arXiv:2301.01159v1 [math.AP] 3 Jan 2023

一维准周期介质中的波传播

Pierre Amenoagbadji、Sonia Fliss、Patrick Joly

摘要

本文致力于求解一维无界介质中的亥姆霍兹方程 $-(\mu\,u')'-\rho\,\omega^2 u=f$。我们假设该方程的系数是准周期函数的局部扰动，即高维周期函数沿特定直线的迹。根据准周期性的定义，我们将问题提升为一个具有周期系数的高维问题。增广问题的周期性使我们能够将文献 [10, 19] 中针对椭圆情形提出的基于 DtN 的方法推广到此处。然而，由于增广偏微分方程是退化的（即其算子的主部不再是椭圆的），该方法相关的数学分析和数值分析更为复杂。我们还研究了该偏微分方程的数值求解，其依赖于狄利克雷胞元问题以及一个约束黎卡提方程的求解。

1 引言与动机

我们考虑亥姆霍兹方程

$$-\frac{d}{dx}\Big(\mu\,\frac{du}{dx}\Big)-\rho\,\omega^2\,u=f\quad\text{in}\quad\mathbb{R},\tag{1.1}$$

其中系数 μ 和 ρ 具有正的上下界：

$$\exists\,\mu_\pm,\rho_\pm,\quad\forall\,x\in\mathbb{R},\qquad 0<\mu_-\le\mu(x)\le\mu_+\quad\text{and}\quad 0<\rho_-\le\rho(x)\le\rho_+.\tag{1.2}$$

源项 f 属于 L^2(R)，并假设其具有紧支集 ：

$$\exists\,a>0,\quad\operatorname{supp} f\subset(-a,a).\tag{1.3}$$

方程 (1.1) 出现在求解非均匀介质中线性波动方程的时谐解 $u(x)\,e^{\mathrm{i}\omega t}$ 时。对于实频率 ω，该问题的适定性尚不明确。事实上，一方面，由于可能出现波传播现象且解在无穷远处缺乏衰减，物理解 u即使存在，也可能不属于 H^1(R)。另一方面， H^1_{loc}(R) 中的解一般不具有唯一性。在这种情况下，需要施加所谓的辐射条件，以规定解在无穷远处的行为。实际上，可以利用极限吸收原理得到这样的条件：该原理包括 (i) 加入一定的吸收——即在 ω：$\mathfrak{Im}\,\omega$ 中加入虚部；以及 (ii) 研究吸收趋于 0 时解 $u\equiv u(\omega)$ 的极限。极限吸收原理是研究无界区域中时谐波传播问题的经典方法；例如参见 [1, 9, 31]。近年来，该方法已成功应用于局部扰动周期介质 [10, 17, 20, 25]。

本文仅讨论存在吸收的情形，即

$$\text{the frequency } \omega \text{ satisfies } \ \mathfrak{Im}\,\omega > 0. \tag{1.4}$$

在这些假设下，(1.1) 由 Lax-Milgram 定理可知，在 $H^1(\mathbb{R})$ 中存在唯一解。此外，可以证明（例如，采用与 [7]中类似的论证）该解满足尖锐指数衰减性质

$$\exists\, c,\, \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |u(x)| \le c\, \mathrm{e}^{-\alpha\, \mathfrak{Im}\,\omega |x|}. \tag{1.5}$$

利用 (1.5)，处理无界区域的一种简单数值方法是截断计算区域（例如，施加齐次狄利克雷边界条件），截断位置与 $\mathfrak{Im}\,\omega$有关。然而，当 $\mathfrak{Im}\,\omega$ 趋于0时，该方法的成本会增加，精度也会下降。本文的目标是针对 $\mathfrak{Im}\,\omega$ 趋于0时的情形，开发一种稳健的数值方法，特别是针对局部扰动准周期介质。更准确地说，我们通过构造狄利克雷到诺伊曼型透明边界条件，在有界区域$(-a, a)$ 内求解问题（该区域与 $\mathfrak{Im}\,\omega$无关）：

$$\pm\, \mu\, \frac{du}{dx} + \lambda^{\pm}\, u = 0 \quad \text{on} \quad x = \pm a, \tag{1.6}$$

其中， $\lambda^{\pm}$ 称为狄利克雷到诺伊曼(DtN) 系数。这些系数定义如下：

$$\lambda^{\pm} = \mp \Big[\mu\, \frac{du^{\pm}}{dx}\Big](\pm a), \tag{1.7}$$

其中， $u^{\pm}$ 是 H^1($\pm a$， $\pm\infty$)中的唯一解，满足

$$\left| \begin{aligned} -\frac{d}{dx}\Big(\mu\, \frac{du^{\pm}}{dx}\Big) - \rho\, \omega^2\, u^{\pm} &= 0, \quad \text{for} \quad \pm x > a, \\ u^{\pm}(\pm a) &= 1. \end{aligned} \right. \tag{1.8}$$

已知 $\lambda^{\pm}$后，只需通过求解该问题来计算 $u|_{(-a,a)}$

$$\left| \begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\Big(\mu\, \frac{du^{i}}{dx}\Big) - \rho\, \omega^2\, u^{i} = f, \quad \text{for} \quad x \in (-a, a), \\ &\Big[\pm\, \mu\, \frac{du^{i}}{dx} + \lambda^{\pm}\, u^{i}\Big](\pm a) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1.9}$$

该问题的适定性是符号性质的直接结果

$$\mathfrak{Im}\,\lambda^{\pm} < 0,$$

这一性质通过格林公式可归因于耗散的存在（1.4）在（1.8）中的体现。于是，方程 u （1.1）的解为

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \begin{cases} u^{i}(-a)\, u^{-}(x), & x < -a, \\ u^{i}(x), & x \in (-a, a), \\ u^{i}(a)\, u^{+}(x), & x > a. \end{cases} \tag{1.10}$$

一般而言，问题在于计算 $\lambda^{\pm}$，也就是说，求解（1.8），与原问题同样困难。然而，当外部介质（即在$(-a,\ a)$具有某种特定结构时，情况就不再如此：

- 如果外部介质是均匀的（ρ 和 μ 为常数），则可以显式计算这些系数；
- 如果外部介质是周期的（ρ 且 μ 均为周期函数），文献 [10, 19, 20] 中提出了多种计算这些 DtN系数的方法；
- 如果外部介质是周期介质的弱随机扰动，则可以通过渐近分析近似这些系数；参见 [11]。

本文的主要目标是计算准周期外部介质的 DtN 系数，以便根据（1.8）、（1.9）、（1.10）开发一种数值方法。

本文其余部分的安排如下。第 2 节介绍准周期函数（在一维情形下）的基本概念，并在问题（1.1）的背景下定义什么是局部扰动准周期介质。第 3 节和第 4 节是本文最重要的部分。第 3 节将具有准周期系数的一维半直线问题的解与定义在n维空间中的退化定向亥姆霍兹方程的解联系起来，其中 $n > 1$ 的定义同第 2 节。所谓提升方法，其原理见第 3.1 节。更具体地说，在第 3.3 节中，我们将一维准周期问题的解刻画为定义在具有半波导几何结构的区域中的一个 n维问题沿一条（分段）直线的迹：$(0,1)^{n-1} \times \mathrm{R}_+$。在此期间，我们还需用篇幅较长的第 3.2 节来明确本文其余部分所用的符号，并介绍为严格建立本方法所需的一些适用函数空间框架的预备知识。这涉及各向异性 Sobolev 空间，尤其着重于迹定理及相关的格林公式。第 4 节给出一种求解第 3.3 节半波导问题的方法。第 4.1 节借助传播算子 P 和局部单胞问题描述解的结构。第 4.2 节说明算子 P 可刻画为黎卡提方程的一个特解。第 4.3 节首先为半波导问题构造定向DtN算子 Λ，并由此推导出所需的 DtN 系数 $\lambda^{\pm}$（参见（1.7））。最后，第 4.4 节从谱的角度分析黎卡提方程，第 4.5 节则描述 P 的谱。在专门讨论数值结果的第 5 节中，为简化起见，我们仅考虑 $n = 2$。前两个小节讨论上述单元问题的离散化。我们考虑了两种方法：一种自然但较为朴素的方法是采用二维拉格朗日有限元（第 5.1 节）；另一种称为准一维方法，更适合问题的各向异性（第 5.2 节）。第 5.3 节解释如何由离散黎卡提方程构造离散传播算子；我们选择通过谱方法求解该方程。第 5.4 节则是在离散层面简单复现第 4.3 节的做法。第 5.5 节介绍数值结果。前三个小节针对半直线问题（第 5.5.1 节和第 5.5.3 节）及整线问题（第 5.5.2 节），对我们的方法进行多方面验证。最后，在第 5.5.4 节中，我们讨论如何用传播算子 P 的离散近似的谱来近似 P 的谱。

本文通篇使用的特定符号。下文中，

1. 模 1 等式记作

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \quad z = y\,[1] \quad \Longleftrightarrow \quad z \in [0,1) \ \text{ and } \ y - z \in \mathbb{Z}.$$

并且对所有 $p, q \in \mathbb{N}$ $p < q$，我们设 $[\![p, q]\!] := \{j \in \mathbb{N} \quad p \leq j \leq q\}$。

2. 我们将 $\mathscr{C}_{per}(\mathbb{R}^n)$ 定义为连续函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的空间，这些函数关于每个变量都是 1 周期的；将 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ 定义为在 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ 中紧支撑的光滑函数空间。

3. 对于 $i \in [\![1, n]\!]$，我们用 $\vec{\mathbf{e}}_i$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的标准基中的第 i 个单位向量。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意元素 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$，我们定义 $\hat{\mathbf{y}}$ 为向量 $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$，使得 $\mathbf{y} = (\hat{\mathbf{y}}\ y_n)$。对于 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ 和 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$，$\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{z}$ 的欧几里得内积记为 $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} := y_1 z_1 + \cdots y_n z_n$，相应的范数为 $|\mathbf{y}| := \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}$。

2 拟周期性

2.1 一个实变量的准周期函数

本节简要介绍准周期函数的主要性质。更详尽的论述请参见 [3, 5, 22] 。准周期性的定义如下。

定义2.1。连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 称为阶数为 $n > 1$的准周期函数，若存在一个常实向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$，其中 $\theta_i > 0$ 对所有 $i \in [\![1, n]\!]$均成立，且存在一个连续函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，该函数关于每个变量均为 1-周期，并满足

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(x\,\boldsymbol{\theta}). \tag{2.1}$$

向量 $\boldsymbol{\theta}$ 称为切割方向，而 F 是 f的一个周期延拓。

对此定义的一种几何解释是，将一维函数 f 视为一个 n维函数 F 沿着经过$(0,0)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{\theta}$的直线所作的迹。这如图1 所示，其中 $n = 2$ 且 $\boldsymbol{\theta} = (1, \sqrt{2})$。

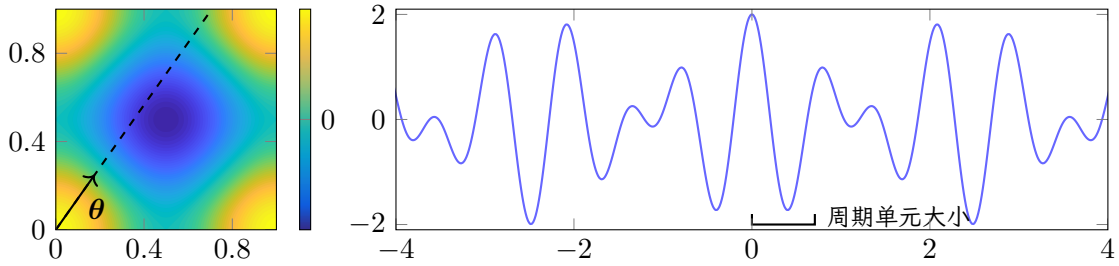


图1：函数 F：$(y_1,\ y_2) \mapsto \cos 2\pi y_1 + \cos\ 2\pi y_2$ 在其周期胞元中（左图），沿 $\boldsymbol{\theta} = (1,\ \sqrt{2})$ 的迹则得到一个准周期函数（右图）。

周期函数显然是准周期的。准周期函数的其他例子包括周期函数的有限和或有限乘积：如果 f_1 和 f_2 是周期函数，那么 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 可以表示为式（ 2.1 ）的形式。注意，当 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 是最小周期不可公度的连续函数时， f_1和 f_2 并非周期函数。举例来说，取

$f_1(x) = \text{余弦}\, 2\pi x$ 和 $f_2(x) = \text{余弦}\, \overline{2}\pi\sqrt{2}x$，容易验证，其和 $f_1 + f_2$（见图1）不是周期函数，因为它仅当 $x = 0$ 时才等于2 。

在定义 2.1中，很容易看出，周期延拓和切割方向都不是唯一确定的。给定 $(F, \boldsymbol{\theta})$后，总可以降低 n的值，并相应地改变函数 F，使得系数 θ_1、……、θ_n 在整数上线性无关 (见 [22, 第 2]章)，即

$$\forall\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n, \qquad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{k} = 0. \tag{2.2}$$

对于 $n = 2$ 和 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$，上述条件相当于说比值 θ_1/θ_2 是无理数。由此观察可知，满足（2.2）的向量将被不严格地称为无理向量。（2.2）的一个推论由克罗内克逼近定理给出。

定理 2.2 ([16, 定理 444])。 如果 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个无理向量，那么集合 $\boldsymbol{\theta}\mathbb{R} + \mathbb{N}^n$ 在$\mathbb{R}^n$中稠密。

如果 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个无理向量，且 $F \in \mathscr{C}_{per}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $F(\boldsymbol{\theta}\,\mathbb{R}) = 0$，那么定理 2.2保证 $F = 0$。换言之，在线性无关这一条件下， F 由其在线 $\boldsymbol{\theta}\mathbb{R}$上的限制唯一确定。

对于 $n = 2$，定理 2.2 蕴含折线 $\{(x\,\theta_1[1], x\,\theta_2[1]) \;\; x \in \mathrm{R}\}$ 在单位胞 $(0, 1)^2$ 中稠密。为说明这一点，图2展示了当 (1) $\theta_1/\theta_2 \in \mathrm{Q}$（见第一行）以及当 (2) $\theta_1/\theta_2 \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$（见 $\boldsymbol{\theta} = (\sqrt{2}, 1)$ 对应的第二行和 $\boldsymbol{\theta} = (\pi, 1)$ 对应的第三行）时，取不同 M 值的情况下，单位胞中集合 $\{(x\,\theta_1[1], x\,\theta_2[1]) \;\; x \in (0, M)\}$ 的图示。当 M 足够大时，在第一种情况下，该集合会缩减为有限个线段的并；而在第二种情况下，它似乎填满了整个单位胞，却从未经过相同的位置。另一个有趣的现象是，对于 $\boldsymbol{\theta} = (\sqrt{2}, 1)$，单位胞似乎被均匀填满，这与 $\boldsymbol{\theta} = (\pi, 1)$ 的情况相反。

最后值得一提的是，定义2.1 也可推广到更高维的连续函数。此外，准周期性也可以在离散层面上定义，用来描述由高维周期镶嵌通过截取和投影得到的镶嵌的性质。这些准周期镶嵌已得到广泛研究 [13, 23, 24, 27], ，并用于模拟准晶体 [28]。

2.2 局部扰动准周期介质

局部扰动准周期介质是指与函数 μ 和ρ 相对应的介质，这些函数满足（1.2），并且在某个有界区间之外是准周期的。不失一般性，可以设该区间为$(-a,\ a)$ （见（1.3））。更确切地说，

$$\mu(x) = \begin{vmatrix} \mu_i(x) & x \in (-a, a) \\ \mu_p(x\,\boldsymbol{\theta}) & x \in \mathbb{R} \setminus (-a, a) \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(x) = \begin{vmatrix} \rho_i(x) & x \in (-a, a) \\ \rho_p(x\,\boldsymbol{\theta}) & x \in \mathbb{R} \setminus (-a, a), \end{vmatrix}$$

其中函数 μ_p、 ρ_p 属于 $\mathscr{C}_{per}(\mathbb{R}^n)$ 且 $n > 1$，而 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ 是一个无理向量（见条件（2.2））。

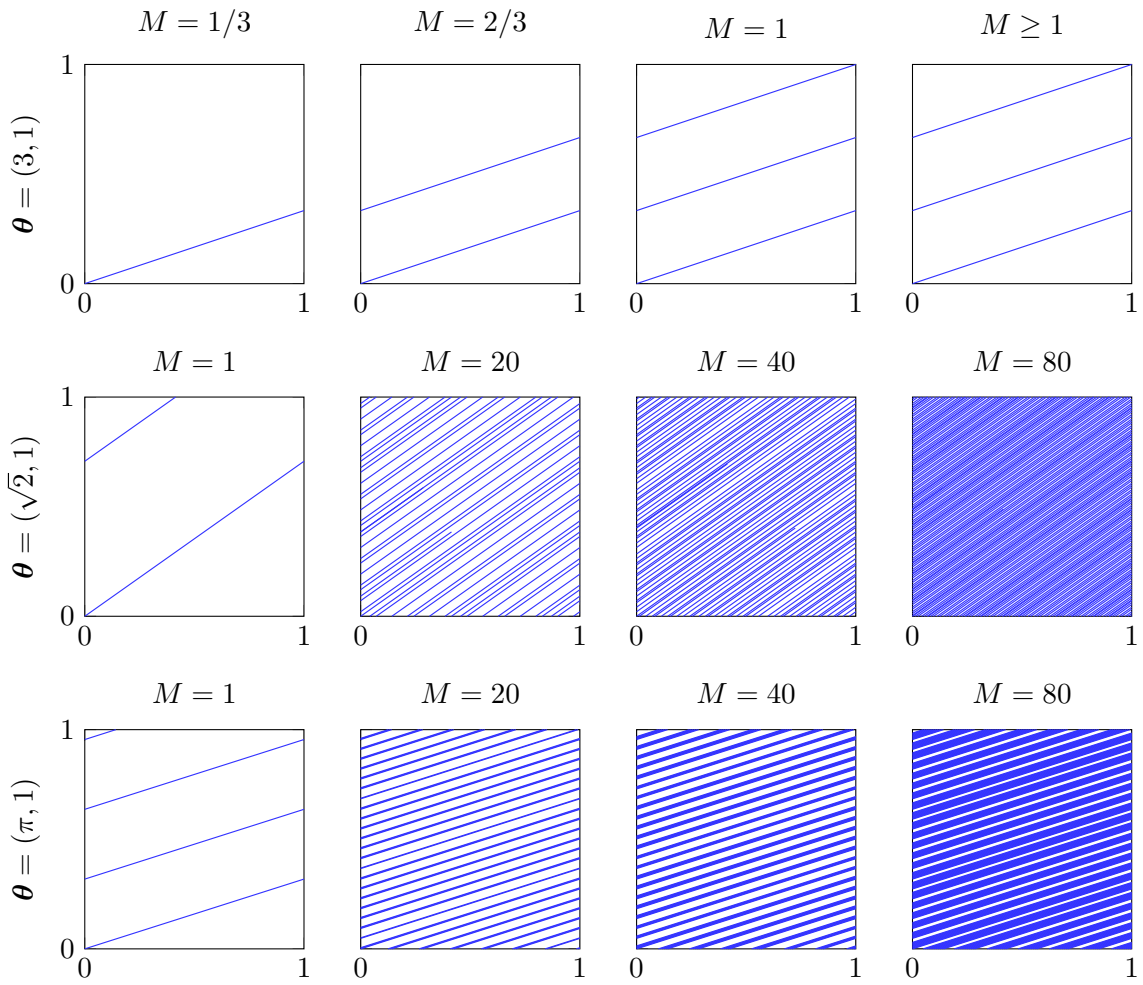


图2：集合 $\{(x\,\theta_1[1],\ x\,\theta_2[1])\ \ x \in (0,\ M)\}$ 在 $(0,\ 1)^2$ 中的表示，其中 M 取不同值，$\theta_1/\theta_2 \in \mathrm{Q}$ 时（第一行），以及 $\theta_1/\theta_2 \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$ 时（第二行对应 $\boldsymbol{\theta} = (\sqrt{2},\ 1)$，第三行对应 $\boldsymbol{\theta} = (\pi,\ 1)$）。

注 2.3。 *(a).* 由于 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个无理向量，克罗内克逼近定理 2.2保证函数 μ_p 和 ρ_p 完全由它们在线$\mathbb{R}\boldsymbol{\theta}$上的限制所确定。因此，$\mu_p$ 和 ρ_p 满足 (1.2) 且分别具有与 μ 和 ρ相同的界。

(b)。本研究 可以轻松推广 到以下情形：μ （分别为 ρ）在 $(-\infty,\ -a)$ 和 $(a,\ +\infty)$中分别对应两个不同的准周期函数：

$$for\ \pm x > \pm a, \qquad \mu(x) = \mu_p^{\pm}(x\,\boldsymbol{\theta}^{\pm}) \quad and \quad \rho(x) = \rho_p^{\pm}(x\,\boldsymbol{\theta}^{\pm}),$$

其中 $\mu_p^{\pm}$, $\rho_p^{\pm}$属于 $\mathscr{C}_{per}(\mathbb{R}^{n^{\pm}})$，其中 $n^{\pm} > 1$，且 $\boldsymbol{\theta}^{\pm} \in \mathbb{R}^{n^{\pm}}$ 是无理向量 $s.$

3 半直线准周期问题

现在我们关注半直线准周期问题（1.8）。由于这些问题彼此非常相似，只需研究定义在 $(a, +\infty)$ 上的半直线问题，并且不失一般性地假设 $a = 0$。令 $\mu_{\boldsymbol{\theta}} := \mu_p(\boldsymbol{\theta}\cdot)$ 和 $\rho_{\boldsymbol{\theta}} := \rho_p(\boldsymbol{\theta}\cdot)$。因此，本节考虑的问题如下：

$$\left|\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\Big(\mu_{\boldsymbol{\theta}}\,\frac{du^+_{\boldsymbol{\theta}}}{dx}\Big) - \rho_{\boldsymbol{\theta}}\,\omega^2\,u^+_{\boldsymbol{\theta}} &= 0, \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+, \\ u^+_{\boldsymbol{\theta}}(0) &= 1. \end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

注 3.1. 函数 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 恰好对应于解 u^+，它是(1.8) 中引入的，见第 *1* 节，适用于非常一般的介质。之所以将这个解重新标记为 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$，是因为我们在此考虑准周期介质，系数 μ 和 ρ（出现在(1.8) 中）已被 $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$取代。

