基于共识的电网分布式主动控制孤岛划分

Francesco Lo Iudice、Ricardo Cardona-Rivera、Antonio Grotta、Marco Coraggio、Mario di Bernardo†

arXiv:2301.01167v1 [eess.SY] 3 Jan 2023

摘要——将电网划分为一组孤岛，可作为恢复遭受极端故障影响的电网区域电力调度的一种解决方案。现有解决方案通常旨在寻找一种电网孤岛划分，使各孤岛的绝对功率不平衡之和最小。这个组合优化问题通常通过离线启发式方法求解。本文提出一种分布式在线算法，使节点能够在孤岛之间迁移，从而让网络自主组织成合适的划分。我们证明，在一组适当假设下，所提出的解决方案得到的划分，其绝对功率不平衡与最优解的差距不超过给定界限。我们通过在 IEEE 118 和 300 基准问题上测试所提出的分区策略，验证了分析结果。

I. 引言

可再生能源和分布式发电（例如，[1]–[3], ）的普及，以及连锁故障可能发生 [4]，使得制定用于管理电网运行的控制策略成为至关重要的问题。值得关注的问题示例包括 [5]–[7], [8], [9]和 [10]–[12]中所报告的问题。

当控制架构无法保障输电网可靠运行时，人们设计了最后手段策略，以确保至少在电网的某些区段内实现电力调度。主动控制孤岛划分 (ICI)策略通过识别电网中能够与网络其余部分隔离并独立运行的区段（或孤岛）来解决这一问题 [13]–[17] 。近年来，主动孤岛也被提议应用于配电网领域，参见 [18] 及其中的参考文献；储能设备和可再生能源发电的存在，使这些电网能够被划分为微电网网络，例如 [19]–[21]。

将电网划分为一组孤岛的问题通常被表述为组合优化问题——例如参见 [19], [22]–[24]——有时也被重新表述为图优化问题 [15]–[17]。这类问题通常难以或低效地通过数值方法求解，因此人们常采用启发式策略来寻求次优解，同时满足所需的计算时限，使网络能够在故障事件发生后稳定下来 [13], [25]–[27]。

本文提出一种不同的分布式方法来解决 ICI 问题，使网络节点能够从一个孤岛迁移到另一个孤岛，从而自主组织成一种划分以尽量减小不同孤岛之间的功率不平衡，并避免大量负荷切除。具体而言，从电网的某种初始划分出发，我们赋予节点在本地估算其所在孤岛及相邻孤岛功率不平衡的能力，以便决定是否迁移到其他孤岛。

该估计策略完全分布式且去中心化，依赖各节点运行一种经过参数化的虚拟一致性动力学，使节点达到的一致性均衡与目标孤岛的功率不平衡成正比。在适当假设下，我们从解析上证明，我们的迁移策略会生成一个分区序列，并在有限时间内收敛至某一配置；该配置的平均绝对功率不平衡与最小值之间的差距不超过某个界。我们通过划分 IEEE 118 和 IEEE 300 测试系统来验证该策略，并将得到的可行分区与文献中先前论文提出的其他分区进行比较。

†通讯作者；电子邮箱：mario.dibernardo@unina.it。Francesco Lo Iudice、Ricardo Cardona-Rivera 和 Mario di Bernardo 任职于意大利那不勒斯 80125 的那不勒斯费德里科二世大学电气工程与信息技术系。Antonio Grotta、Marco Coraggio 和 Mario di Bernardo 也任职于意大利那不勒斯的南方高等学院。

II. 预备知识与问题陈述

符号说明：给定集合 Q，我们用 |Q| 表示其基数；**1** 是维度适当的全 1 列向量。

电网：我们将电网建模为无向连通图 $G = (V,E)$，其中 V 是 $n \in \mathbb{N}_{>0}$电网节点（负荷或发电机）的集合，E 是表示连接这些节点的输电线路的边集合。不失一般性，将 $n_g \in \mathbb{N}_{>0}$ 发电机标记为节点 $1,\dots,n_g$，而将 $n_l \in \mathbb{N}_{>0}$ 负荷标记为节点 $n_g+1,\dots,n$。令 $p_i \in \mathbb{R}$ 表示节点i处产生或消耗的有功功率；若 i 是发电机，则 $p_i > 0$；若 i 是负荷，则 $p_i \le 0$。令 A 为与图 G 关联的（对称）邻接矩阵；其第 (i,j) 个元素 a_{ij} 在 $\{i,j\} \in E$ 时为 1，否则为 0。

孤岛与邻居：我们将 G 中的一个连通子图 $M_l = (V_l,E_l)$ 定义为一个孤岛，其中 $V_l \subseteq V$ 且 $E_l = (V_l \times V_l) \cap E$。给定节点集合 V_l，我们用 $N(V_l)$ 表示 V_l 中节点的邻居集合，即 $N(V_l) := \{i \in V \setminus V_l \mid \exists j \in V_l : \{i,j\} \in E\}$。当且仅当 $N(V_m) \cap V_l \neq \varnothing$ 时，我们称孤岛 M_m 是孤岛 M_l 的邻居。此外，我们用 N_i 表示节点 i的邻居集合。

电网分区：我们称电网被划分为 $n_\mu \in \mathbb{N}_{>0}$ 个孤岛，由子图 M_{l_1}、……、$M_{l_{n_\mu}}$描述，其对应的节点集为 $V_1,\dots,V_{n_\mu}$，若 $\Pi = \{V_1,\dots,V_{n_\mu}\}$ 是 V 的一个划分。此外，若某个孤岛（例如 M_l）中的节点（例如 i）满足 $N_i \cap (V \setminus V_l) \neq \varnothing$，则该节点为边界节点。此外，我们定义由划分 Π 导出的凝聚图 $G^\Pi = (V^\Pi, E^\Pi)$，其中 V^Π 中的节点 l 与 Π 中的 V_l 相关联；当且仅当 $V_l \cap N(V_m) \neq \varnothing$ 时，E^Π 中存在一条边 $\{l, m\}$。

功率不平衡：该孤岛 $\mathcal{M}_l$ 的功率不平衡是

$$P_l \coloneqq \sum_{i\in\mathcal{V}_l} p_i; \tag{1}$$

整体电网的功率不平衡为

$$P_{\text{tot}} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{l=1}^{n_\mu} P_l. \tag{2}$$

式（1）中的功率不平衡与孤岛频率相对于额定值的同步频率偏差有关，而这又与频率稳定性 [9], [28] 有关。事实上，如果发电功率超过负荷需求，频率就会上升，反之亦然。运行频率相对于额定值的变化过大可能会导致故障。

