基于严格三角范数的图像模糊交互Bonferroni均值算子及其在多准则决策中的应用

Lantian Liu、Xinxing Wu、Guanrong Chen，IEEE终身会士

arXiv:2301.01192v1 [math.GM] 2 Jan 2023

摘要——基于图像模糊数中的封闭运算法则和严格三角范数，我们将图片模糊环境下的Bonferroni 均值（BM）算子加以扩展，提出图像模糊交互Bonferroni均值（PFIBM）、图像模糊交互加权Bonferroni均值（PFIWBM）和图片模糊交互归一化加权Bonferroni均值（PFINWBM）算子。我们证明了PFIBM和PFINWBM算子的单调性、幂等性、有界性和交换性。此外，我们通过应用PFINWBM算子，建立了一种新的图片模糊环境下的多准则决策（MCDM）方法。进一步地，我们将该MCDM方法应用于企业资源计划（ERP）系统的选择。基于六类著名三角范数所得的该MCDM方法比较结果表明，最佳选择始终是同一ERP系统。因此，我们的MCDM方法能够有效处理图片模糊多准则决策问题。

索引词—三角范数，Bonferroni 均值；图像模糊集；多准则决策。

一、引言

SINCE Zadeh 的模糊集 [1], Atanassov 直觉模糊集（IFSs） [2], 和犹豫模糊集（HFSs） [3]不能用于评估具有三个以上不同方面的情形。Cuong 和 Kreinovich [4],[5] 提出了图像模糊集（PFSs）的概念，以扩展评估维度。图像模糊集由正隶属函数、中性隶属函数和负隶属函数表征，它们在每个点处的和小于或等于1。类似于直觉模糊集，考虑到图像模糊集中三种隶属度的不确定性，Cuong [4] 提出了区间值图像模糊集（IvPFSs）的概念。作为直觉模糊集的扩展，当图像模糊集的中性隶属函数等于0时，图像模糊集便退化为直觉模糊集。Ullah 等人将图像模糊集与犹豫模糊集相结合，[6] 提出了图像犹豫模糊集（PHFSs）的概念。

对于一些实际的多准则决策（MCDM）问题，聚合算子旨在提供

稿件收到日期：201x年xx月00日；修订日期：201x年xx月00日。
L. Liu 任职于西南石油大学理学院，中国四川成都 610500。电子邮箱：(llt13207428373@163.com)。X. Wu 任职于：(1) 贵州财经大学数学与统计学院，中国贵阳 550025；(2) 西南石油大学理学院，中国四川成都 610500。电子邮箱：(wuxinxing5201314@163.com)。G. Chen 任职于香港城市大学电气工程系，中国香港特别行政区。电子邮箱：(eegchen@cityu.edu.hk)。所有通信请联系 X. Wu。本研究得到四川省自然科学基金（编号：2022NSFSC1821）和兰州交通大学青年科学基金（编号：2020022）资助。

对输入值进行有效的整体表征，是一种有用的工具。此外，实际多准则决策问题中各准则之间的相互关系普遍存在。为刻画每对准则之间的这种相互关系，Bonferroni [7] 针对清晰数提出了一种均值型聚合算子，称为Bonferroni均值（BM）。随后，该算子被成功推广，并应用于各种决策环境，包括模糊环境（[8], [9]）、直觉模糊环境（[10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22]）、q-阶正交对模糊环境（[23], [24], [25]）、（图片）犹豫模糊环境（[26], [27], [28], [29], [30], [31], [32]）、二型模糊环境（[33], [34], [35], [36], [37]）、球形模糊环境（[38]）以及图片模糊环境（[39], [40]）。例如，Xu等人 [17], [20], [21] 将BM推广为直觉模糊Bonferroni均值（IFBM）、加权直觉模糊Bonferroni均值（WIFBM）、区间值直觉模糊Bonferroni均值（IVIFBM）和加权区间值直觉模糊Bonferroni均值（WIVIFBM），用于聚合直觉模糊信息和区间值直觉模糊信息。他们证明了IFBM、WIFBM、IVIFBM和WIVIFBM具有幂等性、单调性、交换性和有界性。随后，Das等人 [11] 利用严格t-余范数对IFBM和WIFBM算子进行了扩展，并提出AIF-EBM算子和加权AIF-EBM（WAIFEBM）算子，成功将其应用于多准则决策问题。考虑直觉模糊环境下隶属函数与非隶属函数之间的相互作用，He等人[14] 提出直觉模糊交互Bonferroni均值（IFIBM）和加权直觉模糊交互Bonferroni均值（WIFIBM）算子，并利用连续阿基米德t范数（ [13]）将其扩展为EIFIBM算子。然而，尽管He等人 [13], [14]证明了这三种算子的幂等性和交换性，它们却不具有单调性，这可能导致一些不合理的聚合结果。Liu和Gao [36] 提出了一种基于区间二型模糊优先Choquet归一化加权Bonferroni均值算子的绿色供应商选择多准则决策方法。Chiao[33] 在区间二型模糊环境下，通过开发量词引导有序加权平均（QGOWA）和BM算子，为多准则决策问题提出了一些新模型。基于BM和几何均值，Zhu等人 [31], [32] 提出了犹豫模糊几何Bonferroni均值（HFGBM）、犹豫模糊Choquet几何Bonferroni均值（HFCGBM）以及犹豫模糊

