alpha'$。由于 $\sigma(I_\alpha)\not\ni i+1$，$s_{i,\ i+1}\circ\sigma$ `a $I_\alpha$ 的限制等于 $a\circ\sigma_{|I_\alpha}$，其中 $a$：$\sigma(I_\alpha)\to[\![1,n]\!]$ 在 $x\neq i$ 时由 $x\mapsto x$ 给出，且 $i\mapsto i+1$。映射 $a$ 是递增的，因此$(s_{i,\ i+1}\circ\sigma)_{|I_\alpha}$ 也如此。同理，$\sigma(I_{\alpha'})\not\ni i$，因此 $s_{i,\ i+1}\circ\sigma$ `a$I_{\alpha'}$ 的限制等于 $a'\circ\sigma_{|I_\alpha}$，其中 a'：$\sigma(I_{\alpha'})\to[\![1,n]\!]$ 在 $x\neq i+1$ 时由 $x\mapsto x$ 给出，且 $i+1\mapsto i$。

映射 a' 是递增的，因此$(s_{i,\ i+1}\circ\sigma)_{|I_{\alpha'}}$ 也如此。最后，对于任意 $\beta\neq\alpha,\alpha'$，有$(s_{i,\ i+1}\circ\sigma)_{|I_\beta}=\sigma_{|I_\beta}$，因此$(s_{i,\ i+1}\circ\sigma)_{|I_\beta}$ 是递增的。于是$s_{i,\ i+1}\circ\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\ \ldots\ldots,\ n_k}$。

因此，〞与$s_{i,\ i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{n_1,\ \ldots\ldots,\ n_k}$之间存在等价关系，且$n_k$与 $\alpha=\alpha'$等价。

第二〞步：$(\alpha=\alpha')\iff(\sigma^{-1}(i)\notin\{n_1、\ n_1+n_2、\ldots\ldots、\ n_1+\cdots+n_k\}$和 $\sigma^{-1}(i+1)=\sigma^{-1}(i)+1)$。我们已经看到，若 $\alpha=\alpha'$，则 $j'=j+1$和 $j\neq n_1+\cdots+n_\alpha$。由于 $j\in I_\alpha$，对于任意 $\beta\neq\alpha$，也有 $j\neq n_1+\cdots+n_\beta$，因此 $j\notin\{n_1、\ldots\ldots、\ n_1+\cdots+n_k\}$。

反过来，如果 $j'=j+1$和 $j\notin\{n_1,\ldots,n_1+\cdots+n_k\}$，则有 $j\neq n_1+\cdots+n_\alpha$，因此$j\in n_1+\cdots+n_{\alpha-1}+[\![1,$ 因此 $j'=j+1\in n_1+\cdots+n_{\alpha-1}+[\![1,\ n_\alpha]\!]=I_\alpha$，所以 $\alpha=\alpha'$。□

2.3.5. 双射 bij。

D〞efinition 2.23. (a) 记作 $[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n:=\{(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{Z}^n|0\leqslant v_1\leqslant\ldots\leqslant v_n\leqslant k-1\}$. (b) 记 $\mathbf{Ens}_n^k$ 为由下列有序对组成的集合 $(v,\sigma)\in[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n\times\mathfrak{S}_n$，满足 $\sigma\in\mathfrak{S}_{|v^{-1}(0)|,\ldots,|v^{-1}(k-1)|}$.

若 $(v,\sigma)\in\mathbf{Ens}_n^k$，则对任意 $i\in[\![1,n-1]\!]$，都有蕴含关系

$$(v_i=v_{i+1})\implies(\sigma(i)<\sigma(i+1)).\tag{2.3.18}$$

引理 2.24. 设 $(v,\sigma,i)\in\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$。

(a) 若 $i\neq0,n$，则条件 $\mathbf{invol}(v,\sigma,i)\notin\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$等价于 $\sigma^{-1}(i)\notin\{|v^{-1}(0)|、\ldots\ldots、|v^{-1}(0)|+\cdots+|v^{-1}(k-1)|\}$ 与 $\sigma^{-1}(i+1)=\sigma^{-1}(i)+1$的合取。

(b) 若 $i=n$，则条件 $\mathbf{invol}(v,\sigma,i)\notin\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$ 等价于 $\sigma(n)=n$ 与 $v(n)=k-1$ 的合取；

(c) 若 $i=0$，则条件 $\mathbf{invol}(v,\sigma,i)\notin\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$ 等价于合取条件$\sigma(1)=1$ 和 $v(1)=0$。

证明。(a) 有 $\sigma\in\mathfrak{S}_{|v^{-1}(0)|,\ldots,|v^{-1}(0)|+\cdots+|v^{-1}(k-1)|}$，且 $\mathbf{invol}(v,\sigma,i)=(v,s_{i,i+1}\circ\sigma,i)$。因此有 $v\in[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$，从而 $\mathbf{invol}(v,\sigma,i)\notin\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$ 与 $s_{i,i+1}\circ\sigma\notin\mathfrak{S}_{|v^{-1}(0)|,\ldots,|v^{-1}(0)|+\cdots+|v^{-1}(k-1)|}$ 等价。结论由引理 2.22 得出。

（b）回顾一下 $\mathbf{invol}(v,\sigma,n)=(v+e^n_{\sigma^{-1}(n)},c\circ\sigma,0)$。

记 $n_\alpha:=|v^{-1}(\alpha-1)|$表示 $\alpha=1,\ldots,k$。于是有一个划分 $[\![1,n]\!]=\sqcup_{\alpha=1}^k I_\alpha$，其中 $I_\alpha=n_1+\cdots+n_{\alpha-1}+[\![1,n_\alpha]\!]$（约定：若 $n_\alpha=0$，则 $I_\alpha=\varnothing$），并且对于任意 α，v在 I_α上的取值为 $\alpha-1$。回顾一下，将 $[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$〝与集合 $\mathbf{Appl}_{\leqslant}([\![1,n]\!],[\![0,k-1]\!])$相认同。因此有 $\sigma^{-1}(n)\in\{n_1+\cdots+n_\beta|n_\beta\neq0\}$，即 $v+e^n_{\sigma^{-1}(n)}\in\mathbf{Appl}_{\leqslant}([\![1,n]\!],[\![0,k]\!])$。此外，$v+e^n_{\sigma^{-1}(n)}$取值为 k当且仅当 $n_k\neq0$且 $\sigma^{-1}(n)=n_1+\cdots+n_k$。这些条件合取等价于 $v(n)=k-1$和 $\sigma(n)=n$。这说明$v+e^n_{\sigma^{-1}(n)}\notin[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$与条件 $v(n)=k-1$和 $\sigma(n)=n$的合取等价。

那么，如果 $v(n)=k-1$和 $\sigma(n)=n$，则有$v+e^n_{\sigma^{-1}(n)}\notin[\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$，因此 $\mathbf{invol}(v,\sigma,0)\notin\mathbf{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]$。

如果 $v(n) < k-1$ 或 $\sigma(n) \neq n$，证明 $\mathrm{invol}(v,\sigma,0) \in \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!]$。一方面，有 $w := v + e^n_{\sigma^{-1}(n)} \in [\![0,k-1]\!]^n_{\leqslant}$。另一方面，证明有 $c \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|,\dots,|w^{-1}(k-1)|}$，这对以下每种情况都成立：$\sigma(n) \neq n$ 和 $(\sigma(n) = n$ 和 $v(n) < k-1)$。

第一种情况：$\sigma(n) \neq n$。设 α 为满足 $\sigma^{-1}(n) \in I_\alpha$的指标。必然有 $\alpha < k$ et$n_\alpha > 0$；此外，$\sigma^{-1}(n) = \max(I_\alpha)$。回忆 $(|v^{-1}(0)|, \dots, |v^{-1}(k-1)|) = (n_1, \dots, n_k)$，于是有 $(|w^{-1}(0)|, \dots, |w^{-1}(k-1)|) = (n_1, \dots, n_\alpha - 1, n_{\alpha+1}+1, \dots, n_k)$，并且与 $[\![1$相关的 $n]\!]$associ´ee `a w的划分为 $(J_1, \dots, J_k)$，其中 $J_\beta = I_\beta$对应于 $\beta \in [\![1, k]\!] - \{\alpha, \alpha+1\}$，$J_\alpha = I_\alpha - \{\max(I_\alpha)\}$，$J_{\alpha+1} = \{\max(I_\alpha)\} \cup I_{\alpha+1}$。证明 $c \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_{\alpha+1}+1, \dots, n_k}$。如果 $\beta \in [\![1, k]\!] - \{\alpha\}$，那么 $\sigma(I_\beta) \not\ni n$。因此，$c$ `a $\sigma(I_\beta)$的限制是 $x \mapsto x+1$，且严格递增。因此，$c\circ\sigma$ `a I_β的限制严格递增。特别地，如果 $\beta \in [\![1, k]\!] - \{\alpha, \alpha+1\}$，则 $c \circ \sigma$ `a $J_\beta = I_\beta$的限制严格递增。

回顾一下，$c\circ\sigma$ `到 $I_{\alpha+1}$的限制严格递增。我们有 $J_\alpha = \{\max(I_\alpha)\} \cup I_{\alpha+1}$，其中$\max(I_\alpha) \leqslant I_{\alpha+1}$ 且 $c \circ \sigma(\max(I_\alpha)) = 0$，因此 $c \circ \sigma$ `到 $J_{\alpha+1}$ 的限制严格递增。

由于 $J_\alpha = I_\alpha - \{\max(I_\alpha)\}$ 且$\max(I_\alpha) = \sigma^{-1}(n)$，我们有 $\sigma(J_\alpha) \not\ni n$。因此，$c$到 $\sigma(J_\beta)$ 的限制是 $x \mapsto x+1$，并且严格递增。所以 $c \circ \sigma$ `到 J_α 的限制严格递增。

因此我们有$c \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|, \dots, |w^{-1}(k-1)|}$。

第二种情况：`和 $\sigma(n) = n$。设 $v(n) < k-1$: p max$= 1 +$,$\{i \in [\![0$; 那么 $k-1]\!]||v^{-1}(i)| \neq 0\}$。于是 $p < k, \dots, (|v^{-1}(0)|, \dots, |v^{-1}(k-1)|) = (n_1, 0, \dots, n_p$。由于$0)$，我们有 $\sigma(n) = n$。因此$\sigma^{-1}(n) = n = n_1 + \cdots + n_p, \dots, (|w^{-1}(0)|, \dots, |w^{-1}(k-1)|) = (n_1, 1, 0, \dots, n_p - 1,$ 对应于$0)$的划分由 `, $\dots, w$ ´给出，其中´用于 $(J_1, J_k)$，$J_\alpha = I_\alpha$: $\alpha \neq p$，且 $p+1$。如果$J_p$ ,$= I_p - \{n\}$, $J_{p+1} = \{n\}$，那么 $\alpha \neq p$对 $p+1$的限制是 $\sigma(I_\alpha) \not\ni n$，它严格递增，因此 $c$ `对 $\sigma(I_\alpha)$ 的限制严格递增。我们有$x \mapsto x+1$ 和 $c \circ \sigma$ `，因此 $J_\alpha = I_\alpha$，所以 $J_p = I_p - \{n\}$ 对 $\sigma(n) = n$的限制是 $\sigma(J_p) \not\ni n$，它严格递增，因此 $c$ `对 $\sigma(J_p)$的限制严格递增。最后，$x \mapsto x+1$ 是单元素集合，因此 $c \circ \sigma$ `在该集合上的限制严格递增。

因此 $c \circ \sigma \in \mathfrak{S}_{n_1, \dots, n_p - 1, 1, 0, \dots, 0} = \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|, \dots, |w^{-1}(k-1)|}$.