控制问题：我们研究的问题是将电网 G 划分为 $n_\mu \geq 2$ 个微电网，使平均绝对功率不平衡最小，其定义如下：

$$J \coloneqq \frac{1}{n_\mu}\sum_{l=1}^{n_\mu} |P_l|. \tag{3}$$

注意，由于 $\sum_{l=1}^{n_\mu} |P_l| \geq \left|\sum_{l=1}^{n_\mu} P_l\right| = |P_{\text{tot}}|$，因此

$$J \geq J^* \coloneqq \left|\frac{P_{\text{tot}}}{n_\mu}\right|. \tag{4}$$

式（3）中的代价函数已用于以往有关电网分区的研究，例如 [13], [19], [25],，作为衡量电力系统满足负荷需求能力的指标，这也称为充裕度 [29]。

III. 基于共识的划分策略

我们提出一种策略：给定电网初始划分$\Pi(0)$，将其划分为n_μ 个孤岛，利用共识算法使各节点自主形成新的划分，以最小化 J，如式（3）所定义。具体而言，在算法的每一步k 中，一个节点可以在孤岛之间迁移。我们用 $\Pi(k)$表示发生 k 次迁移后的划分；$\mathrm{M}_l(k) = (\mathrm{V}_l(k), \mathrm{E}_l(k))$，$l \in \{1, \ldots\ldots, n_\mu\}$表示对应的孤岛，$P_l(k)$、$l \in \{1, \ldots\ldots, n_\mu\}$表示它们的功率不平衡，$J(k)$表示对应的代价函数值。

我们的策略基于两个基本要素：

1）基于平均共识动态过程的分布式动态估计器，节点可用它来估计其所在孤岛及相邻孤岛的功率不平衡；2）迁移条件，边界节点据此决定是否从所在孤岛迁移到相邻孤岛。

接下来，我们描述上述两个要素。

A. 分布式功率不平衡估计

在任意步骤 k，每个节点，例如 i，都可以通过运行基于共识的估计策略，获得其所属孤岛或与之相邻的孤岛（例如 $\mathrm{M}_l(k) = (\mathrm{V}_l(k), \mathrm{E}_l(k))$）的功率不平衡估计值，例如 $P_l(k)$。

具体而言，我们将辅助图 $\widehat{\mathrm{M}}_l(k) \coloneqq (\mathrm{V}_l(k), \mathrm{E}_l(k))$ 定义为

$$\widehat{\mathcal{V}}_l(k) \coloneqq \begin{cases} \mathcal{V}_l(k) \setminus i, & \text{if } i \in \mathcal{V}_l(k), \\ \mathcal{V}_l(k) \cup i, & \text{if } i \notin \mathcal{V}_l(k), \end{cases} \tag{5}$$

和$\widehat{\mathrm{E}}_l(k) \coloneqq (\mathrm{V}_l(k) \times \mathrm{V}_l(k)) \cap \mathrm{E}$。为估计 $P_l(k)$，节点i 必须触发对以下两个虚拟连续时间一致性动态过程的分布式求解

$$\dot{x}_h(t) = p_h + \sum_{\{j,h\}\in\mathcal{E}_l(k)} (x_j(t) - x_h(t)), \quad \forall h \in \mathcal{V}_l(k), \tag{6a}$$

$$\dot{\widehat{x}}_h(t) = p_h + \sum_{\{j,h\}\in\widehat{\mathcal{E}}_l(k)} (\widehat{x}_j(t) - \widehat{x}_h(t)), \quad \forall h \in \widehat{\mathcal{V}}_l(k), \tag{6b}$$

从零初始条件开始。这里，$x_h(t)$和 $\widehat{x}_h(t)$分别是与每个节点$h \in \mathrm{V}_l(k)$和$\widehat{h} \in \mathrm{V}_l(k)$相关联的虚拟状态。

备注1。为以分布式方式运行一致性动态过程(6)，我们假设虚拟状态 x_h 和 $\widehat{x}_h$ 会广播给所有邻居节点$\mathcal{N}_h \cap \mathcal{V}_l(k)$。

现在，动态过程(6a)可以改写为矩阵形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{p} - L\boldsymbol{x}(t), \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是虚拟状态 x_h的堆叠向量，$\mathbf{p}$ 是功率值 p_h的堆叠向量，而 L 是与 $\mathrm{M}_l(k)$相关联的（对称）拉普拉斯矩阵。回顾一下，$\mathbf{1}^\mathsf{T}$是对称拉普拉斯矩阵 L的一个特征向量，其对应的特征值为 0。为求得式 (7) 的渐近行为，我们在式 (7) 左乘 $\mathbf{1}^\mathsf{T}$，得到对所有时间 t均有：

$$\mathbf{1}^\mathsf{T}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = P_l(k). \tag{8}$$

此外，对式 (7) 求导可得动力系统$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = -L\dot{\boldsymbol{x}}(t)$，其动态过程由 L的谱性质决定，因此

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \in \operatorname{span}(\mathbf{1}). \tag{9}$$

综上，式 (8) 和式 (9) 表明 $\lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{1}\omega_l$，其中

$$\omega_l \coloneqq \frac{P_l(k)}{|\mathcal{V}_l(k)|}, \tag{10}$$

类似地，由式 (6b) 可得 $\lim_{t\to\infty} \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t) = \mathbf{1}\widehat{\omega}_l$，其中

$$\widehat{\omega}_l \coloneqq \frac{1}{|\widehat{\mathcal{V}}_l(k)|}\sum_{j\in\widehat{\mathcal{V}}_l(k)} p_j. \tag{11}$$

利用式（5）和式（11），可将其改写为

$$\widehat{\omega}_l = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{V}_l(k)|-1}\left(P_l(k) - p_i\right), & \text{if } i \in \mathcal{V}_l(k), \\ \frac{1}{|\mathcal{V}_l(k)|+1}\left(P_l(k) + p_i\right), & \text{if } i \notin \mathcal{V}_l(k). \end{cases} \tag{12}$$

然后，可以联立求解 (10) 和 (12)，得到未知量$P_l(k)$ 和 $|\mathrm{V}_l(k)|$：

$$P_l(k) = a_l\omega_l\frac{p_i - \widehat{\omega}_l}{\widehat{\omega}_l - \omega_l}, \tag{13a}$$

$$|\mathcal{V}_l(k)| = a_l\frac{p_i - \widehat{\omega}_l}{\widehat{\omega}_l - \omega_l}, \tag{13b}$$

