arXiv:2301.01177v1 [math.GR] 3 Jan 2023

Gallagher 之后的实值特征计数

JOHN C. MURRAY

Abstract. 设 G 为一个有限群， N 为 G 的正规子群， θ 为 N的一个不可约特征。我们对 G 中位于 θ之上的实不可约特征标进行计数。

1. Introduction

设 G 为一个有限群， θ 为 G的正规子群 N的一个不可约特征。回顾一下，若不可约特征 χ是 G 的特征，且 χ 是诱导特征 $\theta\uparrow^G$的一个成分，则称其位于 θ 之上。我们首先向读者介绍 P. X. Gallagher 用于计数 G 中位于 θ之上的不可约特征的方法。为此，设 G_θ 为 θ 在 G中的惯性群。若 $x \in G_\theta$，则 θ 可扩张为 $N\langle x\rangle$的一个不可约特征 θ_x。令 $\overline{G} = G/N$。则 $\overline{x}$ 在 G中的中心化子为 $\mathsf{C}_G(\overline{x}) := \{g \in G \mid \overline{x}^g = \overline{x}\}$。若对所有 $c \in \mathsf{C}_G(\overline{x})$ 都有 $\theta_x^c = \theta_x$，则称$\overline{x}$ 对 θ 是良好的。这与扩张 θ_x 的选取无关。此外，$\overline{x} \in \overline{G}_\theta$ 对 θ 是良好的，当且仅当它的所有 $\overline{G}_\theta$-共轭都是对 θ良好的。因此，我们可以称 $\overline{G}_\theta$的共轭类为 θ-良好共轭类。

Gallagher 定理。 G 中位于 θ 之上的不可约特征数，等于 G_θ/N的 θ-良好共轭类数。

本文修改 Gallagher 的证明，以计算 G 中位于 θ之上的实值不可约特征数。若 G有这样的特征 χ，则 χ 也位于对偶特征$\overline{\theta}$之上。因此，从现在起，我们可以并且确实假设 $\overline{\theta}$ 与 θ是 G-共轭的。

θ 在 G 中的扩展惯性群是群

$$G_\theta^* := \{g \in G \mid \theta^g = \theta \text{ or } \overline{\theta}\}.$$

还要回顾一下：若 G 中的一个元素在 G中与其逆元共轭，则称该元素在 G 中为实元。

按照 Gallagher 定理，设$\overline{x} \in \overline{G}_\theta$ 对 θ是良好的。我们给 $\overline{x}$赋予一个指标 $\sigma(\overline{x}) = 0, \pm 1$，如下所示。首先，假设存在 $e \in G_\theta^*$，使得$(\overline{x}, \theta)^e = (\overline{x}^{-1}, \overline{\theta})$。此时，若 $\theta_x^e = \overline{\theta}_x$，则令 $\sigma(\overline{x}) = +1$；若 $\theta_x^e \neq \overline{\theta}_x$，则令 $\sigma(\overline{x}) = -1$。若不存在这样的 e（尤其是当 $\overline{x}$ 在 $\overline{G}_\theta^*$ 中不为实元时），则令 $\sigma(\overline{x}) = 0$。于是， $\sigma(\overline{x})$不依赖于 e的选取。此外，对于所有与 $\overline{x}$是 $\overline{G}$-共轭的 $\overline{y} \in \overline{G}$，都有 $\sigma(\overline{y}) = \sigma(\overline{x})$。因此，我们可以将 G_θ 的每个θ-良好共轭类称为 σ_+型、 σ_- 型或 σ_0 型。我们的主要结果如下：

定理 1. G 覆盖 θ 的实不可约特征标的数量，等于 G_θ/N 中 σ_+ 型的 θ-良好共轭类的数量减去 G_θ/N 中 σ_- 型的 θ-良好共轭类的数量。

日期：2023年1月3日。

特别地， G 覆盖 θ 的实不可约特征标的数量，仅取决于 $\overline{G}_\theta$ 中对 θ 而言是良好且在 $\overline{G}_\theta^*$ 中为实的元素。

回顾一下，Frobenius-Schur 指标 $\epsilon(\theta)$ 取值为 $\{+1,-1,0\}$，并且与 θ 在 $\mathbb{R}$ 上的可实现性有关。对于每个 $t \in G$，若 $t^2 \in N$，则有一个相关的指标 $\epsilon_{\overline{t}}(\theta)$，称为 Gow 指标，它也取值为 $\{+1,-1,0\}$（见第 3 节）。根据 $\epsilon_{\overline{t}}(\theta)$ 的取值，我们可以将对合 $\overline{t} \in G/N$ 标记为 $+1$、-1 或 0 型。我们的第二个结果是：

定理 2. Frobenius-Schur 指标 $\epsilon(\theta^{\uparrow G})$ 等于 G_θ^*/N 中 $+1$ 型对合的数量减去 G_θ^*/N 中 -1 型对合的数量。

我们在第 2 节较为详细地介绍 Gallagher 定理的证明。这将使我们能够引入记号，并让读者可以将我们的方法与 Gallagher 的方法进行比较。在第 3 节中，我们定义 Gow 指标并证明定理 2。我们将定理 1 的证明分为 $\theta = \overline{\theta}$ 或 $\theta \neq \overline{\theta}$ 两种情况。两种情况的证明均在第 4 节给出。

2. Gallagher's theorem

我们对 Gallagher 定理的表述基本遵循 [Gallagher], ，但补充了一些细节。 [Navarro], 中介绍了另一种方法，即使用特征标三元组。这将导出一些关于特征标值的有趣结果。应该可以使用类似的方法证明定理 1。

我们引用 [Gallagher] 中的以下结果：

引理 3. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，并设 $H \leq G$，使得 $\chi{\downarrow_H}$ 不可约。那么

$$\sum_{x \in Hg} |\chi(x)|^2 = |H|, \quad \textit{for each coset } Hg \subseteq G.$$