Bonferroni 均值（HFBM）算子，用于犹豫模糊数据，并将其应用于多准则决策。通过结合BM与犹豫模糊环境下的幂均值，He等人[27] 得到了犹豫模糊幂几何Bonferroni均值和犹豫模糊幂Bonferroni均值，并提出了一种新的犹豫模糊多属性群体决策方法。

为拓展直觉模糊集的评价维度和应用范围，许多学者开始研究图像模糊Bonferroni均值（PFBM）、图像犹豫模糊Bonferroni均值（PHFBM）和q-阶正交对模糊Bonferroni均值（q-ROFBM）算子及其在多准则决策中的应用。Liu和Wang [24] 提出了q-阶正交对模糊Archimedean Bonferroni均值（q-ROFABM）和q-阶正交对模糊加权Archimedean Bonferroni均值（q-ROFWABM）算子，并基于q-ROFWABM算子开发了一种新颖的多准则决策方法。Wei [40] 提出了一些图像不确定语言Bonferroni均值（PULBM）算子，并将其应用于为通信行业选择服务外包供应商。近期，Ates. 和Akay [39]通过引入PFBM、图像模糊归一化加权Bonferroni均值（PFNWBM）和图像模糊有序加权Bonferroni均值（PFOWBM）算子，提出了一种新的图像模糊多准则决策方法。Mahmood等人 [28] 基于他们提出的PHFBM、图像犹豫模糊加权Bonferroni均值（PHFWBM）、图像犹豫模糊几何Bonferroni均值（PHFGBM）和图像犹豫模糊加权几何Bonferroni均值（PHFWGBM），给出了一种在图像犹豫模糊环境下进行多属性群体决策的新方法。然而，正如 Wu 等人在 [41], 中指出的，[39], [40] 中的图像模糊聚合算子有一个共同的缺点：它们可能不满足三个隶属度之和不超过1这一条件。因此，这类算子在图像模糊数上不封闭。同时，很容易看出，[28] 中的运算 $\otimes$ 和 A^{λ} 在图像犹豫模糊集上不封闭，因为它们都是通过使用两个三角余范数定义的。

为获得闭式图像模糊Bonferroni均值算子，本文基于 Wu 等人提出的图像模糊数的一些基本运算，[41]，引入了针对图像模糊数的图像模糊交互Bonferroni均值（PFIBM）、图像模糊交互加权Bonferroni均值（PFIWBM）以及图片模糊交互归一化加权Bonferroni均值（PFINWBM）算子，并证明这些算子具有单调性、幂等性、有界性和交换性。此外，本文利用 PFINWBM 算子提出了一种图片模糊环境下的新型多准则决策方法，并将其应用于企业资源规划系统的选择。采用六类著名的三角范数，包括代数乘法 $T_{\mathbf{P}}$、Schweizer-Sklar t范数 $T_{\mathbf{SS}\gamma}$、Hamacher t范数 $T_{\mathbf{H}\gamma}$、Frank t范数 $T_{\mathbf{F}\gamma}$、Dombi t范数 $T_{\mathbf{D}\gamma}$ 以及 Acz´el- Alsina t范数 $T_{\gamma}^{\mathbf{AA}}$时，选出的最佳 ERP 系统始终相同，这证明了我们方法的有效性。

II. 预备知识

A. Bonferroni 均值（BM）

Bonferroni 均值是用于精确数据的一种重要聚合算子，最初由 Bonferroni [7]提出，定义如下。

定义 2.1（*[7]*）：设 p、$q \geq 0$ 和 a_i（$i = 1, 2, ..., n$）为一组精确数据，且满足 $a_i \geq 0$。函数 $\mathrm{B}^{p,q}$定义为

$$\mathrm{B}^{p,q}(a_1, \ldots, a_n) = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i^p \cdot a_j^q \right]^{\frac{1}{p+q}},$$

称为 Bonferroni 均值（BM）算子。

B. 图像模糊集

定义 2.2（*[4, 定义 3.1]*）：设 X 为论域。论域 X 上的图像模糊集（PFS） P 定义为如下形式的对象

$$P = \{\langle x; \mu_P(x), \eta_P(x), \nu_P(x)\rangle \mid x \in X\}, \tag{1}$$

其中 $\mu_P(x)$、$\eta_P(x)$、$\nu_P(x) \in [0,1]$，$\mu_P(x) + \eta_P(x) + \nu_P(x) \leq 1$，且 $\pi_P(x) = 1 - (\mu_P(x) + \eta_P(x) + \nu_P(x))$ 对任意$x \in X$均成立。$\mu_P(x)$、$\eta_P(x)$ 和 $\nu_P(x)$ 分别表示 x 在 P 中的正向隶属度、中性隶属度和负隶属度。$\pi_P(x)$ 表示 x 在 P 中的拒绝隶属度。特别地，满足 μ、η、$\nu \in [0,1]$ 且 $\mu + \eta + \nu \leq 1$ 的三元组 $\langle \mu, \eta, \nu\rangle$ 称为图像模糊数（PFN）。为方便起见，PFN α 记作 $\alpha = \langle \mu_\alpha, \eta_\alpha, \nu_\alpha\rangle$。