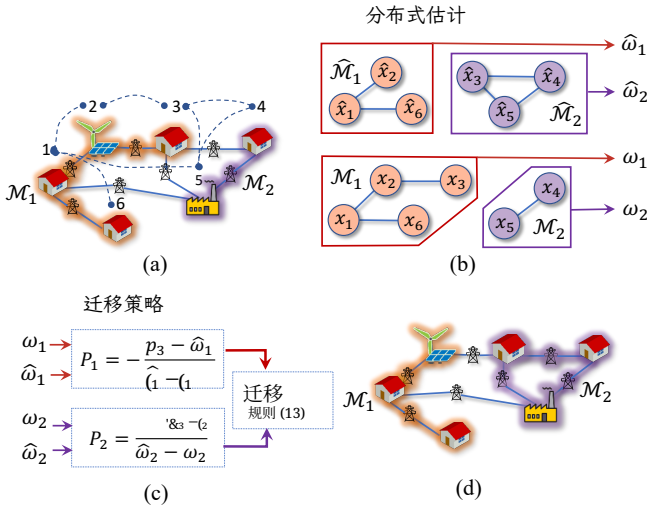


图 1：（a）电力网络的初始划分，虚线表示节点之间的通信链路；其拓扑与电力网络本身相同。（b）边界节点 3 触发两个孤岛 M_1 和 M_2中式（6）虚拟一致性动力学的分布式仿真。（c）使用迁移规则（14a）来决定是否从孤岛 M_1 迁移到 M_2；（d）最终生成新的划分。

with

$$a_l = \begin{cases} -1, & \text{if } i \in \mathcal{V}_l(k), \\ 1, & \text{if } i \notin \mathcal{V}_l(k). \end{cases}$$

根据 (13a)，为估计 $P_l(k)$，节点 i 需要计算ω_l 和 $\widehat{\omega}_l$。为以分布式方式完成此计算，节点 i 通过向 $N_i \cap V_l(k)$ 中的节点广播其虚拟状态 x_i 和 $\widehat{x}_i$，启动一致性动态过程 (6a) 和 (6b) 的分布式计算。随后，这些节点也开始与各自的邻居（位于 $V_l(k)$ 内）共享其虚拟状态，直至 $V_l(k)$ 中的所有节点都加入分布式仿真。请注意，如果每个节点h 都知道其所属孤岛的索引$l \in \{1, ..., n_\mu\}$以及其消耗或发电功率 p_h，则上述过程可通过单跳通信完成。显然，在实际应用中，电网节点应具备充足的计算与通信能力，以便在符合电网要求的时间尺度内运行虚拟一致性动力学。

下文将说明，网络节点如何利用这一估计过程，自行组织成一个电力网络划分，使其功率不平衡量（3）达到最小。

B. 迁移条件

孤岛 $M_m(k)$ 中的一个边界节点（见 § II），例如 i，可以通过评估功率不平衡 $P_l(k)$ 和 $P_m(k)$（通过 § III-A 中的估算策略计算得出），来决定是否迁移到相邻孤岛 $M_l(k)$（见图1）。

具体而言，在步骤 k，当且仅当满足以下条件时，节点 i 才会从 $M_m(k)$ 迁移到 $M_l(k)$：

$$\begin{cases} \min(P_l(k), P_m(k)) < \min(P_l(k+1), P_m(k+1)), & \text{(14a)} \\ \mathcal{M}_m(k+1) \text{ is connected}, & \text{(14b)} \end{cases}$$

with

$$P_l(k+1) = P_l(k) + p_i, \quad \text{(15a)}$$
$$P_m(k+1) = P_m(k) - p_i, \quad \text{(15b)}$$
$$\mathcal{V}_l(k+1) = \mathcal{V}_l(k) \cup i, \quad \text{(15c)}$$
$$\mathcal{V}_m(k+1) = \mathcal{V}_m(k) \setminus \{i\}. \quad \text{(15d)}$$

注 2。 条件（14b）所要求的连通性可通过 *§ III-A* 中的估计策略来确保。事实上，给定一个孤岛 $\mathcal{M}_l(k)$，若存在一个节点 $i \in \mathcal{V}_l(k)$，使得$\mathcal{M}_l(k) \setminus \{i\}$ 不连通，那么其中邻居的虚拟导数 $\dot{\widehat{x}}_h$ 通常会收敛到不同的值，从而发出警告信号。

C. 迁移算法

根据我们的去中心化分区策略，从步骤 $k = 0$ 的某个初始划分开始，每个边界节点都必须通过运行虚拟一致性动力学 (6)，触发对其所属孤岛及其相邻孤岛功率不平衡的分布式估计。随后，边界节点根据这些功率不平衡，利用迁移条件 (14a)，决定是否迁移到相邻孤岛。

为清晰起见，我们以图1所示的示例情形说明这一过程：一个含有 $n = 6$ 个节点的电网最初被划分为 $n_\mu = 2$ 个孤岛，即 $M_1(0)$ 和 $M_2(0)$（图1(a)）。接下来，每个边界节点，例如节点 $3 \in V_1(0)$，都必须决定是否迁移到另一个孤岛 (M_2)。为此，节点 3 通过运行两个形式为 (6) 的虚拟一致性过程，分别涉及属于两个孤岛的所有节点，触发对孤岛 $M_1(0)$ 和 $M_2(0)$ 中功率不平衡 $P_1(0)$ 和$P_2(0)$ 的分布式估计（见图1(b)）。当 (6) 的分布式仿真达到稳态后，节点 3 使用数对 $(\omega_1, \hat{}\omega_1)$ 和 $(\omega_2, \hat{}\omega_2)$ 来估计 $P_1(0)$ 和 $P_2(0)$，然后用它们评估迁移条件 (14a)（图1(c)），以判断是否从 M_1 迁移到 M_2。做出决定后，就会生成新的划分（图1(d)）。

一般而言，我们的策略规定，电网节点应参与其所在孤岛或相邻孤岛的边界节点根据式（6）发起的所有（可能有多个）分布式共识过程，以便估计所关注的功率不平衡。因此，在任何时刻，每个节点都将拥有若干虚拟状态，其数量对应于它需要参与的估计过程数。算法1总结了这些步骤。此外，一旦某个节点成为边界节点（见§ II），就必须触发额外的虚拟动态过程，以决定是否从所在孤岛迁移到相邻孤岛。算法2总结了这一附加过程。

以下引理和定理的证明见第 V 节，它们指出，由规则

算法1： 任意节点h的默认例程。

向邻居节点广播所有虚拟状态
从邻居节点获取虚拟状态
对涉及h的所有仿真执行积分运算 (6)

算法2： 边界节点 $h \in$的附加步骤 $\mathcal{V}_m$.