(c) 证明与 (b) 中的证明类似。 □

引理 2.25. bij 诱导出 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0,n]\!]$ 与 $\{x \in \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!] | \mathrm{invol}(x) \notin \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!]\}$之间的双射 bij。因此有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{bij}} & \{x \in \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!] | \mathrm{invol}(x) \notin \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!]\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow[\underline{\mathrm{bij}}]{} & \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![0,n]\!] \end{array} \tag{2.3.19}$$

证明。根据引理 1.29，只需证明 bij 诱导出 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0,n]\!]$ 之间的双射

$$E := E_n \sqcup E_0 \sqcup E_{[\![1,n-1]\!]}$$

où

$$E_n := \{(v,\sigma,n) | (v,\sigma) \in \mathrm{Ens}_n^k \text{ et } \sigma(n) = n \text{ et } v(n) = k-1\},$$
$$E_0 := \{(v,\sigma,0) | (v,\sigma) \in \mathrm{Ens}_n^k \text{ et } \sigma(1) = 1 \text{ et } v(1) = 0\},$$
$$E_{[\![1,n-1]\!]} := \{(v,\sigma,i) \in \text{函子范畴}_n^k \times [\![1,n-1]\!] | \sigma^{-1}(i) \notin \{|v^{-1}(0)|, \dots, |v^{-1}(0)| + \cdots + |v^{-1}(k-1)|\}$$
$$\text{et } \sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) + 1\}.$$

为此，我们分别证明 bij 在 (a) $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\}$ 与 E_n、(b) $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{0\}$ 与 E_0，以及 (c) $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![1,n-1]\!]$ 与 $E_{[\![1,\ n-1]\!]}$ 之间诱导一个双射。

(a) 证明 bij 将 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\}$ 映到 E_n。设 $(w,\tau) \in \mathrm{Ens}_{n-1}^k$。有 $w \in [\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^{n-1}$，这意味着 $w^{(n)} = (w, k-1) \in [\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$。令 $v := w^{(n)}$，那么对任意 $i \in [\![0,k-1]\!]$，有 $v^{-1}(i) = w^{-1}(i)$，若 $i \neq k-1$ 且 $v^{-1}(k-1) = w^{-1}(k-1) \sqcup \{n\}$。若 $i \neq k-1$，则 $\tau^{(n)}$ 在 $v^{-1}(i)$ 上的限制与 τ 在 $w^{-1}(i)$ 上的限制一致；后者是递增的，因为 $\tau \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|,\dots,|w^{-1}(k-1)|}$。$\tau^{(n)}$ 在 $v^{-1}(k-1)$ 上的限制是不交并：一部分是 τ 在 $w^{-1}(k-1)$ 上的限制，它是递增的，且取值于 $[\![1,n-1]\!]$；另一部分是映射 $n \mapsto n$。由于 $w^{-1}(k-1) < n$，这个不交并是递增的。因此 $\tau^{(n)} \in \mathfrak{S}_{|v^{-1}(0)|,\dots,|v^{-1}(k-1)|}$，这意味着 $(w^{(n)}, \tau^{(n)}) \in \mathrm{Ens}_n^k$。此外，$w^{(n)}(n) = k-1$ 且 $\tau^{(n)}(n) = n$，所以 $\mathsf{bij}(w,\tau,n) = (w^{(n)}, \tau^{(n)}, n) \in E_n$。

因此 $\mathsf{bij}(\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \overline{\{n\}}) \subset E_n$，记作

$$\mathrm{bij}_n : \mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\} \to E_n$$

诱导映射。设 invbij_n：$E_n \to \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times \{n\}$ 映射由 $(v,\sigma,n) \mapsto (v_{|[\![1,n-1]\!]}, \sigma_{|[\![1,n-1]\!]}, n)$ 给出；由于 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 且 $\sigma(n) = n$，确有 $\sigma_{|[\![1,n-1]\!]} \in \mathfrak{S}_{n-1}$。

证明 invbij_n 将 E_n 映到 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\}$。设 $(v,\sigma,n) \in E_n$，并令 $w := v_{|[\![1,n-1]\!]}$，$\tau := \sigma_{|[\![1,\ n-1]\!]}$。于是 $v \in [\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$，这意味着 $w \in [\![0,k-1]\!]_{\leqslant}^n$。此外，对每个 $i \in [0,k-1]$，$w^{-1}(i)$ 包含于 $w^{-1}(i)$（若 $i \neq k-1$，甚至有 ″等号″）。τ 在 $w^{-1}(i)$ 上的限制与 σ 在同一集合上的限制一致；后者由于 σ 在限制到包含 $w^{-1}(i)$ 的 $v^{-1}(i)$ 时递增而递增。因此 $(w, \tau) \in \mathrm{Ens}_{n-1}^k$。

因此，invbij_n 将 E_n 映射到 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\}$。记

$$\mathrm{invbij}_n : E_n \to \mathrm{Ens}_{n-1}^k \times \{n\}$$

诱导映射。我们验证复合 $\mathsf{invbij}_n \circ \mathsf{bij}_n$ 和 $\mathsf{bij}_n \circ \mathsf{invbij}_n$ 都是恒等映射′。由此得出，bij_n 是一个双射。

(b) 证明与 (a) 类似。

(c) 证明 bij 将 $\mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![1,n-1]\!]$ 映射到 $E_{[\![1,\ n-1]\!]}$。设 $(w,\tau,i) \in \mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![1,n-1]\!]$，并令 $v := w \circ p_i$，$\sigma := \tau^{(i)}$。由于 p_i：$[\![1,n]\!] \to [\![1,n-1]\!]$ 是递增的，且

$w \in [\![0,k-1]\!]^{n-1}_{\leqslant}$，我们有 $v \in [\![0,k-1]\!]^{n}_{\leqslant}$。于是，对于 $j \in [\![0,k-1]\!]$, $v^{-1}(j) = w^{-1}(j)$，若 $j < w(i)$，则有等式 $v^{-1}(j) = w^{-1}(j)+1$；若 $j > w(i)$，则有 $v^{-1}(w(i)) = w^{-1}(w(i)) \cup (w^{-1}(w(i))+1)$。若 $j < w(i)$，则 σ `在 $v^{-1}(j) = w^{-1}(j)$ 上的限制等于复合 $\mathrm{st}_{\tau(i)} \circ \tau_{|w^{-1}(j)}$，由于各项均递增，该复合也是递增的。若 $j > w(i)$，则 $\sigma$ `在 $v^{-1}(j) = w^{-1}(j)+1$ 上的限制等于复合 $\mathrm{st}_{\tau(i)-1} \circ \tau_{|w^{-1}(j)} \circ (x \mapsto x-1)$，由于各项均递增，该复合也是递增的。记 α, β 为 $w^{-1}(w(i))$ 的最小和最大元素；由于这个集合是一个区间，因此有 $w^{-1}(w(i)) = [\![\alpha,\beta]\!] \ni i$。于是$v^{-1}(w(i)) = [\![\alpha,\beta+1]\!]$。$\sigma$ `在 $v^{-1}(w(i)) = [\![\alpha,\beta+1]\!]$ 上的限制由以下方式给出：若 $x \in [\![\alpha,i]\!]$，则为 $x \mapsto \tau(x)$；若 $x \in [\![i+1,\beta+1]\!]$，则为 $x \mapsto \tau(x-1)+1$；$\tau$ `在 $[\![\alpha,i]\!]$ 和 $[\![i,\beta]\!]$ 上的限制是递增的，这意味着 σ `在 $[\![\alpha,i]\!]$ 和 $[\![i+1,\beta+1]\!]$ 上的限制也是递增的。我们有 $\sigma(i+1) = \tau(i)+1 = \sigma(i)+1$，结合 σ 在 $[\![\alpha,i]\!]$ 和 $[\![i+1,\beta+1]\!]$ 上的递增性，可知 σ 在 $[\![\alpha,\beta+1]\!] = v^{-1}(w(i))$ 上递增。因此 $\sigma \in \mathfrak{S}_{|v^{-1}(0)|,\ldots,|v^{-1}(k-1)|}$，故$(v,\sigma) = (w \circ p_i, \tau^{(i)}) \in \mathrm{Ens}^k_n$。

已知 $\tau^{(i)}(i) = \tau(i)$和 $\tau^{(i)}(i+1) = \tau(i)+1$。于是 $(\tau^{(i)})^{-1}(\tau(i)) = i$。集合$\{|v^{-1}(0)|, \ldots, |v^{-1}(0)| + \cdots + |v^{-1}(k-1)|\}$ 是划分$[\![1,n]\!] = v^{-1}(0) \sqcup \ldots \sqcup v^{-1}(k-1)$中各区间的最大值的集合。包含 i 的那个区间是 $v^{-1}(v(i)) =[\![\alpha,\beta+1]\!]$，因此对于 $j \neq v(i)$, $i \neq \max(v(j))$。由于 $i \leqslant \beta$，有 $i \neq \beta+1 =\max(v^{-1}(v(i)))$。因此，对于任意 $j \in [\![0,k-1]\!]$, $i \neq \max(v^{-1}(j))$, 故 $(\tau^{(i)})^{-1}(\tau(i)) =i \notin \{|v^{-1}(0)|, \ldots, |v^{-1}(0)| + \cdots + |v^{-1}(k-1)|\}$。此外，有 $(\tau^{(i)})^{-1}(\tau(i)+1) = i+1 =(\tau^{(i)})^{-1}(\tau(i))+1$。由此可得 $(w \circ p_i, \tau^{(i)}, \tau(i)) \in E_{[\![1,n-1]\!]}$。

因此是双射$(\mathrm{Ens}^k_{n-1} \times [\![1,\ n-1]\!]) \subset E_{[\![1,\ n-1]\!]}$。记

$$\mathrm{bij}_{[\![1,n-1]\!]} : \mathrm{Ens}^k_{n-1} \times [\![1,n-1]\!] \to E_{[\![1,n-1]\!]}$$