3.1 提升到高维周期问题

我们希望揭示解 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 的某些结构。由于系数 $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ 和 $\rho_{\boldsymbol{\theta}}$ 在（3.1）中按定义是 n 维函数沿半直线 $\boldsymbol{\theta}\mathbb{R}+$ 的迹，因此很自然地，我们希望将 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 表示为沿同一条直线的一个函数 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mapsto \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$的迹，也就是说：

$$\text{a. e. } x \in \mathbb{R}, \quad u^+_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(x\,\boldsymbol{\theta}), \tag{3.2}$$

其中 $\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}$应刻画为一个带周期系数的 n 维偏微分方程的解（在某种意义上，这是一个“扩展”问题，其中$\boldsymbol{y}$ 是扩展的空间变量），如图 3所示。所谓的提升方法 已用于均匀化问题中，分析周期半空间 [14, 15] 或由界面 [4], 隔开的周期结构中的一些校正子，也用于准晶体和彭罗斯铺砌的均匀化 [6, 30]。然而，据我们所知，这种方法在其他背景下（例如波传播）似乎鲜有应用，尤其是用于数值分析和模拟。

为了构造高维偏微分方程，必须利用 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 的导数与 $\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 的偏导数之间的对应关系：根据链式法则，对于任意足够光滑的函数 $F\colon \mathrm{R}^n \to \mathrm{C}$，有

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}[F(\boldsymbol{\theta}\,x)] = (D_{\boldsymbol{\theta}}\,F)(\boldsymbol{\theta}\,x), \quad \text{with} \quad D_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{n}\theta_i\,\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{3.3}$$

这使　我们引入定义在半空间上的 n维偏微分方程组（见注释 3.2　　）

$$-D_{\boldsymbol{\theta}}\,(\mu_p\,D_{\boldsymbol{\theta}}\,\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}) - \rho_p\,\omega^2\,\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}} = 0, \quad \text{for} \quad y_n > 0, \tag{3.4a}$$

这里我们回顾一下，系数 $\mu_p,\, \rho_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且关于每个变量都是 1–周期的。此外，式（3.1）中的边界条件可以提升为非齐次狄利克雷边界条件

$$\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}} = \widetilde{\varphi}, \quad \text{on} \quad y_n = 0, \tag{3.4b}$$

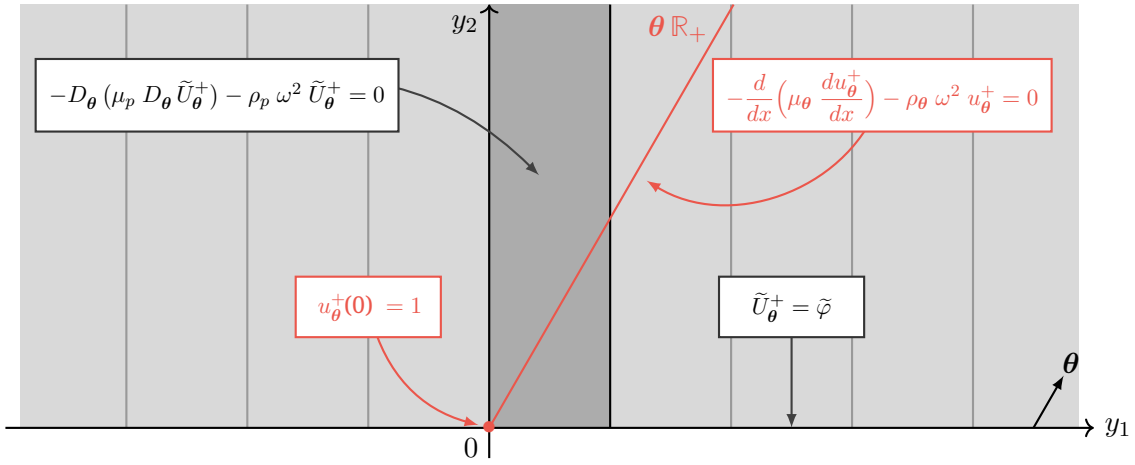


图3： $n=2$的提升方法示意图

其中数据 $\widetilde{\varphi}:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}$ 可以选为连续函数，且必须满足 $\widetilde{\varphi}(0)=1$，以与 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}(0)\;=1$这一事实保持一致。此外，为了利用系数 μ_p 和 ρ_p 关于横向变量 $y_j,\,j<n$的周期性，我们 可以作如下规定：

$$\widetilde{\varphi}\text{ is 1–periodic,} \tag{3.5}$$

因此，自然可以施加如下条件

$$\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)\text{ is 1–periodic with respect to the transverse variables }y_j,\;j<n. \tag{3.6}$$

在第 3.3 节中，我们将说明如何将上述问题化简为一个具有周期系数的半导引问题。为此，我们需要一些预备知识，这正是下一节的主题。

注 3.2. *(a).* 可以在其他半空间上定义增广问题 (3.4) $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,\;y_i>0\}$。半空间的选择完全是任意的。

(b). 乍看之下，可以考虑将整个研究限定在边界数据为常数的情形 $\widetilde{\varphi}=1$。不过，尽管实际中可能如此，求解半导引问题所采用的方法要求我们考察 $\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\,\widetilde{\varphi})$ 对任意 $\widetilde{\varphi}$ 在适当函数空间中的结构（详见第 4 节）。

3.2 预备材料

本节的主要目标是严谨地建立一些形式上显而易见的格林公式，例如命题 3.10 中的公式。为此，首先需要引入相适应的函数空间框架；由于格林公式涉及边界积分，还需要建立相关的迹定理。第 3.2.1 节专门讨论这些迹定理，而相应的格林公式则在第 3.2.2 节中给出。最后，第 3.2.3 节阐明了导数 $D_{\boldsymbol{\theta}}$ 与关于单个实变量的偏导数之间一个简单但有用的联系，这种联系通过所谓的斜变量变换建立。

3.2.1 各向异性索 Sobolev 空间与迹定理

对于任意开集 $\mathcal{O} \subset \mathrm{R}^n$，我们首先定义方向 Sobole夫空间

$$H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{O}) := \{U \in L^2(\mathcal{O}) \ / \ D_{\boldsymbol{\theta}} U \in L^2(\mathcal{O})\}, \tag{3.7}$$

这是一个希尔伯特空间，配备标量积

$$(U,V)_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{O})} := \int_{\mathcal{O}} \Big(D_{\boldsymbol{\theta}} U \, D_{\boldsymbol{\theta}} \overline{V} + U \, \overline{V} \Big).$$

我们记 $\| \cdot \|_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{O})}$ 为诱导范数。我们先给出以下稠密性结论，其证明见 [29, 附录 1]。

引理 3.3. 空间 $\mathscr{C}^\infty_0(O)$ 在 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\overline{O})$ 中稠密。

以下记半空间 $\mathrm{R}^n_+ := \{\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n, \ y_n > 0\}$ 和半圆柱 $\Omega^\sharp := (0,1)^{n-1} \times \mathrm{R}^+$。另外，对于 $a \in \{0,1\}$ 以及任意整数 $i \in [\![1,n]\!]$，引入以下集合，

$$\Sigma_{i,a} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \ y_i = a\} \quad \text{and} \quad \Sigma^\sharp_{i,a} = \{\boldsymbol{y} \in \Sigma_{i,a}, \ y_j \in (0,1), \ j \in [\![1, n-1]\!], \ j \neq i\}.$$

该定义见图 4。注意，$\Sigma^\sharp_{n,a}$ 有界，而对于 $i \neq n$，$\Sigma^\sharp_{i,a}$ 沿方向 y_n无界。此外，

$$\partial\Omega^\sharp = \Sigma^\sharp_{n,0} \cup \Big[\bigcup_{i=1}^{n-1} (\overline{\Sigma}^\sharp_{i,0} \cup \overline{\Sigma}^\sharp_{i,1}) \Big].$$

可以在 $\Sigma_{i,a}$ 上定义一个从 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{R}^n_+)$ 出发的迹算子。其主要思路是，在从一点 $(z_1, \dots, z_{i-1}, a, z_{i+1}, \dots, z_n) \in \Sigma_{i,a}$ 出发的、沿 $\boldsymbol{\theta}$ 方向的直线上应用一维迹定理，得到一个不等式，再对 z_j, $j \neq i$ 积分。所用的一维迹定理如下。

命题 3.4. 设 $L \in \mathbb{R}^*_+ \cup \{+\infty\}$。则映射 $\gamma_L \colon u \mapsto u(0)$ 是从$H^1(0,L)$ 到 $\mathbb{C}$ 的连续映射。此外，γ_L 的算子范数为

$$\|\gamma_L\|^2 = \frac{\mathrm{e}^L + \mathrm{e}^{-L}}{\mathrm{e}^L - \mathrm{e}^{-L}} =: [\tanh L]^{-1} \quad \text{for } L > 0, \quad \text{and} \quad \|\gamma_\infty\|^2 = 1. \tag{3.8}$$

Proof. 连续性是一个经典结果，可通过稠密性证明 .

根据定义，$\|\gamma_L\| := \sup\{|u(0)|, \|u\|_{H^1(0,L)} = 1\}$。这对应于一个受约束的优化问题。根据标准理论，引入一个拉格朗日乘子λ，并求一对 $(\lambda, u_L) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times H^1(0,L)$，使得 $\|u_L\|_{H^1(0,L)} = 1$ 且

$$\forall \, v \in H^1(0,L) \quad \lambda \, u_L(0) \, \overline{v(0)} = \int_0^L \Big(\frac{du_L}{dx} \, \frac{d\overline{v}}{dx} + u_L \, \overline{v} \Big) \, dx, \tag{3.9}$$

其中 这种情况下，我们有 $\|\gamma_L\|^2 = \lambda$。该问题的显式解得出结果 . ■

特别需要注意的是，$\|\gamma_L\|^2 \underset{L \to 0}{\sim} L^{-1}$。

现在我们能够以如下意义定义$\Sigma_{i,\ a}$ 上的迹。

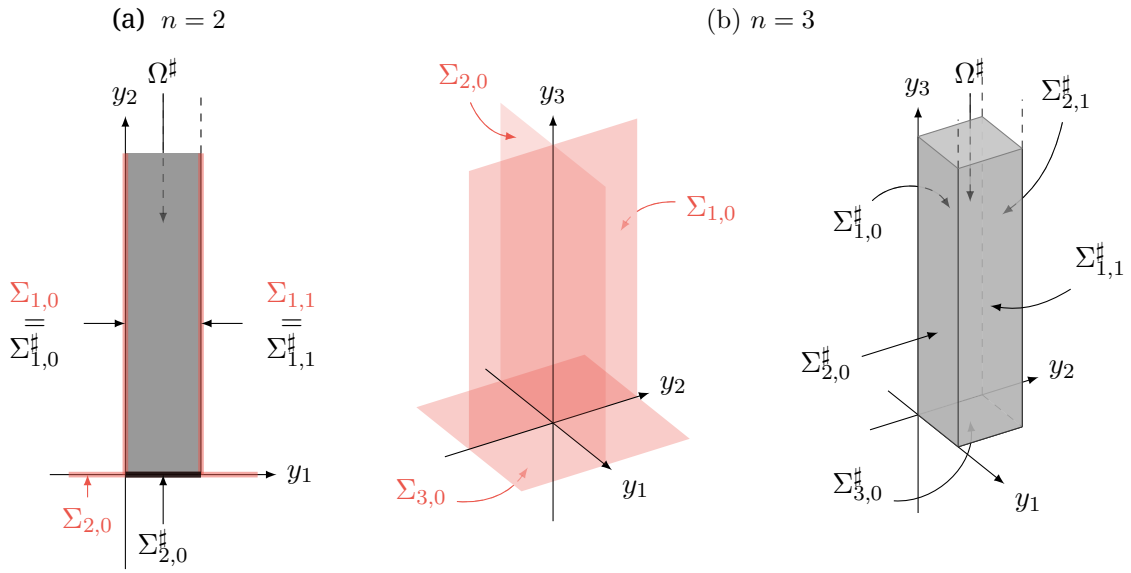


图 4：区域 $\Omega^\sharp$, $\Sigma_{i,\,a}$ 以及 $\Sigma^\sharp_{i,\,a}$ 对应于 $n=2$ (a) 和 $n=3$ (b)。

命题 3.5。 固定 $a\in\{0,1\}$ 和 $i\in[\![1,n]\!]$。由 $\gamma_{i,\,a}U=U|_{\Sigma_{i,\,a}}$ 定义的映射 $\gamma_{i,\,a}:\overline{\mathscr{C}_0^\infty}(\mathbb{R}^n_+)\to\mathscr{C}_0^\infty(\Sigma_{i,\,a})$ 可通过连续性延拓为一个线性映射，仍记作 $\gamma_{i,\,a}$，其从 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^n_+)$ 映射到 $L^2(\Sigma_{i,\,a})$，并满足如下估计

$$\forall\, U\in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^n_+),\quad \|\gamma_{i,a}U\|^2_{L^2(\Sigma_{i,a})}\le\frac{1}{\theta_i}\,\|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{3.10}$$

证明。 只需证明任意函数 的连续性估计（3.10） $U\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，然后利用命题3.3的稠密性结果即可得出结论。

(*i*) 情形 $i\in[\![1,\ n-1]\!]$: 不失一般性，设 $i=1$。定义

$$\Gamma_{1,a}:=\{\boldsymbol{z}=(z_2,\dots,z_n),\quad (a,\boldsymbol{z})\in\Sigma_{1,a}\}\equiv\mathbb{R}^{n-1}_+,\quad \text{where}\quad (a,\boldsymbol{z})=(a,z_2,\dots,z_n). \tag{3.11}$$

对于 $U\in\overline{\mathscr{C}_0^\infty}(\mathbb{R}^n_+)$，给定任意 $\boldsymbol{z}=(z_2,\ \dots,\ z_n)\in\Gamma_{1,\,a}$，考虑函数

$$\forall\, x>0,\quad u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}(x)=U(x\,\boldsymbol{\theta}+(a,\boldsymbol{z})). \tag{3.12}$$

由于 $u_{\boldsymbol{z},\,\boldsymbol{\theta}}$ 属于 $H^1(\mathbb{R}^*_+)$，将引理 3.4 用于 $L=+\infty$，并对 $\boldsymbol{z}\in\Gamma_{1,\,a}$ 积分，可得

$$\int_{\Gamma_{1,a}}|u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}(0)|^2\,d\boldsymbol{z}\le\int_{\Gamma_{1,a}}\|u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^*_+)}d\boldsymbol{z}. \tag{3.13}$$

另一方面，我们引入变换

$$\mathrm{T}:\boldsymbol{y}\mapsto((y_1-a)/\theta_1,y_2-(y_1-a)\,\theta_2/\theta_1,\cdots,y_n-(y_1-a)\,\theta_n/\theta_1), \tag{3.14}$$

它定义了一个 $\mathscr{C}^1$–微分同胚，其雅可比行列式为 $\det\mathbf{J}_{\mathrm{T}}=1/\theta_1\neq0$。由于原像$\{\mathrm{T}^{-1}(x,\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{z}\in\Gamma_{1,a},\ x>0\}$ 不过是多面体

$$\mathcal{Q}_{1,a}:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+,\ y_1>a,\ y_n>(y_1-a)\,\theta_n/\theta_1\}\subset\mathbb{R}^n_+,$$

由链式法则和变量替换$\boldsymbol{y} \mapsto \mathrm{T}\boldsymbol{y}$可得

$$\frac{du_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}}{dx}(x) = D_{\boldsymbol{\theta}}\, U(x\,\boldsymbol{\theta} + (a, \boldsymbol{z})) \quad \text{and} \quad \int_{\Gamma_{1,a}} \|u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^*_+)}\, d\boldsymbol{z} = \frac{1}{\theta_1}\, \|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{Q}_{1,a})}. \tag{3.15}$$

最后，由于$u_{\boldsymbol{z},\,\boldsymbol{\theta}}(0) = U(a,\ z_2,\ \cdots\ z_n)$，方程（3.13）和（3.15）推出

$$\|U\|^2_{L^2(\Sigma_{1,a})} \le \frac{1}{\theta_1}\, \|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{Q}_{1,a})} \le \frac{1}{\theta_1}\, \|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{3.16}$$

这正是所需的估计。

(ii) 情形$i = n$：从函数$u_{\boldsymbol{z},\,\boldsymbol{\theta}}(x) := U(x\,\boldsymbol{\theta} + (\boldsymbol{z}\ a))$出发，该函数定义在$x > 0$上，并且对于任意满足$(\boldsymbol{z}\ a) \in \Sigma_{n,\,a}$的$\boldsymbol{z} = (z_1,\ \ldots,\ z_{n-1})$，证明采用与上文完全相同的论证，只是$\mathrm{T}$下的逆像变成整个半空间$\mathcal{Q}_{n,\,a} := \{\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^n_+,\quad y_n > a\}$。 ■

一般而言，对于仅$H^1_{\boldsymbol{\theta}}$定义在半空间$\mathbb{R}^n_+$的子区域内的函数，上一个结果并不成立。特别是对于半圆柱$\Omega^\sharp$,，需要在角点附近变短的线段上应用一维迹定理；也就是说，这些线段是两个面相交形成的。为克服这一困难，我们来考虑以下集合（见图5）

$$\forall\, 0 < b < 1/2, \quad \Sigma^{\sharp,b}_{i,a} = \{\boldsymbol{y} \in \Sigma^\sharp_{i,a}, \quad \mathrm{dist}(\boldsymbol{y}, \partial\Sigma^\sharp_{i,a}) := \inf_{\boldsymbol{z} \in \partial\Sigma^\sharp_{i,a}} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| > b\}. \tag{3.17}$$

利用这些区域，$\Sigma^\sharp_{i,a}$上的迹可以根据以下命题定义为局部可积函数。

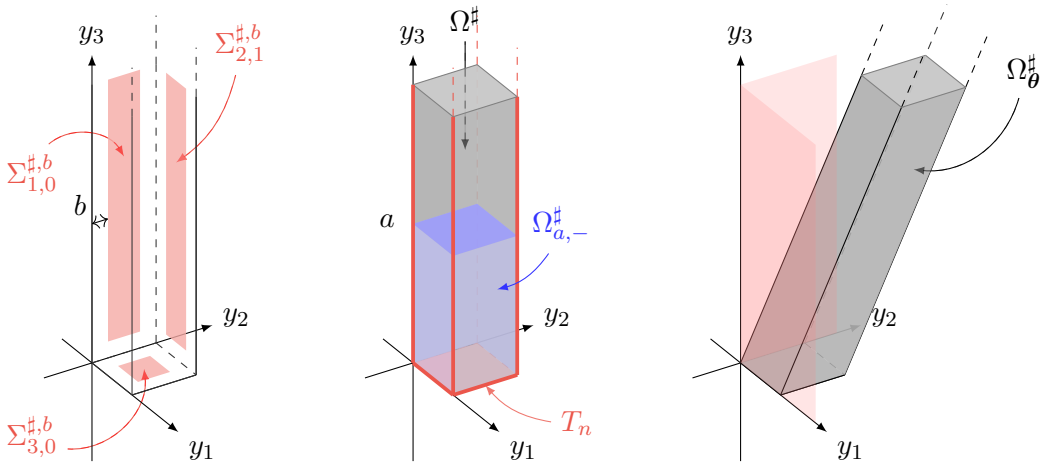


图 5：从左到右：$\Sigma^\sharp_{i,a}$ ^{b},(3.17)，T_n (3.38)，$\Omega^\sharp_{a,-}$ (3.37)，以及$\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}$ (3.41)为所示。$n = 3$。

命题 3.6. 令$a \in \{0, 1\}$和$i \in [\![1, n]\!]$。由$\gamma^\sharp_{i,a} U = U|_{\Sigma^\sharp_{i,a}}$定义的映射$\gamma^\sharp_{i,a}\colon \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp) \to \mathscr{C}^\infty_0(\Sigma^\sharp_{i,a})$可通过连续性延拓为一个线性映射，仍记作$\gamma^\sharp_{i,a}$，其从$H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$映射到$L^2_{loc}(\Sigma^\sharp_{i,a})$，并满足以下估计

$$\forall\, 0 < b < 1/2, \quad \exists\, C_b > 0, \quad \forall\, U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp), \quad \|\gamma^\sharp_{i,a} U\|^2_{L^2(\Sigma^{\sharp,b}_{i,a})} \le \frac{C_b}{\theta_i}\, \|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)}. \tag{3.18}$$

证明。 利用命题 3.3中给出的稠密性结果，只需证明 (3.18) 对 $U \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega^\sharp)$成立。设 $i = 1$ 且 $a = 0$，以下论证稍作调整即可推广到 $i \in [\![1, n]\!]$ 以及 $a \in \{0,1\}$。定义

$$\Gamma^\sharp_{1,0} := \{\boldsymbol{z} = (z_2, \dots, z_n), \quad (0, \boldsymbol{z}) \in \Sigma^\sharp_{1,0}\} \equiv (0,1)^{n-1} \times \mathbb{R}_+. \tag{3.19}$$

我们引入如下定义的长度函数

$$\forall\, \boldsymbol{z} \in \Gamma^\sharp_{1,0}, \quad \lambda_{1,0}(\boldsymbol{z}) := \big|\{\boldsymbol{\theta}\, \mathbb{R}_+(0, \boldsymbol{z})\} \cap \Omega^\sharp\big| = \sup\{x > 0,\ x\,\theta_1 \le 1,\ x\,\theta_i + z_i \le 1\ \forall\, i \in [\![2, n-1]\!]\}.$$

容易推得

$$\lambda_{1,0}(\boldsymbol{z}) = \min\left\{\frac{1}{\theta_1};\ \min_{2 \le j \le n-1}\Big(\frac{1 - z_j}{\theta_j}\Big)\right\}. \tag{3.20}$$

对于 $U \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega^\sharp)$ 和 $\boldsymbol{z} \in \Gamma^\sharp_{1,0}$，我们定义

$$\forall\, 0 < x < \lambda_{1,0}(\boldsymbol{z}), \quad u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}(x) = U(x\,\boldsymbol{\theta} + (0, \boldsymbol{z})). \tag{3.21}$$