与 $\mathrm{N}_h \cap \mathbb{V}_m$ 中的节点通信，以触发一个（6）的分布式仿真
对于 $l:\ \mathcal{N}_h \cap \mathcal{V}_l \neq \varnothing$，**执行**
  与 $\mathrm{N}_h \cap \mathbb{V}_l$ 中的节点通信，以触发（6）的分布式仿真
  等待此类仿真达到稳态
  使用（13）估计 P_m 和 P_l，$\forall l:\ \mathrm{N}_h \cap \mathbb{V}_l \neq \varnothing$
  根据 (14a) 决定是否从 M_m 迁移到 M_l

(14a) 控制的迁移过程会生成一个有限的迁移步骤序列 $\{\Pi(k)\}_{k\in\{0,\dots,K\}}$ of $K \in \mathbb{N}$，并给出最终划分的代价 $J(K)$ 与式 (4) 中计算出的最优代价 J^* 之间差值的界。

引理 1. 如果

$$|P_l(k) - P_m(k)| \le \bar{p} \quad \forall l,m : \mathcal{N}(\mathcal{V}_m(k)) \cap \mathcal{V}_l(k) \neq \varnothing, \tag{16}$$

其中 $\bar{p} :=$最大值$_{i\in\mathcal{V}}|p_i|$，则

$$J(k) - J^* \le \frac{2}{n_\mu}\left(\sum_{l=l^*+1}^{n_\mu} p^* + \bar{p}\left(l - \frac{n_\mu+1}{2}\right)\right) - (p^* + |p^*|), \tag{17}$$

with

$$l^* = \left\lfloor -\frac{p^*}{\bar{p}} + \frac{n_\mu+1}{2} \right\rfloor, \tag{18}$$

且 $p^* := P_{tot}/n_\mu$。

定理 III.1. 假设在每一步 k 都存在一个节点i以及孤岛 $\mathcal{M}_l(k)$和 $\mathcal{M}_m(k)$（即三元组 (l,m,i)），使得

$$\begin{cases} i \in \{\mathcal{V}_m(k) \cap \mathcal{N}(\mathcal{V}_l(k))\} \\ \wedge \\ \mathcal{M}_m(k) \setminus i \ \textit{is connected} \end{cases} \tag{19a}$$

and

$$\begin{cases} P_l(k) > P_m(k) \ \wedge \ p_i < 0 \\ \vee \\ P_l(k) < P_m(k) \ \wedge \ p_i > 0. \end{cases} \tag{19b}$$

那么，根据迁移规则(14a) 得到的序列 $\Pi(k)$ 是有限的，并在 $K < +\infty$ 步后收敛到一个划分$\Pi(K)$，使得 $J(k)$ 在 $k = K$ 处满足 (17)。

在下一节中，我们将通过数值验证该策略。收敛性的形式化证明将在第 V 节中给出。

IV. 数值验证

我们通过将算法应用于 IEEE 118 和 300 个测试系统案例[30]的划分，展示了该算法的有效性。节点功率值 p_i 通过利用 Matpower 求解最优潮流（OPF）问题计算得出 6.0 [31]。由于测试案例中包含节点功率为零的节点$p_i = 0$，因此我们允许这些节点从其所在的孤岛（例如 $\mathrm{M}_m(k)$）迁移至相邻孤岛（例如 $\mathrm{M}_l(k)$），前提是 (i) 迁移不会导致 $\mathrm{M}_m(k)$ 不连通，且 (ii) $P_l(k) \neq P_l(k')$，$\forall k' < k:\ i \in \mathrm{V}_l(k')$。

为了应用我们的划分策略（算法 1、2），我们需要一些初始分区 $\Pi(0)$。为了在不同条件下测试我们的算法，我们考虑了多种可能的 $\Pi(0)$。在某些情况下，我们将从 [13], [26], [32] 中选取的一些分区作为 $\Pi(0)$。在其他情况下，我们采用所谓的 SSRP+广度优先搜索方法来生成 $\Pi(0)$。具体而言，我们首先使用搜索空间缩减过程 [26], ，生成一棵连接相干发电机组的生成树（这些发电机取自 [26]）。然后，使用广度优先搜索算法 [33]将其余节点聚合到树中。

备注 3. 在整个数值分析过程中，每当某个节点（例如 $i \in \mathcal{V}_m(k)$）可以选择迁移到多个孤岛时，它将选择使差值最大的那个孤岛

$$\Delta P_l = \min\{P_l(k) + P_i, P_m(k) - P_i\} - \min\{P_l(k), P_m(k)\}.$$

此选择确保迁移后平均绝对功率不平衡的改善幅度最大。

A. IEEE 118 节点系统

我们使用算法1-2将 IEEE 118 测试系统划分为 $n_\mu = 2$ 和 $n_\mu = 3$ 个孤岛，仅考虑$n_g = 19$ 台发电机（不包括无功补偿器）。我们假设，母线 15 发生三相实接地故障，导致线路 14-15 断开，从而触发迁移过程。对于 $n_\mu = 2$，我们将由 SSRP+广度优先搜索生成的划分视为初始划分 $\Pi(0)$，并将 [13]中报告的划分视为最终分区；对于 $n_\mu = 3$，我们将由 SSRP+广度优先搜索生成的划分视为 $\Pi(0)$，并将 [26]中报告的划分视为最终分区。所有相关信息和结果均列于表 I。

我们发现，在所有情况下，所提算法确实都能够收敛到使 J最小化的分区，如$J(K) = J^*$所示。作为一个典型示例，我们在图 2 中展示了 $n_\mu = 2$ 且 $\Pi(0)$由 SSPR+广度优先搜索生成的情况；具体而言，图 2a 展示了各个步骤中的功率不平衡 $P_1(k)$和$P_2(k)$，而最终分区 $\Pi(K)$见图 2b。请注意，根据最优潮流结果，$\max_i |p_i| = 542$。78 兆瓦且 $J^* = 58$。25 兆瓦，因此满足定理 III.1 给出的界，因为 $|J(K) - J^*| = 0$（见表 I）。

B. IEEE 300 节点系统

我们使用算法 1 和算法 2 将 IEEE 300 测试系统划分为 $n_\mu = 3$ 和 $n_\mu = 4$ 个孤岛，并假设故障影响线路 194-195。对于 $n_\mu = 3$，当 $\Pi(0)$ 时，我们考虑 SSRP+ 广度优先搜索划分以及表 II 中报告的任意分区；对于 $n_\mu = 4$，当 $\Pi(0)$ 时，我们考虑 SSRP+广度优先搜索划分以及来自 [26] 的划分。在这两种情况下，相干发电机组均按照 [26] 的表 II 进行选择。所有相关信息和结果均列于表 II。