诱导映射。

对于 $(v、\ \sigma、\ j) \in E_{[\![1,\ n-1]\!]}$，令

$$\underline{\mathrm{invbij}}_{[\![1,n-1]\!]}(v,\sigma,j) := (v \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}, p_j \circ \sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}, \sigma^{-1}(j)) = (w,\tau,i). \tag{2.3.20}$$

于是 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$ 是一个映射 $[\![1、\ n-1]\!] \to [\![1、\ n]\!]$，因此 $w \in \mathbb{Z}^{n-1}$。此外还有 $i \in [\![1、\ n]\!]$。最后，$\tau = p_j \circ \sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$ 是从 $[\![1、\ n-1]\!]$ 到其自身的映射。证明其单射性。设 $x \neq x' \in [\![1、\ n-1]\!]$且 $\tau(x) = \tau'(x)$。由 σ和 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$的单射性可得 $\sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x) \neq \sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x')$，因此（不妨交换 `与 ′）有 x 和 x'，即 $\sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x) = j$ 与$\sigma \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x') = j+1$。所以 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x) = \sigma^{-1}(j)$ 与 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}(x) = \sigma^{-1}(j)+1$。然而，$\sigma^{-1}(j)+1$不在 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$的像中，矛盾。因此 τ是单射，从而 $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$。这表明（2.3.20）定义了一个映射

$$\underline{\mathrm{invbij}}_{[\![1,n-1]\!]} : E_{[\![1,n-1]\!]} \to \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times [\![1,n-1]\!].$$

证明 $\mathrm{invbij}_{[\![1,n-1]\!]}$ 将 $E_{[\![1,n-1]\!]}$ 映射到 $\mathrm{Ens}^k_n \times [\![1,n-1]\!]$。在 (2.3.20) 中，有 $w =v \circ \mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$。有 $v \in [\![0,k-1]\!]^{n-1}_{\leqslant}$，且 $\mathrm{st}_{\sigma^{-1}(j)}$是一个单调递增映射 $[\![1,n-1]\!] \to [\![1,n]\!]$，这意味着 $w \in [\![1,k-1]\!]^{n}_{\leqslant}$。

证明 $\tau \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|,\dots,|w^{-1}(k-1)|}$。这归结为证明，对于任意 $\ell \in [\![0, k-1]\!]$，τ 在到 $w^{-1}(\ell)$ 的限制是递增的。回忆一下，$v^{-1}(v(\sigma^{-1}(i)))$ 是 $[\![1, n]\!]$ 的一个区间，其中 $\sigma^{-1}(i)$ 不是最大的元素。记 α, β 为该区间的最小值和最大值，则 $v^{-1}(v(\sigma^{-1}(i))) = [\![\alpha, \beta]\!]$，其中 $\alpha \leqslant \sigma^{-1}(i) < \beta$。

若 $\ell < v(\sigma^{-1}(i))$，则 $w^{-1}(\ell) = v^{-1}(\ell)$，且 τ 在 $w^{-1}(\ell)$ 上的限制与 $p_{\sigma^{-1}(j)} \circ \sigma$ 在同一闭区间上的限制相吻合。由于 $\sigma_{|v^{-1}(\ell)}$ 和 $p_{\sigma^{-1}(j)}$ 递增，因此 $\tau_{|w^{-1}(\ell)}$ 也递增。若 $\ell > v(\sigma^{-1}(i))$，则 $w^{-1}(\ell) = v^{-1}(\ell) - 1$，且 τ 在 $w^{-1}(\ell)$ 上的限制与 $p_{\sigma^{-1}(j)} \circ \sigma \circ (x \mapsto x+1)$ 在同一闭区间上的限制相吻合。由于 $(\sigma \circ (x \mapsto x+1))_{|v^{-1}(\ell)-1}$ 和 $p_{\sigma^{-1}(j)}$ 递增，因此 $\tau_{|w^{-1}(\ell)}$ 也递增。我们有 $w^{-1}(v(\sigma^{-1}(i))) = [\![\alpha,\ \beta-1]\!]$。$\tau$ 在 $[\![\alpha$ 上的限制与 σ 在该区间上的限制相吻合，而后者递增；该区间 $'$ 包含于 $v^{-1}(v(\sigma^{-1}(i)))$，因此 $\tau_{|[\![\alpha,\ \sigma^{-1}(i)]\!]}$ 递增。τ 在 $[\![\sigma^{-1}(i)$ 上的限制与 $\sigma \circ (x \mapsto x+1)$ 在该区间上的限制相吻合；由 σ 在 $v^{-1}(v(\sigma^{-1}(i)))$ 上递增可知，后者递增，因此 $\tau_{|[\![\sigma^{-1}(i),\ \beta-1]\!]}$ 递增。由此可知，τ 在 $[\![\alpha$ 上的限制 $\beta - 1]\!] = w^{-1}(v(\sigma^{-1}(i)))$ 递增。以上均表明 $\tau \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|,\ \dots\dots,\ |w^{-1}(k-1)|}$。

由于 $\tau \in \mathfrak{S}_{|w^{-1}(0)|,\dots,|w^{-1}(k-1)|}$ 和 $w \in [\![1, k-1]\!]^n_{\leqslant}$，因此有 $(w, \tau) \in \mathrm{Ens}^k_{n-1}$。
因此 $\underline{\mathrm{invbij}}_{[\![1,n-1]\!]}(E_{[\![1,n-1]\!]}) \subset \mathrm{Ens}^k_n \times [\![1, n-1]\!]$。记

$$\mathrm{invbij}_{[\![1,n-1]\!]} : E_{[\![1,n-1]\!]} \to \mathrm{Ens}^k_n \times [\![1, n-1]\!]$$

诱导映射。我们验证复合 $\mathrm{invbij}_n \circ \mathrm{bij}_n$ 和 $\mathrm{bij}_n \circ \mathrm{invbij}_n$ 是恒等映射$'$。由此可得 $\mathrm{bij}_{[\![1,n-1]\!]}$ 是一个双射。□

2.3.6. 涉及 $\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1}, \Delta^n) \times \{\pm 1\}$ 的交换图。

定义 2.26。对于 $n, m \geqslant 0$，记 $\mathrm{Aff}(\Delta^n, \Delta^m)$ 为映射 $\phi : \Delta^n \to \Delta^m$ 的集合，其中存在一个仿射映射 $\underline{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，使得 $\underline{\phi} \circ \mathrm{can}_n = \mathrm{can}_m \circ \phi$。（其中 can_n、can_m 如定义 2.1）

引理 2.27。设 $n, m \geqslant 0$。
(a) 若 $\phi \in$ 仿射映射(Δ^n, Δ^m)，则如定义 2.26 所述的仿射映射 $\underline{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 唯一。(b) 映射 $\mathrm{Aff}(\Delta^n, \Delta^m) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\phi \mapsto \underline{\phi}$ 是单射。

证明。(a) 是由 Δ^n 包含 $\mathbb{R}^n$, 的一个仿射基这一事实得出的，即 $(E^n_0, \dots, E^n_n)$。(b) 则源于仿射映射由仿射基的像唯一确定。□

由引理 2.27 可得一族包含关系

$$\mathrm{Aff}(\Delta^n, \Delta^m) \subset \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \tag{2.3.21}$$

对于 $n, m \geqslant 0$，与映射的复合相容。

引理-定义 2.28。在定义 2.6 的情形下，若 $P_0,\dots,P_n\in\Delta^m$，映射$[P_0,\dots,P_n]$将 Δ^n映到 Δ^m，因此属于单射 $\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^m)\hookrightarrow\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$的像。记 $[P_0,\dots,P_n]$为对应的 $\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^m)$ 元素。

证明。由 Δ^n 和 Δ^m 的凸性，以及 $(E_0^n,\dots,E_n^n)$ 构成凸集 Δ^n 的基可知。□

引理-定义 2.29. 若 $(v,\sigma)\in\mathrm{Ens}_n^k$，则 $\underline{c}_k(v,\sigma)$ 属于单射 $\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^n)\hookrightarrow\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 的像。记 $c_k(v,\sigma)\in\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^n)$ 为 $\underline{c}_k(v,\sigma)$ 的原像。

证明。与 $(v,\sigma)\in\mathrm{Ens}_n^k$ 相关联的映射 $\grave{}$由下式给出:

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto((v_1+x_{\sigma(1)})/k,\dots,(v_n+x_{\sigma(n)})/k)=:(y_1,\dots,y_n);$$

这是 $\mathbb{R}^n$ 的连续自映射。假设 $(x_1,\dots,x_n)\in\Delta^n$。由于 $v_1\geqslant 0$ 且 $x_{\sigma(1)}\geqslant 0$，故有 $y_1\geqslant 0$；同理，$v_n\leqslant k-1$ 和 $x_{\sigma(n)}\leqslant 1$ 推出 $y_n\leqslant 1$。最后，对于 $i\in[\![1,n-1]\!]$，定义 2.23 蕴含 $v_i=v_{i+1}$ 或 $v_i<v_{i+1}$。在第一种情况（$v_i=v_{i+1}$）下，(2.3.18) 蕴含 $\sigma(i)<\sigma(i+1)$，由 $i\mapsto x_i$ 的单调性可推出不等式 $x_{\sigma(i)}\leqslant x_{\sigma(i+1)}$，再结合 $v_i=v_{i+1}$ 得到 $y_i=(v_i+x_{\sigma(i)})/k\leqslant(v_{i+1}+x_{\sigma(i+1)})/k=y_{i+1}$，中的不等式，其中两端的等式由定义得出。在第二种情况（$v_i<v_{i+1}$）下，有 $y_i=(v_i+x_{\sigma(i)})/k\leqslant(v_i+1)/k\leqslant v_{i+1}/k\leqslant(v_{i+1}+x_{\sigma(i+1)})/k=y_{i+1},$，其中第一个和最后一个等式由定义得出，第一个和最后一个不等式分别由 $x_{\sigma(i)}\geqslant 0$ 和 $x_{\sigma(i+1)}\leqslant 1$ 得出，而中间的不等式则由 $v_i<v_{i+1}$ 以及 v 的分量为整数这一性质得出。因此，在所有情况下均有 $y_i\leqslant y_{i+1}$，从而完成了对 $(y_1,\dots,y_n)\in\Delta^n$ 的证明。这就证明了该陈述。□

$$\text{On a } c_k(v,\sigma)=[(1/k)(v+\sigma^*E_0^n),\dots,(1/k)(v+\sigma^*E_n^n)]\text{ pour }(v,\sigma)\in\mathrm{Ens}_n^k.$$

定义 2.30. 记 $i\in[\![0,n]\!]$，

$$\partial_i^n:=[E_0^n,\dots,E_{n-i-1}^n,E_{n-i+1}^n,\dots,E_n^n]\in\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n).$$

引理 2.31. $\underline{\partial}_i^n$是 ∂_i^n在映射 $\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n)\to\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^n)$下的像。

证明。显然。 □

定义 2.32. 记

$$f:\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]\to\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n),\quad\tilde{f}:\mathrm{Ens}_{n-1}^k\times[\![0,n]\!]\to\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n)$$