由于 $u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}} \in H^1(0, \lambda_{1,0}(\boldsymbol{z}))$，引理 3.4 以及关于 $\boldsymbol{z}$ 的积分给出

$$\int_{\Gamma^\sharp_{1,0}} w_{1,0}(\boldsymbol{z})\, |u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}(0)|^2\, d\boldsymbol{z} \le \int_{\Gamma^\sharp_{1,0}} \|u_{\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}}\|^2_{H^1(0, \gamma_{i,a}(\boldsymbol{z}))}\, d\boldsymbol{z}, \quad \text{with } w_{1,0}(\boldsymbol{z}) = \tanh[\lambda_{1,0}(\boldsymbol{z})]. \tag{3.22}$$

另一方面，考虑由 (3.14) 给出的 $\mathscr{C}^1$–微分同胚 T。集合 $\mathsf{Q}^\sharp_{1,0} := \{\mathsf{T}^{-1}(x, \mathsf{z}) \quad 0 < x < \lambda_1, \mathsf{0}(\mathsf{z}), \mathsf{z} \in \Gamma^\sharp_1{}_{,0}\}$ 显然包含于 $\Omega^\sharp$ 中。因此，类比命题 3.5 证明中的 (3.16)，由 (3.21)、链式法则以及变量替换 $\mathsf{y} \mapsto \mathsf{T}\mathsf{y}$ 可得

$$\int_{\Gamma^\sharp_{1,0}} w_{1,0}(\boldsymbol{z})\, |U(0, \boldsymbol{z})|^2\, d\boldsymbol{z} \le \frac{1}{\theta_1}\, \|U\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)}. \tag{3.23}$$

更一般地，我们可以证明，$\gamma^\sharp_{i,a}$ 可定义为从 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 到加权空间 $L^2(\Sigma^\sharp_{i,a}, w_{i,a}\, d\boldsymbol{z})$ 的映射，其中权函数 $w_{i,a}$ 由 (3.22) 给出，适用于 $i = 1$ 和 $a = 0$。现在，$\lambda_{1,0}$ 的表达式 (3.20) 表明，$w_{1,0}$ 在角点$z_j = 1$附近退化。然而，权函数 $w_{1,0}$ 在 $\Sigma^\sharp{}_1{}^b{}_{,0}$ 上有下界

$$\inf_{(0,\boldsymbol{z}) \in \Sigma^{\sharp,b}_{1,0}} w_{1,0}(\boldsymbol{z}) = \tanh\left[\min\left\{\frac{1}{\theta_1};\ b \min_{2 \le j \le n-1} \frac{1}{\theta_j}\right\}\right] > 0. \tag{3.24}$$

若令 $C_b := [\inf_{(0,\boldsymbol{z}) \in \Sigma^{\sharp,1}{}_1{}^b{}_{,0}} w_1{}_{,0}(\boldsymbol{z})]^{-1} > 0$，则对 $\{\boldsymbol{z}, (0, \boldsymbol{z}) \in \Sigma^\sharp{}_1{}^b{}_{0,}\}$ 而非 $\Gamma^\sharp_{1,0}$ 积分，即可由 (3.23) 直接推出 (3.18)。■

注 3.7。 前一个命题中的最佳常数在 b 趋于 0 时必然趋于无穷大。上述证明表明，可以在适当的带权 L^2空间中对整个面定义迹。关于各向异性空间中迹的更多细节可参见 *[18]*。

3.2.2 Green公式

现在引入集合 $H^1_{\theta,\ loc}(\mathbb{R}^n_+)$，其中包含在任意半圆柱中$H^1_{\boldsymbol{\theta}}$的函数 $S\times\mathbb{R}+$，其中 S 是 $\mathbb{R}^{n-1}$中的有界开集。更严格地说，对于任意 $\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，我们定义 n维函数 $\check{}\varphi\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$，使其满足

$$\check{}\varphi(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)=\varphi(y_1,\dots,y_{n-1}). \tag{3.25}$$

注意，对于任意 $U\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n_+)$，$\check{}\varphi U$ 的支集沿方向 $y_j,\ j\neq n$有界。从这一观察出发，我们定义

$$H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbb{R}^n_+):=\Big\{U\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n_+),\quad \check{\varphi}\,U\ \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^+_n)\ \ \forall\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\Big\}. \tag{3.26}$$

引入一个一维截断函数 $\chi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R})$，使其在 (0,1) 上满足 $\chi=1$，据此我们将 $\check{}\chi_\sharp\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 定义为

$$\check{\chi}_\sharp(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)=\chi(y_1)\dots\chi(y_{n-1}). \tag{3.27}$$

特别地，我们推得

$$\forall\,U\in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbb{R}^n_+),\quad U|_{\Omega^\sharp}=(\check{\chi}_\sharp\,U)|_{\Omega^\sharp}\ \in\ H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp). \tag{3.28}$$

此外，根据命题 3.5，显然可以毫无歧义地将迹映射 $\gamma^\sharp_{i,a}$ 定义为从 $H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbf{R}^n_+)$ 到

$$\forall\,U\in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbb{R}^n_+),\quad \gamma^\sharp_{i,a}U:=\gamma_{i,a}(\check{\chi}_\sharp U)|_{\Sigma^\sharp_{i,a}}\ \in L^2(\Sigma^\sharp_{i,a}). \tag{3.29}$$

为简便起见，在考虑 $\Sigma^\sharp_{i,a}$ 上的迹时，我们将写作 U，而不写 $\gamma^\sharp_{i,a}U$。现在可以陈述以下格林公式。

命题 3.8. 对于任意 $U,V\in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbb{R}^n_+)$，格林公式成立

$$\int_{\Omega^\sharp}\Big(D_{\boldsymbol{\theta}}\,U\,\overline{V}+U\,D_{\boldsymbol{\theta}}\,\overline{V}\Big)\,d\boldsymbol{y}=\frac{1}{\theta_n}\int_{\Sigma^\sharp_{n,0}}U\,\overline{V}\,ds+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_i}\Big(\int_{\Sigma^\sharp_{i,1}}U\,\overline{V}\,ds-\int_{\Sigma^\sharp_{i,0}}U\,\overline{V}\,ds\Big). \tag{3.30}$$

证明. 设 $U,V\in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbf{R}^n_+)$。根据定义，对于任意满足 $\chi=1$ on (0, 1) 的 $\chi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R})$，函数 $\check{}\chi_\sharp U$ 和 $\check{}\chi_\sharp V$ 属于 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{R}^n_+)$，其中 $\check{}\chi_\sharp$ 在 (3.27) 中定义。由于命题 3.3 保证 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ 在 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{R}^n_+)$ 中稠密，因此存在两个由 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ 中的函数构成的序列 $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$、$(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$U_k\to\check{\chi}_\sharp\,U\quad\text{and}\quad V_k\to\check{\chi}_\sharp\,V\quad\text{in}\quad H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R}^n_+),\quad k\to+\infty.$$

由光滑函数的格林公式可知U_k 和 V_k 满足 (3.30)，对任意$k\in\mathbb{N}$均成立。取极限并利用命题 3.5中陈述的迹连续性结果，可得 (3.30) 对 $\check{}\chi_\sharp U$和 $\check{}\chi_\sharp V$成立，即对 U和 V成立，因为 $\check{}\chi_\sharp=1$ 属于 $\Omega^\sharp$。■

接下来，我们关注关于其前 $n-1$ 个变量具有周期性的函数。更准确地说，对于任意 $U\in L^2(\Omega^\sharp)$以及任意 $\varphi\in L^2(\Sigma^\sharp_{n,\ 0})$，我们引入相应的周期延拓 $\widetilde{U}\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n_+)$ 和 $\widetilde{\varphi}\in L^2_{loc}(\Sigma_{n,\ 0})$，其定义如下：对于任意 $i\in[\![1,\ n-1]\!]$

$$\begin{cases}\text{a. e. }\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n_+, & \widetilde{U}(\boldsymbol{y}+\vec{\boldsymbol{e}}_i)=\widetilde{U}(\boldsymbol{y})\quad\text{and}\quad\widetilde{U}|_{\Omega^\sharp}=U.\\ \text{a. e. }\boldsymbol{s}\in\Sigma_{n,0}, & \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}+\vec{\boldsymbol{e}}_i)=\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s})\quad\text{and}\quad\widetilde{\varphi}|_{\Sigma^\sharp_{n,0}}=\varphi.\end{cases} \tag{3.31}$$

适当的函数空间框架由以下空间给出

$$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp) = \left\{ U \in L^2(\Omega^\sharp),\ \widetilde{U} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathbb{R}^n_+) \right\} \subset H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp), \tag{3.32}$$

其中包含关系由（3.28）和（3.31）推出。若 $\mathscr{C}^\infty_{per}(\Omega^\sharp)$ 表示 $\mathscr{C}^\infty(\Omega^\sharp)$ 中关于前 1 个 $n-1$ 变量为周期的光滑函数集合，即

$$\mathscr{C}^\infty_{per}(\Omega^\sharp) = \left\{ V \in \mathscr{C}^\infty(\Omega^\sharp), \quad \widetilde{V} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+) \right\}, \tag{3.33}$$

那么，通过调整 H^1 函数的经典性质，可以证明以下结果。

引理3.9。 $\mathscr{C}^\infty_{per}(\Omega^\sharp)$ 在 $H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$ 中稠密。

注意，$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$ 中函数在 $\Sigma^\sharp_{i,a}$ 上的迹由（ L^2 ）良好定义。此外，利用连续性估计（3.10），可得

$$\gamma^\sharp_{i,a} \in \mathcal{L}(H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp), L^2(\Sigma^\sharp_{i,a})). \tag{3.34}$$

可以得到如下刻画

$$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp) = \left\{ U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp), \quad \gamma^\sharp_{i,0} U = \gamma^\sharp_{i,1} U \ \ \forall\, i \in [\![1, n-1]\!] \right\}, \tag{3.35}$$

其中，$H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$中函数的迹由命题 3.6 定义，而迹相等应理解为对 $\Sigma^\sharp_{i,0}$ 和 $\Sigma^\sharp_{i,1}$上的函数作识别后成立。由（3.35）可知，$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$是 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$的闭子空间，因此在赋予 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$的范数后，它是一个希尔伯特空间。根据命题 3.8 和（3.35），可推出$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$上的格林公式。

命题3.10. 对于任意 $U, V \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)$，我们有如下格林公式

$$\int_{\Omega^\sharp} \left(D_{\boldsymbol{\theta}}\, U\, \overline{V} + U\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, \overline{V} \right) d\boldsymbol{y} = \frac{1}{\theta_n} \int_{\Sigma^\sharp_{n,0}} U\, \overline{V}\, ds. \tag{3.36}$$

由格林公式（3.36），我们可以很容易地推导出以下结果。

推论 3.11. 设 $a > 0$，并定义具有公共边界的集合 $\Sigma^\sharp_{n,\ a}$（见图 5 ）：

$$\Omega^\sharp_{a,+} := \Omega^\sharp \cap \{ y_n > a \} \quad \text{and} \quad \Omega^\sharp_{a,-} := \Omega^\sharp \cap \{ y_n < a \}. \tag{3.37}$$

考虑函数 $U \in L^2(\Omega^\sharp)$ 满足 $U_\pm := U|_{\Omega^\sharp_{a,\ \pm}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp_{a,\ \pm})$，其中 $H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp_{a,\ \pm})$定义如(3.35)所示。于是

$$U \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma^\sharp_{n,a} U_+ = \gamma^\sharp_{n,a} U_-.$$

我们以一个更具技术性的格林公式结束本节，该公式用于命题3.17的证明，涉及仅属于 U 的函数 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$，前提是测试函数 V在骨架 T_n 所定义的邻域内为零

$$T_2 = \overline{\Sigma}^\sharp_{2,0} \quad \text{and} \quad T_n = \overline{\Sigma}^\sharp_{n,0} \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n-1} \left(\partial\Sigma^\sharp_{j,0} \cup \partial\Sigma^\sharp_{j,1} \right) \right] \quad \text{for } n \geq 3. \tag{3.38}$$

该区域如图 5 所示，适用于 $n = 3$。

命题 3.12。 对于 $U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 和 $V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n)$，格林公式 (3.30) 仍然成立。

证明。 考虑 $U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 和 $V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n)$。根据命题 3.3，$\mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp)$ 在 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 中稠密，因此存在一个由 $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp)$ 中的函数组成的序列 $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$，它收敛于 U。由 $\Omega^\sharp$ 上光滑函数的格林公式可知，U_k 和 V 对任意 $k \in \mathbb{N}$ 均满足 (3.30)。对于 $0 < b < 1/2$，取 $\Omega^{\sharp,\,b}$ 为区域

$$\Omega^{\sharp,b} = \{\boldsymbol{y} \in \Omega^\sharp, \quad \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, T_n) := \inf_{\boldsymbol{z}\in T_n} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| > b\}. \tag{3.39}$$

由于 $V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n)$，存在一个实数 $0 < b < 1/2$，使得 $V|_{\Omega^{\sharp,b}} \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^{\sharp,b})$。因此，对于任意 $i \in [\![1,\ n-1]\!]$ 上的曲面积分可化为由 (3.17) 定义的集合 $\Sigma^{\sharp,i}_{b\,a}$。当 k 趋于 $+\infty$ 时，我们便可对 $\Sigma^{\sharp,i}_{b\,a}$，使用命题 3.6 中陈述的迹连续性结果，从而推得 U 和 V 满足 (3.30)。■

3.2.3 斜向变量替换

在陈述 命题 3.14 （这是本节的主要结果）之前，我们先引入$\mathbb{R}^n_+$中的变量替换：

$$(\boldsymbol{s}, x) \in \mathbb{R}^n_+ \mapsto \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{s}, 0) + x\,\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n_+, \tag{3.40}$$

并用 $\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}$ 表示 $\Omega^\sharp$ 在上述变换下的像：

$$\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}} := \{(\boldsymbol{s}, 0) + x\,\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{s} \in (0,1)^{n-1},\ x > 0\}. \tag{3.41}$$

图 5 展示了 $n = 3$，图 6 展示了 $n = 2$ 和 $|\boldsymbol{\theta}| = 1$。下面这个简单的引理将在后文中用到。

引理 3.13。 对于任意 $V \in L^1(\Omega^\sharp)$，有

$$\int_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}} \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{\Omega^\sharp} \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \tag{3.42}$$

其中 $\widetilde{V} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ 表示 V的周期延拓，定义为 (3.31)。

证明。 我们将采用记号 $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ 表示一个整数向量。对于任意集合 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$，令 $\mathbb{1}_{\mathcal{O}}$ 为 $\mathcal{O}$的示性函数，即在 1 内取值为$\mathcal{O}$，在其他地方取值为 0。由稠密性，只需证明（3.42）对 $V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp)$成立。由积分的可加性，

$$\int_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}} \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^n_+} \mathbb{1}_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{y})\, \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} \int_{\Omega^\sharp + (\boldsymbol{k},0)} \mathbb{1}_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{y})\, \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y},$$

其中，对$\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ 的求和是有限的，这是因为$\mathbb{1}_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}}$，且 V是紧支撑的。接着，我们使用变量替换$\boldsymbol{z} \mapsto \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{k},0)$，得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}} \widetilde{V}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} &= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} \int_{\Omega^\sharp} \mathbb{1}_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{z} + (\boldsymbol{k},0))\, \widetilde{V}(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \quad \text{because } \widetilde{V} \text{ is periodic} \\ &= \int_{\Omega^\sharp} \Big[\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} \mathbb{1}_{\Omega^\sharp_{\boldsymbol{\theta}} - (\boldsymbol{k},0)}(\boldsymbol{z}) \Big]\, \widetilde{V}(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \quad \text{by linearity.}\end{aligned} \tag{3.43}$$

此外，注意到集合族$\{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}^\sharp - (\boldsymbol{k},0), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}\}$构成了$\mathbb{R}_+^n$的一个划分，由此可得

$$\forall\, \boldsymbol{z} \in \Omega^\sharp, \quad \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^{n-1}} \mathbb{1}_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}^\sharp - (\boldsymbol{k},0)}(\boldsymbol{z}) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}(\boldsymbol{z}) = 1. \tag{3.44}$$

结合（3.43）和（3.44）可知，（3.42）对 $V \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega^\sharp)$ 成立。 ■

对变量替换（3.40）进行求逆后，我们引入：

$$\forall\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}) := \hat{\boldsymbol{y}} - (y_n/\theta_n)\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.45}$$

因此，

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}) \quad \text{and} \quad x = y_n/\theta_n. \tag{3.46}$$

下一个命题强调这样一个事实：通过变量替换（3.40），微分算子 $D_{\boldsymbol{\theta}}$ 就变成了关于 y_n 的偏导数（对于光滑函数，这显然成立）。

命题 3.14。设 $\Psi \in L^2(\Omega^\sharp)$。则定义为下式的周期函数 $\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$

$$\text{a.e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^n, \quad \widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}) := \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}), y_n/\theta_n), \tag{3.47}$$

（其中 $\widetilde{\Psi}$ 是 Ψ的周期延拓）属于 $L^2(\Omega^\sharp)$，并且

$$\|\Psi_{\boldsymbol{\theta}}\|_{L^2(\Omega^\sharp)} = \sqrt{\theta_n}\,\|\Psi\|_{L^2(\Omega^\sharp)}. \tag{3.48}$$

*More*若在 $\partial_{y_n}\Psi \in L^2(\Omega^\sharp)$ 上，则 $\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$ 属于 $H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，且具有方向导数 e

$$\text{a.e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_+^n, \quad D_{\boldsymbol{\theta}}\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial y_n}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}), y_n/\theta_n). \tag{3.49}$$

证明。映射 $(\boldsymbol{s}\ x) \mapsto (\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta}$ 从 $\Sigma_{n,0}^\sharp \times \mathbb{R}_+$ 到 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}^\sharp$ 定义了一个 $\mathscr{C}^1$–微分同胚，其雅可比行列式 $\theta_n \neq 0$处处非零。因此，根据 $\Omega_{\boldsymbol{\theta}}^\sharp$的定义 (3.41)，进行变量替换，并利用性质 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{s}$，可得

$$\int_{\Omega_{\boldsymbol{\theta}}^\sharp} |\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})|^2\, d\boldsymbol{y} = \theta_n \int_{\Sigma_{n,0}^\sharp}\int_0^{+\infty} |\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta})|^2\, dx\, d\boldsymbol{s} = \theta_n \int_{\Sigma_{n,0}^\sharp}\int_0^{+\infty} |\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{s},x)|^2\, dx\, d\boldsymbol{s}.$$

由引理 3.13 可知 $\Psi_{\boldsymbol{\theta}} \in L^2(\Omega^\sharp)$，且（3.48）成立。

˜现在，为了在分布的意义下推导 $D_{\boldsymbol{\theta}}\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$ 的表达式，考虑一个测试函数 $\Phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$。变量替换 $(\boldsymbol{s}\ x) \mapsto (\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta}$结合可积函数的富比尼定理，得到

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})\; D_{\boldsymbol{\theta}}\Phi(\boldsymbol{y})\; d\boldsymbol{y} = \theta_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^{+\infty} \widetilde{\Psi}(\boldsymbol{s},x)\; D_{\boldsymbol{\theta}}\Phi((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta})\; dx d\boldsymbol{s}. \tag{3.50}$$

此外，由 $\phi_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}$ 定义的一维函数 $\phi_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x) := \Phi((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta})$ 属于 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$，并且根据链式法则有 $[d\phi_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}/dx](x) = D_{\boldsymbol{\theta}}\Phi((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta})$。由于 $\partial_{y_n}\Psi$ 属于 L^2，我们

可以对 (3.50) 中的内层积分进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+} \widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})\; D_{\boldsymbol{\theta}}\Phi(\boldsymbol{y})\; d\boldsymbol{y} &= -\theta_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}(\boldsymbol{s}, x)\; \phi_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x)\; dx d\boldsymbol{s} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}), y_n/\theta_n)\; \Phi(\boldsymbol{y})\; d\boldsymbol{y}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

其中，最后一个等式是通过变量替换 $\boldsymbol{y} \;\mapsto\; (\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})\;\; y_n/\theta_n)$得到的。这给出了~（ $D_{\boldsymbol{\theta}}\Psi_{\boldsymbol{\theta}}$ 在（3.49）中的表达式。■

注 3.15。 常常可以将 (3.49) 写成如下形式

$$\text{a. e. } (\boldsymbol{s}, x) \in \mathbb{R}^n_+, \quad D_{\boldsymbol{\theta}}\widetilde{\Psi}_{\boldsymbol{\theta}}((\boldsymbol{s}, 0) + x\,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \widetilde{\Psi}}{\partial y_n}(\boldsymbol{s}, x). \tag{3.52}$$

由前述命题尤其可以推出迹算子从$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$到 $L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$是满射。

推论 3.16。 设 $\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$，且 $\psi \in H^1(\mathbb{R}+)$ 满足 $\psi(0) = 1$。那么由下式定义的周期函数

$$\text{a. e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad \mathcal{R}\varphi\,(\boldsymbol{y}) := \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}))\; \psi(y_n/\theta_n) \tag{3.53}$$

属于$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，且其迹为 $R^{\varphi|\Sigma^\sharp_{n,0}} = \varphi$。此外，$R$ 定义了一个从 $L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$ 到$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$的连续映射。

3.3 与非周期半波导问题的联系

对于任意边界数据 $\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$，现在我们可以将 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 定义为半导引问题在 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 中的解

$$\left|\begin{aligned} -D_{\boldsymbol{\theta}}\left(\mu_p\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}\right) - \rho_p\,\omega^2\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} &= 0, \quad \text{in} \quad \Omega^\sharp, \\ U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} &= \varphi, \\ U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,0}} &= U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,1}} \qquad \forall\, i \in [\![1, n-1]\!], \\ \mu_p\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,0}} &= \mu_p\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,1}} \quad \forall\, i \in [\![1, n-1]\!]. \end{aligned}\right. \tag{3.54}$$

注意，上述第三个方程意味着 $U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，第一个方程意味着 $\mu_p\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$，最后第四个方程意味着 $\mu_p\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$。与椭圆主部的亥姆霍兹方程相比，边界数据的空间可能 看起来令人意外，但请回想推论 3.16 ： 在 $\Sigma^\sharp_{n,0}$ 上的迹映射是从$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$ 到 $L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$ 的满射。

借助上一节引入的函数空间框架，我们现在可以证明问题（3.54）是适定的。

命题 3.17。 对于任意 $\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$，问题 (3.54) 等价于以下变分形式