同样，在所有情况下，我们的算法都能够找到一个最优划分，如 $J(K) = J^*$；值得注意的是，SSRP+BFS 初始

Case	n_μ	K	Π(0)处的割集	Π(0)	Π(K)处的割集	$J(0)$	$J(K)$	J^*	$P_l(0)$	$P_l(K)$	界 (17)
IEEE 118	2	10	{24-70, 34-43, 37-40 , 38-65 , 39-40, 71-72}	单源最短路径+广度优先搜索	{15-19, 18-19, 19-34, 23-25, 23-32 , 30-38 , 37-38, 37-39, 37-40, 43-44}	120.5	58.25	58.25	{−74.26, 190。75}	{53.74, 62。75}	213.14
IEEE 118	2	9	{1-2, 3-12, 5-8, 6-7, 11-12, 15-17, 15-19, 24-70, 30-38 , 34-36 , 44-45, 70-71}	[13]	{4-5, 5-11, 11-12 , 15-17 , 15-19, 30-38, 34-37, 35-37, 43-44 , 69-70 , 70-75, 74-75}	265.5	58.25	58.25	{−258.25, 374。74}	{65.75, 50。74}	213.14
IEEE 118	3	7	{24-70, 34-43, 37-40, 38-65, 39-40 , 68-81 , 69-77, 71-72, 75-77, 76-118}	单源最短路径+广度优先搜索	{19-34, 21-22, 23-25, 23-32, 30-38, 34-36, 34-37 , 37-38 , 37-39, 37-40, 68-81, 69-77 75-77, 76-118}	80.34	38.83	38.83	{−74.26, 1.98, 188。77}	{53.74, 1.98, 60.77}	335.97
IEEE 118	3	8	{24-70, 24-72, 38-65, 40-42, 41-42, 44-45, 69-77, 75-77, 81-80, 118-76}	[26]	{24-70, 42-49, 44-45 , 61-64 , 63-64, 65-66, 65-68 , 69-77 , 71-72 , 75-77 , 76-118, 80-81}	147	38.83	38.83	{−199.26 313.77 1。98}	{83。66, 30.86, 1。98}	335.97

表 I：将算法 1 和算法 2 应用于 IEEE 118 测试案例，并考虑不同初始分区 Π(0) 后的结果。功率值以兆瓦为单位。注意，界 (17) 是针对 $k = K$ 计算的。

分区以及 [26] 中的分区已经是最优的，但我们的算法仍能进一步降低三个孤岛之间功率不平衡的标准差（见表 II）。

图 3 展示了一个代表性案例，其中 $n_\mu = 3$ 和 Π(0) 为任意选取。功率不平衡 $P_1(k)$、$P_2(k)$、$P_3(k)$ 如图 3a 所示，而最终分区 Π(K) 则如图 3b 所示。有趣的是，在所有数值实验中，我们的算法不仅确保满足定理 III.1 给出的界，而且始终确保 $J(K) = J^*$；并且在所有情况下，它都成功降低了各孤岛功率不平衡的标准差，相较于初始分区而言（见表 II）。

最后需要指出的是，如表 II 所示，对于给定的测试用例和期望的孤岛数量 n_μ，存在多个使 J 最小化的最优解。这为制定多目标分区策略提供了可能，这或许会成为未来的研究课题。

V. 收敛性证明

为证明引理 1 和定理 III.1，我们首先需要定义堆叠向量 $\mathbf{P}(k) := [P_1(k) \cdots P_{n_\mu}(k)]^\mathsf{T}$ 和 $\mathbf{P}^* := p^*\mathbf{1}$，然后给出以下引理。

证明。 由 (3)，可得

$$J(k) = \frac{1}{n_\mu}\left(\sum_{l:P_l(k)>0} P_l(k) - \sum_{l:P_l(k)\le 0} P_l(k)\right). \tag{20}$$

此外，由于

$$\sum_{l:P_l(k)>0} P_l(k) + \sum_{l:P_l(k)\le 0} P_l(k) = P_{\text{tot}} = n_\mu p^*,$$

我们可以将式（20）改写为

$$J(k) = \frac{1}{n_\mu}\left(2\sum_{l:P_l(k)>0} P_l(k) - n_\mu p^*\right).$$

因此，根据 (4) $J^* = |p^*|$ [], , 可得

$$J(k) - J^* = \frac{2}{n_\mu}\sum_{l:P_l(k)>0} P_l(k) - (p^* + |p^*|). \tag{21}$$

不失一般性，重新标记这些孤岛，使得$P_1(k) \le P_2(k) \le \cdots \le P_{n_\mu}(k)$。由于图 G （在第 II 节中定义）和所有孤岛对于任意 k 都保持连通，因此在每一步中，图 $\mathsf{G}^{\Pi(k)}$ （在第 II 节中定义）也将保持连通，从而由 (16) 可得

$$P_{l+1}(k) \le P_l(k) + \max_{i\in\mathcal{V}} |p_i|, \quad \forall l \in \{1, \ldots, n_\mu - 1\}. \tag{22}$$

注意到，根据（2），$\sum_{l=1}^{n_\mu} P_l(k) = P_{\text{tot}} = n_\mu p^*$，因此由（22）可得

$$P_l(k) \le p^* + \bar{p}\left(l - \frac{n_\mu + 1}{2}\right), \quad \forall l \in \{1, \ldots, n_\mu\}, \tag{23}$$

其中 $\bar{p} := \max_{i\in\mathcal{V}} |p_i|$。根据（21），当（23）取等号时，$J(k) - J^*$ 达到最大值（最坏情况）。在这种情况下，为了利用（21）计算$J(k) - J^*$，我们必须首先求出