由以下映射给出

$$f(v,\sigma,i):=c_k(v,\sigma)\circ\partial_i^n,\quad\tilde{f}(w,\tau,i):=\partial_i^n\circ c_k(w,\tau).$$

引理 2.33。以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}_n^k \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow{f} & \mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^n \times \mathfrak{S}_n \times \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow[\underline{f}]{} & \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^n) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Ens}_{n-1}^k \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathfrak{S}_{n-1} \times \times [\![0,n]\!] & \xrightarrow[\underline{\tilde{f}}]{} & \mathbf{Aff}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^n) \end{array}$$

证明。由映射 (2.3.21) 与复合的相容性、引理 2.31，以及对于 $(v,\sigma)\in \mathrm{Ens}_n^k$（分别对于 $(w,\tau)\in \mathrm{Ens}_{n-1}^k$），$c_k(v,\sigma)$（分别为 $c_k(w,\tau)$）在 $\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^n)\to\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$（分别为 $\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^{n-1})\to\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}^{n-1})$）下的像是 $\underline{c_k}(v,\sigma)$（分别为 $\underline{c_k}(w,\tau)$）（参见引理 2.29）。□

引理 2.34. 下图交换

(2.3.22)

$$\begin{array}{ccc} \text{集合}_{n-1}^k \times [\![0,\ n]\!] & \xrightarrow[\sim]{\text{bij}} & \{x\in \text{集合}_n^k \times [\![0,\ n]\!] \mid \text{involl}(x)\notin \text{集合}_n^k \times [\![0,\ n]\!]\} \\ & {\scriptstyle (f,\ \text{符号})} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (f,\ \text{符号})} & \\ & \text{仿射映射}(\Delta^{n-1},\ \Delta^n)\times\{\pm 1\} & \end{array}$$

证明。由图表 (2.3.17) 和 (2.3.19) 的交换性以及引理 2.34 可得。□

2.4. 链群端同态的构造。本节的结果将在第 2.5 节中使用，以证明定理 2.3 的 (b)。

2.4.1. 范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射。

定义 2.35. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，其对象集合为 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$，其中 $\mathcal{C}(n,m):=\mathbb{Z}\mathrm{Top}(\Delta^n,\Delta^m)$，其复合由 Top 中复合的线性化给出。

由于仿射映射连续，我们有一族图表

$$\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^m)\subset\mathcal{C}(n,m)$$

对于 $n,m\geqslant 0$，该族与映射的复合相容。

定义 2.36. 令

$$\mathrm{div}_n^k := \sum_{(v,\sigma)\in \mathrm{Ens}_n^k} \epsilon(\sigma)c_k(v,\sigma)\in \mathbb{Z}\mathrm{Aff}(\Delta^n,\Delta^n)\subset\mathcal{C}(n,n).$$

定义 2.37。记作

$$\partial_{n-1,n} := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i^n \in \mathbb{Z}\mathrm{Aff}(\Delta^{n-1},\Delta^n)\subset\mathcal{C}(n-1,n).$$

已知 $\partial_{n,\ n+1}\circ\partial_{n-1,\ n}=0$。此外，对任意 $p\geqslant 0$，复形 $\cdots\to\mathcal{C}(k,p)\overset{-\circ\partial_{k-1,}}{\to}{}_{K}\mathcal{C}(k-1,p)\to\cdots\to C(0,p)\to\mathbb{Z}\to 0$ 是无圈的（ Δ^p ′的同调由 $\mathrm{H}_k(\Delta^p)=0$ 给出，其中 $k>0$ 且 $=\mathbb{Z}$ 当 $k=0$）。

2.4.2. div ′的证明。$\mathrm{div}_n^k\circ\partial_{n-1,n}=\partial_{n-1,n}\circ\mathrm{div}_{n-1}^k$。在第2.4.2节中，固定 $n,k\geqslant 1$。有

$$\mathrm{div}_n^k\circ\partial_{n-1,n}=\sum_{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}\mathrm{sgn}(x)f(x). \tag{2.4.1}$$

结合定义 2.9、2.32、2.36、2.37，以及

$$\partial_{n-1,n}\circ\mathrm{div}_{n-1}^k=\sum_{\tilde{x}\in\mathrm{Ens}_{n-1}^k\times[\![0,n]\!]}\widetilde{\mathrm{sgn}}(\tilde{x})\tilde{f}(\tilde{x}). \tag{2.4.2}$$

结合定义 2.17 2.17、2.32、2.36、2.37（′在 $\mathbb{Z}$仿射映射$(\Delta^{n-1}$中的等式′）。

命题 2.38。对所有 $n,k\geqslant 1$，有

$$\mathrm{div}_n^k\circ\partial_{n-1,n}=\partial_{n-1,n}\circ\mathrm{div}_{n-1}^k$$

（′在 $\mathcal{C}(n-1,n)$中的等式′）。

证明。我们有

$$\sum_{\substack{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}}\mathrm{sgn}(x)f(x)=\sum_{\substack{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}}\mathrm{sgn}(\mathrm{invol}(x))f(\mathrm{invol}(x))$$
$$=-\sum_{\substack{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}}\mathrm{sgn}(x)f(x)$$

因为 invol 是 $\{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\mathrm{invol}(x)\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0$ 上的一个对合（参见引理 2.11(a)），所以得到第一 个 ′等式′；第二个 ′等式′则由引理 2.11(b) 和引理 2.33 的第一个等式推出。因此可得

$$\sum_{\substack{x\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\in\mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}}\mathrm{sgn}(x)f(x)=0. \tag{2.4.3}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_n^k \circ \partial_{n-1,n} &= \sum_{x\in \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]} \mathrm{sgn}(x) f(x)\\ &= \sum_{\substack{x\in \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\in \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}} \mathrm{sgn}(x) f(x) + \sum_{\substack{x\in \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\notin \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}} \mathrm{sgn}(x) f(x)\\ &= \sum_{\substack{x\in \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]|\\ \mathrm{invol}(x)\notin \mathrm{Ens}_n^k\times[\![0,n]\!]}} \mathrm{sgn}(x) f(x) = \sum_{y\in \mathrm{Ens}_{n-1}^k\times[\![0,n]\!]} \mathrm{sgn}(\mathrm{bij}(y)) f(\mathrm{bij}(y))\\ &= \sum_{y\in \mathrm{Ens}_{n-1}^k\times[\![0,n]\!]} \widetilde{\mathrm{sgn}}(y)\tilde{f}(y) = \partial_{n-1,n}\circ \mathrm{div}_{n-1}^k\end{aligned}$$

（´在 $\mathbb{Z}\mathbf{Aff}(\Delta^{n-1}$ 中的等式 ´， $\Delta^n)$）其中第一个等式 ´由（2.4.1）得出，第三个等式 ´由（2.4.3）得出，第四个等式 ´由引理 2.25 得出，第五个等式 ´由引理 2.20 及引理 2.33 中的两个等式 ´得出，第六个等式 ´由（2.4.2）得出。

由此可得所述等式，因为映射 $\mathbf{Aff}(\Delta^n,\Delta^m)\to \mathcal{C}(n,m)$ ´与复合相容。□

2.4.3. $\mathcal{C}$ 中 $\mathrm{div}_\bullet^k$ 与 $id_\bullet$之间的关系。

引理 2.39. 对于任意 $k\geqslant 0$，存在一个族 $(L_{n+1,n}^k)_{n\geqslant 0}$，其中 $L_{n+1,n}^k\in \mathcal{C}(n+1,n)$，使得对于任意 $n\geqslant 0$，有

$$\mathrm{id}_n - \mathrm{div}_n^k = L_{n+1,n}^k\circ\partial_{n,n+1} + \partial_{n-1,n}\circ L_{n,n-1}^k. \tag{2.4.4}$$

证´明。证明通过对 $n\geqslant 0$ 归纳来构造一个族 $(L_{m+1,m}^k)_{m\leqslant n}$，使得对于任意 $m\leqslant n$，有 恒等映射$_n - \mathrm{div}_n^k = L_{n+1,n}^k\circ\partial_{n,n+1} + \partial_{n-1,n}\circ L_{n,n-1}^k$ （´陈述´ $E(n)$）。

令 $L_{1,0}^k := 0$，则有 恒等映射$_0 - \mathrm{div}_0^k = L_{1,0}^k\circ\partial_{0,1}$，由此得出`陈述´ $E(0)$。

设 $n\geqslant 1$，并假设 $E(n-1)$ v´erifi´e，且有一个族 $(L_{m+1,\ m}^k)_{m\leqslant n-1}$。那么

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}_n - \mathrm{div}_n^k - \partial_{n-1,n}\circ L_{n,n-1}^k)\circ\partial_{n-1,n} = \partial_{n-1,n} - \mathrm{div}_n^k\circ\partial_{n-1,n} - \partial_{n-1,n}\circ L_{n,n-1}^k\circ\partial_{n-1,n}\\ &= \partial_{n-1,n} - \partial_{n-1,n}\circ \mathrm{div}_{n-1}^k - \partial_{n-1,n}\circ L_{n,n-1}^k\circ\partial_{n-1,n} = \partial_{n-1,n}\circ(\mathrm{id}_{n-1} - \mathrm{div}_{n-1}^k - L_{n,n-1}^k\circ\partial_{n-1,n})\\ &= \partial_{n-1,n}\circ(\mathrm{id}_{n-1} - \mathrm{div}_{n-1}^k - L_{n,n-1}^k\circ\partial_{n-1,n} - \partial_{n-2,n-1}\circ L_{n-1,n-2}^k) = \partial_{n-1,n}\circ 0 = 0\end{aligned}$$

其中第二个 ´等式由命题 2.38 得出，第四个 ´等式由 $\partial_{n-1,\ n}\circ\partial_{n-2,\ n-1}=0$ 得出，第五个 ´等式由 $E(n-1)$ 得出。

因此，$\mathrm{id}_n - \mathrm{div}_n^k - \partial_{n-1,\ n}\circ L_{n,\ n-1}^k$ 属于映射 $-\circ\partial_{n-1,\ n}\colon \mathcal{C}(n,n)\to\mathcal{C}(n-1,n)$ 的核。由于无环性，该核等于映射 $-\circ\partial_{n,\ n+1}\colon \mathcal{C}(n+1,n)\to\mathcal{C}(n,n)$ 的像。因此存在 $L_{n+1,\ n}^k\in\mathcal{C}(n+1,n)$，使得 $\mathrm{id}_n - \mathrm{div}_n^k - \partial_{n-1,\ n}\circ L_{n,\ n-1}^k = L_{n+1,\ n}^k\circ\partial_{n,\ n+1}$，这意味着 $E(n)$。□

2.4.4. 奇异链群的自同态。设 X 为一个拓扑空间。对于$n\geqslant 0$，记 $C_n(X) := \mathbb{Z}\mathbf{Top}(\Delta^n,X)$。对于 $n,m\geqslant 0$，有一个由复合 $(c,x)\mapsto c\circ x$诱导的映射 $C_n(X)\times\mathcal{C}(m,n)\to C_m(X)$。

定义 2.40。对于 $x \in \mathcal{C}(m,n)$，记 $x^*\colon C_n(X) \to C_m(X)$ 映射 $c \mapsto c \circ x$。

Alors $(x \circ y)^* = y^* \circ x^*$.