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Find } U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp) \textit{ such that } U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = \varphi \textit{ and} \\ \forall\, V \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp) \text{ such that } V|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = 0, \quad \displaystyle\int_{\Omega^\sharp} \Big(\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}\; D_{\boldsymbol{\theta}}\, \overline{V} - \rho_p\, \omega^2\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}\; \overline{V}\Big) = 0, \end{array}\right. \tag{3.55}$$

因此可应用 *Lax-Milgram* 定理。

证明。 将方程（3.54）的第一式乘以$V \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)$，并利用格林公式（3.36），即可得到变分形式。在 $\{V \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)\ \ \gamma_{n,\ 0}V = 0\}$中应用 Lax-Milgram 定理，由推论 3.16可知，这一步显然成立。

为证明等价性，通常选取测试函数$V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp)$，以推出解 $U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)$ 满足（3.55）的解满足方程（3.54）的第一式。这意味着$\mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$。真正的困难在于证明 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 满足方程（3.54）的第四式，或者等价地，证明 $\mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)$。根据命题 3.6，有

$$\forall\ 1 \le i \le n-1, \quad \mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,a}} \in L^2_{loc}(\Sigma^\sharp_{i,a}).$$

因此，命题 3.12 使我们能够对 $U = \mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}$以及 $V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n) \cap H^1_{\boldsymbol{\theta}、\ per}(\Omega^\sharp)$应用格林公式（3.30），其中 T_n 是（3.38）中定义的骨架。结合$U^+_{\boldsymbol{\theta}}$满足（3.55）以及（3.54）中的第一个方程这一事实，可得对任意整数 $i \in [\![1,\ n-1]\!]$,

$$\forall\, V \in \mathscr{C}^\infty_0(\overline{\Omega}^\sharp \setminus T_n) \cap H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp), \quad \Big(\int_{\Sigma^\sharp_{i,1}} \mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}\ \overline{V}\ ds - \int_{\Sigma^\sharp_{i,0}} \mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}\ \overline{V}\ ds\Big) = 0.$$

此外， $\mathscr{C}^\infty_0(\Sigma^\sharp_i,0)$ 包含于 $\{V|_{\Sigma^\sharp_i},0,\ V \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n) \cap H^1_{\boldsymbol{\theta},\overline{per}}(\Omega^\sharp)\}$ 中。事实上，任意 $\psi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Sigma^\sharp_i,0)$ 都存在延拓 $\Psi : \mathrm{y} \in \Omega^\sharp \mapsto \psi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$，该延拓属于 $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega^\sharp \setminus T_n) \cap H^1_{\boldsymbol{\theta},\overline{per}}(\Omega^\sharp)$。最后，由于 $\mathscr{C}^\infty_0(\Sigma^\sharp_i,0)$ 在 $L^2(\Sigma^\sharp_i,0)$ 中稠密，容易证明（3.54）的第四个方程成立，并且对任意$i \in [\![1, n-1]\!]$，都有 $\mu_p\ D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}|_{\Sigma^\sharp_{i,1}} \in L^2(\Sigma^\sharp_i,1)$。■

现在，我们建立 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 与半直线问题（3.1）的解之间的联系，从而充分论证引入半导引问题（3.54）的合理性。

为此 ，首先，让我们引入对任意$\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{n-1}$ b定义的准周期系数 y

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mu_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x) := \mu_p((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta}) \quad \text{and} \quad \rho_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x) := \rho_p((\boldsymbol{s},0) + x\,\boldsymbol{\theta}), \tag{3.56}$$

以及这些一维问题

$$\left|\begin{array}{r} -\dfrac{d}{dx}\Big(\mu_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\ \dfrac{du^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}}{dx}\Big) - \rho_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\ \omega^2\ u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}} = 0, \quad \text{in} \quad \mathbb{R}_+, \\ u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(0) = 1. \end{array}\right. \tag{3.57}$$

注意，(3.1) 对应于取 3.57) 且 $\boldsymbol{s} = 0$ 时的 (。

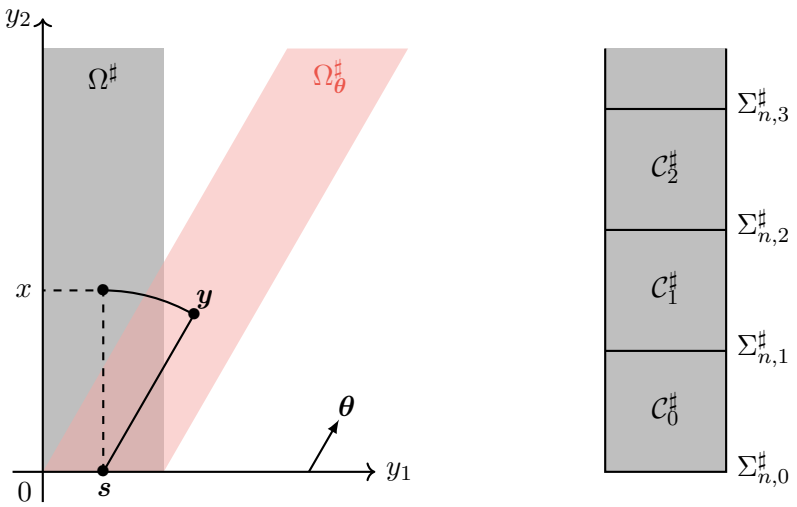


图 6：半圆柱 $\Omega^\sharp$ 和 $\Omega^\sharp_\theta$（左），以及区域 $\mathcal{C}^\sharp_\ell$ 和 $\Sigma^\sharp_{n,\,k}$（右），对应于 $n=2$

在假设 (1.2) 和 (1.4) 下，问题 (3.57) 对任意 $s\in\mathbb{R}^{n-1}$ 都存在唯一解 $u^+_{s,\theta}$ in $H^1(\mathbb{R}_+)$。此外，$u^+_{s,\theta}$ 在无穷远处指数衰减，且关于 s 一致，即存在常数 $\alpha,c>0$，仅依赖于 $\mu_\pm,\rho_\pm$，使得

$$\forall\, s\in\mathbb{R}^{n-1},\quad \big\|\mathrm{e}^{-\alpha\,\mathfrak{Im}\,\omega\,x}\,u^+_{s,\theta}\big\|_{H^1(\mathbb{R}^+)}\le c. \tag{3.58}$$

此外，得益于 μ_p 和 ρ_p的连续性，我们可以证明 $u^+_{s,\,\theta}$ 关于 s连续，正如下一个命题所述。

命题 3.18。映射 $s\in\mathbb{R}^{n-1}\mapsto u^+_{s,\,\theta}$，它将实向量 s 对应到 $H^1(\mathbb{R}_+)$ 中问题 (3.57) 的解，定义了一个一致连续函数，该函数在每个方向上均以 1 为周期。

证明。要证明 $s\mapsto u^+_{s,\,\theta}$ 在每个方向上都是 1-周期的，只需注意到，由于 $\mu_{s,\,\theta}$ 和 $\rho_{s,\,\theta}$ 相对于每个 s_i都是 1-周期的，因此 $u^+_{s,\,\theta}$ 和 $u^+_{s+e_i,\,\theta}$ 满足相同的半直线问题（3.57）。因此，根据（3.57）的适定性，$u^+_{s,\,\theta}=u^+_{s+e_i,\,\theta}$。

现在来证明$s\mapsto u^+_{s,\theta}$的正则性。对于任意$s_1,s_2\in\mathbb{R}^{n-1}$，写出$u^+_{s_1,\theta}$ 和 $u^+_{s_2,\theta}$满足的变分形式，并将两者相减，我们得到

$$\forall\, v\in H^1_0(\mathbb{R}_+),\quad \int_{\mathbb{R}_+}\Big[\mu_{s_1,\theta}\,\frac{d}{dx}(u^+_{s_1,\theta}-u^+_{s_2,\theta})\,\overline{\frac{dv}{dx}}-\rho_{s_1,\theta}\,\omega^2\,(u^+_{s_1,\theta}-u^+_{s_2,\theta})\,\overline{v}\Big]=$$
$$\int_{\mathbb{R}_+}\Big[(\mu_{s_2,\theta}-\mu_{s_1,\theta})\,\frac{du^+_{s_2,\theta}}{dx}\,\overline{\frac{dv}{dx}}-(\rho_{s_1,\theta}-\rho_{s_2,\theta})\,\omega^2\,u^+_{s_2,\theta}\Big].$$

现在在上述等式中取 $v=u^+_{s_1,\,\theta}-u^+_{s_2,\,\theta}\in H^1_0(\mathbb{R}_+)$。（3.57）的适定性、对右端应用柯西-施瓦茨不等式以及（3.58）表明，存在一个与 $c>0$ 无关的实数 s 和 θ，使得

$$\|u^+_{s_1,\theta}-u^+_{s_2,\theta}\|_{H^1(\mathbb{R}_+)}\le c\,\Big(\|\mu_{s_2,\theta}-\mu_{s_1,\theta}\|_\infty+\|\rho_{s_2,\theta}-\rho_{s_1,\theta}\|_\infty\Big). \tag{3.59}$$

函数 μ_p 和 ρ_p 在各个方向上均连续且为 1-周期：根据海涅–康托尔定理，它们一致连续。定义一致连续模如下：

$$\forall\, \mu \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n),\ \forall\, \varepsilon > 0, \quad \delta(\mu, \varepsilon) = \sup_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \{|\mu(\boldsymbol{y}) - \mu(\boldsymbol{z})|,\ |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}| < \varepsilon\}$$

若函数 μ 满足 $\delta(\mu, \varepsilon)$ 当趋于 0 时 ε 趋于0，则该函数是一致连续的。由 (3.59) 可得

$$\|u^+_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{\theta}} - u^+_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{\theta}}\|_{H^1(\mathbb{R}_+)} \le c\,\Big(\delta(\mu_p, |\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2|) + \delta(\rho_p, |s_1 - s_2|)\Big).$$

因此，$\boldsymbol{s} \mapsto u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}$ 是从 R^{n-1} 到 $H^1(\mathrm{R}^+)$ 的连续函数。 ■

命题 3.19。 设 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}$ 为由 (3.45)定义的映射，且 $\widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}$(分别地，$\widetilde{\varphi}$) 是 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}$(分别地，$\varphi$) 关于 (3.54)) 中解的周期延拓。则有

$$\text{a. e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{\varphi})(\boldsymbol{y}) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}))\ u^+_{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}(y_n/\theta_n), \tag{3.60}$$

或者等价地

$$\text{a. e. } (\boldsymbol{s}, x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \quad \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{\varphi})((\boldsymbol{s}, 0) + \boldsymbol{\theta}\, x) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s})\ u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x). \tag{3.61}$$

此外，若 $\widetilde{\varphi}$ 在0 的邻域内连续且满足 $\widetilde{\varphi}(0) = 1$，则

$$\text{a. e. } x \in \mathbb{R}, \quad u^+_{\boldsymbol{\theta}}(x) = \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{\varphi})(x\,\boldsymbol{\theta}) \tag{3.62}$$

证明。我们先证明 (3.60)。对于几乎处处的 $\mathrm{y} \in \mathrm{R}^n_+$, U_1(y)，记其为 (3.60) 右端。注意，Ψ : (s x) $\mapsto \widetilde{\varphi}$(s) $u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(x)$ 关于 s 是 1- 周期的（根据命题 3.18 ），且属于 $L^2(\Omega^\sharp)$，因为

$$\|\Psi\|^2_{L^2(\Omega^\sharp)} = \int_{\Sigma^\sharp_{n,0}} |\varphi(\boldsymbol{s})|^2\ \|u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}\, d\boldsymbol{s} \le \theta_n\, c^2\ \|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})}, \quad \text{with} \quad c = \sup_{\boldsymbol{s}} \|u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

此外，由于对所有$\boldsymbol{s}$，$u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}} \in H^1(\mathrm{R}^+)$，$\partial_{y_n}\Psi$ 也属于 $L^2(\Omega^\sharp)$（利用与上述类似的不等式）。根据命题3.14，U_1 属于$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，其中

$$\text{a. e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad D_{\boldsymbol{\theta}}\,\widetilde{U_1}(\boldsymbol{y}) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}))\ \frac{du^+_{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}}{dx}(y_n/\theta_n).$$

最后，由于$u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(0) = 1$，显然$U_1|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = \varphi$。重复相同的论证可得，$\mu_p D_{\boldsymbol{\theta}}\, U_1$ 属于$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，其中

$$\text{a. e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad D_{\boldsymbol{\theta}}\,[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\,\widetilde{U_1}](\boldsymbol{y}) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}))\ \frac{d}{dx}\Big(\mu_{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}\,\frac{du^+_{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}}{dx}\Big)(y_n/\theta_n).$$

由于$u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}$ 满足（3.57），显然 U_1 满足（3.54）。由（3.54）的适定性可知，$U_1 = U^+_{\boldsymbol{\theta}}$。

利用变量替换 (s x) $\mapsto$ ((s, 0) $+\,\boldsymbol{\theta}\, x$)，可直接得到 (3.60) 与 (3.61) 等价。此外，由命题 3.18 可知，s $\mapsto u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}$ 是连续的。若进一步假设 $\widetilde{\varphi}$ 在 0 的某个邻域内连续，则 (3.61) 对该邻域内任意 s 均成立。特别地，(3.61) 可写为 s $= 0$，从而得到 (3.62)。■

特别地，由上述命题可推得

$$\text{a.e. } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n_+, \quad D_{\boldsymbol{\theta}}\, \widetilde{U}^+_{\boldsymbol{\theta}}(\widetilde{\varphi})(\boldsymbol{y}) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}))\, \frac{du^+_{\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}}{dx}(y_n/\theta_n). \tag{3.63}$$

注 3.20. 半导引解 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 取决于 φ 而 $u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta}}$ 则不然。从这个意义上说，关系式 (3.60)乍看之下 可能令人惊讶。第 5.5节给出的数值结果将阐明这一性质。

4 半导引问题的求解

提升过程的优势在于（3.54）具有周期性，这使我们能够利用适用于周期波导的工具。本文采用一种基于 DtN 的方法 [10, 19], , 该方法针对椭圆型[1] 亥姆霍兹方程 $-\nabla\cdot(\mu_p\,\nabla U) - \rho_p\,\omega^2\,U = 0$，用于无界周期波导。该方法不依赖衰减性质，因此当吸收趋于0时仍保持稳健。由于我们实际上将该方法移植到方向性亥姆霍兹方程中，下面将看到，尽管分析需要调整，整体框架仍完全相同。还要提及适用于有界周期波导的递归倍增法 [32, 8], , 以及一种 [33]基于 Floquet-Bloch 变换的方法，尽管将其推广到我们的非椭圆方程似乎并不明朗。

下文中，$\mathcal{C}^\sharp_\ell$ 表示对每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 定义的单元，其定义为

$$\mathcal{C}^\sharp_0 = (0,1)^n \quad \text{and} \quad \mathcal{C}^\sharp_\ell = \mathcal{C}^\sharp_0 + \ell\,\vec{\boldsymbol{e}}_n, \quad \text{so that} \quad \Omega^\sharp = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^\sharp_\ell. \tag{4.1}$$

对于 $\ell > 0$，我们称 $\Sigma^\sharp_{n,\,\ell}$为单元 $\mathcal{C}^\sharp_\ell$与 $\mathcal{C}^\sharp_{\ell+1}$之间的界面，即 $\Sigma^\sharp_{n,\,\ell} = \Sigma^\sharp_{n,\,0} + \ell\,\vec{\boldsymbol{e}}_n$。根据周期性，每个单元 $\mathcal{C}^\sharp_\ell$都可以视为 $\mathcal{C}^\sharp_0$。类似地，每个界面 $\Sigma^\sharp_{n,\,\ell}$都可以视为 $\Sigma^\sharp_{n,\,0}$。单元和界面如图 6所示。

4.1 解的结构

（3.54）的解 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 具有一种特殊结构，我们将在本节中加以说明。记 $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}))$ 为算子

$$\forall\, \varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}), \quad \mathcal{P}\varphi := U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)|_{\Sigma^\sharp_{n,1}}, \tag{4.2}$$

其中 $L^2(\Sigma^\sharp_{n,1})$ 和 $L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$ 以显然的方式相互对应。下文中将系统地使用这种对应关系，即使未加说明亦然。注意，算子 $\mathcal{P}$ 是良定义的，这归因于迹算子在$\Sigma^\sharp_{i,\,a}$ (3.34)上的连续性。

命题 4.1. 对于任意 φ *in* $L^2(\Sigma^\sharp_{n,\,0})$，我们有

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N},\ \text{a.e. } \boldsymbol{y} \in \Omega^\sharp, \quad U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)(\boldsymbol{y} + \ell\,\vec{\boldsymbol{e}}_n) = U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{P}^\ell\varphi)(\boldsymbol{y}). \tag{4.3}$$

此外，P 的谱半径严格小于一。

[1] By 椭圆型亥姆霍兹方程，我们所说的亥姆霍兹方程是指主部具有椭圆性的方程 *rt.*

证明。我们仅给出证明概要，这与 [10,19]中的证明非常相似。给定 $\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_n,0)$，考虑在 $\Omega^\sharp$ 上定义的函数 U_1： $U_1(y) = U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)(y + \bar{e}_n)$，其中几乎对所有 $y \in \Omega^\sharp$都成立。由于系数 μ_p和 ρ_p是周期的，因此可推得 U_1满足体方程以及 (3.54) 中的周期性条件。此外，

$$U_1|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)|_{\Sigma^\sharp_{n,1}} = \mathcal{P}\varphi.$$

因此，根据（3.54）的适定性，对于 $\ell = 1$，有（4.3）。 $\ell \geq 2$ 的结果（4.3）由归纳法得证。

接下来需要证明谱半径严格小于1。为此，类比（3.58），可以证明存在常数 α， $c > 0$ 使得

$$\forall\, \varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}), \quad \big\| e^{\alpha\, \mathfrak{Im}\, \omega\, y_n/\theta_n}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}} \big\|_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)} \leq c\, \|\varphi\|_{L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})}. \tag{4.4}$$

由于 $\mathcal{P}^\ell\varphi = U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)(\cdot\ \ell)$，上述估计意味着$\|\mathcal{P}^\ell\| \leq c\, e^{-\alpha\, \mathfrak{Im}\, \omega\, \ell/\theta_n}$。因此，利用盖尔范德公式 [26, §10.3], 可得谱半径的估计如下：

$$\rho(\mathcal{P}) = \lim_{\ell \to +\infty} \|\mathcal{P}^\ell\|^{1/\ell} \leq e^{-\beta\, \mathfrak{Im}\, \omega/\theta_n} < 1.$$

■

算子 $\mathcal{P}$ 称为传播算子，因为它描述了方程（3.54）的解如何从一个界面演变到另一个界面。若已知$\mathcal{P}$ ，则可利用 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 通过局部单胞问题构造解。我们首先在一个周期胞元中引入恰当的函数空间框架

$$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}^\sharp_0) := \Big\{ U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{C}^\sharp_0),\ \widetilde{U} \in H^1_{\boldsymbol{\theta},loc}(\mathcal{B}_0) \Big\}, \tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{B}_0 := \mathbb{R}^n_+ \cap \{0 < y_n < 1\}$。与第 3.2.1 节类似，可以证明，$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}^\sharp_0)$ 中的任意函数在$\mathcal{C}^\sharp_0$ 的边界上都有 L^2 迹。特别地，我们可以证明

$$H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}^\sharp_0) = \Big\{ U \in H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{C}^\sharp_0)\ /\ U|_{y_i=0} = U|_{y_i=1},\ \forall\, i \in [\![1, n-1]\!] \Big\}.$$

现在我们可以引入局部单胞问题：对于所有 $\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})$，对于 $j \in \{0,1\}$，令 $E^j(\varphi) \in H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}^\sharp_0)$ 满足

$$\left| \begin{array}{l} -D_{\boldsymbol{\theta}}\left(\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^j\right) - \rho_p\, \omega^2\, E^j = 0, \quad \text{in} \quad \mathcal{C}^\sharp_0, \\ \mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^j|_{y_i=0} = \mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^j|_{y_i=1} \quad \forall\, i \in [\![1, n-1]\!], \end{array} \right. \tag{4.6}$$

定义于 $j = 0,1$，满足边界条件

$$\left| \begin{array}{l} E^0|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = \varphi \quad \text{and} \quad E^0|_{\Sigma^\sharp_{n,1}} = 0, \\ E^1|_{\Sigma^\sharp_{n,0}} = 0 \quad \text{and} \quad E^1|_{\Sigma^\sharp_{n,1}} = \varphi. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

可以像命题3.17中那样推导出变分形式，而适定性再次由提升论证（见命题 3.14）结合 $H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}^\sharp_0)$ 中的 Lax-Milgram 定理得出。

命题 4.1 意味着 $U_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(\varphi)(\cdot+\ell\,\vec{e}_n)|_{\Sigma_{n,0}^{\sharp}}=\mathcal{P}^{\ell}\varphi$。因此，若已知传播算子 $\mathcal{P}$，根据线性性，半导引问题的解可按如下方式逐个单元地完全构造出来：

$$\forall\,\ell\in\mathbb{N},\quad U_{\boldsymbol{\theta}}^{+}(\varphi)(\cdot+\ell\,\vec{e}_n)|_{\mathcal{C}_0^{\sharp}}=E^0(\mathcal{P}^{\ell}\varphi)+E^1(\mathcal{P}^{\ell+1}\varphi). \tag{4.8}$$

4.2 传播算子的刻画：黎卡提方程

下文中，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2\,\Sigma_{n,0}^{\sharp}$ 上的标准标量积（等价地，也可视为定义在 $\Sigma_{n,1}^{\sharp}$上的标量积）。

为了刻画传播算子$\mathcal{P}$，引入局部 *DtN* 算子 $\mathcal{T}^{jk}\in\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp}))$很有用；对于 $j,k=0,1$，它们定义为

$$\forall\,\varphi\in L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp}),\quad \mathcal{T}^{jk}\varphi=(-1)^{k+1}\,\theta_n\left[\mu_p\,D_{\boldsymbol{\theta}}\,E^j(\varphi)\right]|_{\Sigma_{n,k}^{\sharp}}. \tag{4.9}$$