为了有效区分所有毕达哥拉斯模糊数，Wu 等人 [41]通过应用得分函数和精确度函数，为毕达哥拉斯模糊数引入了以下线性序。

定义 2.3（*[41, 定义 2.11]*）：设 $\alpha = \langle \mu_\alpha, \eta_\alpha, \nu_\alpha\rangle$为一个图像模糊数。则得分函数 $S(\alpha)$定义为 $S(\alpha) = \mu_\alpha - \nu_\alpha$，其第一精确度函数$H_1(\alpha)$和第二精确度函数 $H_2(\alpha)$分别定义为 $H_1(\alpha) = \mu_\alpha + \nu_\alpha$ 和 $H_2(\alpha) = \mu_\alpha + \eta_\alpha + \nu_\alpha$。则对于两个图像模糊数 α 和 β,

- 若 $S(\alpha) < S(\beta)$，则 α 小于 β，记作$\alpha \prec_{\mathrm{w}} \beta$;
- 若 $S(\alpha) = S(\beta)$，则——若 $H_1(\alpha) < H_1(\beta)$，则 α 小于 β，记作 $\alpha \prec_{\mathrm{w}} \beta$; ——若 $H_1(\alpha) = H_1(\beta)$，则
  - 若 $H_2(\alpha) = H_2(\beta)$，则 $\alpha = \beta$;
  - 若 $H_2(\alpha) < H_2(\beta)$，则 α 小于 β，记作 $\alpha \prec_{\mathrm{w}} \beta$。

若 $\alpha \prec_{\mathrm{w}} \beta$ 或 $\alpha = \beta$，我们将其记作 $\alpha \preccurlyeq_{\mathrm{w}} \beta$。

C. 三角范数

定义 2.4（*[42, 定义 1.1]*）：若二元函数T: $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ 满足以下条件，则称其为 $[0,1]$ 上的三角范数（简称 t-范数）：对于任意 x、y、$z \in [0,1]$，

(T_1)（交换性） $T(x,y) = T(y,x)$; (T_2)（结合性） $T(T(x,y), z) = T(x, T(y,z))$; ($\mathrm{T}_3$)（单调性）若 $x \leq y$，则 $T(x,z) \leq T(y,z)$; (T_4)（中性元性） $T(1,x) = x$。

由于 t-范数 T 的结合性，我们可以将 T 扩展为一个 n 元函数 $T^{(n)}$: $[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$，如下所示（参见[42, 备注 1.10]）：

$$T^{(n)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \triangleq T\left(T^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n\right).$$

特别地，当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ 时，我们简写为

$$x_T^{(n)} = T^{(n)}(x, x, \ldots, x)\ (n \geq 2),\ x_T^{(0)} = 1,\ \text{and}\ x_T^{(1)} = x.$$

定义 2.5（*[42,* 定义 1。*13]*）：二元函数 S：$[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ 称为三角余范数（简称t-余范数）在 $[0,1]$ 上，若对于任意 x，y，$z \in [0,1]$，它满足（T_1）–（T_3）且

(S_4)（中性元性） $S(x,0) = x$。

t-范数与 t-余范数的对偶表达式如下。

命题 2.1（*[42,* 命题 1.*15]*）：二元函数S：$[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ 是 t-余范数，当且仅当存在一个 t-范数 T，使得对于任意（x，y）$\in [0,1]^2$,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y). \tag{2}$$

由公式（2）给出的 t-范数称为的对偶 t-余范数。T类似地，我们可以给出 t-余范数的对偶 t-范数的定义 S。

定义 2.6（*[42,* 定义 3.*2]*）：设 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 是扩展实数轴 $[-\infty,+\infty]$和 f的两个闭子区间，$[a,b] \longrightarrow [c,d]$ 是一个单调函数。则 f的伪逆 $f^{(-1)}$：$[c,d] \longrightarrow [a,b]$ 定义为

$$f^{(-1)} = \sup\{x \in [a,b] \mid (f(x) - y)(f(b) - f(a)) < 0\}.$$

定义 2.7（*[42,* 定义 3.*25]*）：t-范数 T 的加法生成元 τ：$[0,1] \longrightarrow [0,+\infty]$ 是一个严格递减函数，并且在 0 处右连续，满足 $\tau(1) = 0$，使得对于任意 $(x,y) \in [0,1]^2$，都有

$$\tau(x) + \tau(y) \in \mathrm{Ran}(\tau) \cup [\tau(0), +\infty],$$

and

$$T(x,y) = \tau^{(-1)}(\tau(x) + \tau(y)).$$

定义 2.8（*[42,* 定义 2.9 和 2.*13]*）：t-范数 T称为

(i) 当 $x > 0$ 且 $y < z$ 时，若 $T(x,y) < T(x,z)$，则称其严格单调。(ii) 若其连续且严格单调，则称其为严格的。

引理 2.1（*[42,* 命题 2.15，定理 5.*1]*）：对于函数 T：$[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$，以下条件等价：