引理 2.41。若 Y 是 X 的子集，则有 $x^*(C_n(Y)) \subset C_m(Y)$。

证明。由 x^* 是一个以 ` 为源的复合可得。 □

此外，对于 $n \geqslant 1$，$\partial^*_{n-1,\ n}\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ co¨incide 与奇异微分 ´ere ` 的 ∂_n 相一致。因此 (2.4.4) 蕴含

$$\mathrm{id}_{C_n(X)} - (\mathrm{div}^k_n)^* = \partial^*_{n,n+1} \circ (L^k_{n+1,n})^* + (L^k_{n,n-1})^* \circ \partial^*_{n-1,n} \tag{2.4.5}$$

（´是 $C_n(X)$ 的自同态的等式），对任意 $n \geqslant 0$。

2.5. 定理 2.3 的 (b) 的证明。我们在第 2.1 节的框架下讨论：X 是一个拓扑空间，且 a、$b \in X$。

2.5.1. 路径的复合。

定义 2.42. 若 $s,t,u,v \in \mathbb{R}$ 满足 $s \neq t$，记 $a^{u,v}_{s\,t}$ 为从 $\mathbb{R}$ 到其自身的唯一仿射映射，使得 $s \mapsto u$ 且 $t \mapsto v$。

Soit X一个拓扑空间，设 $a_0, \ldots, a_m \in X$，且对 $i \in [\![0, m-1]\!]$，有 $\tilde{\gamma}_i \in \mathsf{Chem}(a_i, a_{i+1})$.

定义 2.43. $\tilde{\gamma}_{m-1} * \ldots * \tilde{\gamma}_0 \in \mathsf{Chem}(a_0, a_m)$ 是满足如下条件的路径：对 $i \in [\![0, m-1]\!]$，限制 $(\tilde{\gamma}_{m-1} * \cdots * \tilde{\gamma}_0)_{|[i/m,(i+1)/m]}$ ` 到 $[i/m, (i+1)/m]$ 后与 $\tilde{\gamma}_i \circ a^{0,\ 1}_{i/m,(i+1)/m}$ 重合（条件相容，因为对 $i \in [\![0, m-2]\!]$，有 $\tilde{\gamma}_i(1) = \tilde{\gamma}_{i+1}(0)$）。

于是，记 $[-]$ 典范映射 $\mathsf{Chem}(a,b) \to \pi_1(X; a, b)$（任意的 $a, b \in X$），等式为

$$[\tilde{\gamma}_{n-1} * \ldots * \tilde{\gamma}_0] = [\tilde{\gamma}_{n-1}] \cdots [\tilde{\gamma}_0] \tag{2.5.1}$$

（´在 $\pi_1(X; a_0, a_m)$ 中的等式，右侧的乘积 ´是群胚¨ıde$\pi_1(X)$中的乘积。）

2.5.2. $(\mathrm{div}^k_n)^*((\tilde{\gamma}_k * \cdots * \tilde{\gamma}_1)^{(n)})$ 的计算。

引理 2.44。存在唯一的映射

$$\{(n_1, \ldots, n_k) | n_1 \geqslant 0, \ldots, n_k \geqslant 0 \ et\ n_1 + \cdots + n_k = n\} \to [\![0, k-1]\!]^n \tag{2.5.2}$$

它将 $(n_1, \ldots, n_k)$ 映到元素 $v \in [\![0, k-1]\!]^n$，使得对于 $i = 0, \ldots, k-1$，有 $v_{|n_1+\cdots+n_i+[\![1,\ n_{i+1}]\!]} = i$。此映射是双射，其逆双射将 $v \in [\![0, k-1]\!]^n$ 映到 $(n_1, \ldots, n_k)$，由 $n_i = |v^{-1}(i-1)|$ 给出，其中 $i \in [\![1, k]\!]$。

D ´emonstration。显而易见。 □

定义_超碰 命题 2.45。对于 $v \in [\![0, k-1]\!]^n$，设 $\mathfrak{S}(v) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | (v, \sigma) \in \mathsf{Ens}^k_n\}$（参见定义 2.23）。

引理 2.46。若 $(n_1,\dots,n_k)\in\{(n_1,\dots,n_k)|n_1\geqslant 0,\dots,n_k\geqslant 0$ 且 $n_1+\cdots+n_k=n\}$，并且 v 是 $(n_1,\dots,n_k)$ 在双射 (2.5.2) 下的像，则有 $\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}=\mathfrak{S}(v)$。

证明。映射 $v\colon[\![1,n]\!]\to[\![0,k-1]\!]$ ′在每个子集 $n_1+\cdots+n_i+[\![1,n_{i+1}]\!]$ 上为常值，且在连续子集 ′上取值严格递增，因此对于 $i\in[\![1,n]\!]$，等价关系为

$$(v_i<v_{i+1})\iff(i\in\{n_1,n_1+n_2,\dots,n_1+\cdots+n_{k-1}\}). \tag{2.5.3}$$

于是，设 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$。当且仅当 $\sigma\in\mathfrak{S}(v)$

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad(\sigma(i)>\sigma(i+1))\implies(v_i<v_{i+1});$$

根据 (2.5.3)，一个等价条件是

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad(\sigma(i)>\sigma(i+1))\implies(i\in\{n_1,n_1+n_2,\dots,n_1+\cdots+n_{k-1}\}).$$

因此，当且仅当 σ 在子集 $[\![1,n_1]\!],n_1+[\![1,n_2]\!]$ 等上递增，即当且仅当 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\ \dots\dots,\ n_k}$。□

定义 2.47。令 $\widetilde{\mathrm{Ens}}_n^k:=\{((n_1,\dots,n_k),\sigma)|n_1\geqslant 0,\dots,n_k\geqslant 0$ 和 $n_1+\cdots+n_k=n$ 和 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}\}$。

引理 2.48。存在唯一的双射

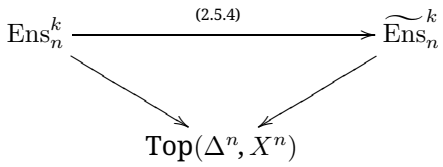
$$\mathrm{Ens}_n^k\to\widetilde{\mathrm{Ens}}_n^k \tag{2.5.4}$$

它将 $((n_1,\dots,n_k),\sigma)$ 映到 (v,σ)，其中 v 是 $(n_1,\dots,n_k)$ 在 (2.5.2) 下的像。

证明。由引理 2.44 和 2.46 可得。□

注意，对于 $n_1+\cdots+n_k=n$ 和 $\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}$，由 σ^* 给出的、从 $[0,1]^n$ 到范畴 Top 的自同构诱导出一个 ′元素，仍记为 σ^*，属于 $\mathrm{Top}(\Delta^n,\Delta^{n_1}\times\ldots\times\Delta^{n_k})$。此外，$\tilde\gamma_1^{n_1}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{n_k}\in\mathrm{Top}(\Delta^{n_1}\times\ldots\times\Delta^{n_k},X^n)$，因此 $(\tilde\gamma_1^{n_1}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{n_k})\circ\sigma^*\in\mathrm{Top}(\Delta^n,X^n)$。

引理 2.49. 分别由 $((n_1,\dots,n_k),\sigma)\mapsto(\tilde\gamma_1^{(n_1)}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{(n_k)})\circ\sigma^*$ 和 $(v,\sigma)\mapsto\tilde\gamma^{(n)}\circ c(v,\sigma)$ 给出的映射 $\mathrm{Ens}_n^k\to\mathrm{Top}(\Delta^n,X^n)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Ens}}_n^k\to\mathrm{Top}(\Delta^n,X^n)$ 满足图表



是交换的。

证明。设 $((n_1,\dots,n_k),\sigma)\in \mathrm{Ens}_n^k$ et $(v,\sigma)\in \widetilde{\mathrm{Ens}}_n^k$ 是它在 (2.5.4) 下的像。令 $\delta_m:=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^m$ 对于 $m\geqslant 1$。那么对于 $(x_1,\dots,x_n)\in\Delta^n$，有

$$\begin{aligned}
&\tilde\gamma^{(n)}\circ c(v,\sigma)(x_1,\dots,x_n)\\
&=\tilde\gamma^{(n)}\Big((x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)})/k,(\delta_{n_2}+(x_{\sigma(n_1+1)},\dots,x_{\sigma(n_1+n_2)}))/k,\dots,((k-1)\delta_{n_k}+(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)}))/k\Big)\\
&=\Big(\tilde\gamma^{n_1}\Big((x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)})/k\Big),\tilde\gamma^{n_2}\Big((\delta_{n_2}+(x_{\sigma(n_1+1)},\dots,x_{\sigma(n_1+n_2)}))/k\Big),\dots,\tilde\gamma^{n_k}\Big(((k-1)\delta_{n_k}+(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)}))/k\Big)\Big)\\
&=\Big(\tilde\gamma_1^{n_1}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)}),\tilde\gamma_2^{n_2}(x_{\sigma(n_1+1)},\dots,x_{\sigma(n_1+n_2)})),\dots,\tilde\gamma_k^{n_k}(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)}))\Big)\\
&=\Big(\tilde\gamma_1^{(n_1)}(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)}),\tilde\gamma_2^{(n_2)}(x_{\sigma(n_1+1)},\dots,x_{\sigma(n_1+n_2)}),\dots,\tilde\gamma_k^{(n_k)}(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)})\Big)\\
&=(\tilde\gamma_1^{(n_1)}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{(n_k)})\circ\sigma^*(x_1,\dots,x_n),
\end{aligned}$$

其中`的第一个`等式源于这样一个事实： $c(v,\sigma)$ 是从 Δ^n 到其自身的映射，定义为

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto\Big((x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)})/k,(\delta_{n_2}+(x_{\sigma(n_1+1)},\dots,x_{\sigma(n_1+n_2)}))/k,\dots,((k-1)\delta_{n_k}+(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)}))/k\Big),$$

第二个`等式由以下两点结合得出： $\tilde\gamma^{(n)}$ 是 $\tilde\gamma^n$ 的限制，以及等式 $\tilde\gamma^n=\tilde\gamma^{n_1}\times\cdots\times\tilde\gamma^{n_k}$；第三个`等式由恒等式 $\tilde\gamma((i-1+x)/k)=\tilde\gamma_i(x)$（对于$x\in[0,1]$和 $i\in[\![1,k]\!]$）得出；第四个`等式由关系 $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n_1)})\in\Delta^{n_1}$等得出，$(x_{\sigma(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)},\dots,x_{\sigma(n)})\in\Delta^{n_k}$本身又是$\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}$的推论；最后一个`等式由 σ^* 的定义得出（参见第 2.5.2 节）。因此有 $\tilde\gamma^{(n)}\circ c(v,\sigma)=(\tilde\gamma_1^{(n_1)}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{(n_k)})\circ\sigma^*$（Top 中的等式$(\Delta^n,X^n)$）。□

命题 2.50。若 $a_1,\dots,a_{k+1}\in X$和 $\tilde\gamma_i\in\mathrm{Chem}(a_i,a_{i+1})$ 满足 $i\in[\![1,k]\!]$。那么

$$(\mathrm{div}_n^k)^*((\tilde\gamma_k*\cdots*\tilde\gamma_1)^{(n)})=\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\geqslant 0|\\ n_1+\cdots+n_k=n}}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}}\epsilon(\sigma)(\tilde\gamma_1^{(n_1)}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{(n_k)})\circ\sigma^*$$

(égalité dans $C_n(X^n)=\mathbb{Z}\mathbf{Top}(\Delta^n,X^n)$).