令 $\mathrm{Cl}(G)$ 为 G 的共轭类集合。对于 $K \in \mathrm{Cl}(G)$，令 K^o 为 K 中元素的逆元所构成的共轭类。对于所有 $K \subseteq G$，还令 K^+ 为 K 中各元素之和，该和取自群代数 $\mathbb{C}G$。

Gallagher 首先定义了 $Z(\mathbb{C}G)$ 的以下元素，其中 $[x,y] := x^{-1}y^{-1}xy$ 是 x 与 y 的换位子：

$$T := \sum_{x,y \in G} [x,y] = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{|G|}{|K|} K^{o+} K^+.$$

对于 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，令 $\omega_\chi : Z(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$ 表示相应的中心特征标。因此，对于所有 $z \in Z(\mathbb{C}G)$，ω_χ 是代数同态 $\omega_\chi(z) = \chi(z)/\chi(1)$，并且

$$\omega_\chi(T) = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{|G|}{|K|} \omega_\chi(K^{o+}) \omega_\chi(K^+) = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(G)} \frac{|G|}{|K|} \frac{|K|^2}{\chi(1)^2} |\chi(k)|^2 = \left(\frac{|G|}{\chi(1)} \right)^2.$$

最后一个等式由第一正交关系得出。化简后得到

$$\chi(1)\chi(T) = |G|^2, \quad \text{for all } \chi \in \mathrm{Irr}(G). \tag{1}$$

Gallagher 定理的证明。回顾一下， N 是 G 的正规子群，且 θ 是 N的不可约特征。Clifford 对应是一个双射 $\mathrm{Irr}(G \mid \theta) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(G_\theta \mid \theta)$，由诱导与限制定义。因此，在本节余下部分，我们假设 θ 是 G-不变的。

我们的假设给出 $\theta(1)\theta^{\uparrow G} = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)} \chi(1)\chi$。由此及（1）可得

$$\theta(1)\theta^{\uparrow G}(T) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)} \chi(1)\chi(T) = |G|^2 |\operatorname{Irr}(G \mid \theta)|.$$

对于 $x \in G$，注意到 $\mathrm{C}_G(\overline{x}) = \{y \in G \mid [x,y] \in N\}$。现在 $\theta^{\uparrow G}$ 在 N 之外取值为零，并限制在 $|G$ 上： $N|\theta$ 在 N 上。因此，最后显示的公式给出

$$|\operatorname{Irr}(G \mid \theta)| = \frac{\theta(1)}{|G|\,|N|} \sum_{\substack{x \in G \\ y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})}} \theta([x,y]). \tag{2}$$

令 $x \in G$，并回顾一下， θ_x 是 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的一个扩张。所有此类扩张的形式均为 $\omega\theta_x$，其中 $\omega \in \mathrm{Lin}(N\langle x\rangle/N)$。现在 $\mathrm{C}_G(\overline{x})$ 作用于 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的扩张上。因此，给定 $y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})$，存在 $\omega_y \in \mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$ 使得 $\theta_x^y = \omega_y\theta_x$。由于 $\mathrm{C}_G(\overline{x})$ 在 $\mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$ 上平凡作用，对于每个 $\omega \in \mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$，都有 $(\omega\theta_x)^y = \omega\theta_x^y = \omega_y(\omega\theta_x)$。所以 ω_y 不依赖于扩张 θ_x 的选择。特别地，对于所有 $y_1, y_2 \in \mathrm{C}_G(\overline{x})$，都有 $\omega_{y_1y_2} = \omega_{y_1}\omega_{y_2}$。这表明 $y \mapsto \omega_y(x)$ 是 $\mathrm{C}_G(\overline{x})$ 的一个线性特征标。

我们称陪集 $\overline{x}$ 对 θ 是良好的，如果对所有 $y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})$ 都有 $\theta_x^y = \theta_x$。因此，当且仅当 $y \mapsto \omega_y(x)$ 是 $\mathrm{C}_G(\overline{x})$ 的平凡特征时， $\overline{x}$ 对 θ 是良好的。显然，对 θ 是良好的这一性质与将 θ 扩张到 $N\langle x\rangle$ 的扩张 θ_x 的选择无关。

对于 $x \in G$，令 $X := \{x^c \mid c \in \mathrm{C}_G(\overline{x})\}$ 表示包含 x 的 $\mathrm{C}_G(\overline{x})$ 的共轭类。则 $X^+ \in Z(\mathbb{C}\,\mathrm{C}_G(\overline{x}))$。由于 $\sum_{y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})} [x,y] = |\,\mathrm{C}_G(x)| x^{-1}X^+$，我们得到

$$\begin{aligned}
\theta(1) \sum_{y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})} \theta([x,y]) &= \theta_x(x^{-1}) \sum_{y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})} \theta_x(x^y) \\
&= |\theta_x(x)|^2 \sum_{y \in \mathrm{C}_G(\overline{x})} \omega_y(x) \\
&= \begin{cases} |\,\mathrm{C}_G(\overline{x})|\,|\theta_x(x)|^2, & \text{if } x \text{ is good for } \theta. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

对所有 $x \in G$ 求和，得到 (2)

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Irr}(G \mid \theta)| &= \frac{1}{|G|\,|N|} \sum_{\overline{x} \in \overline{G}\,\mathrm{good}} |\,\mathrm{C}_G(\overline{x})| \sum_{n \in N} |\theta_x(nx)|^2 \\
&= \sum_{\overline{x} \in \overline{G}\,\mathrm{good}} \frac{|\,\mathrm{C}_G(\overline{x})|}{|G|}, \quad \text{by Lemma 3, as } \theta_x{\downarrow_N} \in \operatorname{Irr}(N) \\
&= \text{number of } \theta\text{-good classes of } G/N.
\end{aligned}$$