其中 $E^j(\varphi)$ 满足 (4.6)-(4.7)。根据格林公式 (3.30)，注意，对于所有 $j,k=0,1$ 以及 $(\varphi,\psi)\in L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp})^2$, ，这些算子满足

$$\left\langle\mathcal{T}^{jk}\varphi,\,\psi\right\rangle=\int_{\mathcal{C}_0^{\sharp}}\left[\mu_p\,D_{\boldsymbol{\theta}}\,E^j(\varphi)\,D_{\boldsymbol{\theta}}\,\overline{E^k(\psi)}-\rho_p\,\omega^2\,E^j(\varphi)\,\overline{E^k(\psi)}\right]. \tag{4.10}$$

在推导局部 DtN 算子的其他有用性质之前，我们需要引入一些额外的记号。对于任意闭算子$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp}))$，记$\mathcal{A}^*$ 为$\mathcal{A}$的伴随算子，并记$\mathcal{A}$ 为其«复共轭 »，即

$$\forall\,\varphi\in L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp}),\quad \overline{\mathcal{A}}\varphi=\overline{\mathcal{A}\overline{\varphi}}.$$

不难看出$\mathcal{A}^*=\overline{\mathcal{A}}^*$，且$\mathcal{A}=\overline{\overline{\mathcal{A}}}$。

命题 4.2. 局部 *DtN* 算子 $\mathcal{T}^{jk}$ 满足

$$\left[\mathcal{T}^{00}\right]^*=\overline{\mathcal{T}^{00}},\quad \left[\mathcal{T}^{11}\right]^*=\overline{\mathcal{T}^{11}},\quad \left[\mathcal{T}^{01}\right]^*=\overline{\mathcal{T}^{10}},\quad \left[\mathcal{T}^{10}\right]^*=\overline{\mathcal{T}^{01}}. \tag{4.11}$$

此外，算子 $\mathcal{T}^{00}$、$\mathcal{T}^{11}$以及 $\mathcal{T}^{00}+\mathcal{T}^{11}$ 均可逆。

证明。 性质（4.11）由格林公式应用于 E^j（φ）和E^k（ψ）得出，参见 [10, 命题 2.2。4] 在亥姆霍兹方程的情形下。

算子$\mathcal{T}^{00},\mathcal{T}^{11}$和$\mathcal{T}^{00}+\mathcal{T}^{11}$ 均有界。下面将证明它们也是强制的。由 Lax-Milgram 定理可知它们可逆。

由表达式（4.10可知，存在常数 $c\equiv c(\mu_-,\ \rho_-,\ |\omega|)>0$使得

$$-|\omega|\ \mathfrak{Im}\left[\frac{1}{\omega}\left\langle\mathcal{T}^{kk}\varphi,\,\varphi\right\rangle\right]\geq c\ \mathfrak{Im}\,\omega\,\|E^k(\varphi)\|^2_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{C}_0^{\sharp})}\geq\tilde{c}\ \mathfrak{Im}\,\omega\,\|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp})},$$

由于根据（3.34），从 $H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\mathcal{C}_0^{\sharp})$ 到 $L^2(\Sigma_{n,0}^{\sharp})$ 的迹映射是连续的。因此，算子 $\mathcal{T}^{00}$ 和$\mathcal{T}^{11}$ 是强制的，故可逆。将上述不等式对 $k=0,1$ 求和，可知 $\mathcal{T}^{00}+\mathcal{T}^{11}$ 同样是强制的，因而可逆。■

如前所述，半导引问题（3.54）的解由（4.8）给出。现在使用 $H^1_{per,\boldsymbol{\theta}}(\Omega^\sharp)$ 的刻画，即推论 3.11，并令 $a=1$，从而 $\Omega^\sharp_{a,-}=\mathcal{C}^\sharp_0$ 且 $\Omega^\sharp_{a,+}=\Omega^\sharp\setminus\mathcal{C}^\sharp_0$。由于 $\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 属于 $H^1_{\boldsymbol{\theta},per}(\Omega^\sharp)$，$U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 的方向导数在界面 $\Sigma^\sharp_{n,1}$ 处连续，即

$$\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,1}}=\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)((\cdot+\vec{\boldsymbol{e}}_n)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,0}}, \tag{4.12}$$

或者等价地，

$$\begin{aligned}\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^0(\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,1}}+\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^1(\mathcal{P}\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,1}}\\ =\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^0(\mathcal{P}\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,0}}+\left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^1(\mathcal{P}^2\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,0}}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

利用局部 DtN 算子$\mathcal{T}^{jk}$，式（4.13）可得如下刻画。

命题 4.3。由式$\mathcal{P}$ 定义的传播算子（4.2）是约束黎卡提方程的唯一解

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Find } \mathcal{P}\in\mathcal{L}(L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}))\ \textit{such that } \rho(\mathcal{P})<1\ \textit{and}\\ \qquad \mathcal{T}^{10}\mathcal{P}^2+(\mathcal{T}^{00}+\mathcal{T}^{11})\,\mathcal{P}+\mathcal{T}^{01}=0.\end{array}\right. \tag{4.14}$$

证明。证明与椭圆型亥姆霍兹方程 [19, 定理 4.1]中的证明相同。由命题4.1 可知，$\mathcal{P}$ 的谱半径严格小于1。此外，式（4.13）确保$\mathcal{P}$ 满足黎卡提方程。

为了证明唯一性，考虑一个满足式（$\mathcal{P}_1$ （4.14）的算子。逐个单元定义的函数为

$$\forall\,\varphi\in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}),\quad \forall\,\ell\in\mathbb{N}^*,\quad U_1(\varphi)(\cdot+\ell\,\vec{\boldsymbol{e}}_n)|_{\mathcal{C}^\sharp_0}=E^0(\mathcal{P}_1^\ell\varphi)+E^1(\mathcal{P}_1^{\ell+1}\varphi),$$

在每个单元（3.54）中满足$\mathcal{C}_\ell$，并且在每个界面$\Sigma^\sharp_n$处连续ℓ。根据（4.6）、（4.7） E^0 和 E^1 的定义。由推论3.11， U_1 在 $H^1_{\boldsymbol{\theta}}\,\Omega^\sharp$中局部。

此外，由于$\mathcal{P}_1$ 满足（4.14），方向导数 $\mu_pD_{\boldsymbol{\theta}}\,U_1$ 在每个界面上连续。因此，利用推论3.11，我们推得 U_1 满足（3.54）于$\Omega^\sharp$。

此外，鉴于 $\rho(\mathcal{P}_1)<1$，盖尔范德公式和单元问题的适定性确保存在正常数 c,ρ_*，使得 $\rho_*<1$，对于足够大的 $\ell\in\mathbb{N}$，

$$\|U_1(\varphi)\|_{H^1_{\boldsymbol{\theta}}(\mathcal{C}^\sharp_\ell)}\le c\,\rho_*^\ell\,\|\varphi\|_{L^2(\Sigma^\sharp_{n,0})}.$$

因此， $U_1(\varphi)$ 属于 $H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\Omega^\sharp)$，并满足半导引问题（3.54）。根据（3.54）的适定性， $U_1(\varphi)$ 与 $U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ 相同，因此它们在 $\Sigma^\sharp_{n,\ 1}$ 上具有相同的迹，即对任意 $\varphi\in L^2(\Sigma^\sharp_{n,\ 0})$，$\mathcal{P}_1\varphi=\mathcal{P}\varphi$。
■

因此，可以通过求解（4.14）中的黎卡提方程，并选取谱半径严格小于1的唯一解，来得到传播算子。以上内容有一点很重要：传播算子和半导引问题的解只需计算 E^0， E^1以及算子$\mathcal{T}^{00}, \mathcal{T}^{10}, \mathcal{T}_{01}$和$\mathcal{T}_{11}$，这些算子涉及的问题均定义在周期胞元上。然而，约束黎卡提方程（4.14）的求解并非显而易见。第4.4节将进一步研究该方程的性质。

4.3 Dirichlet-to-Neumann 算子与 Dirichlet-to-Neumann 系数

本部分旨在了解如何利用半导引问题和局部单胞问题计算 Dirichlet-to-Neumann 系数 λ^+。我们回顾一下，

$$\lambda^+ = -\mu_{\boldsymbol{\theta}}(0)\,\frac{du^+_{\boldsymbol{\theta}}}{dx}(0).$$

Th因此，自然可以引入 Dirichlet-to-Neumann 算子 $\Lambda \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}))$，定义如下：

$$\forall\,\varphi \in L^2(\Sigma^\sharp_{n,0}), \quad \Lambda\varphi := -\theta_n \left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, U^+_{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)\right]|_{\Sigma^\sharp_{n,0}}. \tag{4.15}$$

该算子还具有以下性质，其证明与命题 4.2 的证明完全相同。

命题 4.4。有 $\Lambda^* = \Lambda$。此外， Λ和 $\Lambda + T^{11}$ 是可逆算子 .

对（4.8）（关于 $\ell = 0$）在 $\Sigma^\sharp_{n,0}$ 处求方向导数，并利用局部 DtN 算子 $\mathcal{T}^{00}$ 和 $\mathcal{T}^{10}$ 的定义（4.9），得到

$$\Lambda = \mathcal{T}^{00} + \mathcal{T}^{10}\mathcal{P}. \tag{4.16}$$

此外，将公式（3.63）两边乘以 μ_p，再令$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{s},0)$，使得 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{s}$，可得

$$\Lambda\varphi(\boldsymbol{s}) = \theta_n\,\lambda_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})\,\varphi(\boldsymbol{s}), \quad \text{with} \quad \lambda_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) = -\Big[\mu_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\,\frac{du^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}}{dx}\Big](0), \tag{4.17}$$

也就是说， Λ 是一个乘法算子。由（4.17）可推出 Dirichlet-to-Neumann 系数 λ^+。

命题 4.5。 函数 $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}:\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}$ 由（(4.17) 定义，且连续。此外，若 $\varphi \in \mathscr{C}_{per}(\mathbb{R}^{n-1})$ 是满足 $\varphi(0) = 1$的给定函数，则有

$$\lambda^+ = \lambda_{\boldsymbol{\theta}}(0) = \frac{1}{\theta_n}\,(\Lambda\varphi)(0). \tag{4.18}$$

证明。 利用格林公式可知，对所有$\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\lambda_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) = a_{\boldsymbol{s}}(u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}, u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}), \quad \text{with} \quad a_{\boldsymbol{s}}(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\mu_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\,\frac{du}{dx}\,\overline{\frac{dv}{dx}} - \rho_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\,\omega^2\,u\,\overline{v}\Big).$$

$u \mapsto a_{\boldsymbol{s}}(u,u)$的连续性直接由系数 μ_p 和ρ_p的性质得到。此外，命题3.18 保证函数$\boldsymbol{s} \mapsto u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}$ 连续。因此，作为这两个函数的复合， $\lambda_{\boldsymbol{\theta}}$ 也连续。

此外，若 φ 连续，则 $\Lambda\varphi$ 也连续。因此，$(\Lambda\varphi)(0) = \theta_n\,\lambda_{\boldsymbol{\theta}}(0)\varphi(0)$，从而得到所需结果。■

4.4 黎卡提方程的谱性质

现在我们给出关于方程（4.14）的一些性质。这些性质将用于黎卡提方程的数值求解：通过特征对构造算子$\mathcal{P}$（这将在空间离散化之后的第5.3 节中完成）。因此，有必要重新表述黎卡提方程的谱形式（命题4.7），以刻画这些特征对，同时考虑谱半径约束。本节的目的正是如此。

回忆一下，$\mathcal{T}(\mathcal{P}) = 0$，其中$\mathcal{T}$是由下式定义的有界算子

$$\forall\, X \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma^{\sharp}_{n,0})), \quad \mathcal{T}(X) = \mathcal{T}^{10}X^2 + (\mathcal{T}^{00} + \mathcal{T}^{11})X + \mathcal{T}^{01}. \tag{4.19}$$

下文中，我们将用$\mathcal{T}(\lambda)$表示$\mathcal{T}(\lambda I)$。我们先给出以下因式分解引理。

引理 4.6. 设 $\mathcal{P}$ 为由 (4.2)定义的传播算子。对于任意数 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{T}(\lambda) = (\lambda\overline{\mathcal{P}^*} - I)\,(\Lambda + \mathcal{T}^{11})\,(\mathcal{P} - \lambda), \tag{4.20}$$

其中 $\mathcal{T}^{11}$ 由 (4.9) 定义，而 Λ 由 (4.15)定义。

证明。 令 $\lambda \in \mathbb{C}$。由于传播算子满足 $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = 0$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\lambda) &= \mathcal{T}(\lambda) - \mathcal{T}(\mathcal{P}) \\ &= \left[\mathcal{T}^{10}(\lambda + \mathcal{P}) + \mathcal{T}^{00} + \mathcal{T}^{11}\right]\,(\lambda - \mathcal{P}) \\ &= (\lambda\mathcal{T}^{10} + \Lambda + \mathcal{T}^{11})\,(\lambda - \mathcal{P}), \quad \text{from (4.16)}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

我们再次利用 $\mathrm{T}(\mathrm{P}) = 0$ 这一事实。根据表达式 (4.16)，这等价于 $\mathrm{T}^{01} = -(\Lambda + \mathrm{T}^{11})\,\mathrm{P}$。对该等式转置并取复共轭，可得 $[\mathrm{T}^{01}]^* = -\mathrm{P}^*(\Lambda + \mathrm{T}^{11})^*$。由命题 4.2 可知 $[\mathrm{T}^{11}]^* = \mathrm{T}^{11}$ 且 $[\mathrm{T}^{01}]^* = \mathrm{T}^{10}$，又由命题 4.4 可知 $\Lambda^* = \Lambda$，因此

$$\mathcal{T}^{10} = -\overline{\mathcal{P}^*}\,(\Lambda + \mathcal{T}^{11}).$$

将 $\mathcal{T}^{10}$ 在（4.21）中代入该表达式，便得到

$$\mathcal{T}(\lambda) = \left[-\lambda\overline{\mathcal{P}^*}\,(\Lambda + \mathcal{T}^{11}) + \Lambda + \mathcal{T}^{11}\right]\,(\lambda - \mathcal{P}) = (I - \lambda\overline{\mathcal{P}^*})\,(\Lambda + \mathcal{T}^{11})\,(\lambda - \mathcal{P}).$$

这就是所需结果。 ■

前面的因式分解引理可以如下刻画传播算子的谱。

命题 4.7. 对于任意复数 λ，有

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{P}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \sigma\big[\mathcal{T}(\lambda)\big] \quad \textit{and} \quad |\lambda| < 1. \tag{4.22}$$

证明. 证明 (4.22) 等价于证明：对于任意满足 $|\lambda| < 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$，当且仅当 $\mathsf{T}(\lambda)$ 可逆时，$\mathsf{P} - \lambda$ 可逆。为此，利用引理 4.6，只需证明 $(\lambda \mathsf{P}^* - I)(\Lambda + \mathsf{T}^{11})$ 是可逆算子。命题 4.4 已确保 $\Lambda + \mathsf{T}^{11}$ 可逆。因此，剩下只需证明 $\lambda \mathsf{P}^* - I$ 可逆；当 $|\lambda| < 1$ 时，这一点成立。

事实上，若 $\lambda = 0$，则 $\lambda \overline{\mathcal{P}^*} - I = -I$ 显然是可逆的。否则，不难看出 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}^*$ 具有相同的谱。因此，鉴于 $|1/\lambda| > 1 > \rho(\mathcal{P}^*)$，可知 $1/\lambda$ 不属于 $\sigma(\mathcal{P}^*)$。换言之，$\mathcal{P}^* - (1/\lambda)\, I$ 是一个可逆算子。■

注 4.8。注意，性质 (4.22) 对于点谱，可以很容易地证明（且无需引理 *4.6*）：

$$\lambda \in \sigma_p(\mathcal{P}) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \sigma_p[\mathcal{T}(\lambda)] \quad and \quad |\lambda| < 1. \tag{4.23}$$

这一性质已经在 *[19]* 中针对亥姆霍兹方程得到了证明。在此背景下，这已经足够，因为算子 $\mathcal{P}$ 是紧的，而这里的情况不再如此。

最后值得指出的是，满足 $0 \in \sigma[\mathcal{T}(\lambda)]$ 的值 $\lambda \neq 0$ 可以按以下方式配对。

Prop命题 4.9. 对于任意复数 $\lambda \neq 0$，有如下等价关系 :

$$0 \in \sigma[\mathcal{T}(\lambda)] \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \sigma[\mathcal{T}(1/\lambda)]. \tag{4.24}$$

证明. 令 $\lambda \in \mathbb{C}^*$。由局部 DtN 算子的性质（见命题 4.2），我们推得

$$\overline{[\mathcal{T}(\lambda)]^*} = \lambda^2 \mathcal{T}^{01} + \lambda(\mathcal{T}^{00} + \mathcal{T}^{11}) + \mathcal{T}^{10} = \lambda^2 \mathcal{T}(1/\lambda). \tag{4.25}$$

算子 $\mathcal{T}(\lambda)$ 和 $[\mathcal{T}(\lambda)]^*$ 具有相同的谱，因此结论成立。 ■

注 4.10. 正如命题 *4.9* 所示，满足以下条件的值 $\lambda \neq 0$

$$0 \in \sigma[\mathcal{T}(\lambda)]$$

成对出现（λ, λ^{-1}）。从数值计算的角度来看，只需选择 λ 使得$|\lambda| < 1$，并舍弃 λ^{-1}。

4.5 传播算子的谱性质

本节与第4.4 节不同，并不涉及数值方法的构造；它具有理论意义。一方面，本节的结果，即命题4.11，有助于解释第5.5.3节中的一些数值结果。另一方面，它突出了$\mathcal{P}$的谱性质与经典波导问题中相应算子的谱性质之间的差异。对于椭圆型亥姆霍兹方程，$\mathcal{P}$ 是紧的（见 [19, 定理 3。1]），因此其谱仅由孤立特征值组成，这些特征值聚积于0。然而，在本例中情况完全不同，因为该谱没有孤立点。

研究传播算子性质（尤其是其谱）的一种有效方法，是利用解析公式：根据（3.60），$\mathcal{P}$ 对于所有 φ in $L^2(\Sigma^\sharp_{n,\,0})$ 以及 $\boldsymbol{s} \in \mathrm{R}^{n-1}$，可表示为

$$\mathcal{P}\varphi(\boldsymbol{s}) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})\ \tilde{\varphi}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\delta}), \quad \text{with} \quad p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) = u^+_{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\theta}}(1/\theta_n) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\delta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,/\theta_n \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{4.26}$$

注意，由于 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个无理向量，$\boldsymbol{\delta}$ 也是一个无理向量。

映射 $\boldsymbol{s} \mapsto u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}}$ 由命题 3.18 给出的性质表明，函数 $p_{\boldsymbol{\theta}}$ 是连续的，并且1-在各个方向上均为周期的。

可写成形式（4.26）的算子称为加权移位算子，例如，文献 [2]研究了这类算子。特别地，$\mathcal{P}$ 的谱性质由以下结果给出。

命题4.11。设 $p_{\boldsymbol{\theta}}: \Sigma^\sharp_{n,\,0} \to \mathbb{C}$ 为 (4.26)中定义的函数。则，$p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) \neq 0$ 对所有 s 属于$\Sigma^\sharp_{n,\,0}$ 均成立，且 P 的谱半径为

$$\rho(\mathcal{P}) = \exp\left(\int_{\Sigma^\sharp_{n,0}} \log|p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})|\ d\boldsymbol{s}\right). \tag{4.27}$$

此外，P 的谱是半径为 $\rho(P)$ 的圆。

这一结果见于 [2, 定理 2。1] 对于 $n = 2$。下面给出 $n > 2$的证明，该证明需要以下引理（参见 [21]的定理 6.1 和例 6.1），它是伯克霍夫连续函数遍历定理的一个特例。

引理 4.12。令 $\psi: \Sigma^\sharp_{n,\,0} \to \mathbb{C}$ 在每个方向上都是连续且 1–周期的。令 $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$为一个无理向量。则有如下的一致收敛性：

$$\lim_{\ell\to+\infty} \Big\| \frac{1}{\ell} \sum_{m=0}^{\ell-1} \psi(\cdot - m\boldsymbol{\alpha}) - \int_{\Sigma^\sharp_{n,0}} \psi \Big\|_\infty = 0.$$

命题 4.11的证明。我们首先通过反证法证明 $p_{\boldsymbol{\theta}}$ 或者等价地，函数 $\boldsymbol{s} \mapsto u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}}(1/\theta_n)$处处不为零。为此，我们使用唯一延拓的论证。事实上，假设存在 $s \in \Sigma^\sharp_{n,\,0}$ 使得 $u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}}(1/\theta_n) = 0$。则 $u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}}$满足问题

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\ \frac{du^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}}{dx}\right) - \rho_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}\ \omega^2\ u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}} = 0, \ \text{in}\ (1/\theta_n, +\infty), \quad \text{and} \quad u^+_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{\theta}}(1/\theta_n) = 0.$$

由该问题的适定性可知，$u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}} = 0$ 在 $(1/\theta_n,\ +\infty)$ 中。因此，根据唯一延拓性，可以推出 $u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}} = 0$ 在 $\mathrm{R}+$ 中成立，这与边界条件 $u^+_{\boldsymbol{s},\,\boldsymbol{\theta}}(0) = 1$相矛盾。

现在我们给出谱半径 $\rho(\mathcal{P})$ 的表达式。根据盖尔范德公式，$\rho(\mathcal{P}) = \lim_{\ell\to+\infty}\|\mathcal{P}^\ell\|^{1/\ell}$；由归纳法可知，$\mathcal{P}^\ell$ 可表示为

$$\mathcal{P}^\ell\varphi(\boldsymbol{s}) = p^{(\ell)}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})\ \varphi(\boldsymbol{s}-\ell\boldsymbol{\delta}), \quad \text{with} \quad p^{(\ell)}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) = \prod_{m=0}^{\ell-1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}-m\boldsymbol{\delta}).$$

由于平移算子 $\varphi \mapsto \varphi(\cdot - \ell\boldsymbol{\delta})$ 是等距且为双射，$\mathcal{P}^\ell$ 的范数等于乘法算子 $\varphi \mapsto p_{\boldsymbol{\theta}}^{(\ell)}\varphi$ 的范数，即 $\|p_{\boldsymbol{\theta}}^{(\ell)}\|_\infty$。因此，鉴于对于所有 $\boldsymbol{s}$，$p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s}) \neq 0$，有

$$\rho(\mathcal{P}) = \lim_{\ell\to+\infty} \Big\| \prod_{m=0}^{\ell-1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot - m\boldsymbol{\delta}) \Big\|_\infty^{1/\ell} = \lim_{\ell\to+\infty} \exp \Big\| \frac{1}{\ell} \sum_{m=0}^{\ell-1} \log\left(|p_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot - m\boldsymbol{\delta})|\right) \Big\|_\infty$$