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{div}_n^k)^*((\tilde\gamma_k*\cdots*\tilde\gamma_1)^{(n)})=(\tilde\gamma_k*\cdots*\tilde\gamma_1)^{(n)}\circ\mathrm{div}_n^k=\sum_{(\sigma,v)\in\mathrm{Ens}_n^k}\epsilon(\sigma)(\tilde\gamma_k*\cdots*\tilde\gamma_1)^{(n)}\circ c(\sigma,v)\\
&=\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\geqslant 0|\\ n_1+\cdots+n_k=n}}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n_1,\dots,n_k}}\epsilon(\sigma)(\tilde\gamma_1^{(n_1)}\times\cdots\times\tilde\gamma_k^{(n_k)})\circ\sigma^*
\end{aligned}$$

其中，第一个等式由定义 2.40 得出，第二个等式由定义 2.36 得出，第三个等式则由引理 2.49 得出。□

2.5.3. $C_n(X^n)$中的一个 ´等 ´式。固定 $\tilde\gamma\in\mathrm{Chem}(a、\ b)$ 以及 $\alpha_0、\ \dots\dots、\ \alpha_n\in\mathrm{Chem}(a、\ a)$。记 $I\subset[\![0、\ n]\!]、\ c_I:=(\tilde\gamma*\ast_{i\in I}\tilde\alpha_i)^{(n)}\in C_n(X^n)$。将（2.4.5）应用于 ` c_I（以 X^n 替换X ´´，并以 $|I|+1$替换 k），得到

$$c_I-(\mathrm{div}_n^{|I|+1})^*(c_I)=(\partial_{n,n+1}^*\circ(L_{n+1,n}^{|I|+1})^*+(L_{n,n-1}^{|I|+1})^*\circ\partial_{n-1,n}^*)(c_I)\tag{2.5.5}$$

（$C_n(X^n)$中的关系）。根据$\partial^*_{n-1,\ n}(c_I) \in C_{n-1}(Y^{(n)}_{ab})$ 由引理 2.2，引理 2.41 遂推出 $(L^{|I|+1}_{n},\ _{n-1})^* \circ \partial^*_{n-1,\ n}(c_I) \in C_n(Y^{(n)}_{ab})$。另一方面，$(L^{|I|+1}_{n+1,\ n})^*(c_I) \in C_{n+1}(X^n)$，因此$\partial^*_{n,\ n+1} \circ (L^{|I|+1}_{n+1,\ n})^*(c_I) \in \partial^*_{n,\ n+1}(C_{n+1}(X^n))$。这两个关系与（2.5.5）共同推出

$$\forall I \subset [\![0,n]\!],\quad c_I - (\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I) \in C_n(Y^{(n)}_{ab}) + \partial^*_{n,n+1}(C_{n+1}(X^n))$$

（$C_n(X^n)$中的关系）。该关系推出 $\sum_{I\subset[\![0,\ n]\!]}(-1)^{|I|}(c_I - (\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I)) \in C_n(Y^{(n)}_{ab}) + \partial^*_{n,\ n+1}(C_{n+1}(X^n))$ 因此

$$\sum_{I\subset[\![0,n]\!]}(-1)^{|I|}c_I - \sum_{I\subset[\![0,n]\!]}(-1)^{|I|}(\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I) \in C_n(Y^{(n)}_{ab}) + \partial^*_{n,n+1}(C_{n+1}(X^n)). \tag{2.5.6}$$

（$C_n(X^n)$中的关系）。

引理 2.51。我们有 $\sum_{I\subset[\![0,\ n]\!]}(-1)^{|I|}(\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I) = 0$ （$C_n(X^n)$中的等式）。

证明。对于 $\nu_0,\dots,\nu_{n+1} \geqslant 0$，设 $\nu_0 + \cdots + \nu_{n+1} = n$，令

$$f(\nu_0,\dots,\nu_{n+1}) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}}} \epsilon(\sigma)(\tilde{\alpha}^{(\nu_0)} \times \cdots \times \tilde{\alpha}^{(\nu_n)} \times \tilde{\gamma}^{(\nu_{n+1})}) \circ \sigma^* \in C_n(X^n). \tag{2.5.7}$$

设 $I \subset [\![0,n]\!]$。设 $\alpha \mapsto i_\alpha$ 为唯一的递增双射 $[\![1,|I|]\!] \to I$。有以下等式

(2.5.8)

$$(\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I) = \sum_{\substack{\nu: I\sqcup\{n+1\}\to\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\\ \sum_{x\in I\sqcup\{n+1\}}\nu(x)=n}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\nu(i_1),\dots,\nu(i_{|I|}),\nu(n+1)}} \epsilon(\sigma)(\tilde{\alpha}^{(\nu(i_1))}_{i_1} \times \cdots \times \tilde{\alpha}^{(\nu(i_{|I|}))}_{i_{|I|}} \times \tilde{\gamma}^{(\nu(n+1))}) \circ \sigma^*$$

$$= \sum_{\substack{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}\geqslant 0|\\ \nu_0+\cdots+\nu_{n+1}=n,\\ \nu_{|[\![0,n]\!]-I}=0}} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}}} \epsilon(\sigma)(\tilde{\alpha}^{(\nu_0)} \times \cdots \times \tilde{\alpha}^{(\nu_n)} \times \tilde{\gamma}^{(\nu_{n+1})}) \circ \sigma^* = \sum_{\substack{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}\geqslant 0|\\ \nu_0+\cdots+\nu_{n+1}=n,\\ \nu_{|[\![0,n]\!]-I}=0}} f(\nu_0,\dots,\nu_{n+1})$$

其中 $C_n(X^n)$ o`u 第一个等式由命题 2.50 得出，第二个等式利用了从映射 $I \sqcup \{n+1\} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 到在 $[\![0,n]\!] - I$ 上取零值的映射 $[\![0,n+1]\!] \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 之间的双射，该双射由延拓为零函数给出；第三个等式由 (2.5.7) 得出。

于是

$$\sum_{I\subset[\![0,n]\!]}(-1)^{|I|}(\mathrm{div}^{|I|+1}_n)^*(c_I) = \sum_{I\subset[\![0,n]\!]} \sum_{\substack{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}\geqslant 0|\\ \nu_0+\cdots+\nu_{n+1}=n,\\ \nu_{|[\![0,n]\!]-I}=0}} (-1)^{|I|} f(\nu_0,\dots,\nu_{n+1})$$

$$= \sum_{\substack{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}\geqslant 0|\\ \nu_0+\cdots+\nu_{n+1}=n}} \sum_{\{x\in[\![0,n]\!]|\nu_x\neq 0\}\subset I\subset[\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} f(\nu_0,\dots,\nu_{n+1})$$

$$= \sum_{\substack{\nu_0,\dots,\nu_{n+1}\geqslant 0|\\ \nu_0+\cdots+\nu_{n+1}=n}} f(\nu_0,\dots,\nu_{n+1}) \sum_{\{x\in[\![0,n]\!]|\nu_x\neq 0\}\subset I\subset[\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} \tag{2.5.9}$$

其中 `o`u 第一个等式由 (2.5.8) 得出，第二个等式由条件 $\nu_{|[\![0,\ n]\!]-I} = 0$ 与 $I \supset \{x \in [\![0,n]\!]|\nu_x \neq 0\}$ 等价得出，第三个等式则是一个分解。

对于所有 $(\nu_0,\dots,\nu_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geqslant 0}$ 满足 $\nu_0 + \cdots + \nu_{n+1} = n$ 的情形，均有

$$\sum_{\{x\in[\![0,n]\!]|\nu_x\neq 0\}\subset I\subset[\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} = (-1)^{|\{x\in[\![0,n]\!]|\nu_x\neq 0\}|} \sum_{J\subset\{x\in[\![0,n]\!]|\nu_x=0\}} (-1)^{|J|} = 0 \tag{2.5.10}$$

其中，第一条等式由满足 $\{x \in [\![0, n]\!] | \nu_x \neq 0\} \subset I \subset [\![0, n]\!]$ 的 I 集合与 $\{x \in [\![0, n]\!] | \nu_x = 0\}$ 的子集 J 集合之间的双射 $J \mapsto J \cup \{x \in [\![0, n]\!] | \nu_x \neq 0\}$ 得出；第二条等式则由恒等式 $\sum_{X \subset E} (-1)^{|X|} = 0$（对任意非空有限集 E）以及 $\{x \in [\![0, n]\!] | \nu_x = 0\} \neq \varnothing$ 得出，后者由 $(\nu_0, \dots, \nu_{n+1}) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{n+1}$ 和 $\nu_0 + \cdots + \nu_{n+1} = n$ 推出。结合 (2.5.10) 和 (2.5.9)，可得 $\sum_{I \subset [\![0, n]\!]} (-1)^{|I|} (\mathrm{div}_n^{|I|+1})^*(c_I) = 0$. □

2.5.4. 定理 2.3 中 (b) 的证明。引理 2.51 和 (2.5.6) 推出

$$\sum_{I \subset [\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} c_I \in C_n(Y_{ab}^{(n)}) + \partial_{n,n+1}^*(C_{n+1}(X^n))$$

（在 $C_n(X^n)$ 中的关系），也就是说

$$\sum_{I \subset [\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} (\tilde{\gamma} * *_{i \in I} \tilde{\alpha}_i)^{(n)} \in C_n(Y_{ab}^{(n)}) + \partial_{n,n+1}^*(C_{n+1}(X^n)) \tag{2.5.11}$$

（在 $C_n(X^n)$ 中的关系）。每个 $c_I = (\tilde{\gamma} * *_{i \in I} \tilde{\alpha}_i)^{(n)}$ 都属于子空间 $Z_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}) = \{c \in C_n(X^n) | \partial_{n-1,\ n}^*(c) \in C_{n-1}(Y_{ab}^{(n)})\} \subset C_n(X^n)$，因此 (2.5.11) 可视为 $Z_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$ 中的一个关系。它推出关系

$$\sum_{I \subset [\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} [(\tilde{\gamma} * *_{i \in I} \tilde{\alpha}_i)^{(n)}] = 0 \tag{2.5.12}$$