□

3. Frobenius-Schur indicator of an induced character

我们继续使用以下记号： N、 $\overline{G} = G/N$、 $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$、 G_θ 和 G_θ^*。本节我们证明定理 2。这将用 G_θ^*/N 中的对合来计算 $\epsilon(\theta\uparrow^G)$。注意， $G_\theta \leq G_\theta^*$、 $[G_\theta^* : G_\theta] \leq 2$ 当且仅当 $G_\theta = G_\theta^*$ 和 $\theta = \overline{\theta}$。

回顾一下， θ 的 Frobenius-Schur（F-S）指标为

$$\epsilon(\theta) := \frac{1}{|N|}\sum_{n\in N}\theta(n^2).$$

那么，若 $\theta \neq \overline{\theta}$，则 $\epsilon(\theta) = 0$；若 θ 是 N的实表示的特征，则 $\epsilon(\theta) = +1$；若 θ 取实值但不是实表示的特征，则 $\epsilon(\theta) = -1$。我们将 ϵ 通过线性延拓到所有广义特征上。

将阶为 1 或 2 的群元素称为对合会很方便。令 $\Omega(G)$ 为 G中对合的集合，并令 $\Omega(G,N) := \{g \in G \mid g^2 \in N\}$为 G中其像是 $\overline{G}$中对合的元素集合。

我们先回顾 F-S 指标的一种推广，称之为高指标。对于所有 $t \in \Omega(G,N)$， θ相对于（w.r.t.） t、 $\overline{t}$或 $N\langle t\rangle$的高指标为

$$\epsilon_t(\theta) := \frac{1}{|N|}\sum_{n\in N}\theta((nt)^2).$$

因此，对于 $t \in N$，有 $\epsilon_t(\theta) = \epsilon(\theta)$；对于 $t \in \Omega(G,N)\backslash N$，有 $\epsilon_t(\theta) = \epsilon(\theta\uparrow^{N\langle t\rangle}) - \epsilon(\theta)$。

R. Gow 在 [Gow] 中引入了这一指标，并证明了一个非凡的事实： $\epsilon_t(\theta) \in \{0,-1,1\}$。此外， $\epsilon_t(\theta) \neq 0$ 当且仅当 $\theta^t = \overline{\theta}$。在 [Ichikawa] 中，（$\epsilon(\theta)$ $\epsilon_t(\theta)$) 的 8 个可能的非零值被确定为 $\mathbb{C}$ 中的 8 次单位根。这确定了可与三元组（N， $N\langle t\rangle$， θ）相关联的 $\mathbb{R}$ 的布劳尔–沃尔群中的元素（群代数 $\mathbb{C}N\langle t\rangle$ 是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次代数，其 0 分量为 $\mathbb{C}N$，1 分量为 $\mathbb{C}N\langle t\rangle\backslash N$）。

由于我们关注实性，因此考虑扩展克利福德对应 $\mathrm{Irr}(G \mid \theta) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(G_\theta^* \mid \theta)$。它保持内积和 F-S 指标。例如$\epsilon(\theta\uparrow^G) = \epsilon(\theta\uparrow^{G_\theta^*})$。因此，在本节中，我们将假设 $G = G_\theta^*$，不过为方便读者起见，我们将引理 4 和 8 表述为适用于任意 G。

情况 1： θ 是实的且具有 G-不变性。由于 $\theta\uparrow^G$ 在 N 之外为零，并且在N上等于 $|G : N|\theta$，我们得到

$$\epsilon(\theta\uparrow^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in\Omega(G,N)}|G:N|\theta(t^2) = \sum_{\overline{t}\in\Omega(\overline{G})}\epsilon_t(\theta). \tag{3}$$

现在，对于所有的 $t \in \Omega(G,N)$，我们都有 $\epsilon_t(\theta) \neq 0$，这是因为 $\theta^t = \theta = \overline{\theta}$。令 θ_t 为 $N\langle t\rangle$ 的两个扩张之一，它是 θ 的扩张。若 $\epsilon_t(\theta) = \epsilon(\theta)$，则 θ_t 是实的，其 F-S 指标为 $\epsilon(\theta)$。反之，

$\epsilon_t(\theta) = -\epsilon(\theta)$，则 θ_t 不是实的。若对 θ而言，对合 $\overline{t} \in \overline{G}$ 满足 $\epsilon_t(\theta) = \pm 1$，则称其为 $\epsilon_t(\theta)$ 型。因此我们证明了：

引理 4. 设 θ 为实数。则 $\epsilon(\theta\uparrow^G)$ 等于 $\overline{G}_\theta$ 中 $+1$ 型对合的数量，减去 $\overline{G}_\theta$ 中 -1 型对合的数量。

例 5. 取 $G = Q_8$、 $N = Z(Q_8)$，以及 $Z(Q_8)$ 的非平凡线性特征标 θ。则 G/N 有 3 个非平凡对合，且每个都是 -1 型。因此 $\epsilon(\theta^G) = 1 - 3 = -2$。事实上，$\theta\uparrow^G = 2\chi$，其中 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 的 F-S 指标为 -1。

作为引 lica理 4 的应用，我们对 [Richards] 中的主要结果给出一个简短证明：

推论 6. 设 $|G_\theta/N|$ 为奇数。则 $\mathrm{Irr}(N)$ 中每个实 $\theta \in$ 都有到 G_θ 的唯一实扩张，并且 $\mathrm{Irr}(G \mid \theta)$ 中有唯一的实特征标。

证明。我们可以假设 θ 在 G 下不变。由于 $\Omega(G, N) = N$，我们得到 $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G|\theta)} \epsilon(\chi)\chi(1) = \epsilon(\theta)\theta(1)$。但是，对于所有 $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \theta)$， $\langle \chi\downarrow_N, \theta \rangle$ 都是奇数。因此，如果 $\chi = \overline{\chi}$，则 $\epsilon(\chi) = \epsilon(\theta)$。我们得出结论：存在唯一的实 $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \theta)$，此外还有 $\chi\downarrow_N = \theta$。□