$$l^* : \quad P_l(k) \ge 0, \ \forall l \in \{l^*, \ldots, n_\mu\}. \tag{24}$$

因此，为了求得 l^*，我们必须找到满足以下条件的最小整数 l

$$p^* + \bar{p}\left(l - \frac{n_\mu + 1}{2}\right) \ge 0, \tag{25}$$

由此得到式（18）。然后，根据式（24）、（23）和（21），我们得到式（17），引理得证。□

Case	n_μ	K	Π处的割集(0)	Π(0)	Π处的割集(K)	$J(0)$	$J(K)$	J^*	$P_l(0)$	$P_l(K)$	界 (17)
IEEE 300	3	3	{3-129, 7-110, 40-68，54-123, 57-66 , 66-190 , 67-190，68-73, 185-186}	单源最短路径+广度优先搜索	{3-129，40-68, 54-123, 57-66, 64-67 , 66-190 , 68-73, 109-110, 184-185，185-187}	102.92	102.92	102.92	{6.11, 129.98, 172。65}	{6.11, 145.98, 156.65}	1254.95
IEEE 300	3	12	{40-68，57-66, 66-190，67-190, 68-73，106-113, 112-116，122-123, 185-186}	任意	{36-40, 39-40, 61-66 , 64-67 , 65-66 , 68-73 , 105-106, 106-107, 106-147, 112-116, 119-121, 121-154, 122-124, 122-128, 127-157, 154-158, 157-158 , 168-189 , 172-187 , 177-188 , 184-185}	529.49	102.92	102.92	{−639.87, 775.96, 172.65}	{129.21, 18.89, 160。65}	1254.95
IEEE 300	4	5	{3-129, 7-110, 40-68，54-123, 61-66，64-67 65-66 , 68-73 , 68-173，174-198, 185-186}	单源最短路径+广度优先搜索	{3-129，7-110, 40-68 , 54-123 , 57-180 , 57-190 , 66-190 , 67-190 , 68-73 , 68-173 , 168-187 , 172-187 , 174-198，184-185}	77.187	77.187	77.187	{19.76, 6.11, 205.98, 76。 9}	{114.76, 6.11, 110.98, 76。 9}	1908.2
IEEE 300	4	3	{57-66, 64-67, 66-190，68-173, 109-110，109-129, 122-123 , 174-191 , 174-198，184-185, 185-187}	[26]	{7-110，57-66, 66-190，67-190, 68-173，109-129 122-123 , 168-187 , 172-187，174-191, 174-198，184-185}	77.187	77.187	77.187	{145.98, 79。76, 6.11 76。 9}	{110。98, 114。76, 6.11, 76。 9}	1908.2

表 II：将算法 1 和算法 2 应用于 IEEE 300 测试案例，并考虑不同的初始分区 Π(0) 后的结果。功率值以兆瓦为单位。请注意，针对 $k = K$ 计算界 (17)。

现在，我们利用引理 1 来证明定理 III.1。

定理 *III.1* 的证明。考虑满足式（19）的三元组（l，m，i），并且

$$|P_m(k) - P_l(k)| > |p_i|; \tag{26}$$

我们首先证明，在假设 (19) 成立时，(26) 等价于 (14a)，也就是说，节点 i 将从孤岛 M_m 迁移到 M_l。

首先，我们证明 (14a) 蕴含 (26)。当 $P_m(k) < P_l(k)$ 时，由 (19b) 可得 $p_i < 0$，而由 (14a) 可得

$$P_m(k) < P_l(k+1). \tag{27}$$

相反，当 $P_l(k) < P_m(k)$ 时，由 (19b) 可得 $p_i > 0$，而由 (14a) 可得

$$P_l(k) < P_m(k+1). \tag{28}$$

由 (27) 和 (28)，并回顾 (15a) 和 (15b)，可得

$$\begin{cases} P_m(k) - P_l(k) < p_i, & \text{if } p_i < 0, \\ P_m(k) - P_l(k) > p_i, & \text{if } p_i > 0. \end{cases} \tag{29}$$

由于 (29) 蕴含 (26)，我们已证明 (14a) 蕴含 (26)。

现在，我们证明 (26) 蕴含 (14a)。为此，注意到 (26) 等价于

$$\begin{cases} P_l(k) > P_m(k) + |p_i|, & \text{if } P_l(k) > P_m(k), \\ P_m(k) > P_l(k) + |p_i|, & \text{if } P_l(k) < P_m(k). \end{cases} \tag{30}$$

此外，利用 (19b) 并回顾 (15a) 和 (15b)，可将 (30) 改写为

$$\begin{cases} P_m(k) < P_l(k) + p_i = P_l(k+1), & \text{if } P_l(k) > P_m(k), \\ P_l(k) > P_m(k) - p_i = P_m(k+1), & \text{if } P_l(k) < P_m(k). \end{cases} \tag{31}$$

显然，(31) 立即推出 (14a)。因此，我们已经证明（当 (19) 成立时）(26) $\Leftrightarrow$ (14a)。

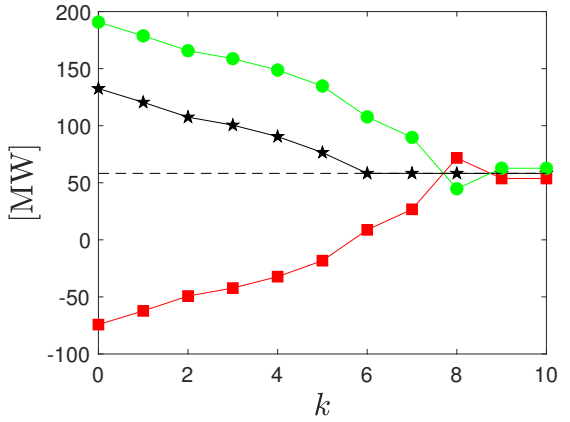
由于 (14a) 等价于 (26) 和 (19)，因此，如果在某一步（例如 K）不存在满足 (26) 的三元组 (l，m，i)，迁移过程就会停止；又由于网络 G 连通，且该步的图 $\mathrm{G}^{\Pi(K)}$ 也连通，因此我们有

$$|P_l(K) - P_m(K)| \le \max_{i \in \mathcal{V}} |p_i| \quad \forall l, m : \mathcal{V}_m(K) \cap \mathcal{N}(\mathcal{V}_l(K)) \neq \varnothing. \tag{32}$$

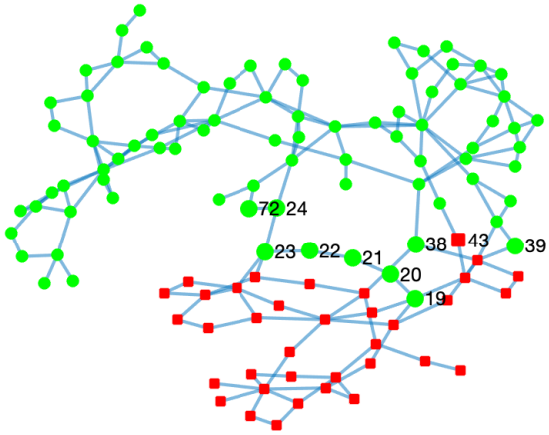
由引理 1 可知，(32) 蕴含界 (17) 成立。要证明我们的结论，只需证明存在一个停止时刻 K。首先请注意，若 (14a) 满足以下条件，则这样的步骤 K 存在

$$\|\mathbf{P}(k+1) - \mathbf{P}^*\|_2 \le \alpha \, \|\mathbf{P}(k) - \mathbf{P}^*\|_2 \ \ \forall k \in \{0, \ldots, K-1\} \tag{33}$$