由于 $\boldsymbol{\theta}$ 是一个无理向量，$\boldsymbol{\delta} = \hat{}\boldsymbol{\theta}/\theta_n$ 也是一个无理向量。因此，可以将引理 4.12应用于 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\delta}$，且 $\psi : \boldsymbol{s} \mapsto \log|p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})|$，它定义良好且连续。因此，谱半径为

$$\rho(\mathcal{P}) = M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}}) := \exp\left(\int_{\Sigma_{n,0}^\sharp} \log|p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})|\, d\boldsymbol{s} \right).$$

现在我们来刻画谱。首先注意，$\mathcal{P}$ 的逆算子定义良好，因为 $p_{\boldsymbol{\theta}}$ 处处不为零：对于所有 $\varphi \in L^2(\Sigma_{n,\,0}^\sharp)$，$\mathcal{P}^{-1}\varphi(\boldsymbol{s}) := p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{s})^{-1}\,\widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\delta})$。因此，上述所有计算都可应用于 $\mathcal{P}^{-1}$，从而得到

$$\rho(\mathcal{P}^{-1}) = M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}) = \frac{1}{M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})} = \frac{1}{\rho(\mathcal{P})}$$

由于 $\mathcal{P}$ 的谱总包含在环域 $\rho(\mathcal{P}^{-1})^{-1} \le |z| \le \rho(\mathcal{P})$ 中，因此 $\sigma(\mathcal{P})$ 包含在圆 $|z| = \rho(\mathcal{P}) = M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})$ 中。

反过来，对于 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^{n-1}$，令 $S_{\boldsymbol{k}}$ 为由 $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \exp(2\mathrm{i}\pi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s})$定义的乘法算子。由传播算子的表达式（4.26）可得

$$S_{\boldsymbol{k}}\,\mathcal{P}\,S_{\boldsymbol{k}}^{-1} = e^{2\mathrm{i}\pi\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}}\,\mathcal{P}.$$

算子 P 和 $e^{2\mathrm{i}\pi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}}$P 相似，因此具有相同的谱。现在考虑 λ_0中属于 σ(P) 的一个元素。于是，$|\lambda_0| = M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})$，并且对所有 k $\in$Z^{n-1}，$\lambda_{\boldsymbol{k}}$:= $e^{2\mathrm{i}\pi\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}}\,\lambda_0$也属于 σ(P)。由于 $\boldsymbol{\delta}$ 是无理数，由克罗内克定理（定理 2.2）可知，集合 $\{\lambda_{\boldsymbol{k}}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}^{n-1}\}$ 在圆 $|z| = |\lambda_0| = M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})$ 上稠密。因此，整个圆都包含在谱中，因为谱是闭集。■

5 $n = 2$ 的求解算法与离散化问题

为了计算方程（1.1）的解，前面几节给出了一个算法，总结如下：

1. 计算 $u_{\boldsymbol{\theta}}^+$的解 (1.8) 以及 *Dirichlet-to-Neumann* 系数 λ^+，其定义见 (1.7)，采用以下步骤：

   (a). 对于任意边界数据 $\varphi \in L^2(\Sigma_n^\sharp,0)$，计算局部单胞问题 (4.6) 的解 $E^0(\varphi)$、$E^1(\varphi)$；(b). 计算由 (4.9)–(4.10) 定义的局部 DtN 算子 (T 00, T 01, T 10, T ^{11})；(c). 将传播算子 P 计算为约束黎卡提方程（4.14）的唯一解；

(*d*). 使用任意选取的边界数据 $\varphi \in \mathscr{C}_{per}(\mathrm{R}^{n-1})$，该数据满足 $\varphi(0) = 1$，

- 由（4.8）构造解 $U_{\boldsymbol{\theta}}^{+}$，逐单元求解半导引问题；
- 通过公式（3.62）推导半直线解 $u_{\boldsymbol{\theta}}^{+}$；（3.62）；（

e）。计算由（Λ 4.16）定义的 Dirichlet-to-Neumann 算子 λ^{+}，并由（4.18）推导。

2. 计算（$u_{\boldsymbol{\theta}}^{-}$ *1.8*）的解，以及由(*1.7*)定义的 Dirichlet-to-Neumann 系数，按照与Step1完全相同的步骤来计算（但独立于步骤1）。

3. 最后，求解区间(1.9) 内的$(-a, a)$内部问题，并利用（1.10）以及步骤1和步骤2将解延拓至整个区域。

为方便起见，拟周期阶数设为 $n = 2$。算法最具原创性的部分是步骤（*1.a*）–（*1.d*），本节其余部分将重点讨论这四个步骤的离散化。第5.1 节和5.2 节介绍两种不同方法，它们对应于步骤（*1.a*）的不同离散化选择，而这一选择会影响步骤（*1.b*）和（*1.d*）的实现。步骤（*1.c*）的处理与这一选择无关，将在第5.3节介绍。

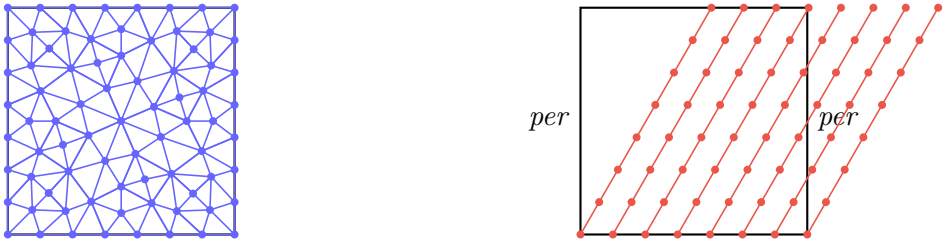


图 7：二维方法的二维网格（左），以及准一维方法的一组一维网格（右）

5.1 完全二维方法

第一种方法的灵感来自椭圆型亥姆霍兹方程的求解（例如参见 [10]），其思路是在周期胞元 $\mathcal{C}_0^\sharp = (0,1)^2$ 的非结构化网格上直接求解局部单元问题（见图 7）。

我们从三角形网格 $\mathscr{T}_h(\mathcal{C}_0^\sharp)$ 开始，该网格覆盖$\mathcal{C}_0^\sharp = (0,1)^2$，网格步长为 $h > 0$。我们假设该网格是周期的，也就是说，可以将边界$y_i = 0$ 上的网格节点与 $y_i = 1$ 上的节点对应起来，其中 $1 \le i \le 2$。特别地，对于 $i = 1$，这一条件使我们能够处理周期边界条件。

现在令 $\mathcal{V}_h(\mathcal{C}_0^\sharp)$ 表示通常的 H^1–相容的 $d > 0$ 阶拉格朗日有限元近似。我们还引入

$$\mathcal{V}_{h,per}(\mathcal{C}_0^\sharp) := \{V \in \mathcal{V}_h(\mathcal{C}_0^\sharp) \ / \ V|_{y_1=0} = V|_{y_1=1}\}$$

作为$H^1_{\boldsymbol{\theta},\ per}(\mathcal{C}_0^\sharp)$的内部逼近。最后，为了近似 $L^2(\Sigma^\sharp_{2,\ 0})$ 和 $L^2(\Sigma^\sharp_{2,\ 1})$，我们考虑以下子空间：

$$\forall\ a \in \{0,1\}, \quad \mathcal{V}_{h,per}(\Sigma^\sharp_{2,a}) = \{V_h|_{\Sigma^\sharp_{2,a}} \ / \ V_h \in \mathcal{V}_{h,per}(\mathcal{C}_0^\sharp)\}.$$

由于$\Sigma_{2,\,0}^{\sharp}$和$\Sigma_{2,\,1}^{\sharp}$上的网格节点可根据$\mathscr{T}_h(\mathcal{C}_0^{\sharp})$的周期性彼此对应，我们也可以作如下对应：$\mathcal{V}_{h,\,per}(\Sigma_{2,\,0}^{\sharp}) \equiv \mathcal{V}_{h,\,per}(\Sigma_{2,\,1}^{\sharp}) \equiv \mathcal{V}_{h,\,per}(0,\,1)$，如同连续情形。设 $N := \dim \mathcal{V}_{h,\,per}(0,\,1)$，并考虑一组基$(\varphi_p)_{1\le p\le N}$。

对于任意数据 $\varphi_h \in \mathcal{V}_{h,\,per}(0,\,1)$，记 $E_h^0(\varphi_h)\, E_h^1(\varphi_h) \in \mathcal{V}_{h,\,per}(\mathcal{C}_0^{\sharp})$ 为在弱意义下定义的局部单胞问题（4.6）–（4.7）离散对应问题的解。实际上，需要计算 $E_h^j(\varphi_p)$，其中$(\varphi_p)_{1\le p\le N}$是$\mathcal{V}_{h,\,per}(0,\,1)$的一组基。

类似于连续局部 DtN 算子的弱表达式（4.10），离散局部 DtN 算子 $\mathcal{T}_h^{jk} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,\,per}(0,\,1))$，$j,\ k = 0,\ 1$，对于任意 $\varphi_h,\ \psi_h \in \mathcal{V}_{h,\,per}(0,\ 1)$ 定义如下：

$$\left\langle \mathcal{T}_h^{jk}\varphi_h,\, \psi_h \right\rangle = \int_{\mathcal{C}_0^{\sharp}} \left[\mu_p\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, E_h^j(\varphi_h)\, D_{\boldsymbol{\theta}}\, \overline{E_h^k(\psi_h)} - \rho_p\, \omega^2\, E_h^j(\varphi_h)\, \overline{E_h^k(\psi_h)} \right].$$

实际上，这些算子表示为 $N \times N$ 矩阵 $\mathbf{T}^{jk}$，其分量由 $\mathbf{T}_{pq}^{jk} = \langle \mathcal{T}_h^{jk}\varphi_q,\ \varphi_p \rangle$给出，其中 $p,\ q \in [\![1,\ N]\!]$。

设 $\varphi_h \in \mathcal{V}_{h,per}(0,1) \subset \mathscr{C}_{per}(\mathbb{R})$ 满足 $\varphi_h(0) = 1$。传播算子 $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,per}(0,1))$ 的计算将在第 5.3 小节中介绍。确定该算子后，半导引问题（3.54）的解可由以下逐单元定义的函数近似：

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N},\quad U_{\boldsymbol{\theta},h}^{+}(\varphi_h)(\cdot + \ell\, \vec{\boldsymbol{e}}_n)|_{\mathcal{C}_0^{\sharp}} = E_h^0(\mathcal{P}_h^{\ell}\, \varphi_h) + E_h^1(\mathcal{P}_h^{\ell+1}\, \varphi_h).$$

最后，半直线问题 3.1 的解可用以下函数近似：

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad u_{\boldsymbol{\theta},h}^{+}(x) = U_{\boldsymbol{\theta},h}^{+}(\varphi)(\boldsymbol{\theta}\, x).$$

5.2 准一维方法

虽然易于实现，但上一节所述的二维方法并未利用方向导数 $D_{\boldsymbol{\theta}}$ 的纤维化性质。然而，周期半导引问题在某种意义上可以看作由一系列一维半直线问题串接而成。这种纤维化结构是本节所述方法的核心。

5.2.1 介绍

对于任意 $s \in \mathbb{R}$，我们考虑一维胞元问题

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu_{s,\boldsymbol{\theta}}\, \dfrac{de_{s,\boldsymbol{\theta}}^{j}}{dx}\right) - \rho_{s,\boldsymbol{\theta}}\, \omega^2\, e_{s,\boldsymbol{\theta}}^{j} = 0, \quad \text{in} \quad (0,\, 1/\theta_2) := I_{\boldsymbol{\theta}}, \\ e_{s,\boldsymbol{\theta}}^{0}(0) = 1 \quad \text{and} \quad e_{s,\boldsymbol{\theta}}^{0}(1/\theta_2) = 0, \\ e_{s,\boldsymbol{\theta}}^{1}(0) = 0 \quad \text{and} \quad e_{s,\boldsymbol{\theta}}^{1}(1/\theta_2) = 1. \end{array} \right. \tag{5.1}$$

然后，类比命题 3.19，很容易证明，局部单胞问题可以分解为一维单元问题，具体如下。

命题 5.1. 对于任意边界数据 φ 属于 $L^2(0,1)$时，局部单胞问题 $E^0(\varphi)$ 和 $E^1(\varphi)$ 的解 (4.6) 为

$$\text{a.e. } \boldsymbol{y} \in \mathcal{C}_0^\sharp, \quad E^j(\varphi)(\boldsymbol{y}) = \widetilde{\varphi}(\boldsymbol{s_\theta}(\boldsymbol{y}) + j\,\theta_1/\theta_2)\; e^j_{\boldsymbol{s_\theta}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\theta}}\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right), \tag{5.2}$$

其中 $e^j_{s,\boldsymbol{\theta}}$ 表示单元问题的解 (5.1)。

命题 5.1 还揭示了局部 DtN 算子的结构。为此，我们引入局部 DtN 函数 $t^{jk}_{\boldsymbol{\theta}}$，其定义于 j, $k = 0$, 1，定义如下:

$$\forall\, s \in \mathbb{R}, \quad t^{jk}_{\boldsymbol{\theta}}(s) = (-1)^{k+1}\theta_2 \left[\mu_{s,\boldsymbol{\theta}}\, \frac{de^j_{s,\boldsymbol{\theta}}}{dx}\right]\left(\frac{j}{\theta_2}\right). \tag{5.3}$$

注意，由于 μ_p 和 ρ_p 的周期性，映射 $s \mapsto e^j_{s,\boldsymbol{\theta}}$ 和 $t^{jk}_{\boldsymbol{\theta}}$ 是 1-周期的。

应用方向导数算子 $D_{\boldsymbol{\theta}}$ 于 (5.2，并利用 $D_{\boldsymbol{\theta}}\, E^j(\varphi)$ 与 $de^j_{s\text{之间}\boldsymbol{\theta}}/dx$ 由 (3.52) 给出的关系，可知由 (4.9) 定义的局部 DtN 算子是加权平移算子，与传播算子相似。

命题 5.2。 算子 T^{jk} 可在 $\varphi \in L^2(0,1)$ 和 $s \in (0,1)$ 上写为

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}^{00}\varphi(s) = t^{00}_{\boldsymbol{\theta}}(s)\;\widetilde{\varphi}(s) && \text{and} \quad \mathcal{T}^{10}\varphi(s) = t^{10}_{\boldsymbol{\theta}}(s)\;\widetilde{\varphi}(s+\theta_1/\theta_2), \\ &\mathcal{T}^{11}\varphi(s) = t^{11}_{\boldsymbol{\theta}}(s-\theta_1/\theta_2)\;\widetilde{\varphi}(s) && \text{and} \quad \mathcal{T}^{01}\varphi(s) = t^{01}_{\boldsymbol{\theta}}(s-\theta_1/\theta_2)\;\widetilde{\varphi}(s-\theta_1/\theta_2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

这里回顾一下，$\widetilde{\varphi}$ 表示 φ 在 $\mathbb{R}$上的周期延拓，其定义见 (3.31)。

最后，半直线问题（3.1）的解$u^+_{\boldsymbol{\theta}}$ 可以直接根据函数 $e^j{}_{s\,\boldsymbol{\theta}}$ 和传播算子计算。事实上，给定一个函数 $\varphi \in \mathscr{C}_{per}(\Sigma^\sharp_{n,0})$ 满足 $\varphi(0) = 1$，在（$\boldsymbol{\theta}\mathbb{R}$ 中沿迹形式上取（4.8）可得

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad u^+_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot + \ell/\theta_2)|_{I_{\boldsymbol{\theta}}} = \widetilde{(\mathcal{P}^\ell\varphi)}(\ell\,\theta_1/\theta_2)\; e^0_{\ell\theta_1/\theta_2,\boldsymbol{\theta}} + \widetilde{(\mathcal{P}^{\ell+1}\varphi)}((\ell+1)\,\theta_1/\theta_2)\; e^1_{\ell\theta_1/\theta_2,\boldsymbol{\theta}}. \tag{5.5}$$

该结果的证明与（4.8）和命题 4.1的证明相似。

表达式（5.2）、（5.4）和（5.5）构成准一维 或 准一维策略的基础，该策略通过逼近解 $e^j{}_{s\,\boldsymbol{\theta}}$ 以及函数 $t^{jk}_{\boldsymbol{\theta}}$，并最终逼近局部 DtN 算子 $\mathcal{T}^{jk}$。随后，通过求解约束黎卡提方程（4.14）计算出传播算子后，即可利用（5.5）逐单元直接构造解 $u^+_{\boldsymbol{\theta}}$。

5.2.2 离散化

准一维方法要求为横向和 $\boldsymbol{\theta}$方向分别设置两个不同的近似空间（见图7）。

横向。我们从一个一维网格 $\mathscr{T}_h(0,1)$ 开始，该网格的网格步长为 $\Sigma_{2,0}^{\sharp} \equiv (0,1)$。令 $\mathcal{V}_h(0,1)$ 为通过 $H^1(0,1)$ 上 $d>0$ 阶拉格朗日有限元构成的近似空间。我们将通常的节点基记为 $(\varphi_p)_{0\le p\le N}$，它特别满足 $\varphi_p(s_q)=\delta_{p,q}$；其中 $(s_p)_{0\le p\le N}$ 是一些点（包括网格顶点），满足 $0=s_0<\cdots<s_N=1$。那么，$L^2(0,1)$ 的一个内部逼近为

$$\mathcal{V}_{h,per}(0,1) := \mathrm{Span}\{\varphi_0+\varphi_N, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}\},$$

其选取方式满足 $\mathcal{V}_{h,per}(0,1) \subset \mathscr{C}_{per}(0,1)$。特别地，根据基函数的定义 φ_i，可得以下分解

$$\forall \varphi_h \in \mathcal{V}_{h,per}(0,1), \quad \varphi_h = \sum_{p=0}^{N} \varphi_h(s_p)\,\varphi_p, \quad \text{with} \quad \varphi_h(s_0)=\varphi_h(s_N). \tag{5.6}$$

***θ*–定向方向**。令 $\mathscr{T}_{h_\theta}(I_\theta)$ 表示线段 I_θ 的网格，网格步长为$h_\theta>0$。将 $\mathcal{V}_{h_\theta}(I_\theta)$ 设为通过 $H^1(I_\theta)$ 的 $d_\theta>0$ 阶拉格朗日有限元构造的近似空间，并定义 $\mathcal{V}_{h_\theta,0}(I_\theta) := \mathcal{V}_{h_\theta}(I_\theta) \cap H_0^1(I_\theta)$。

对 $e^0_{s,\theta}$ 和 $e^1_{s,\theta}$ 的近似可视为一个两步过程。首先，对于任意 $s\in\mathbb{R}$，考虑与（5.1）相关联的离散变分公式的解e^j_{s,θ,h_θ}。

在实际中，解 e^j_{s,θ,h_θ} 只能针对有限个 $s\in(0,1)$ 进行计算。这时就需要对横向进行离散化：给定 $x\in I_\theta$，函数 $s\mapsto e^j_{s,\theta,h_\theta}(x)$ 可在 $\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$ 中进行插值。

插值过程只需针对 $s=s_p, p\in[\![0,N-1]\!]$计算离散解 e^j_{s,θ,h_θ}。然后，利用分解公式（5.6），$e^j_{s,\theta}$ 可近似为

$$\forall\,(s,x)\in(0,1)\times I_\theta, \quad e^j_{s,\theta,\underline{h}}(x) = \sum_{p=0}^{N} e^j_{s_p,\theta,h_\theta}(x)\,\varphi_p(s), \quad \text{with} \quad \underline{h}=(h,h_\theta). \tag{5.7}$$

其中 $e^j_{0,\theta,h_\theta} = e^j_{1,\theta,h_\theta}$（因为 $e^j_{s,\theta}$ 关于 s 是 1-周期的）。

由解 $e^j_{s,\theta,h}$，我们引入离散局部 DtN 函数

$$\forall\, s\in(0,1), \quad t^{jk}_{\theta,\underline{h}}(s) = \theta_n \int_0^{1/\theta_n} \Big(\mu_{s,\theta}\,\frac{de^j_{s,\theta,\underline{h}}}{dx}\,\overline{\frac{de^k_{s,\theta,h}}{dx}} - \rho_{s,\theta}\,\omega^2\, e^j_{s,\theta,h}\,\overline{e^k_{s,\theta,\underline{h}}}\Big),$$

这些函数的构造受局部 DtN 函数 t^{jk}_{θ} 的弱表达式（5.3）启发。然后，类比（5.4），对于任意 $\varphi_h,\psi_h\in\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$，我们定义离散 DtN 算子 $\mathcal{T}^{jk}_{\underline{h}}\in\mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$ 如下：

$$\left\langle \mathcal{T}^{jk}_{\underline{h}}\varphi_h,\ \psi_h\right\rangle = \int_0^1 t^{jk}_{\theta,\underline{h}}(s-k\,\theta_1/\theta_2)\,\varphi_h(s+(j-k)\,\theta_1/\theta_2)\,\overline{\psi_h(s)}\,ds. \tag{5.8}$$

当这些离散 DtN 算子针对 φ_h、ψ_h 作为$\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$ 的基函数计算时，可表示为 $N\times N$维矩阵，其中 $N=\dim\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$。这些积分

在（5.8）中出现的积分在实际计算中使用专门设计的求积规则进行求值，其具体说明在此省略。

最后，设 $\varphi_h \in \mathcal{V}_{h,per}(0,1) \subset \mathscr{C}_{per}(\mathbb{R})$ 满足 $\varphi_h(0) = 1$。那么利用 (5.5)，半直线问题 (3.1) 的解可由以下逐单元定义的函数近似

$$\forall\, \ell \in \mathbb{N}, \quad u^{+}_{\boldsymbol{\theta},\underline{\boldsymbol{h}}}(\cdot + \ell/\theta_2)|_{I_{\boldsymbol{\theta}}} = (\mathcal{P}^{\ell}_{\underline{\boldsymbol{h}}}\varphi_h)(\ell\,\theta_1/\theta_2)\; e^{0}_{\ell\theta_1/\theta_2,\boldsymbol{\theta},\underline{\boldsymbol{h}}} + (\mathcal{P}^{\ell+1}_{\underline{\boldsymbol{h}}}\varphi_h)((\ell+1)\,\theta_1/\theta_2)\; e^{1}_{\ell\theta_1/\theta_2,\boldsymbol{\theta},\underline{\boldsymbol{h}}}.$$