(i) T 是严格 t-范数；(ii) T 具有连续加法生成元 τ，且 $\tau(0) = +\infty$。

III. PFN 的基本运算

本节介绍 PFN 的一些基本运算，其源于 Wu 等人 [41] 的研究。

定义 3.1（*[41,* 定义 5.*1]*）：设 $\alpha_1 = \langle \mu_1, \eta_1, \nu_1 \rangle$、$\alpha_2 = \langle \mu_2, \eta_2, \nu_2 \rangle$和 $\alpha = \langle \mu, \eta, \nu \rangle$ 为三个毕达哥拉斯模糊数，T 为具有加法生成元 τ 的严格 t-范数，S 为 T 的对偶 t-余范数。定义

(i) $\alpha_1 \oplus_T \alpha_2 = \langle S(\mu_1,\mu_2), T(\eta_1+\nu_1, \eta_2+\nu_2) - T(\nu_1,\nu_2), T(\nu_1,\nu_2) \rangle$；
(ii) $\alpha_1 \otimes_T \alpha_2 = \langle T(\mu_1,\mu_2), T(\eta_1+\mu_1, \eta_2+\mu_2) - T(\mu_1,\mu_2), S(\nu_1,\nu_2) \rangle$;
(iii) $\lambda_T \cdot \alpha = \langle \zeta^{-1}(\lambda \cdot \zeta(\mu)), \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\eta+\nu)) - \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\nu)), \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\nu)) \rangle$, $\lambda > 0$;
(iv) $\alpha^{\lambda_T} = \langle \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\mu)), \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\eta+\mu)) - \tau^{-1}(\lambda \cdot \tau(\mu)), \zeta^{-1}(\lambda \cdot \zeta(\nu)) \rangle$, $\lambda > 0$;

其中，$\zeta(x) = \tau(1-x)$ 是 S 的加法生成元。若根据上下文可以明确知道 t-范数 T，则分别将 $\oplus_T$、$\otimes_T$、$\lambda_T \cdot \alpha$ 和 α^{λ_T} 记作 $\oplus$、$\otimes$、$\lambda \cdot \alpha$ 和 α^{λ}。

定理 3.1（*[41,* 定理 5.*1]*）：设 $\alpha_1 = \langle \mu_1, \eta_1, \nu_1 \rangle$、$\alpha_2 = \langle \mu_2, \eta_2, \nu_2 \rangle$ 以及 $\alpha = \langle \mu, \eta, \nu \rangle$ 是三个毕达哥拉斯模糊数，且 T 是严格 t-范数。那么，对于任意 $\lambda > 0$，所有 $\alpha_1 \oplus_T \alpha_2$、$\alpha_1 \otimes_T \alpha_2$、$\lambda_T \alpha$ 和 α^{λ_T} 都是毕达哥拉斯模糊数。

定理 3.2（*[41,* 定理 5.*2]*）：设 α、β、γ 为三个毕达哥拉斯模糊数，T 为严格 t-范数。则对于任意 λ、$\xi > 0$，有

(i) $\alpha \oplus_T \beta = \beta \oplus_T \alpha$;
(ii) $\alpha \otimes_T \beta = \beta \otimes_T \alpha$;
(iii) $(\alpha \oplus_T \beta) \oplus_T \gamma = \alpha \oplus_T (\beta \oplus_T \gamma)$;
(iv) $(\alpha \otimes_T \beta) \otimes_T \gamma = \alpha \otimes_T (\beta \otimes_T \gamma)$;
(v) $(\xi_T \alpha) \oplus_T (\lambda_T \alpha) = (\xi + \lambda)_T \alpha$;
(vi) $\left(\alpha^{\xi_T}\right) \otimes_T \left(\alpha^{\lambda_T}\right) = \alpha^{(\xi+\lambda)_T}$;
(vii) $\lambda_T \cdot (\alpha \oplus_T \beta) = (\lambda_T \cdot \alpha) \oplus_T (\lambda_T \cdot \beta)$;
(viii) $(\alpha \otimes_T \beta)^{\lambda_T} = \alpha^{\lambda_T} \otimes_T \beta^{\lambda_T}$;
(ix) $\xi_T \cdot (\lambda_T \cdot \alpha) = (\lambda \cdot \xi)_T \cdot \alpha$;
(x) $\left(\alpha^{\lambda_T}\right)^{\xi_T} = \alpha^{(\lambda \cdot \xi)_T}$.