对于某个正标量 $\alpha < 1$，如果满足（33），那么我们的迁移规则就是一个压缩映射。在这种情况下，根据巴拿赫-坎托罗维奇定理 [34]，序列 $\{\mathbf{P}(k)\}$ 中不会出现极限环，因此 $\{\Pi(k)\}$ 中也不会出现极限环。因此，由于可能的分区数量有限，序列 $\{\mathbf{P}(k)\}$ 的长度也有限。为了完成证明，我们需要说明（14a）蕴含（33）。由于我们规定每一步只发生一次迁移 k，因此

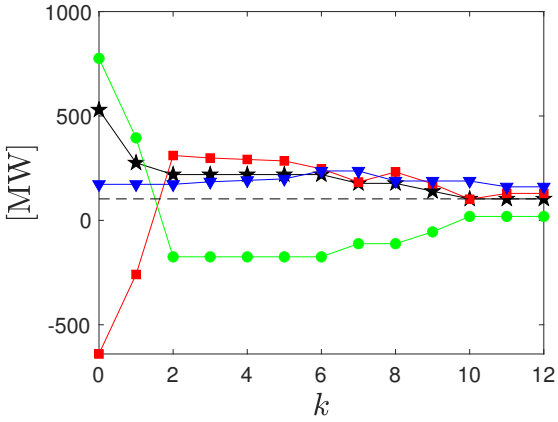


(a)

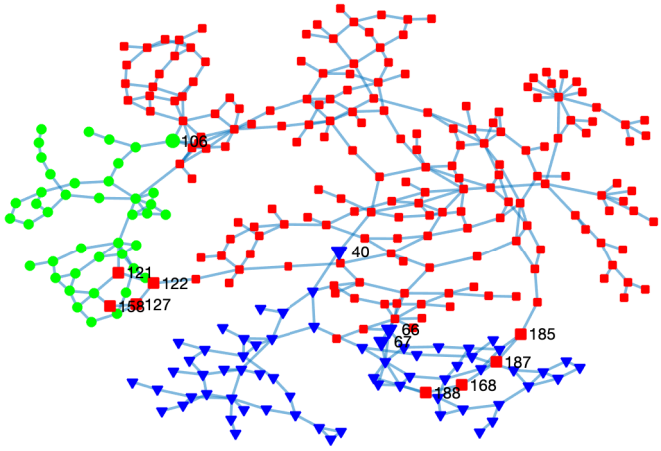


(b)

图2：通过算法 1 和算法 2 将 IEEE 118 测试系统划分为 $n_\mu = 2$ 个孤岛。(a) $P_1(k)$（红色方块）、$P_2(k)$（绿色圆圈）、 $J(k)$（黑色星号）和 J^* （虚线）；所有数值均以兆瓦为单位。(b) 最终网络划分 $\Pi(K)$；红色方块表示 $V_1(K)$，绿色圆圈表示 $V_2(K)$。节点 72、24、23、22、21、39、20、19、38 按给定顺序从 M_1 迁移至 M_2，而节点 43 在$k = 9$时从 M_2 迁移至 M_1 。注意，最后一次迁移不会改变功率不平衡，因为它涉及节点功率为零的节点 38。



(a)



(b)

图3：通过算法 1 和算法 2 将 IEEE 300 测试系统划分为 $n_\mu = 3$ 个孤岛。(a) P_1（k）（红色方块）、P_2（k）（绿色圆圈）、 P_3（k）（蓝色三角形）、 J（k）（黑色星形）以及 J^*（虚线）。(b) 最终网络划分 Π（K）；红色方块表示 V_1（K），绿色圆圈表示 V_2（K），蓝色三角形表示 V_3（K）。节点的迁移顺序为 106，122，185，187，168，188，127，66，121，158，67 和 40。

$\mathbf{P}(k+1)$ 与 $\mathbf{P}(k)$ 的差异仅在于第 l 和第 m 个条目。因此，要证明（33），只需证明

$$(P_l(k+1)-p^*)^2+(P_m(k+1)-p^*)^2 < (P_l(k)-p^*)^2+(P_m(k)-p^*)^2 \quad (34)$$

对所有 $k \in \{0, \ldots\ldots, K-1\}$ 均成立。经过一些代数化简后，(34) 可改写为

$$p_i(P_l(k)-P_m(k)+p_i) < 0 \quad k \in \{0,\ldots,K-1\}, \quad (35)$$

这显然可由任意满足 (19) 和 (26) 的三元组 $(l,\ m,\ i)$ 满足，因此 (19) 和 (26) 蕴含 (33)。进而，由于 (19) 和 (26) 蕴含 (14a)，K 的存在性得以保证，故我们的论点仍得证。□

VI. 结论

我们提出了一种电力网络孤岛划分算法，以分布式方式解决主动控制孤岛划分问题。我们的策略使网络节点能够自主组织，从而最小化各孤岛间平均绝对功率不平衡。为了让节点能够做出明智的决策，我们设计了一种基于共识的估计器，它对迁移过程至关重要，因为它使节点能够以分布式方式估计相邻孤岛的功率不平衡。我们通过解析方法证明，该算法能在有限时间内收敛到一个划分，其平均绝对功率不平衡处于与最优值给定邻域内。我们在两个基准电力网络——IEEE 118母线系统和IEEE 300母线系统——上测试了该策略，在各自的一条输电线路断开后，结果表明