其中 $\mathcal{P}_{\underline{\boldsymbol{h}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,per}(0,1))$ 对应于 $\mathcal{P}$ 的一种适当离散黎卡提近似。该算子的计算将在下一小节讨论。

5.3 传播算子的近似

为了找到传播算子 $\mathcal{P}$ 的一种适当近似 $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,per}(0,1))$，自然的做法是引入离散约束黎卡提方程

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Find } \mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_{h,per}(0,1)) \textit{ such that } \rho(\mathcal{P}_h) < 1 \textit{ and } \mathcal{T}_h(\mathcal{P}_h) = 0, \textit{ where} \\ \qquad \mathcal{T}_h(\mathcal{P}_h) := \mathcal{T}_h^{10}\mathcal{P}_h^2 + (\mathcal{T}_h^{00} + \mathcal{T}_h^{11})\,\mathcal{P}_h + \mathcal{T}_h^{01}, \end{array}\right. \tag{5.9}$$

并且 $(\mathcal{T}_h^{00}, \mathcal{T}_h^{01}, \mathcal{T}_h^{10}, \mathcal{T}_h^{11})$ 由第 5.1 节和第 5.2 节所述方法之一得到。采用与椭圆型亥姆霍兹方程 [10], 相同的论证，可以证明该离散方程存在唯一解。

为了解出 (5.9)，文献 [19] 提出了两种方法：一是谱分解法，二是修正牛顿法。这里我们只介绍谱方法。

谱分解法通过$\mathcal{P}_h$ 的特征对 (λ_i, ψ_i) 来刻画$\mathcal{P}_h$。然而，这样做会引出一个重要问题：$\mathcal{P}_h$ 是否完全由其特征对确定？这等价于要探究$\mathcal{P}_h$ 是否可对角化。$\mathcal{P}_h$ 是否可对角化仍是一个未决问题，但为简化起见，以下我们假设答案是肯定的，即

$$\text{The family of eigenfunctions } (\psi_i)_{1\le i\le N} \text{ forms a basis of } \mathcal{V}_{h,per}(0,1).$$

在实践中，我们遇到的情况始终如此。此外，若这一假设不成立，仍然可以调整该方法，并通过若尔当分解恢复$\mathcal{P}_h$ 。（更多详情请参见 [10,第 2.3.2 节3] 。）

谱方法依据第 4.4 节给出的结果，这些结果对于离散方程仍然成立。特别地，类比命题 4.7，$(\lambda_h, \psi_h) \in \mathbb{C} \times \mathcal{V}_{h,per}(0,1)$ 是$\mathcal{P}_h$ 的一个特征对，当且仅当它满足

$$\mathcal{T}_h(\lambda_h)\,\psi_h = 0, \quad \text{with} \quad \psi_h \neq 0 \quad \text{and} \quad |\lambda_h| < 1.$$

求解黎卡提方程因此归结为求解一个二次特征值问题：

$$\left|\begin{array}{l} \textit{Find } (\lambda_h, \psi_h) \in \mathbb{C} \times \mathcal{V}_{h,per}(0,1) \textit{ such that } \psi_h \neq 0,\ |\lambda_h| < 1 \textit{ and} \\ \qquad \lambda_h^2\,\mathcal{T}_h^{10}\psi_h + \lambda_h\,(\mathcal{T}_h^{00} + \mathcal{T}_h^{11})\psi_h + \mathcal{T}_h^{01}\psi_h = 0. \end{array}\right. \tag{5.10}$$

如果令 $N=$维数 $\mathcal{V}_{h,per}(0,1)$，那么 (5.10) 可化为一个 $2N\times 2N$线性特征值问题，从而得到 $2N$ 特征值。为了选出传播算子的 N 特征值，我们需要一个判据。为此请注意，采用二维或准一维方法时，局部 DtN 算子的性质（命题 4.2）在离散算子 $\mathcal{T}_h^{jk}$ 中仍然保持不变。因此，命题 4.9 有如下离散形式：

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_h(\lambda_h)\neq\{0\}\quad\Longleftrightarrow\quad\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_h(1/\lambda_h)\neq\{0\}.$$

因此，正如备注 4.10中所预期的那样，方程（5.10）的解可以成对分组为 λ_h、$1/\lambda_h$），其中 $0<|\lambda_h|<1$。因此，为了计算 $\mathcal{P}_h$，可以求解（5.10）（例如使用线性化技术），并选择满足 N 特征对 （λ_h、ψ_h）的 $|\lambda_h|<1$。

5.4 Dirichlet-to-Neumann 系数

最后，考虑一个函数 $\varphi_h\in\mathcal{V}_{h,\ per}(0,1)\subset\mathscr{C}_{per}$（$\mathbb{R}$），其满足 $\varphi_h(0)=1$。然后，类比（4.16），并遵循命题4.5的思路，我们如下定义离散 DtN 算子和离散 DtN 系数：

$$\Lambda_h=\mathcal{T}_h^{10}\mathcal{P}_h+\mathcal{T}_h^{00}\quad\text{and}\quad\lambda_h^+=\frac{(\Lambda_h\varphi_h)(0)}{\theta_2},$$

其中 $\mathcal{T}_h^{10}$和 $\mathcal{T}_h^{00}$通过第 5.1 节和第 5.2节中介绍的方法之一计算得到，且 $\mathcal{P}_h$ 是离散黎卡提方程（5.9）的解。

5.5 数值结果

我们给出一些数值结果，以验证该方法、展示其效率，并在拟周期性阶数设为 $n=2$ 时比较多维方法与准一维方法。模拟将采用周期系数 μ_p 和 ρ_p，它们定义在 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)\in\mathrm{R}^2$ 上，具体为

$$\mu_p(\boldsymbol{y})=1.5+\cos(2\pi y_1)\,\cos(2\pi y_2)\quad\text{and}\quad\rho_p(\boldsymbol{y})=1.5+0.5\,\sin(2\pi y_1)+0.5\,\sin(2\pi y_2).$$

我们令 $\boldsymbol{\theta}=(\cos\pi/3,\sin\ \pi/3)$。由于比值 $\theta_2/\theta_1=\sqrt{3}$是无理数，$\boldsymbol{\theta}$是一个无理向量。对于 $a=1$，源项 f 是截断函数

$$\forall\,x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\exp\Big(100\,(1-1/(1-x^2))\Big)\ \chi_{(-1,1)},$$

以及局部扰动 μ_i 和 ρ_i 定义为分段常数，因此系数μ 和 ρ 模型问题（1.1）如图8所示。

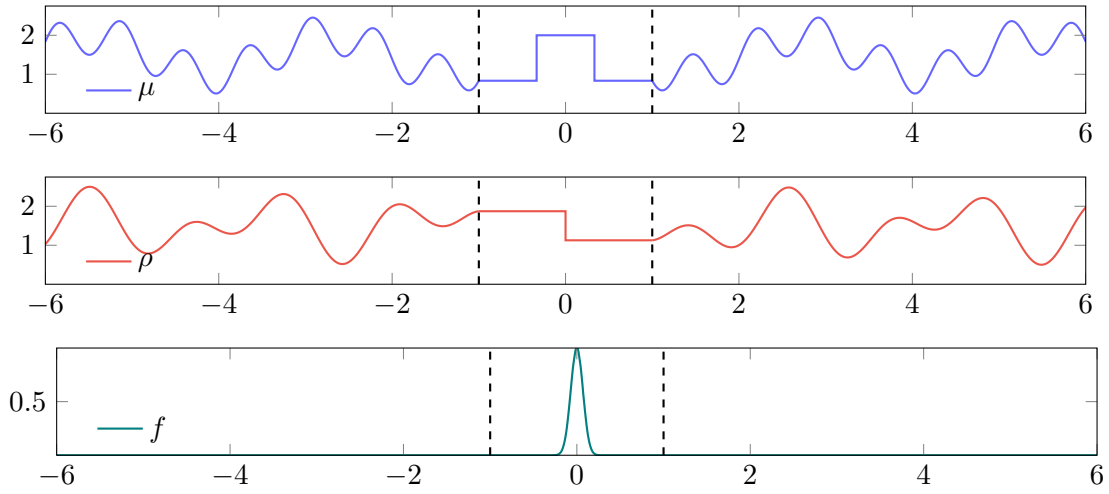


图 8：局部扰动后的准周期系数 μ 和 ρ，以及源项 f。

5.5.1 半直线解与半导引解

模型问题（1.1）通过求解半直线问题（1.8）以及计算 DtN 系数 $\lambda^{\pm}$来求解。本部分仅介绍问题（3.1）的数值求解结果，因为定义在 $(-\infty,\ -a)$ 上的问题会得到相同的总体结果。

误差分析 为验证该方法，我们针对 $L>0$ 引入唯一的函数$u^{+}_{\theta,\,L}$，它属于 $H^1(0,\ L)$，并在截断区域 $(0,\ L)$ 上满足问题 (3.1)，其中 $u^{+}_{\theta,\,L}(L)=0$。类似地，定义 $\Omega_L:=(0,\ 1)^{n-1}\times(0,\ L)$，对于任意 $\varphi\in L^2(\Sigma^{\sharp}_{n,\,0})$，令 $U^{+}_{\theta,\,L}(\varphi)\in H^1_{\theta}(\Omega_L)$ 表示唯一的函数，该函数在 Ω_L 上满足 (3.54)，其中 $U^{+}_{\theta,\,L}(\varphi)|_{y_2=L}=0$。

在存在吸收的情况下，解 u^{+}_{θ} 和 $U^{+}_{\theta}(\varphi)$ 在无穷远处指数衰减（见 (3.58) 和 (4.4)），通过研究 $u^{+}_{\theta,\,L}-u^{+}_{\theta}$和 $U^{+}_{\theta,\,L}(\varphi)-U^{+}_{\theta}(\varphi)$所满足的问题，可以如 [11] 中所示证明，存在常数 $\alpha,\ c>0$，使得对任意 $L>0$,

$$\begin{aligned}\|u^{+}_{\theta,L}-u^{+}_{\theta}\|_{H^1(0,L)}&\le c\,e^{-\alpha\,\mathfrak{Im}\,\omega L}\,\|u^{+}_{\theta}\|_{H^1(0,L)}\\ \|U^{+}_{\theta,L}(\varphi)-U^{+}_{\theta}(\varphi)\|_{H^1_{\theta}(\Omega_L)}&\le c\,e^{-\alpha\,\mathfrak{Im}\,\omega L}\,\|U^{+}_{\theta}(\varphi)\|_{H^1_{\theta}(\Omega_L)}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

满足 $\alpha=\sqrt{\rho_-/\mu_+}$。特别是，如果 L 选得足够大，那么 $u^{+}_{\theta,\,L}$ 且 $U^{+}_{\theta,\,L}(\varphi)$ 可视为 u^{+}_{θ}和 $U^{+}_{\theta}(\varphi)$的适当近似，因此可作为参考解。在接下来的结果中，为了使 (5.11) 中的截断误差相对于数值方法引入的误差可以忽略，我们选择 L 使得

$$\exp\big(-\sqrt{\rho_-/\mu_+}\;\mathfrak{Im}\,\omega\,L\big)\le 10^{-10}.\tag{5.12}$$

相应的解 $u^{+}_{\theta,\,L}$ 和 $U^{+}_{\theta,\,L}(\varphi)$ 分别记为 u^{+}_{ref} 和 $U^{+}_{ref}(\varphi)$，通过 $\mathbb{P}^1$ 拉格朗日有限元计算，网格步长为 $h=5\times10^{-4}$。

以下固定边界数据为 $\varphi = 1$，并在 $U_{\boldsymbol{\theta}}^{+}$和 U_{ref}^{+}的记号中省略。此外，我们仅绘制对应于 1D 解的相对误差，因为 2D 解的误差表现相似。在图 9中，相对误差

$$\varepsilon(u_{\boldsymbol{\theta}}^{+}) := \frac{\|u_{\boldsymbol{\theta},h}^{+} - u_{ref}^{+}\|_{H^1(0,4/\theta_2)}}{\|u_{ref}^{+}\|_{H^1(0,4/\theta_2)}} \tag{5.13}$$

相对于网格步长 h表示，适用于二维方法和准一维方法（准一维方法中取 $h_{\boldsymbol{\theta}} = h$ ）。解采用一次拉格朗日有限元计算。

可以看出，误差至少会随着 h 趋于 0，正如 P^1 拉格朗日有限元所预期的那样。然而，对于准一维方法， $\varepsilon(u_{\boldsymbol{\theta}}^{+})$的变化规律为 h^2。这是一个特殊的超收敛现象，这可能是因为实践中使用准一维方法求解的问题都是一维问题。还要注意的是，通常准一维方法似乎比二维方法更精确。

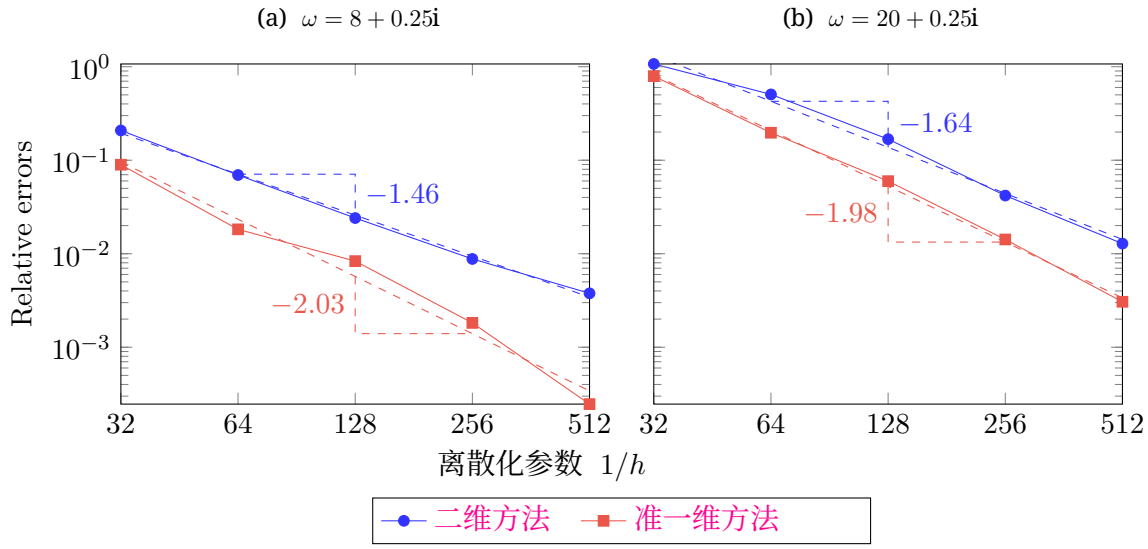


图 9：不同 ω取值下半直线解的 H^1 范数相对误差。

对于固定的网格步长，相对误差会随着实频率 $\mathfrak{Re}\,\omega$的增大而增大。这是亥姆霍兹方程一个众所周知的特性：由于 $\mathfrak{Re}\,\omega$ 表示时谐波的空间频率，因此必须调整离散化参数 h ，以考虑它们的振荡。

半导引解的表示不同取值的半导引解如图 10 所示，其中 ω，当 $\varphi = 1$。

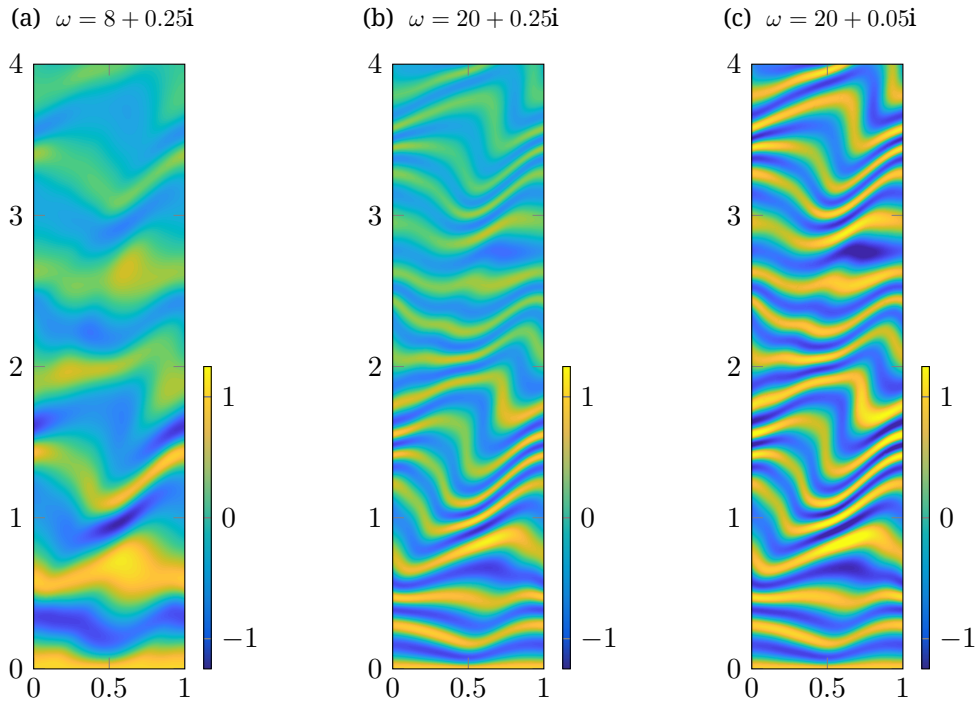


图10：使用准一维方法、P^1 拉格朗日有限元和 $h = 2 \times 10^{-3}$计算得到的半导引解的实部，以及 ω 的不同取值。

对边界数据的依赖性本部分旨在考察半直线解和半导引解对边界数据 φ的依赖性。为此，我们选择了三组不同的数据：

$$\varphi_1(s) = 1, \quad \varphi_2(s) = \cos(2\pi s), \quad \text{and} \quad \varphi_3(s) = 1 - \mathbb{1}_{[1/3,2/3]}(s). \tag{5.14}$$

我们设定 $\omega = 8 + 0.25\mathrm{i}$，并展示采用准一维方法得到的结果；已知二维方法得出相同结论。计算采用 P^1拉格朗日有限元，网格步长为 $h = h_{\boldsymbol{\theta}} = 2 \times 10^{-3}$。

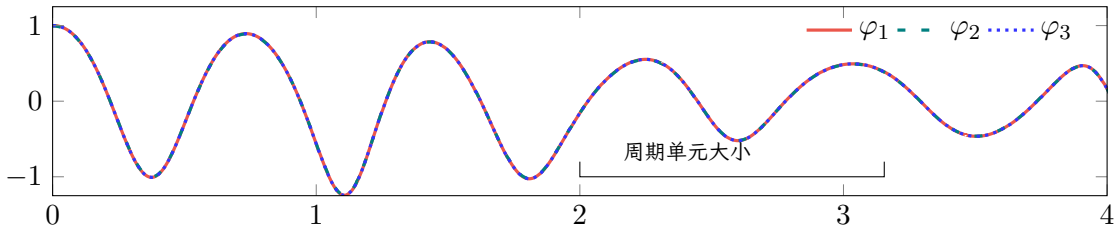


图11：使用准一维方法、P^1 拉格朗日有限元和 $h = 2 \times 10^{-3}$计算得到的半直线解的实部，以及 φ 的不同取值。

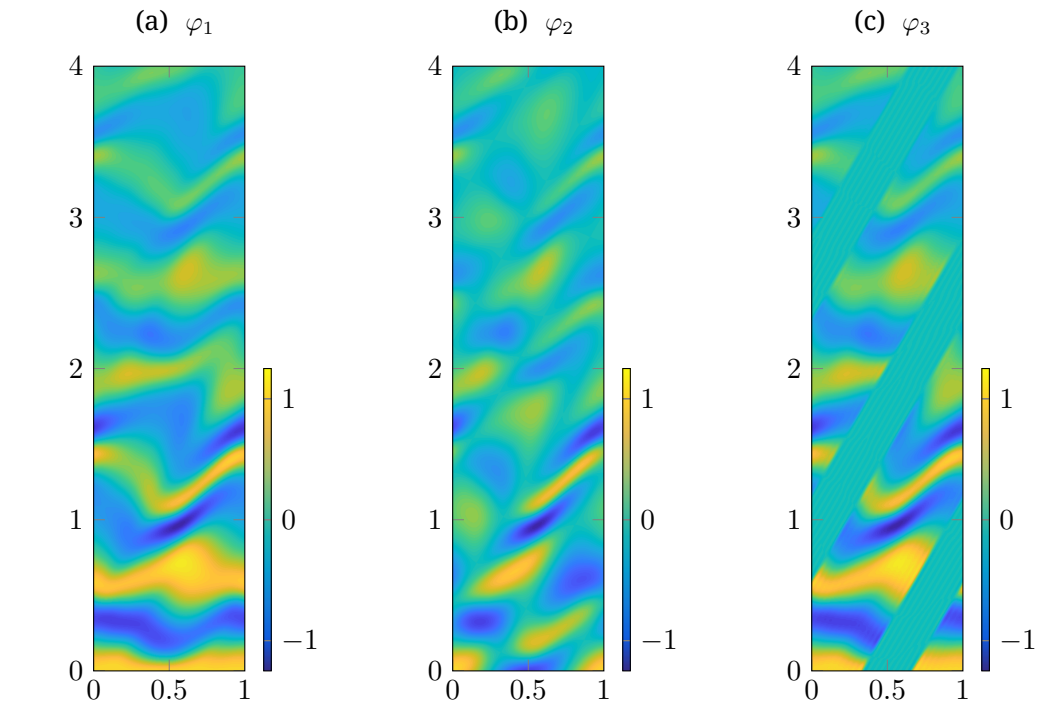
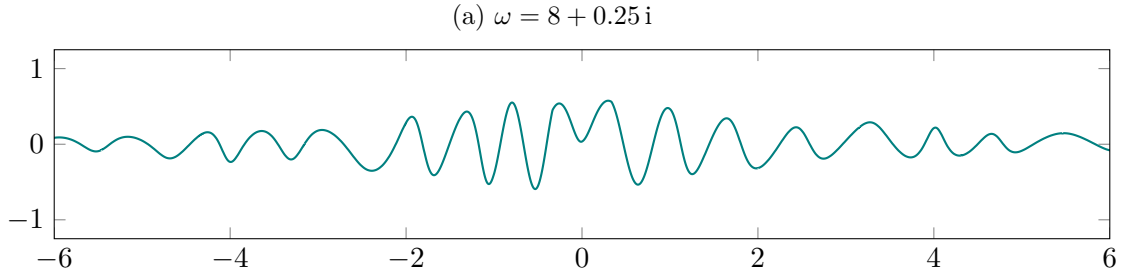