对于 2-亏零的实特征标，我们得到引理 4 的一个更简单的版本：

推论 7. 设 θ 为实且亏 0。则 $\epsilon(\theta\uparrow^G)$ 等于 $\overline{G}_\theta$ 中对合的个数。

证明。回忆一下，若 $|N|/\theta(1)$ 是奇数，则 θ 为 2-亏零。此时已知 $\epsilon(\theta) = +1$。我们可以假设 θ 在 G 下不变。令 $t \in \Omega(G, N) \backslash N$，并令 $\lambda \in \mathrm{Lin}(N\langle t \rangle / N)$ 非平凡。那么 θ_t 和 $\lambda\theta_t$ 是 t 到 $N\langle t \rangle$ 的两个扩张。现在， N 包含 $N\langle t \rangle$ 的所有 2-正则元素。因此， θ_t 和 $\lambda\theta_t$ 属于 $N\langle t \rangle$ 的同一个 2-块。这个 2-块是实的。因此， θ_t 和 $\lambda\theta_t$ 都是实的，而 $\overline{t}$ 是 $+$ 型。□

G. Navarro 和 R. Gow 独立证明了，对于推论陈述中的 θ，存在一个规范的（因而是实的）扩张，记作 χ，它将 θ 扩张到 G。我们的推论也可以利用这一点以及 Gallagher 的结果来证明：

$$\mathrm{Irr}(G \mid \theta) = \{\mu\chi \mid \mu \in \mathrm{Irr}(G/N)\}.$$

情形 2： θ 有 G-轨道 $\{\theta, \overline{\theta}\}$ 和 $\theta \neq \overline{\theta}$。因此，对于所有$g \in G - G_\theta$， G_θ 在 G中的指数为 2，且 $\theta^g = \overline{\theta}$。由于 $\theta\uparrow^G$在 N之外取值为零，并且在 N上的限制为 $|G_\theta$： $N|(\theta + \overline{\theta})$，我们得到

$$\epsilon(\theta\uparrow^G) = \frac{|G_\theta : N|}{|G|} \sum_{t \in \Omega(G,N)} (\theta(t^2) + \overline{\theta}(t^2)) = \sum_{\overline{t} \in \Omega(\overline{G}) \backslash \overline{G}_\theta} \epsilon_t(\theta).$$

注意，如果 $t \in \Omega(G_\theta, N)$，那么 $\theta^t = \theta \neq \overline{\theta}$。因此 $\epsilon_t(\theta) = 0$，而 t 对$\epsilon(\theta\uparrow^G)$没有贡献。我们称 $\overline{t}$ 对于 θ具有 0 型。另一方面，对于 $t \in \Omega(G, N) \backslash G_\theta$， $\epsilon_t(\theta)$与实不可约特征标 $\theta^{N\langle t \rangle}$的 F-S 指标一致；我们称 $\overline{t} \in \Omega(\overline{G}) \backslash \overline{G}_\theta$ 具有 $\epsilon_t(\theta)$ 型，对应于 $\epsilon_t(\theta) = \pm 1$。由此我们证明了：

引理8。设 θ 为非实数。那么 $\epsilon(\theta\uparrow^G)$等于$\overline{G}_\theta^*\backslash\overline{G}_\theta$ 中 $+1$ 型对合的数量减去 $\overline{G}_\theta^*\backslash\overline{G}_\theta$中 -1 型对合的数量。

注意，除非 $\overline{G}=\overline{G}_\theta^*$ 在 $\overline{G}_\theta$上分裂，否则 $\epsilon(\theta\uparrow^G)=0$。再次，对于 N的亏零特征标，我们得到一个更简单的版本：

推论9. 设 θ 为非实且亏零的。则：

(1) $\epsilon(\theta\uparrow^G)$等于 $\overline{G}_\theta^*\backslash\overline{G}_\theta$中对合的数量。(2) $\overline{G}_\theta^*\backslash\overline{G}_\theta$ 中的每个对合都是 G 中某个对合的像。(3) 除非 G_θ^* 在 G_θ上分裂，否则 $\epsilon(\theta\uparrow^G)=0$。(4) 存在 $\chi\in\mathrm{Irr}(G\mid\theta)$，使得 $\epsilon(\chi)=+1$ 且 $\langle\chi\downarrow_N,\theta\rangle$ 为奇数。

证明。我们像上文一样假设 $G=G_\theta^*$。现在，θ 是 N的一个非实2-块中唯一的不可约特征标，且该块的亏为0。令 $t\in\Omega(G,N)\backslash G_\theta$，并设 $H:=N\langle t\rangle$。那么，$\theta\uparrow^H$ 是 H 的一个2-块 B_t 中的实不可约特征标，且该块的亏为0。特别地，$\epsilon_t(\theta)=\epsilon(\theta\uparrow^H)=+1$。所以 $\overline{t}$ 是 $+$ 型。现在由此得出(1)。

接下来，设 e 是 H 中的一个对合，它生成 B_t的扩张亏群。我们断言 $e\in Nt$。为此，假设 $e\in N$。我们知道，$\theta\uparrow^H$在 $1_C\uparrow^H$中出现一次，其中 $C=\mathbf{C}_H(e)$。由麦基公式可知，θ 在 $1_{C\cap N}\uparrow^N$中出现一次。但 $C\cap N$正是 N中对合 $e\in N$ 的中心化子。由于 θ 是射影不可约的，根据 [Murray]中的主要结果，θ 也是实的。这就证明了该断言，从而得出 (2)。

(3) 直接由 (1) 和 (2) 得出。

最后，为证明 (4)，设 S 是 G的一个西洛2-子群。那么 $(\theta\uparrow^G)\downarrow_S=m\rho_S$，其中 $m:=\theta(1)|G:N|/|S|$ 为奇数，且 ρ_S 是 S的正则特征标。特别地，$\langle\theta\uparrow^G,1_S\uparrow^G\rangle=m$ 为奇数。现在，$\theta\uparrow^G$ 是 G的一个实特征标。因此存在一个实的 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，使得 $\langle\theta\uparrow^G,\chi\rangle\langle\chi,1_S\uparrow^G\rangle$ 为奇数。由于 $\langle\chi,1_S\uparrow^G\rangle$ 为奇数，且 χ 为实数，因此 $\epsilon(\chi)=+1$。□