定理 3.3（*[41,* 定理 5.*3]*）：设 $\alpha_i = \langle \mu_i, \eta_i, \nu_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数，T为严格 t-范数。则，

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \oplus_T \alpha_2 \oplus_T \cdots \oplus_T \alpha_n \\ &= \Big\langle S^{(n)}(\mu_1,\ldots,\mu_n), T^{(n)}(\eta_1+\nu_1,\ldots,\eta_n+\nu_n) \\ &\quad - T^{(n)}(\nu_1,\ldots,\nu_n), T^{(n)}(\nu_1,\ldots,\nu_n) \Big\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

and

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \otimes_T \alpha_2 \otimes_T \cdots \otimes_T \alpha_n \\ &= \Big\langle T^{(n)}(\mu_1,\ldots,\mu_n), T^{(n)}(\eta_1+\mu_1,\ldots,\eta_n+\mu_n) \\ &\quad - T^{(n)}(\mu_1,\ldots,\mu_n), S^{(n)}(\nu_1,\ldots,\nu_n) \Big\rangle, \end{aligned} \tag{4}$$

其中，S 是 T的对偶 t-余模。

注 1：设 $\alpha_i = \langle \mu_i, \eta_i, \nu_i \rangle$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ 为一组毕达哥拉斯模糊数，且 T 是一个具有加法生成元 τ的严格 t-范数。根据定理 3.3，可以验证

$$\begin{aligned} &\bigoplus_{i=1}^{n} \alpha_i \triangleq \alpha_1 \oplus_T \alpha_2 \oplus_T \cdots \oplus_T \alpha_n \\ &= \left\langle \zeta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \zeta(\mu_{\alpha_i})\right), \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\eta_{\alpha_i} + \nu_{\alpha_i})\right) \right. \\ &\quad \left. - \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\nu_{\alpha_i})\right), \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\nu_{\alpha_i})\right) \right\rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

and

$$\begin{aligned} &\bigotimes_{i=1}^{n} \alpha_i \triangleq \alpha_1 \otimes_T \alpha_2 \otimes_T \cdots \otimes_T \alpha_n \\ &= \left\langle \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\mu_{\alpha_i})\right), \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i})\right) \right. \\ &\quad \left. - \tau^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau(\mu_{\alpha_i})\right), \zeta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \zeta(\nu_{\alpha_i})\right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

特别地，当 $\alpha_i = \alpha = \langle \mu, \eta, \nu \rangle (i = 1, 2, \ldots, n)$ 时，我们有 $\alpha \oplus_T \alpha \oplus_T \cdots \oplus_T \alpha = \langle \zeta^{-1}(n \cdot \zeta(\mu_\alpha))\ \tau^{-1}(n\ \tau(\eta_\alpha + \nu_\alpha))\ -\tau^{-1}(n \cdot \tau(\nu_\alpha))\ \tau^{-1}(n \cdot \tau(\nu_\alpha)) \rangle = n \cdot \alpha$和$\alpha \otimes_T \alpha \otimes_T \cdots \otimes_T \alpha = \langle \tau^{-1}(n \cdot \tau(\mu_\alpha))\ \tau^{-1}(n \cdot \tau(\eta_\alpha + \mu_\alpha))\ -\tau^{-1}(n \cdot \tau(\mu_\alpha))\ \zeta^{-1}(n \cdot \zeta(\nu_\alpha)) \rangle = \alpha^n$。

IV. 图像模糊交互式 Bonferroni 均值（PFIBM）算子

结合定义 3.1 中给出的基本运算律与 [7]，中的 BM 算子，本节提出一种名为图形模糊交互式 Bonferroni 均值（PFIBM）的聚合算子，用于聚合图形模糊信息，并证明 PFIBM 算子的单调性、幂等性、有界性和交换性。

定义 4.1：设 $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 是一组图像模糊数，T 是一个 t-范数。对于 $p, q > 0$，定义由 T 诱导的图像模糊交互 Bonferroni均值（PFIBM）算子如下：

$$\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left[\frac{1}{n(n-1)} \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q \right) \right]^{\frac{1}{p+q}}.$$

定理 4.1：设 $\alpha_i = \langle \mu_{\alpha_i}, \eta_{\alpha_i}, \nu_{\alpha_i} \rangle (i = 1, 2, \ldots, n)$ 是一组图像模糊数，T 是一个具有加法生成元 τ 的严格 t-范数。那么，对于 p, $q > 0$，使用由 T 诱导的 PFIBM 得到的聚合值也是一个图像模糊数，且

$$\begin{aligned} &\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ =&\left\langle \tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q} \cdot \tau(\mu) \right), \tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q} \cdot \tau(\eta + \mu) \right) \right. \\ &\left. - \tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q} \cdot \tau(\mu) \right), \zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q} \cdot \zeta(\nu) \right) \right\rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

where $\mu = \zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \zeta\left(\tau^{-1}\left(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i}) + q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j}) \right) \right) \right)$,

$\eta = \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\left(\tau^{-1}(p \cdot \tau(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i}) + q \cdot \tau(\eta_{\alpha_j} + \mu_{\alpha_j})) - \tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i}) + q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})) + \zeta^{-1}(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j})) \right) \right) - \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\left(\zeta^{-1}(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j})) \right) \right)$,

$\nu = \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\left(\zeta^{-1}\left(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j}) \right) \right) \right)$,

and $\zeta(x) = \tau(1 - x)$.