图12：采用准一维方法、使用 P^1 拉格朗日有限元和 $h = 2 \times 10^{-3}$ 计算得到的半导引解的实部，以及 φ 的不同取值下的结果。

正如预期的那样，图 11 和 12a–12c 所示，半导引解的形态会随边界数据发生显著变化，而半直线解看起来保持不变。

5.5.2 整条直线问题

半直线问题的解 $u_{\theta}^{\pm}$（1.8）可用于计算 DtN 系数$\lambda^{\pm}$，求解（1.9），然后利用（ u 1.10）计算问题（1.1）的解。回顾一下，系数 μ、 ρ以及源项 f 如图8所示。（1.1）的解如图13 所示，对应 ω的不同取值。



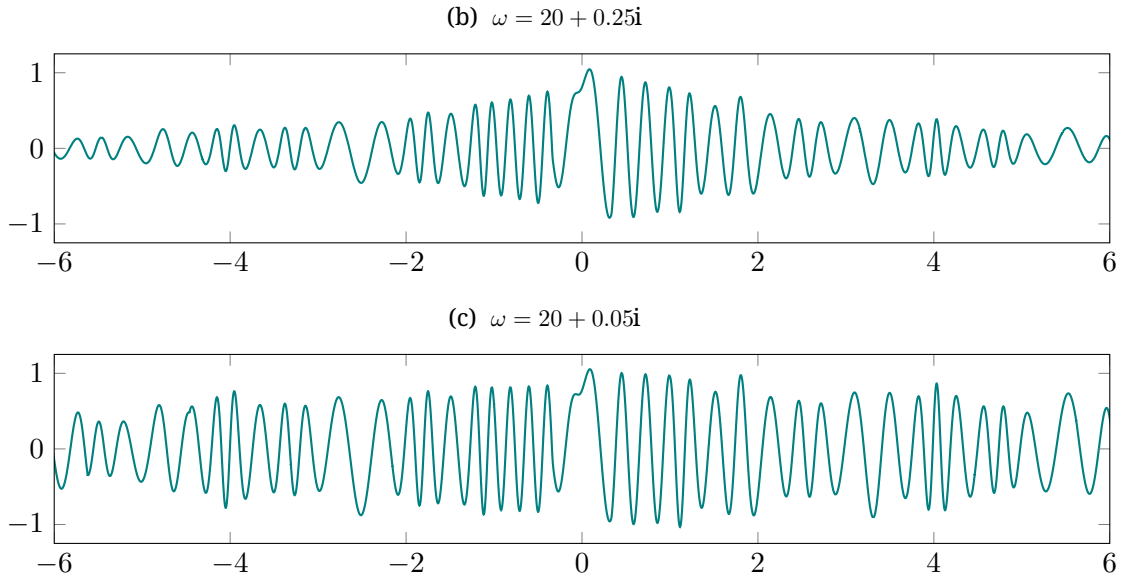


图 13：使用准一维方法计算的解（1.1）的实部，其中$\mathbb{P}^1$拉格朗日有限元和 $h = 2 \times 10^{-3}$，以及不同取值的 ω。

5.5.3 关于吸收依赖性的讨论

我们回到问题（3.1）的数值求解，并研究2D 方法和准一维方法的收敛性随吸收系数的变化，尤其是当其趋于0时。与第5.5.1节一样，采用1次拉格朗日有限元计算解。相对误差 $\varepsilon(u_\theta^+)$ 按（5.13）定义，其结果如图14 所示，涵盖2D 方法和准一维方法，以及 $\mathfrak{Im}\,\omega$的不同取值。

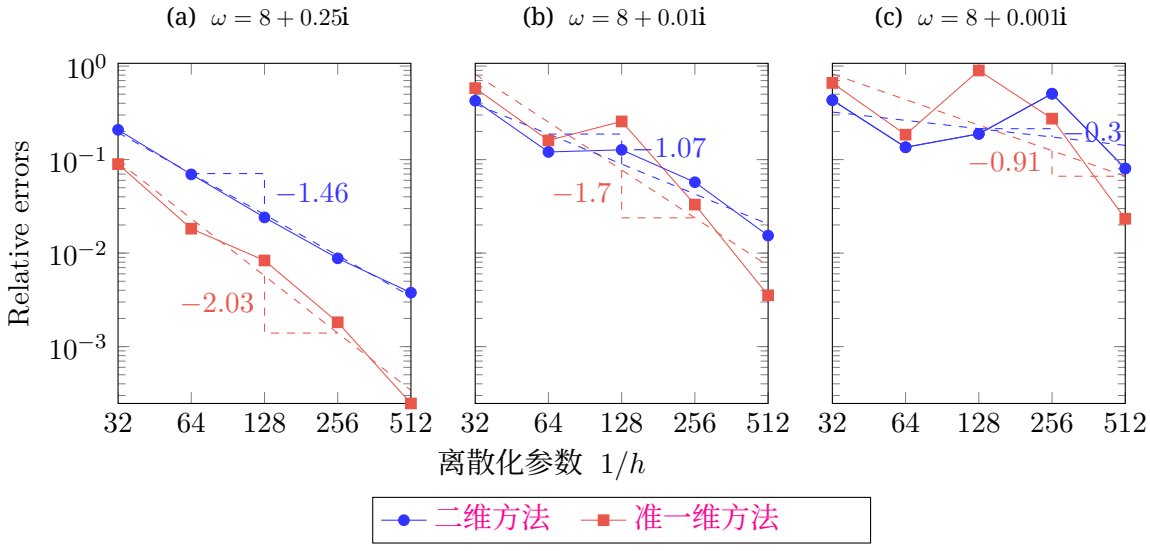


图 14：不同 ω 值下半直线解的 H^1 范数相对误差。

如图 14 所示，误差会随着 $\Im\mathrm{m}\,\omega$而增大。这意味着吸收减弱时，数值方法的效率会降低。这个问题与 $\Im\mathrm{m}\,\omega = 0$时带狄利克雷边界条件的局部单胞问题的适定性密切相关。事实上，对于椭圆型亥姆霍兹方程，已知（例如参见 [10, 第 3.2.1 节。1] ），除了一组可数的频率外，局部单胞问题都是适定的；这组频率对应于相关微分算子的特征值。然而，在我们的情形中，由于微分算子的主部不是椭圆的，它还有连续谱。可以证明，当 μ_p 和 ρ_p 不是常数时，局部单胞问题仅在一个有界的频率集合内适定（该集合甚至可能为空）。避免这一问题的另一种方法是使用罗宾到罗宾算子代替 Dirichlet-to-Neumann 算子，这需要求解带罗宾边界条件的适定局部单胞问题，正如 [12] 对周期介质所采用的做法。我们将在即将发表的一篇论文中，将这一方法用于准周期介质。

5.5.4 关于传播算子的谱近似

如第 5.3小节所述，离散传播算子$\mathcal{P}_h$ 是通过其特征对计算得到的。本节将$\mathcal{P}_h$ 的特征值与精确传播算子的谱进行比较。根据命题4.11，该谱是半径为

$$M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}}) = \exp\Big(\int_0^1 \log|p_{\boldsymbol{\theta}}(s)|\,ds\Big), \quad \text{with} \quad p_{\boldsymbol{\theta}}(s) = u^+_{s-\theta_1/\theta_2,\boldsymbol{\theta}}(1/\sin\theta_2).$$

为了计算这个半径，$u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta},\,L}$ 由唯一满足截断区域 $(0,\ L)$ 上 (3.57) 的函数 $u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta},\,L}$ 近似，其中 $u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta},\,L}(L) = 0$。可以得到与 (5.11) 类似的估计；若 L 选得足够大（例如，若 L 满足 (5.12)），则可将 $u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta},\,L}$ 用作参考解。实际计算中，会针对多个 s计算 $u^+_{s,\,\boldsymbol{\theta},\,L}$，最后使用矩形求积公式计算定义 $M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})$ 的积分。

图 $\mathcal{P}_h$和 $\mathcal{P}$的谱见图 16，其中 $\omega = 8 + 0.25\,\mathrm{i}$，并采用不同的离散化参数 h （其中 $h_{\boldsymbol{\theta}} = h$ 对应准一维方法）。图 15 显示了 N_h 与 $\mathcal{P}_h$ 的特征值中与 5% 以内的 $\sigma(\mathcal{P})$相近的特征值个数，即

$$N_h = \#\Big\{\lambda_h \in \sigma(\mathcal{P}_h) \ \Big/ \ \Big|\frac{|\lambda_h| - M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})}{M_{\log}(p_{\boldsymbol{\theta}})}\Big| \le 5\%\Big\}. \tag{5.15}$$

在图15中可以看到 N_h 会随 $1/h$增大，这意味着$\mathcal{P}_h$ 的特征值越来越接近 σ（$\mathcal{P}$），当 h 减小时。换言之，更精细的离散化能更好地近似谱。这类特征值的数量 N_h 似乎也随 $1/h$ 线性增加（准一维方法中，除去一个子列）。最后请注意， N_h 准一维方法中的该值高于二维方法。

如图16 所示，$\mathcal{P}_h$ 的特征值全部包含在半径为 ρ（$\mathcal{P}$）的圆盘内，但仍可观察到一些谱污染。当近似一个既非紧又非自伴的算子的谱时，这是一种经典现象。然而，值得注意的是，所用方法不同，谱污染的表现也截然不同。

一方面，采用二维方法得到的特征值趋向于聚集在 0 处。对此现象一种可能的解释是，在二维网格上求解局部单胞问题时，没有考虑其方向结构。由于特征值的位置

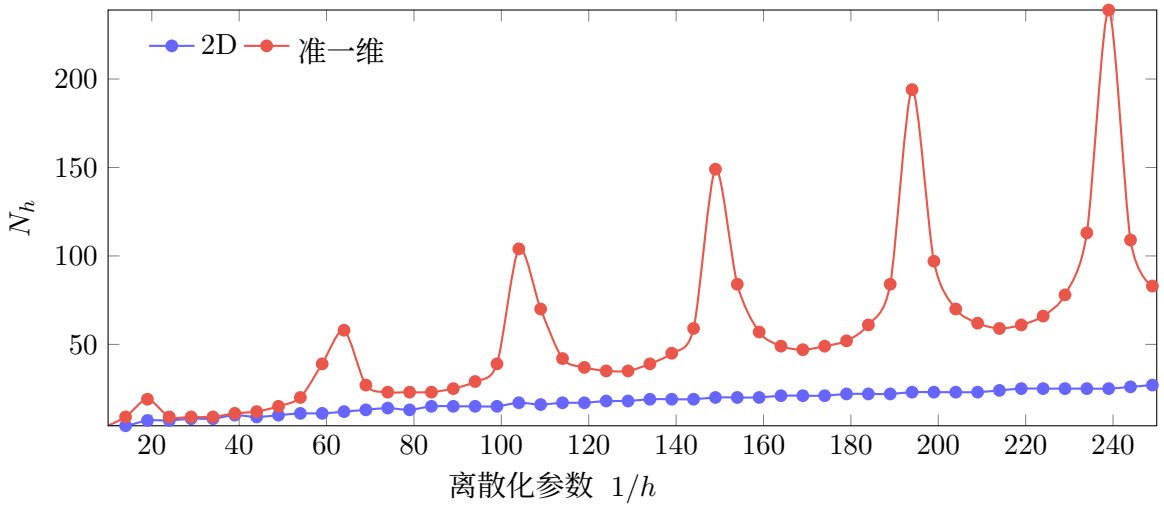


图 15：与 h 相比，距离$\mathcal{P}_h$ 的特征值数中，接近 $\sigma(\mathcal{P})$ 5% 以内的特征值数。

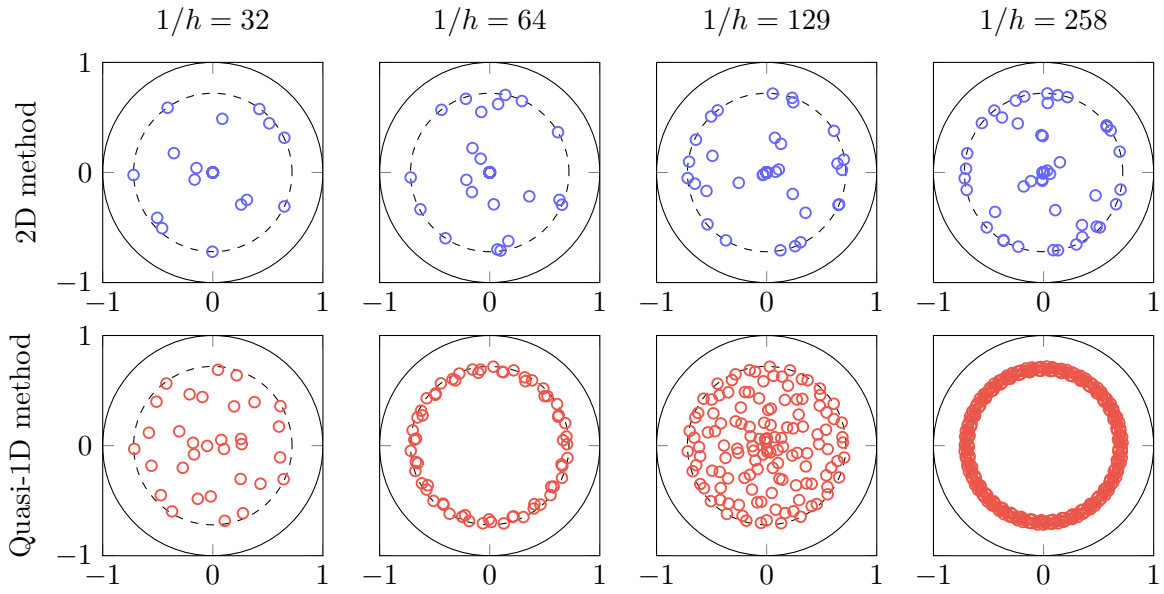


图16：离散传播算子的特征值（圆形标记）与精确传播算子的谱（虚线圆）对比，适用于 $\omega = 8 + 0.25\mathrm{i}$ 以及不同的离散化参数取值。

的 $\mathcal{P}_h$ 与椭圆情形下得到的结果相似，在该情形中$\mathcal{P}$ 是紧算子（见 [19,定理 3。1]），我们认为，二维方法通过引入相应微分算子的椭圆（离散）近似，在某种程度上使半导引问题（3.54）正则化。

另一方面，采用准一维方法时，$\mathcal{P}_h$ 的谱会随着离散化参数 h 趋于 0而“振荡”。这一现象与 $\mathcal{P}$ 作为加权平移算子的特殊性质有关。我们强烈怀疑，可以抽取一个子列 $(\mathcal{P}_{h'})$ ，使其谱收敛到 $\sigma(\mathcal{P})$ ，其精确定义有待给出；图 15中的峰值也暗示了这一点。目前正在开展相关研究，以检验这一假设并构造这样的子列。

通过这两种方法进行数值观察发现，与伪特征值相关联的特征函数是高度振荡的函数，离散化对其近似效果很差；而半导引解在这些特征函数上的分量却非常小。这或许可以解释为何谱污染不会对半导引解和半直线解的近似产生明显影响，图9中的误差似乎也印证了这一点。

6 展望与正在开展的工作

本文提出了一种数值方法，用于求解一维无界准周期介质中的亥姆霍兹方程。借助吸收的存在，我们证明可以将该方程提升为一个高维问题，进而通过狄利克雷到诺伊曼方法求解。对于离散化，我们介绍了一种多维方法，以及一种所谓的准一维方法。数值模拟表明，只要存在吸收，这两种方法都能对解给出合适的近似。然而，准一维方法比二维方法更有效，因为它考虑了相关问题中的各向异性。

所提出的方法开启了诸多研究方向，也引出了许多目前仍在研究的问题。例如，如何高效地近似传播算子的谱，便值得探讨，尽管谱污染似乎不会对整体方法的效率产生重大影响。另一个重要的扩展方向涉及吸收趋于0的情形。这一扩展将在后续论文中介绍，其中将如第5.5.1节所述，以罗宾-罗宾方法取代 DtN 方法，并寻找一种刻画传播算子的方法，因为此时传播算子的定义不再唯一。

最后，与本文所介绍的方法相似的一种方法，可用于研究波在存在二维周期半空间且界面不沿任何周期方向时的传播，也可用于研究波在存在两个具有不可公度周期的二维周期半空间时的传播。

参考文献

[1] Shmuel Agmon。《薛定谔算子的谱性质与散射理论》。载于：比萨高等师范学校科学部年刊2.2（1975），第151–218页。[2] Anatolij Antonevich。线性泛函方程：算子方法。第83卷。Birkhäuser

，

2012年.[3] Abram Samoïlovitch Besicovitch。《几乎周期函数》。1932年，第891–921页。[4] Xavier Blanc、Claude Le Bris 和 Pierre-Louis Lions。“不同尺度椭圆问题的局部剖面：周期结构中的缺陷及其间的界面”。载于：《偏微分方程通讯》（2015年8月）。doi: 10.1080/03605302.2015.1043464。url: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01143193。[5] Harald Bohr。《几乎周期函数》（德文译本）。1947年。[6] Guy Bouchitté、Sébastien Guenneau 和 Frédéric Zolla。“介电光子准晶体的均匀化”。载于：《多尺度建模与仿真：SIAM 跨学科期刊》8.5（2010年11月），第1862–1881页。doi: 10.1137/090770333。url: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00544537。[7] Jean-Michel Combes 和 Lyn Carey Thomas。“多粒子薛定谔算子特征函数的渐近行为”。载于：《数学物理通讯》34.4（1973年），第251–270页。[8] Matthias Ehrhardt、Houde Han 和 Chunxiong Zheng。《周期结构中的波数值模拟》。WIAS，2008年。[9] Daniel Eidus。“两个无界介质衍射问题的极限吸收原理与振幅原理”。载于：《数学物理通讯》107.1（1986年），第29–38页。[10] Sonia Fliss。“局部扰动无限周期介质中的波传播问题的数学与数值分析”。博士论文。巴黎综合理工学院，2009年5月。url: https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00005464。[11] Sonia Fliss 和 Laure Giovangigli。“一维弱随机扰动周期介质中的时谐波传播”。载于：《SN 偏微分方程及其应用》1.40（2020年10月）。url: https://hal.inria.fr/hal-02504392。[12] Sonia Fliss、Patrick Joly 和 Jing-Rebecca Li。“含局部扰动的周期介质中波传播的精确边界条件”。（2010年）。[13] Martin Gardner。“数学游戏：丰富铺砌理论的奇异非周期镶嵌”。载于：《科学美国人》236.1（1977年），第110–121页。issn: 00368733, 19467087。url: http://www.jstor.org/stable/24953856。[14] David Gérard-Varet 和 Nader Masmoudi。“ 均匀化与边界层 ”。载于：《数学学报》 209.1 （ 2012 年），第133–178页。[15] David Gérard-Varet 和 Nader Masmoudi。“多边形区域中的均匀化”。载于：《欧洲数学学会杂志》13.5（2011年），第1477–1503页。

[16] 戈弗雷·哈罗德·哈代等。《数论导论》。第6版。牛津大学出版社，2009年。[17] Vu Hoang。“周期半无限波导的极限吸收原理”。载于：SIAM 应用数学杂志71.3（2011年），第791–810页。[18] Patrick Joly。“各向异性 Sobolev 空间中的若干迹定理”。载于：SIAM 数学分析杂志23.3（1992年），第799–819页。[19] Patrick Joly、Jing-Rebecca Li 和 Sonia Fliss。“含局部扰动的周期波导的精确边界条件”。载于：《计算物理通讯》1.6（2006年），第945–973页。[20] Andreas Kirsch 和 Armin Lechleiter。“闭合完整波导或半波导问题中由极限吸收原理导出的辐射条件”。载于：《应用科学中的数学方法》41.10（2018年），第3955–3975页。[21] Lauwerens Kuipers 和 Harald Niederreiter。《序列的均匀分布》。多佛数学丛书。Dover 出版社，2012年。isbn: 9780486149998。[22] Boris Moiseevich Levitan 和 Vasilii Vasilévich Zhikov。《几乎周期函数与微分方程》。剑桥大学出版社，1982年。[23] Yves Meyer。“准晶体、丢番图逼近与代数数”。载于：《超越准晶体》。施普林格，1995年，第3–16页。[24] 罗杰·彭罗斯。“五重拼接：平面非周期镶嵌的一类”。载于：《数学智者》2.1（1979年3月），第32–37页。issn: 0343-6993。[25] Maria Radosz。“周期算子的新极限吸收原理与极限振幅原理”。载于：《应用数学与物理杂志》66.2（2015年），第253–275页。[26] Walter Rudin。《泛函分析》。纯粹与应用数学国际丛书。麦格劳-希尔，1991年。isbn: 9780070542365。[27] Marjorie Senechal。《准晶体与几何》。剑桥大学出版社档案，1996年。[28] Dan Shechtman 等。“具有长程取向有序且无平移对称性的金属相”。载于：《物理评论快报》53（20，1984年11月），第1951–1953页。doi:10.1103/PhysRevLett.53.1951。[29] Roger Temam。“关于分步法的稳定性与收敛性”。载于：《纯粹与应用数学年鉴》79.1（1968年），第191–379页。[30] Niklas Wellander、Sébastien Guenneau 和 Elena Cherkaev。“准周期……的均匀化

ri-

odic structures and 双尺度割切投影收敛”。In:（2019年11月）。[31] Calvin H. Wilcox。“经典物理中波传播问题的波算子与渐近解”。In:《理性力学与分析档案》22.1（1966年），第37–76页。[32] Lijun Yuan 和 Ya Yan Lu。“一种用于周期波导的递归加倍狄利克雷到诺伊曼映射方法”。In:《光波技术杂志》25.11（2007年），第3649–3656页。[33] Ruming Zhang。“周期波导散射问题的数值方法”。In:《数值数学》148.4（2021年），第959–996页。