现在，对于任意的 $\theta\in\mathrm{Irr}(N)$，由引理 4 和 8 可知，$\epsilon(\theta\uparrow^G)$ 等于将 θ 共轭到 $\overline{\theta}$ in $\overline{G}$ 的两类对合的数量之差：

4. Real characters over an irreducible character of a normal subgroup

设 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G)$ 为 G 的实不可约特征标集合，$\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G\mid\theta)$ 为其中在 θ之上的实值特征标子集。我们不考虑 Gallagher 的交换子和 T，而转而考察 $\mathbb{C}G$中心中的下列元素：

$$T_{\mathbb{R}}:=\sum_{x,y\in G}xy^{-1}xy=\sum_{K\in\mathrm{Cl}(G)}|C_G(g_K)|(K^+)^2.$$

现在，对每个 $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$，我们有

$$\omega_\chi(T_{\mathbb{R}})=\sum_{K\in\mathrm{Cl}(G)}|C_G(g_K)||K|^2\frac{\chi(g_K)^2}{\chi(1)^2}=\begin{cases}\left(\frac{|G|}{\chi(1)}\right)^2, & \text{if } \chi=\overline{\chi},\\ 0, & \text{if } \chi\neq\overline{\chi}.\end{cases}$$

由此可得（参见式 (1)）

$$\chi(1)\chi(T_{\mathbb{R}}) = \epsilon(\chi)^2|G|^2, \quad \text{for all } \chi \in \mathrm{Irr}(G). \tag{4}$$

现在我们证明主定理的前半部分:

实值特征标的定理 1 的证明。假设 $\theta \in \mathbf{Irr}(N)$ 是实的。那么 Clifford 对应保持实性, 因此我们可以并且确实假设 θ 是 G-不变的。于是

$$\theta(1)\theta\uparrow^G(T_{\mathbb{R}}) = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G|\theta)} \chi(1)\chi(T_{\mathbb{R}}) = |G|^2|\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)|.$$

每个 $\overline{x} \in \overline{G}$ 在 G 中都有一个中心化子 $\mathbf{C}_G(\overline{x}) := \mathbf{N}_G(Nx)$，以及一个扩展中心化子 $\mathbf{C}^*_G(\overline{x}) := \mathbf{N}_G(Nx \cup Nx^{-1})$。令 $\mathbf{I}_G(\overline{x}) := \{y \in G \mid xy^{-1}xy \in N\}$。注意，除非 $\overline{x}$ 在 $\overline{G}$ 中是实的，否则 $\mathbf{I}_G(\overline{x})$ 为空。采用这一记号，我们有

$$|\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)| = \frac{1}{|G|\,|N|} \sum_{\substack{x\in G\\ \overline{x}\,\mathrm{real}}} \sum_{y\in \mathrm{I}_G(\overline{x})} \theta(1)\theta(xy^{-1}xy). \tag{5}$$

对于 $x \in G$，若 $\overline{x}$ 在 $\overline{G}$ 中是实的，我们可以选取 $e \in \mathbf{I}_G(\overline{x})$，使得 $\mathbf{I}_G(\overline{x}) = \mathbf{C}_G(\overline{x})e$。与前面一样，$\theta_x$ 是 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的一个扩张。现在 θ^e_x 是 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的另一个扩张。沿用 Gallagher 论证，我们有

$$\begin{aligned}\theta(1) \sum_{y\in \mathrm{I}_G(\overline{x})} \theta(xx^y) &= \theta_x(x) \sum_{c\in \mathrm{C}_G(\overline{x})} \theta^e_x(x^c)\\ &= \begin{cases} |\,\mathrm{C}_G(\overline{x})|\,\theta_x(x)\theta^e_x(x), & \text{if } \overline{x} \text{ is good for } \theta.\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

现在假设 $\overline{x}$ 对 θ是良好的。由于 $\overline{\theta}_x$ 是 $\overline{\theta} = \theta$ 到 $N\langle x\rangle$的扩张，我们可以写作 $\theta^e_x = \sigma\overline{\theta}_x$，其中 σ ∈属于 $\mathbf{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$。令 $\lambda \in$ 属于 $\mathbf{Irr}(\langle\overline{x}\rangle)$。由于 e 将 $\overline{x}$取逆，也有 $\lambda^e = \overline{\lambda}$。因此 $(\lambda\theta_x)^e = \overline{\lambda}\theta^e_x = \sigma\overline{\lambda\theta_x}$。这表明 σ 与 e 的选取以及 θ 到 $N\langle x\rangle$的扩张 θ_x 的选取无关。

由于 $e^2 \in \mathbf{C}_G(\overline{x})$，且 $\overline{x}$ 对 θ是良好的，我们有

$$\theta_x = \theta^{e^2}_x = (\sigma\overline{\theta}_x)^e = \overline{\sigma}^2\theta_x.$$

因此 $\overline{\sigma}^2$ 是平凡的，故 $\sigma = \overline{\sigma}$。所以，如果 σ 非平凡，则 $\mathbf{ker}(\sigma)$在 $\langle\overline{x}\rangle$中的指数为 2；此时 $\sigma(x) = -1$。这表明，若 $\theta^e_x = \overline{\theta}_x$，则 $\sigma(x) = 1$；若 $\theta^e_x \neq \overline{\theta}_x$[1]，则 $\sigma(x) = -1$。