证明：首先，根据定理3.1，我们知道这四种运算 $\oplus$、$\otimes$、$\lambda\alpha$和 α^λ 在毕达哥拉斯模糊数中都是封闭的。因此，$\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$ 根据定义4.1可知是一个图像模糊数。

其次，我们证明公式（7）成立。根据定义 3.1中给出的运算律 (ii) 和 (iv)，对于$1 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} \alpha_i^p =& \left\langle \tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i})), \tau^{-1}(p \cdot \tau(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i})) \right. \\ &\left. - \tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i})), \zeta^{-1}(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i})) \right\rangle, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \alpha_j^q =& \left\langle \tau^{-1}(q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})), \tau^{-1}(q \cdot \tau(\eta_{\alpha_j} + \mu_{\alpha_j})) \right. \\ &\left. - \tau^{-1}(q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})), \zeta^{-1}(q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j})) \right\rangle, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q \\ =& \left\langle T\left(\tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i})), \tau^{-1}(q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})) \right), \right. \\ &T\left(\tau^{-1}\left(p \cdot \tau(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i}) \right), \tau^{-1}\left(q \cdot \tau(\eta_{\alpha_j} + \mu_{\alpha_j}) \right) \right) \\ &- T\left(\tau^{-1}\left(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i}) \right), \tau^{-1}\left(q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j}) \right) \right), \\ &\left. S\left(\zeta^{-1}\left(p \cdot \zeta\left(\nu_{\alpha_i} \right) \right), \zeta^{-1}\left(q \cdot \zeta\left(\nu_{\alpha_j} \right) \right) \right) \right\rangle \\ =& \left\langle \tau^{-1}\left(p \cdot \tau\left(\mu_{\alpha_i} \right) + q \cdot \tau\left(\mu_{\alpha_j} \right) \right), \right. \\ &\tau^{-1}\left(p \cdot \tau\left(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i} \right) + q \cdot \tau\left(\eta_{\alpha_j} + \mu_{\alpha_j} \right) \right) \\ &- \tau^{-1}\left(p \cdot \tau\left(\mu_{\alpha_i} \right) + q \cdot \tau\left(\mu_{\alpha_j} \right) \right), \\ &\left. \zeta^{-1}\left(p \cdot \zeta\left(\nu_{\alpha_i} \right) + q \cdot \zeta\left(\nu_{\alpha_j} \right) \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

设 $\beta_{ij} = \langle \mu_{\beta_{ij}}, \eta_{\beta_{ij}}, \nu_{\beta_{ij}} \rangle = \alpha_i^p \otimes \alpha_j^q$。那么，根据定理3.3或公式（5），我们有

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_{ij} =& \left\langle \zeta^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \zeta(\mu_{\beta_{ij}}) \Big), \tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau(\eta_{\beta_{ij}} + \nu_{\beta_{ij}}) \Big) \right. \\ &\left. -\tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau(\nu_{\beta_{ij}}) \Big), \tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau(\nu_{\beta_{ij}}) \Big) \right\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

这与定义 3.1 (iii) 一起，意味着

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n(n-1)} \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\alpha_i^p \otimes \alpha_j^q \right) = \frac{1}{n(n-1)} \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \beta_{ij} \\ =& \left\langle \zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \zeta(\mu_{\beta_{ij}}) \right), \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \right. \right. \\ &\left. \tau(\eta_{\beta_{ij}} + \nu_{\beta_{ij}}) \right) - \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau(\nu_{\beta_{ij}}) \right), \\ &\left. \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau(\nu_{\beta_{ij}}) \right) \right\rangle \\ =& \left\langle \zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \zeta\left(\tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i}) + q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})) \right) \right) \right. , \\ &\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\Big(\tau^{-1}(p \cdot \tau(\eta_{\alpha_i} + \mu_{\alpha_i}) \right. \\ &+ q \cdot \tau(\eta_{\alpha_j} + \mu_{\alpha_j})) - \tau^{-1}(p \cdot \tau(\mu_{\alpha_i}) + q \cdot \tau(\mu_{\alpha_j})) \\ &\left. + \zeta^{-1}(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j})) \Big) \right) \\ &- \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\Big(\zeta^{-1}(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j})) \Big) \right), \\ &\left. \tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \tau\Big(\zeta^{-1}\left(p \cdot \zeta(\nu_{\alpha_i}) + q \cdot \zeta(\nu_{\alpha_j}) \right) \Big) \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

$\bigoplus_{j=1}^{n}\left(\alpha_i^p\otimes\alpha_j^q\right)$。那么，根据$\overline{i\neq j}$定义 3.1 (iv)，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\gamma^{\frac{1}{p+q}}\\&=\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\mu)\right)\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\eta+\mu)\right)\right.\\&\quad\left.-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\mu)\right),\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\nu)\right)\right\rangle,\end{aligned}$$

其中 μ， η， ν 与定理 4.1中的值相等。 ■

注 2：若对每个 α_i 取 $\eta_{\alpha_i}=0$，即每个 α_i 都退化为一个直觉模糊数，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\mu)\right),\ 0,\ \zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\nu)\right)\right\rangle,\end{aligned}\tag{10}$$