（$\mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}) = Z^n(X^n, Y_{ab}^{(n)}) / B_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$, 中的等式，其中 $B_n(X^n, Y_{ab}^{(n)}) = C_n(Y_{ab}^{(n)}) + \partial_{n,\ n+1}^*(C_{n+1}(X^n))$）。

对于 $I \subset [\![0, n]\!]$，有

$$[(\tilde{\gamma} * *_{i \in I} \tilde{\alpha}_i)^{(n)}] = F_n([\tilde{\gamma} * *_{i \in I} \tilde{\alpha}_i]) = F_n(\gamma \cdot \prod_{i \in I} \alpha_i)$$

（$\mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$ 中的 ´egalit´e）o`u 第一个 `ere ´egalit´e 由 (2.1.1) 得出，第二个由 ((2.5.1)) 得出。将此 ´egalit´e 与 (2.5.12) 结合，可得所需的 ´egalit´e

$$\sum_{I \subset [\![0,n]\!]} (-1)^{|I|} F_n(\gamma \cdot \prod_{i \in I} \alpha_i) = 0$$

（$\mathrm{H}_n(X^n, Y_{ab}^{(n)})$ 中的 ´egalit´e）。

3. 与 Beilinson 同构的联系

本节的目标是证明命题 3.1，该命题将定理 2.3 中得到的映射与 Beilinson 同构 (0.0.1) 联系起来。我们在第 3.1 节回顾该同构的构造，然后在第 3.2 节证明命题 3.1。

3.1. Beilinson 同构回顾。设 M 是一个连通可微流形，具有有限 CW 复形的同伦类型，并且 $n \geqslant 1$。在 [DG], §3.3（另见 [BGFr],第 251 页）中，对 M 的每一对元素 (x, y)，赋予一个由 $\mathbb{Q}$-向量空间 ${}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle$ 构成的层复形，其定义在 M^n 上，并有一个满射线性映射 $\mathbb{H}^\bullet(M^n, {}_x\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \to \mathbb{Q}$。我们有以下 $\mathbb{Q}$-向量空间同构

$$\mathrm{H}^\bullet(M^n, Y_{yx}^{(n)}; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{H}^\bullet(M^n, {}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \text{ si } x \neq y,$$

([BGFr], 在 (3.282) 前两行) 和

$$\mathrm{H}^\bullet(M^n, Y_{xx}^{(n)}; \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Ker}(\mathbb{H}^\bullet(M^n, {}_x\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \to \mathbb{Q}),$$

([BGFr], (3.284))，其中 $\mathrm{H}^\bullet(-,-;\mathbb{Q})$ d′ 表示取值于有理数域的拓扑空间对的相对奇异同调，而 $\mathbb{H}^\bullet$ 表示层复形的超上同调。

Beilinson 定理（ [DG], 中的命题 3.4，或 [BGFr] 中的定理 3.298）指出，存在一个 $\mathbb{Q}$-向量空间同构

$$\underline{\beta}_{yx}^{(n)} : \mathbb{H}^\bullet(M^n, {}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \to (\mathbb{Q}\pi_1(x,y)/\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^*$$

嵌入如下交换图中

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^\bullet(M^n, {}_x\mathcal{K}_x\langle n\rangle) & \longrightarrow & (\mathbb{Q}\pi_1(x)/(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^* \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{Q} & \end{array}$$

映射 $(\mathbb{Q}\pi_1(x)/(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^* \to \mathbb{Q}$ ′ 是由 $1 \mapsto 1$ 诱导的映射 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\pi_1(x)/(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1}$ 的对偶。

由此可得，对任意 $(x,\ y)$，都有一个线性映射

$$\beta_{yx}^{(n)} : \mathrm{H}^\bullet(M^n, Y_{yx}^{(n)}; \mathbb{Q}) \to (\mathbb{Q}\pi_1(x,y)/\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^*, \tag{3.1.1}$$

当 $y \neq x$ 时，它是一个同构，并且诱导出一个同构

$$\mathrm{H}^\bullet(M^n, Y_{xx}^{(n)}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}((\mathbb{Q}\pi_1(x)/(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^* \to \mathbb{Q})$$

当 $y = x$ 时。

3.2. 定理 2.3 与 Beilinson 同构的关系。记 θ M^n 的对合为 $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \mapsto (x_n,\ \ldots,\ x_1)$。集合 $Y_{yx}^{(n)}$ 在此对合下的像为 $Y_{xy}^{(n)}$，因此它诱导出一个同构 θ^*: $\mathrm{H}^n(M^n, Y_{yx}^{(n)};\ \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^n(M^n,\ Y_{xy}^{(n)};\ \mathbb{Q})$。回顾相对同调与上同调之间的配对，它诱导出一个线性映射 can: $\mathrm{H}^n(M^n, Y_{xy}^{(n)};\ \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_n(M^n, Y_{xy}^{(n)})_{\mathbb{Q}}^*$; 对于一个 $\mathbb{Z}$-模，我们记 $A_{\mathbb{Q}}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q})$。对于 $A \to B$: $\mathbb{Z}$-模的态射，我们也记 $f_{\mathbb{Q}}^*$: $B_{\mathbb{Q}}^* \to A_{\mathbb{Q}}^*$ 为诱导的态射。

命题 3.1。线性映射 $\beta_{yx}^{(n)}$（参见 (3.1.1)）除一个符号外，等于线性映射 $\overline{F}_{xy}^{(n)}$（参见定理 2.3）的对偶、can 和 θ^* 的复合。更确切地说，有

$$\beta_{yx}^{(n)} = (-1)^{n+1}(\overline{F}_{xy}^{(n)})_{\mathbb{Q}}^{*} \circ \mathrm{can} \circ \theta^*.$$

证明。在 BGFr 中构造了一个层复形态射 nat : ((3.282) 以及该等式之前五行)；若，此态射就是 的恒等映射（参见同上，(3.282) 之前六行）。在同上文献中，构造了一个向量空间同构 BGF：, H,;（引理 3.281）。于是，映射 (3.1.1) 由以下复合给出

$$\mathrm{H}^n(M^n, Y_{yx}^{(n)}; \mathbb{Q}) \overset{(iso_{\mathrm{BGF}}^{yx})^{-1}}{\to} \mathbb{H}^n(M^n, {}_y\tilde{\mathcal{K}}_x\langle n\rangle) \to \mathbb{H}^n(M^n, {}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \overset{\underline{\beta}_{yx}^{(n)}}{\to} (\mathbb{Q}\pi_1(x,y)/\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^*$$

此时，´命´题 ´等价于 `以下图表的交换性´

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^n(M^n, {}_y\tilde{\mathcal{K}}_x\langle n\rangle) & \xrightarrow{\mathrm{nat}^*} & \mathbb{H}^n(M^n, {}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) & \xrightarrow{\underline{\beta}_{yx}^{(n)}} & (\mathbb{Q}\pi_1(x,y)/\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1})^* \\
\downarrow{\scriptstyle iso_{\mathrm{BGF}}^{yx}} & & & & \uparrow{\scriptstyle (\overline{F}_{xy}^{(n)})^*} \\
\mathrm{H}^n(M^n, Y_{yx}^{(n)}; \mathbb{Q}) & \xrightarrow[\theta^*]{} & \mathrm{H}^n(M^n, Y_{xy}^{(n)}; \mathbb{Q}) & \xrightarrow[(-1)^{n+1}\mathrm{can}]{} & \mathrm{H}_n(M^n, Y_{xy}^{(n)})_{\mathbb{Q}}^{*}
\end{array}$$

其等价于以下陈述:

$$\begin{aligned}
(3.2.1) \qquad & \forall c \in \mathrm{H}^n(M^n, Y_{xy}^{(n)}; \mathbb{Q}), \quad \forall a \in \mathbb{Q}\pi_1(x,y)/(\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))_+^{n+1}), \\
& \langle \underline{\beta}_{yx}^{(n)} \circ \mathrm{nat}^* \circ (iso_{\mathrm{BGF}}^{yx})^{-1} \circ (\theta^*)^{-1}(c), a\rangle = (-1)^{n+1}\langle c, \overline{F}_{xy}^{(n)}(a)\rangle_{hom},
\end{aligned}$$

o`u $\langle -,-\rangle$ 是与 $V^* \times V \to \mathbb{Q}$ 相´关联 `于一个 $\mathbb{Q}$向量空间 V的 $\langle$–配对 $-\rangle_{hom}$，且$^n(X\mathrm{H}\,Y,$ $\mathbb{Q}) \times \mathrm{H}_n(X,Y) \to \mathbb{Q}$是自然配对；由线´性´，只需验证´对于$a = [\gamma]$成立，`其中 $\gamma \in \pi_1(x,y)$。

回顾 BGFr 的一些构造。设 C：是双复形，其中：，其中：Hom，其中是对上余边界算子的求和，而是对满足和的各对所对应的映射：的求和，其中：是 BGFr 在 (3.287) 之后给出的公式所定义的态射，而是由 BGFr 在 (3.278) 之前给出的公式定义的。设 C：是 C 的商双复形，由给出，若，对任意。

根据 ` [BGFr], 引理 3.289，我们有一个同构 $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(\mathrm{C})) \simeq \mathbb{H}^n(M^n, {}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle)$。我们证明，该同构可嵌入到一个交换方块中，其中垂直态射

是同构

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Tot}\tilde{\mathbf{C}}) & \xrightarrow{\mathbf{nat}} & \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Tot}\mathbf{C}) \\ {\scriptstyle \tilde{i}_{\mathbb{C}}}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle i_{\mathbb{C}}} \\ \mathbb{H}^n(M^n,{}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) & \xrightarrow[\mathrm{nat}^*]{} & \mathbb{H}^n(M^n,{}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \end{array} \tag{3.2.2}$$

那么复合映射

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Tot}\mathbf{C}) \xrightarrow{i_{\mathbb{C}}} \mathbb{H}^n(M^n,{}_y\mathcal{K}_x\langle n\rangle) \xrightarrow{\underline{\beta}^{(n)}_{yx}} (\mathbb{Q}\pi_1(x,y)/\mathbb{Q}\pi_1(x,y)(\mathbb{Q}\pi_1(x))^{n+1}_+)^*$$

满足：对于 $\omega=(\omega_I)_{\varnothing\neq I\subset[\![1,n]\!]}\in\mathsf{Z}^n(\mathbf{TotC})$，其中 $\omega_I\in C^{n-|I|}(X^I)$，且 $\gamma\in\pi_1(x,y)$，有

$$\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ i_{\mathbf{C}}([\omega]),[\gamma]\rangle=\sum_{\varnothing\neq I\subset[\![1,n]\!]}(-1)^{(1/2)(|I|-1)(|I|-2)+n|I|}\epsilon(I)\omega_I(\tilde{\gamma}^{(I)}), \tag{3.2.3}$$