由于 x 适用于 θ，因此对所有 $n \in N$， nx 适用于 θ 和 $\sigma(x) = \sigma(nx)$。所以

$$\sum_{n\in N} \theta_x(xn)\theta^e_x(xn) = \sigma(x)\sum_{n\in N} |\theta_x(xn)|^2 = |N|\sigma(x).$$

[1]采用第 3 节的记号， $\sigma(x) = (-1)^{1+\epsilon_e(\theta_x)^2}$

最后，当 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 在 $\overline{G}$中共轭时， $\sigma(\overline{x}) = \sigma(\overline{y})$。所以

$$|\operatorname{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)| = \frac{1}{|G|\,|N|} \sum_{\overline{x}\,\text{good}} |\operatorname{C}_{\overline{G}}(\overline{x})|\sigma(\overline{x}) = \sum \sigma(\overline{x}),$$

其中，$\overline{x}$ 遍历 $\overline{G}$的实共轭类中一组代表元，这些共轭类对 θ是良好的。□

注意，若 $\overline{x}$ 是 2-正则的，则它对 θ是良好的。事实上，我们可以取 θ_x 为 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的唯一实扩张（参见 Richards 定理）。于是，对所有 $y \in \operatorname{C}_G(\overline{x})$， θ_x^y 都是 θ 到 $N\langle x\rangle$的实扩张。因此，由 θ_x的唯一性可知 $\theta_x^y = \theta_x$。此外， σ 是平凡的，因为它是奇数阶群 $\langle\overline{x}\rangle$的实特征标。因此

$$\sigma(\overline{x}) = +1, \quad \text{if } \overline{x} \text{ is a 2-regular element of } \overline{G}.$$

反之，假设 $\overline{x}^2 = \overline{1}$。那么$\theta_x^e = \theta_x$，因为 $e \in \operatorname{C}_G(\overline{x})$。因此，若 θ_x 是实的，则 $\sigma(\overline{x}) = 1$；若 θ_x 不是实的，则$\sigma(\overline{x}) = -1$。

我们的推论可以利用 Clifford 理论和 Brauer 置换引理来证明:

推论 10. 设 Z 是 G 的一个阶为 2 的中心子群，并设 ζ 是 Z的非平凡线性特征标。那么 $\operatorname{Irr}(G \mid \zeta)$ 中实不可约特征标的数量，等于$\overline{G}$ 的实分裂类的数量，减去$\overline{G}$ 中属于 G 的非实类之像的实分裂类数量的两倍。

证明. 设 $Z = \langle z\rangle$。对于每个 $g \in G$，有两种可能。首先，假设 g 不与 zg在 G下共轭，这意味着 $\operatorname{C}_G(\overline{g}) = \operatorname{C}_G(g)$。那么，对于所有 $c \in \operatorname{C}_G(gZ)$， $\overline{g}$都是 $\zeta_g^c = \zeta_g$意义下的 ζ-良好。此外， $\overline{g}$ 的 $\overline{G}$-共轭类是 g的两个共轭类的像；一个包含 g ，另一个包含 zg。每个 $\chi \in \operatorname{Irr}(G \mid \zeta)$都满足$\chi(zg) = -\chi(g)$。

于是，假设 $[\operatorname{C}_G(\overline{g}) : \operatorname{C}_G(g)] = 2$。选取 $x \in G$ 使得 $g^x = zg$。那么

$$\zeta_g^x(g) = \zeta_g(zg) = -\zeta_g(g) \neq \zeta_g(g), \quad \text{as } \zeta_g(g) \neq 0.$$

因此， gZ 不是 ζ-良好的。另有， $\overline{g}$ 在$\overline{G}$中的共轭类是 g的一个共轭类在 $\chi \in$ 下的像。每个$G \mid \zeta$ 的 $\chi \in \operatorname{Irr}(G \mid \zeta)$都满足 $\chi(zg) = \chi(g) = 0$。

前面两段表明， G/Z的 ζ-良好共轭类的数量等于 G/Z的“分裂”共轭类的数量，这正是我们所预期的。

现在设 gN 在 G/Z中既是 ζ-良好的，又是实的。因此存在 $e \in G$ 使得$g^e \in \{g^{-1}, zg^{-1}\}$。设 g 在 G中不是实的。则 $g^e = zg^{-1}$。在这种情况下，$\zeta_g^e(g) = \zeta(zg^{-1}) = -\overline{\zeta}_g(g)$。因此 $\sigma(g) = -1$。另一种可能是 g在 G中是实的。因此我们可以假设 $g^e = g^{-1}$，于是$\zeta_g^e = \overline{\zeta}_g$。所以 $\sigma(g) = 1$。□

例：设 $G = 2.A_8$ 且 $\overline{G} = A_8$。那么 $\overline{G}$ 有 9 个分裂类和 9 个忠实不可约特征标。此外，$\overline{G}$ 有 5 个实分裂类。然而，其中一个 $6B$ 是 G的两个非实类的像。因此， G 有 $5 - 2 = 3$ 个实忠实不可约特征标。

例：设 $G = \mathrm{GL}(2,3)$，且 $N = \mathbf{Z}(G)$，其阶为 2。因此 $G/N \cong S_4$。现在， G有三个位于 N的非平凡特征 ζ 之上的不可约特征，但其中只有一个是实的。因此， G/N 有三个 ζ-良好的共轭类，且它们全都是实的。由此可得，对于两个类， $\sigma(x) = 1$ ；对于剩下的那个类， $\sigma(x) = -1$ 。

我们最后证明定理 1 的后半部分：

非实特征的定理 1 证明。假设 $\theta \in \mathrm{Irr}(G)$ 不是实的。根据扩展克利福德对应，我们可以并且不妨假设 θ 有 G-轨道 $\{\theta, \overline{\theta}\}$。于是$G = G^*_\theta$ 且 $M := G_\theta$ 在 G中的指数为 2。

对于 $\chi \in \mathrm{Irr}(G \mid \theta)$，我们有 $\langle \chi\downarrow_N, \theta\rangle = {}^{\chi(1)}2\theta(1)_\circ$ 因此

$$2\theta(1)\theta\uparrow^G = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G|\theta)} \chi(1)\chi.$$