这与[43, 定理 1]一致。这意味着 [43,定理 1] 是定理4.1的直接推论。

将某些特定的 t-范数用于定理 4.1，可得到以下结果。

(1) 若 $T=T_{\mathbf{P}}$（代数乘积），注意到 $T_{\mathbf{P}}$ 的加法生成元为 $-\log x$，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIBM}_{T_{\mathbf{P}}}^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\left[1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right]^{\frac{1}{p+q}},\right.\\&\left[\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left((\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i})^p(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j})^q-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\right.\right.\right.\\&\left.\left.+1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\\&-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\\&+1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_i}^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\Bigg]^{\frac{1}{p+q}}\\&-\left[1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right]^{\frac{1}{p+q}},\\&\left.1-\left[1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right]^{\frac{1}{p+q}}\right\rangle.\end{aligned}$$

特别地，若对每个 α_i 取 $\eta_{\alpha_i}=0$，即每个 α_i 都退化为一个直觉模糊数，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIBM}_{T_{\mathbf{P}}}^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\left[1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-\mu_{\alpha_i}^p\mu_{\alpha_j}^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right]^{\frac{1}{p+q}},\ 0,\ 1-\right.\\&\left.\left[1-\left(\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-(1-\nu_{\alpha_i})^p(1-\nu_{\alpha_j})^q\right)\right)^{\frac{1}{n(n-1)}}\right]^{\frac{1}{p+q}}\right\rangle,\end{aligned}\tag{11}$$

这与[21, 定理 1] 和 [19, 定理 1.4。1]一致。这意味着 [21, 定理 1] 和 [19, 定理 1.4.1 是定理4.1的直接推论。]

(2) If we take T as Schweizer-Sklar t-norms $T_\gamma^{\mathbf{SS}}$ ($\gamma\in(-\infty,0)$), then $\mathrm{PFIBM}_{T_\gamma^{\mathbf{SS}}}^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left\langle(1-\frac{1}{p+q}(1-\mu^\gamma))^{\frac{1}{\gamma}},(1-\frac{1}{p+q}(1-(\eta+\mu)^\gamma))^{\frac{1}{\gamma}}-(1-\frac{1}{p+q}(1-\mu^\gamma))^{\frac{1}{\gamma}},1-(1-\frac{1}{p+q}(1-(1-\nu)^\gamma))^{\frac{1}{\gamma}}\right\rangle$, where $\mu=1-\left[\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-\left(1-p\left(1-\mu_{\alpha_i}^\gamma\right)-q\left(1-\mu_{\alpha_j}^\gamma\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}$,

$$\begin{aligned}\eta=&\left\{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[(1-p(1-(\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i})^\gamma)\right.\right.\\&-q\left(1-(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j})^\gamma\right))^{\frac{1}{\gamma}}-\left(1-p\left(1-\mu_{\alpha_i}^\gamma\right)\right.\\&\left.-q\left(1-\mu_{\alpha_j}^\gamma\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+1-(1-p(1-(1-\nu_{\alpha_i})^\gamma)\\&\left.-q\left(1-(1-\nu_{\alpha_j})^\gamma\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Bigg]^\gamma\Bigg\}^{\frac{1}{\gamma}}\\&-\left\{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[1-(1-p(1-(1-\nu_{\alpha_i})^\gamma)\right.\right.\\&\left.\left.-q\left(1-(1-\nu_{\alpha_j})^\gamma\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}\Bigg]^\gamma\right\}^{\frac{1}{\gamma}},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\nu=&\left[\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(1-(1-p(1-(1-\nu_{\alpha_i})^\gamma)\right.\right.\\&\left.\left.-q\left(1-(1-\nu_{\alpha_j})^\gamma\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma\Bigg]^{\frac{1}{\gamma}}.\end{aligned}$$

(3) If we take T as Hamacher t-norms $T_\gamma^{\mathbf{H}}$ ($\gamma\in(0,+\infty)$), then $\mathrm{PFIBM}_{T_\gamma^{\mathbf{H}}}^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left\langle\frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\mu}+1-\gamma\right)^{\frac{1}{p+q}}+\gamma-1},\right.$ $\left.\frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\eta+\mu}+1-\gamma\right)^{\frac{1}{p+q}}+\gamma-1}-\frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\mu}+1-\gamma\right)^{\frac{1}{p+q}}+\gamma-1},1-\frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{1-\nu}+1-\gamma\right)^{\frac{1}{p+q}}+\gamma-1}\right\rangle$, where

$$\mu=1-\frac{\gamma}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma^2}{\overline{\eta}_2-\gamma}+1\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}+\gamma-1},$$

$$\eta=\frac{\gamma}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma}{\overline{\eta}_1-\frac{\gamma}{\overline{\eta}_2}+1-\frac{\gamma}{\overline{\eta}_3}}+1-\gamma\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}+\gamma-1}-\frac{\gamma}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma^2}{\overline{\eta}_3-\gamma}+1\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}+\gamma-1},$$

$$\nu=\frac{\gamma}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma^2}{\overline{\eta}_3-\gamma}+1\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}+\gamma-1},$$

and $\overline{\eta}_1=\left(\frac{\gamma}{\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}}+1-\gamma\right)^p\left(\frac{\gamma}{\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}}+1-\gamma\right)^q+\gamma-1$, $\overline{\eta}_2=\left(\frac{\gamma}{\mu_{\alpha_i}}+1-\gamma\right)^p\left(\frac{\gamma}{\mu_{\alpha_j}}+1-\gamma\right)^q+\gamma-1$, $\overline{\eta}_3=\left(\frac{\gamma}{1-\nu_{\alpha_i}}+1-\gamma\right)^p\left(\frac{\gamma}{1-\nu_{\alpha_j}}+1-\gamma\right)^q+\gamma-1$.