（参见 [BGFr],(3.292)），其中 $\epsilon(I)$ 由 [BGFr],(3.278) 给出，而 $\gamma^{(I)}\in\mathbf{Top}(\Delta^{|I|},M^I)\subset C_{|I|}(M^I)$ 由 $\Delta^{|I|}\ni(t_1,\dots,t_{|I|})\mapsto(I\ni i\mapsto\tilde{\gamma}(t_{\kappa(i)}))\in M^I$ 给出，且 κ 是唯一的递增双射 $I\to[\![1,|I|]\!]$。

对于任意的 $i\in[\![1,n]\!]$ 和 $p\geqslant 0$，映射 $\delta^*_{[\![1,\ n]\!],\ [\![1,\ n]\!]-\{i\}}:\ C^p(X^n)\to C^p(X^{[\![1,\ n]\!]-i})$ 是一个复合 $C^p(X^n)\to C^p(Y^{(n)}_{xy})\to C^p(X^{[\![1,\ n]\!]-\{i\}})$ 因此 $\mathbf{Ker}(C^p(X^n)\to C^p(Y^{(n)}_{xy}))\subset\mathbf{Ker}(\oplus_{i\in[\![1,\ n]\!]}:\delta^*_{[\![1,\ n]\!],\ [\![1,\ n]\!]-\{i\}}:C^p(X^n)\to\oplus_{i\in[\![1,\ n]\!]}C^p(X^{[\![1,\ n]\!]-\{i\}}))$。

因此，对每个 $p\geqslant 0$，都有一个线性映射 $\tilde{\mu}^p:\mathbf{Ker}(C^p(X^n)\to C^p(Y^{(n)}_{xy}))\to\mathbf{Tot}^p(\tilde{\ }\mathbf{C})$，由 $\mathbf{Ker}(C^p(X^n)\to C^p(Y^{(n)}_{xy}))\ni c\mapsto((p,0)\mapsto c,(p,0)\neq(p,'q')\mapsto 0)$ 给出，它定义了一个复形态射

$$\tilde{\mu}^\bullet:\mathrm{Ker}(C^\bullet(X^n)\to C^\bullet(Y^{(n)}_{xy}))\to\mathrm{Tot}^\bullet(\tilde{\mathbf{C}}). \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) 的源复形的上同调是相对奇异上同调 $\mathrm{H}^\bullet(X^n,Y^{(n)}_{xy};\mathbb{Q})$。由复形态射 (3.2.4) 可导出一个上同调态射

$$\mathrm{H}^\bullet(\tilde{\mu}^\bullet):\mathrm{H}^\bullet(X^n,Y^{(n)}_{xy};\mathbb{Q})\to\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Tot}(\tilde{\mathbf{C}}))$$

可以验证它满足

$$\mathrm{H}^\bullet(\tilde{\mu}^\bullet)=(\tilde{i}_{\mathbf{C}})^{-1}\circ(iso_{\mathrm{BGF}})^{-1}\circ(\theta^*)^{-1}. \tag{3.2.5}$$

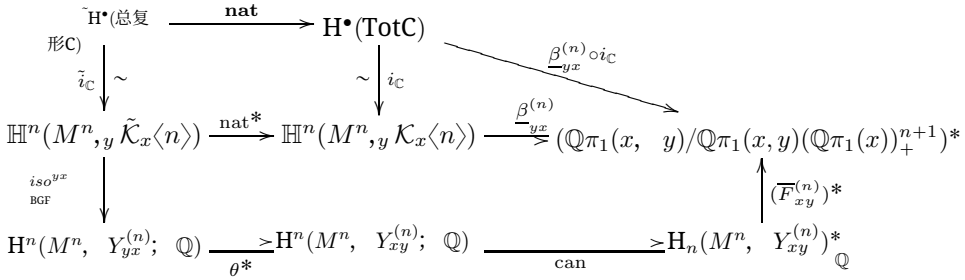
现在证明 (3.2.1)。设 $\gamma\in\pi_1(x,y)$, $c\in\mathbf{H}^n(M^n,Y^{(n)}_{xy};\mathbb{Q})$。设 $\tilde{c}\in\mathsf{Z}^n(\mathbf{Ker}(C^\bullet(X^n)\to C^\bullet(Y^{(n)}_{xy})))$ 是 c 的一个代表元。那么

$$\begin{aligned}&\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ\mathrm{nat}^*\circ(iso^{yx}_{\mathrm{BGF}})^{-1}\circ(\theta^*)^{-1}(c),[\gamma]\rangle=\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ i_{\mathbf{C}}\circ\mathbf{nat}\circ\tilde{i}^{-1}_{\mathbf{C}}\circ(iso^{yx}_{\mathrm{BGF}})^{-1}\circ(\theta^*)^{-1}(c),[\gamma]\rangle\\&=\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ i_{\mathbf{C}}\circ\mathbf{nat}\circ\mathrm{H}^n(\tilde{\mu}^\bullet)(c),[\gamma]\rangle=\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ i_{\mathbf{C}}\circ\mathbf{nat}\circ[\tilde{\mu}^n(\tilde{c})],[\gamma]\rangle=\langle\underline{\beta}^{(n)}_{yx}\circ i_{\mathbf{C}}\circ[\mu^n(\tilde{c})],[\gamma]\rangle\\&=(-1)^{(n-1)(n-2)/2+n^2+n(n+1)/2}\tilde{c}(\tilde{\gamma}^{(n)})=(-1)^{n+1}\langle c,\overline{F}^{(n)}_{xy}([\gamma])\rangle_{hom}\end{aligned}$$

˜o`u $\mu^n$ 是 $\tilde{\mu}^n$ 与投影 $\mathsf{C}^n\to\mathsf{C}^n$ 的复合；第一个`等式´由 (3.2.2) 的交换性得到，第二个`等式´由 (3.2.5) 得到，第三个`等式´由 $\mathrm{H}^n(\tilde{\mu}^\bullet)$ 的定义得到，第四个`等式´由 nat 是上同调版本得到

˜投影 $\mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^n$，第五个˙等式˝由˙等式˝(3.2.3) 得到，其中只有 $I = [\![1, n]\!]$ 的贡献是非平凡的，最后一个˙等式˝由 (2.1.1) 得到。□

命题 3.1 的证明由下图说明



4. Construction de transformations naturelles

记 Top_2 为由一对标记点（即从始对象 $*$ 出发的一对态射）构成的拓扑空间范畴。对于 (X, a, b)，一个 Top_2˙中的对象，$(\pi_1(a,b), \pi_1(a))$ 是一个右托orsor ˙，也就是说，是一对 (T, G)，其中 T 是一个集合，G 是一个群，并且配备了 G 在 T 上自由且传递的右作用。对应关系 $(X, a, b) \mapsto (\pi_1(a,b), \pi_1(a))$ ˊ定义了一个函子 $\mathsf{Top}_2 \to \mathsf{TorDt}$，其中 TorDt 是右托orsor 范畴。

定义 4.1。对于 (X, x, y)，一个 Top_2˙中的对象，记 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x, y)$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的自由 $\mathbb{Z}$-模。

引理4.2。映射 $(X, a, b) \mapsto \mathrm{F}_n(X, a, b)$ d ˊ定义了从 Top_2 到阿贝尔群范畴 Ab 的协变函子。

证明。它是将 (X, a, b) 映到$(\pi_1(a,b), \pi_1(a))$ 的函子 $\mathsf{Top}_2 \to \mathsf{TorDt}$ 与将 (T, G) 映到 $\mathbb{Z}T/(\mathbb{Z}T)(\mathbb{Z}G)^{n+1}_+$ 的函子 $\mathsf{TorDt} \to \mathsf{Ab}$ 的复合。□

定义4.3。对于 $\underline{X} = (X, a, b)$ 这个 Top_2˙的对象，记作 $Y_{\underline{X}}(n) := Y^{(n)}_{ab}$（参见 (0.0.2)）。

引理4.4。映射 $(X, a, b) \mapsto (X^n, Y_{\underline{X}}(n))$ 是一个从 $\mathsf{Top}_2 \to$ 到 Paires 的协变函子。

D ˊ证明。可以验证，若 $\underline{X} = (X, a, b)$ 和 $\underline{X}' = (X', a', b')$ 是 Top_2 中的对象，且 $f\colon X \to X'$ 是 Top 中的一个态射，使得 $f(a) = a'$ 和 $f(b) = b'$，那么 $f(Y_{\underline{X}}(n)) \subset Y_{\underline{X}'}(n)$。□

引理-定义 4.5。对于 $\underline{X} \in \mathsf{Top}_2$˙，定义 $\mathrm{H}_n(\underline{X}) := \mathrm{H}_n(X^n, Y_{\underline{X}}(n))$。映射$\underline{X} \mapsto \mathrm{H}_n(\underline{X})$ d ˊ定义了一个协变函子 $\mathrm{H}_n : \mathsf{Top}_2 \to \mathsf{Paires}$。

D ˊ证明。由将 H_n 识别为函子 $(X, a, b) \mapsto (X^n, Y_{\underline{X}}(n))$ 与相对同调函子的复合可得。□

定理 2.3 的一个推论是：

定理 4.6. 对于 $n \geqslant 0$ 和 $\underline{X}$，Top_2，中的一个对象，群同态 $\mathbb{Z}\pi_1(a,b) \to \mathrm{H}_n(\underline{X}),\ \gamma \mapsto [\tilde{\gamma}^n]$ 诱导出一个群同态 $\nu^{(n)}_{\underline{X}} : \mathrm{F}_n(\underline{X}) \to \mathrm{H}_n(\underline{X})$。对应关系 $\underline{X} \mapsto \nu^{(n)}_{\underline{X}}$ 是从 F_n 到 H_n 的自然变换。

致谢。B.E. 的研究工作得到了 ANR 项目“Project HighAGT ANR20-CE40-0016”的支持。

Bibliographie

[BGFr] J. Burgos Gil、J. Fresan，《多重 ζ 值：从数到动机》，预印本，http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/mzv.pdf，即将在 *Clay Mathematics Proceedings*.[DG] P. Deligne、A. Goncharov，《混合 Tate 动机基本群》，《法国高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）38（2005），第 1 期，1–56 页。[GrH] M. Greenberg、J. Harper，《代数拓扑：第一门课程》，数学讲义系列第 58 卷，Benjamin/Cummings 出版公司高级图书计划，马萨诸塞州雷丁，1981。[Ha] A. Hatcher，《代数拓扑》，纽约，剑桥大学出版社，2001。

Institut de Recherche Mathématique Avancée、 UMR 7501、
Université de Strasbourg et CNRS、7rue René Descartes、 67000 Strasbourg、 France
Email address： enriquez@math.unistra.fr*Email address*： lecomte@math.unistra.fr