此外， $2\theta\uparrow^G$在 N之外取值为零，并在 N上限制为 $|G: N|(\theta + \overline{\theta})$。

设 $T_{\mathbb{R}}$ 如上一节所述。将 $2\theta(1)\theta\uparrow^G$ 应用于 $T_{\mathbb{R}}$ ，得到

$$|\operatorname{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)| = \frac{\theta(1)}{2|G|\,|N|} \sum_{\substack{x\in G\\ \overline{x}\ \mathrm{real}}} \sum_{y\in \mathrm{I}_G(\overline{x})} (\theta(xx^y) + \overline{\theta}(xx^y)). \tag{6}$$

现在， $\mathrm{I}_G(\overline{x})$ 是 $\mathrm{C}_M(\overline{x})$ 的一个或两个陪集的并集，每个陪集都包含在 M或 $G\backslash M$ 中。此外， $x \in M$或 $x \in G\backslash M$。由此得到 $\mathrm{C}_M(\overline{x})e \subseteq \mathrm{I}_G(\overline{x})$ 的三种陪集类型：

类型 1： $x \in M$ 且 $e \in \mathrm{I}_G(\overline{x})\backslash M$。类型 2： $x \in M$ 且 $e \in \mathrm{I}_M(\overline{x})$。类型 3： $x \in G\backslash M$。

正如我们将看到的，只有第一种类型会对 $|\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)|$ 作出贡献。

类型 1：设 $x \in M$ 且 $e \in \mathrm{I}_G(\overline{x})\backslash M$。于是 $\overline{x}^e = \overline{x}^{-1}$ 且 $\theta^e = \overline{\theta}$。我们计算陪集 $\mathrm{C}_M(\overline{x})e$ 对 (6) 右侧的贡献。取 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的一个扩张 θ_x。现在， θ^e_x是 $\overline{\theta}$ 到 $N\langle x\rangle$ 的一个扩张。因此，对某个 $\sigma \in$，有 $\theta^e_x = \sigma\overline{\theta}_x$ $\mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$，其中 σ 与 θ_x无关。此外，对于 $c \in \mathrm{C}_G(\overline{x})$，对某个 $\omega_c \in$，有 $\theta^c_x = \omega_c\theta_x$ $\mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$，其中 ω_y 与 θ_x无关。因此，利用 e 取逆 $\mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$ 这一事实，可得 $\theta^{ce}_x = (\omega_c\theta_x)^e = \overline{\omega}_c\sigma\overline{\theta}_{x\circ}$ 于是

$$\begin{aligned}\theta(1) \sum_{c\in \mathrm{C}_M(\overline{x})} (\theta(xx^{ce}) + \overline{\theta}(xx^{ce})) &= \left(\sum_{c\in \mathrm{C}_M(\overline{x})} (\theta_x(x)\overline{\omega}_c(x)\sigma(x)\overline{\theta}_x(x) + \overline{\theta}_x(x)\omega_c(x)\overline{\sigma}(x)\theta_x(x)) \right) \\ &= \begin{cases} |\,\mathrm{C}_M(\overline{x})|\,|\theta_x(x)|^2(\sigma(x) + \overline{\sigma(x)}), & \text{if } x \text{ is good for } \theta \text{ in } M. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

现在假设 x在 M中适用于 θ。那么 $\theta^{e^2}_x = \theta_x$，因为 $e^2 \in \mathrm{C}_M(\overline{x})$。因此 $\theta_x = \theta^{e^2}_x = (\sigma\overline{\theta}_x)^e = \overline{\sigma}^2\theta_{x\circ}$ 我们推得 σ^2 是平凡的，从而 σ 是实的。所以 $\sigma(x) = 1$，如果

$\theta_x^e = \overline{\theta}_x$ 且 $\sigma(x) = -1$，如果 $\theta_x^e \neq \overline{\theta}_x$。因此，当 n遍历 N时，$\mathrm{C}_M(\overline{nx})e$ 对 (6) 的贡献为

$$|\mathrm{C}_M(\overline{x})| \sum_{n\in N} |\theta_x(nx)|^2(\sigma(nx) + \overline{\sigma(nx)})) = 2|\mathrm{C}_M(\overline{x})||N|\sigma(x).$$

类型 2：假设 $x \in M$ and $e \in \mathrm{I}_M(\overline{x})$。因此 $\overline{x}^e = \overline{x}^{-1}$ and $\theta^e = \theta$。我们计算 $\mathrm{C}_M(\overline{x})e$ 对 (6) 的贡献。取 θ 到 $N\langle x\rangle$ 的一个扩张 θ_x。那么对于 $y \in \mathrm{C}_M(\overline{x})e$，有 $\theta_x^y = \omega_y\theta_x$，其中 $\omega_y \in \mathrm{Lin}(\langle\overline{x}\rangle)$ 与 θ_x 无关。取复共轭，得到 $\overline{\theta}_x^y = \overline{\omega}_y\overline{\theta}_x$。因此

$$\begin{aligned}\theta(1) \sum_{y\in \mathrm{C}_M(\overline{x})e} (\theta(xx^y) + \overline{\theta}(xx^y)) &= \left(\sum_{y\in \mathrm{C}_M(\overline{x})e} (\theta_x(x)\omega_y(x)\theta_x(x) + \overline{\theta}_x(x)\overline{\omega}_y(x)\overline{\theta}_x(x)) \right) \\ &= \begin{cases} |\mathrm{C}_M(\overline{x})| \left(\theta_x(x)^2 + \overline{\theta}_x(x)^2\right), & \text{if } x \text{ is good for } \theta \text{ in } M. \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