所提方法的有效性。

参考文献

[1] F. Dörfler、J. W. Simpson-Porco 和 F. Bullo，“打破层级：微电网中的分布式控制与经济最优性”，IEEE 网络系统控制汇刊，第 3 卷，第 3 期，第 241–253 页，2015 年。[2] A. Bidram 和 A. Davoudi，“微电网控制系统的层级结构”，IEEE 智能电网汇刊，第 3 卷，1976，2012 4，1963 期，第 – 页。[3] P. Frasca、H. Ishii、C. Ravazzi 和 R. Tempo，“用于意见形成、中心性计算和电力系统估计的分布式随机算法：教程综述”，《欧洲控制杂志》，第 24 卷，第 2–13 页，2015 年。[4] P. Pourbeik、P. S. Kundur 和 C. W. Taylor，“电网停电剖析——近期重大停电的根本原因与动态过程”，IEEE 电力与能源杂志，第 4 卷，第 5 期，第 22–29 页，2006 年。[5] J. Rocabert、A. Luna、F. Blaabjerg 和 P. Rodriguez，“交流微电网中电力变换器的控制”，IEEE 电力电子汇刊，第 27 卷，第 11 期，第 4734–4749 页，2012 年。[6] A. Tayyebi、D. Groß、A. Anta、F. Kupzog 和 F. Dörfler，“同步机与构网型电力变换器的频率稳定性”，IEEE 电力电子新兴与精选主题期刊，第 8 卷，第 2 期，第 1004–1018 页，2020 年。[7] C. Arghir、T. Jouini 和 F. Dörfler，“基于同步机匹配的电力变换器构网控制”，《自动化》，第 95 卷，第 273–282 页，2018 年。[8] F. Milano、F. Dörfler、G. Hug、D. J. Hill 和 G. Verbič，“低惯量系统的基础与挑战”，载于《2018年 IEEE 电力系统计算会议（PSCC）》，2018 年，第 1–25 页。[9] F. Dörfler、S. Bolognani、J. W. Simpson-Porco 和 S. Grammatico，“自主电网的分布式控制与优化”，载于 IEEE 第 18 届欧洲控制会议（ECC），2019 年，第 2436–2453 页。[10] G. Lalor、A. Mullane 和 M. O’Malley，“频率控制与风力涡轮机技术”，IEEE 电力系统汇刊，第 20 卷，第 4 期，第 1905–1913 页，2005 年。[11] H. Bevrani、A. Ghosh 和 G. Ledwich，“可再生能源与频率调节：综述及新视角”，IET 可再生能源发电，第 4 卷，第 5 期，第 438–457 页，2010 年。[12] A. Ulbig、T. S. Borsche 和 G. Andersson，“低旋转惯量对电力系统稳定性与运行的影响”，第 19 届世界大会论文集，IFAC 会议论文集，第 47 卷，第 3 期，第 7290–7297 页，2014 年。[13] X. Fan、E. Crisostomi、D. Thomopulos、B. Zhang 和 S. Yang，“利用直流调制的交直流混合电力系统受控孤岛算法”，IET 发电、输电与配电，第 14 卷，第 26 期，第 6440–6449 页，2020 年。[14] S. Pahwa、M. Youssef、P. Schumm、C. Scoglio 和 N. Schulz，“通过优化主动孤岛划分增强电网网络的鲁棒性”，《物理学A：统计力学及其应用》，第 392 卷，第 17 期，第 3741–3754 页，2013 年。[15] K. Sun、D.-Z. Zheng 和 Q. Lu，“采用基于 OBDD 的方法实现大型电力系统孤岛运行的分割策略”，IEEE 电力系统汇刊，第 18 卷，第 2 期，第 912–923 页，2003 年。[16] M. Adibi、R. Kafka、S. Maram 和 L. M. Mili，“论电力系统受控解列”，IEEE 电力系统汇刊，第 21 卷，第 4 期，第 1894–1902 页，2006 年。[17] P. Fernández-Porras、M. Panteli 和 J. Quirós-Tortós，“主动控制孤岛划分：何时进行孤岛划分以防止电力系统停电”，IET 发电、输电与配电，第 12 卷，第 14 期，第 3542–3549 页，2018 年。[18] A. R. H. Ahangar、G. B. Gharehpetian 和 H. R. Baghaee，“智能电力系统主动控制孤岛划分综述及微电网中主动控制孤岛划分的通用框架”，《国际电力与能源系统期刊》，第 118 卷，文章编号 105709，2020 年。[19] H. Haddadian 和 R. Noroozian，“基于新型技术指标的未来配电网设计与运行的多微电网方案”，《应用能源》，第 185 卷，第 650–663 页，2017 年。[20] Z. Wang、B. Chen、J. Wang、M. M. Begovic 和 C. Chen，“配电系统中互联微电网的协调能源管理”，IEEE 智能电网汇刊，第 6 卷，第 1 期，第 45–53 页，2014 年。[21] S. A. Arefifar 和 Y. A.-R. I. Mohamed，“用于优化微电网可靠性和供电安全的分布式发电组合、无功电源及储能单元”，IEEE 智能电网汇刊，第 5 卷，1844，2014 年第 4 期，第 1835– 页。

[22] S. A. Arefifar、A.-R. M. Yasser 和 T. H. El-Fouly，“提升可靠性与供电安全性的最优微电网设计”，*IEEE* 电力系统汇刊，第4卷，第3期，第1567–1575页，2013年。[23] S. Hasanvand、M. Nayeripour、E. Waffenschmidt 和 H. Fallahzadeh- Abarghouei，“一种将现有配电网络改造为一组微电网，以提升可靠性与可持续性的新方法”，《应用软计算》，第52卷，第120–134页，2017年。[24] S. Mohammadi、S. Soleymani 和 B. Mozafari，“包含风能、光伏、微型涡轮机、燃料电池和储能设备的微电网情景式随机运行管理”，《国际电力与能源系统期刊》，第54卷，第525–535页，2014年。[25] Z. Liu、A. Clark、L. Bushnell、D. S. Kirschen 和 R. Poovendran，“基于弱次模性的受控解列”，*IEEE* 电力系统汇刊，第34卷，第3期，第1858–1868页，2018年。[26] A. Kyriacou、P. Demetriou、C. Panayiotou 和 E. Kyriakides，“大型电力系统的受控解列方案”，*IEEE* 电力系统汇刊，第33卷，第2期，第1591–1602页，2017年。[27] C. Wang、B. Zhang、Z. Hao、J. Shu、P. Li 和 Z. Bo，“一种用于电力系统分裂边界的实时新型搜索方法”，*IEEE* 电力系统汇刊，第25卷，第4期，第1902–1909页，2010年。[28] P. Kundur、J. Paserba、V. Ajjarapu、G. Andersson、A. Bose、C. Canizares、N. Hatziargyriou、D. Hill、A. Stankovic、C. Taylor 等，“电力系统稳定性的定义与分类：IEEE/CIGRE稳定性术语与定义联合工作组”，*IEEE* 电力系统汇刊，第19卷，第3期，第1387–1401页，2004年。[29] S. A. Arefifar、Y. A.-R. I. Mohamed 和 T. H. M. El-Fouly，“基于供电充裕度的智能配电系统微电网最优建设”，*IEEE* 智能电网汇刊，第3卷，1502，2012年3，1491期，第–页。[30] 华盛顿大学工程学院，“电力系统测试案例档案库”，http://labs.ece.uw.edu/pstca/，访问日期：2021年1月17日。[31] R. D. Zimmerman、C. E. Murillo-Sánchez 和 R. J. Thomas，“Matpower：电力系统研究与教育的稳态运行、规划与分析工具”，*IEEE* 电力系统汇刊，第26卷，第1期，第12–19页，2010年。[32] J. W. Bialek 和 V. Vahidinasab，“作为遏制线路级联故障的紧急措施的树划分”，*IEEE* 电力系统汇刊，第37卷，第1期，第467–475页，2021年。[33] T. H. Cormen、C. E. Leiserson、R. L. Rivest 和 C. Stein，《算法导论》。MIT出版社，2009年。[34] W. A. Kirk 和 B. Sims，“度量不动点理论手册”，《澳大利亚数学学会公报》，第29卷，第2期，2002年。