假设 x 对 θ 是良好的。由于 $\theta_x{\downarrow_N} = \theta$，但 $\theta \neq \overline{\theta}$，我们得到 $\langle(\theta_x^2 + \overline{\theta}_x^2){\downarrow_N}, 1_N\rangle = 0$。因此

$$\sum_{n\in N} (\theta_x^2(nx) + \overline{\theta}_x^2(nx)) = 0.$$

我们得出结论：当 n 遍历 N 时，$\mathrm{C}_M(\overline{nx})e$ 对 (6) 的贡献为零。

类型 3：最后考虑 $x \in G\backslash M$ and $e \in \mathrm{I}_G(\overline{x})$ 的情形。显然，我们可以假设 $e \in M$。因此 $\overline{x}^e = \overline{x}^{-1}$, $\theta^e = \theta$ and $\mathrm{I}_G(\overline{x}) = \mathrm{C}_G(\overline{x})e$。

现在 $\theta^x = \overline{\theta} \neq \theta$。因此，我们无法将 θ 扩张到 $N\langle x\rangle$。另一方面，$\theta^{x^2} = \theta$。所以我们可以选择将 θ扩张到 $N\langle x^2\rangle$的扩张 θ_{x^2}。现在 $\theta_{x^2}^x$是将$\overline{\theta}$扩张到 $N\langle x^2\rangle$的扩张。特别地，$\theta_{x^2}^x \neq \theta_{x^2}$。令 $\hat{}\,\theta_x := \theta_{x^2}{\uparrow^{N\langle x\rangle}}$。那么，$\hat{}\,\theta_x$是 $N\langle x\rangle$的一个不可约特征，它在 $N\langle x^2\rangle$之外取值为零，并且在 N上的限制为 $\theta + \overline{\theta}$。

接下来，$X := \left\{x^{ce} \mid c \in \mathrm{c}_G(\overline{x})\right\}$ 是包含 x^e的 $\mathrm{c}_G(\overline{x})$共轭类。因此，$X^+$ 属于 $\mathbb{C}\mathrm{c}_G(\overline{x})$的中心。此外，$|X| = |\mathrm{c}_G(\overline{x}) : \mathrm{c}_G(x)|$，且 $\sum_{y\in \mathrm{c}_G(\overline{x})} xx^{ey} = |\mathrm{c}_G(x)|xX^+$。

现在，对于 $y \in \mathrm{I}_G(\overline{x})$，我们有 $xx^y \in N \leq N\langle x^2\rangle$。所以 $\theta(xx^y) + \overline{\theta}(xx^y) = \hat{}\,\theta_x(xx^y)$。因此

$$\theta(1) \sum_{y\in \mathrm{I}_G(\overline{x})} (\theta(xx^y) + \overline{\theta}(xx^y)) = \frac{1}{2}\hat{\theta}_x(x) \sum_{c\in \mathrm{C}_G(\overline{x})} \hat{\theta}_x(x^{ec}) = 0,$$

因为$\hat{}\,\theta_x$ 在 $N\langle x^2\rangle$之外消失。因此，$\mathrm{I}_G(\overline{x})$对（6）的贡献为零。

现在我们可以计算 $|\mathrm{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)|$。注意，只要 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 在$\overline{G}$中共轭，$\sigma(x) = \sigma(y)$。现在假设 $\overline{x} \in \overline{M}$和 $(\overline{x}, \theta)^e = (\overline{x}^{-1}, \overline{\theta})$，其中 $e \in G$。分两种情况。第一种情况是，包含 $\overline{x}$ 的$\overline{G}$ 的共轭类是 $\overline{M}$的一个实共轭类 K。那么 $|\mathrm{C}_G(\overline{x})| = 2|\mathrm{C}_M(\overline{x})|$。因此 $\sum_{\overline{x}\in K} \frac{2|\mathrm{C}_M\,\overline{x}\,|}{|G|} = 1^{()}$。第二种

情况是，包含 $\overline{x}$的 $\overline{G}$ 的共轭类 K 是 $\overline{M}$的两个非实共轭类的并。那么 $|\mathrm{C}_G(\overline{x})| = |\mathrm{C}_M(\overline{x})|$。因此 $\sum_{\overline{x}\in K} {}^{2|\mathrm{C}_M(\overline{x})|}_{|G|} = 2^{()}$。我们得出结论：

$$|\operatorname{Irr}_{\mathbb{R}}(G \mid \theta)| = \sum_{\overline{x}\,\mathrm{good}} \frac{2|\,\mathrm{C}_M(\overline{x})|}{|G|}\sigma(x) = \sum \sigma(\overline{x}),$$

其中，$\overline{x}$ 遍历 $\overline{M}$ 的共轭类代表元集合，这些代表元对于 θ是良好的，并且$\overline{x}$ 被 $G\backslash M$中的某个元素取逆。□

Acknowledgment

本文部分内容是在作者于2022年9月访问巴伦西亚大学期间撰写的。我们衷心感谢巴伦西亚大学数学系提供的经费支持，并感谢 Gabriel Navarro 的鼓励。Rod Gow 和 Benjamin Sambale 为本文提供了宝贵的意见。

References

[Gow] R. Gow，《实值与2-有理群特征》，《代数杂志》61（1979），第2期，388–413页。[Gallagher] P. X. Gallagher，《有限群的共轭类数》，《纯数学专题讨论会论文集》第XXI卷，第51–52页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1971年。[Ichikawa] T. Ichikawa，Y. Tachikawa，《超Frobenius-Schur指标与针面上的有限群规范理论》，2020年1月，arXiv:2002.10642 [math.RT].[Murray] J. Murray，《投射模与对合》，《代数杂志》299（2006），第2期，616–622页。[Navarro] G. Navarro，《特征理论与McKay猜想》，《剑桥高等数学研究》第175卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[Richards] I. M. Richards，《商群阶为奇数的群的特征》，《代数杂志》96（1985），第1期，45–47页。

Department of Mathematics and Statistics, National University of Ireland Maynooth, IRELAND电子邮箱地址：John.Murray@maths.nuim.ie