(4) If we take T as Frank t-norms $T_\gamma^{\mathbf{F}}$ ($\gamma\in(0,1)\cup(1,+\infty)$), then $\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T_\gamma^{\mathbf{F}}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left\langle \log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\mu}-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}}+1\right],\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\eta+\mu}-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}}+1\right]-\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\mu}-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}}+1\right],1-\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\nu}-1}\right)^{\frac{1}{p+q}}}+1\right]\right\rangle$,

where $\mu=1-\log_\gamma\left\{\frac{\gamma-1}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\overline{\eta}_2}-1}\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}}+1\right\}$,

$\eta=\log_\gamma\left(\frac{\gamma-1}{\overline{\eta}}+1\right)-\log_\gamma\left\{\frac{\gamma-1}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\overline{\eta}_3}-1}\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}}+1\right\}$,

$\nu=\log_\gamma\left\{\frac{\gamma-1}{\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\overline{\eta}_3}-1}\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}}+1\right\}$,

and $\overline{\eta}=\left[\prod_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\overline{\eta}_1-\overline{\eta}_2+1-\overline{\eta}_3}-1}\right)\right]^{\frac{1}{n(n-1)}}$,

$\overline{\eta}_1=\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}}-1}\right)^p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}}-1}\right)^q}+1\right]$, $\overline{\eta}_2=\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\mu_{\alpha_i}}-1}\right)^p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{\mu_{\alpha_j}}-1}\right)^q}+1\right]$, $\overline{\eta}_3=\log_\gamma\left[\frac{\gamma-1}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\nu_{\alpha_i}}-1}\right)^p\left(\frac{\gamma-1}{\gamma^{1-\nu_{\alpha_j}}-1}\right)^q}+1\right]$.

(5) If we take T as Dombi t-范数 $T_\gamma^{\mathbf{D}}$ ($\gamma\in(0,+\infty)$), then $\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T_\gamma^{\mathbf{D}}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left\langle\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^\gamma}},\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(\frac{1-\eta-\mu}{\eta+\mu}\right)^\gamma}}-\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)^\gamma}},\frac{\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^\gamma}}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^\gamma}}\right\rangle$, 其中

$$\mu=\frac{\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_i}}{\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_i}}{\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}},$$

$$\eta=\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[\frac{1-\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_1}}+\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_2}}-\frac{\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_3}}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_3}}}{\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_1}}-\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_2}}+\frac{\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_3}}{1+\sqrt[\gamma]{\overline{\eta}_3}}}\right]^\gamma}}-\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\left(\frac{\nu_{\alpha_i}}{1-\nu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\left(\frac{\nu_{\alpha_j}}{1-\nu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}},$$

$\overline{\eta}_1=p\cdot\left(\frac{1-\eta_{\alpha_i}-\mu_{\alpha_i}}{\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\eta_{\alpha_j}-\mu_{\alpha_j}}{\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma$, $\overline{\eta}_2=p\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_i}}{\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma$, $\overline{\eta}_3=p\cdot\left(\frac{\nu_{\alpha_i}}{1-\nu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{\nu_{\alpha_j}}{1-\nu_{\alpha_j}}\right)^\gamma$, and

$$\nu=\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\left(\frac{\nu_{\alpha_i}}{1-\nu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\left(\frac{\nu_{\alpha_j}}{1-\nu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}}.$$

特别地，若对每个 α_i 取 $\eta_{\alpha_i}=0$，即每个 α_i 都退化为一个直觉模糊数，则

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T_\gamma^{\mathbf{D}}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{p+q}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_i}}{\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}},\ 0,\right.\\&\left.1-\frac{1}{1+\sqrt[\gamma]{\frac{p+q}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{p\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_i}}{\mu_{\alpha_i}}\right)^\gamma+q\cdot\left(\frac{1-\mu_{\alpha_j}}{\mu_{\alpha_j}}\right)^\gamma}}}\right\rangle,\end{aligned}\tag{12}$$

这与 [44, 定理 1]一致。这意味着 [44,定理 1] 是定理4.1的直接推论。

(6) 若取 T为 Acz´el-Alsina t-范数 $T_\gamma^{\mathbf{AA}}$($\gamma\in(0,+\infty)$), 则 $\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T_\gamma^{\mathbf{AA}}}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left\langle e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(-\log(\mu_{\alpha_i})\right)^\gamma}},e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(-\log(\eta+\mu)\right)^\gamma}}-e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(-\log(\mu)\right)^\gamma}},1-e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{p+q}\left(-\log(1-\nu)\right)^\gamma}}\right\rangle$, 其中

$$\mu=1-e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{mn(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[-\log(1-\overline{\eta}_2)\right]^\gamma}},$$

$$\eta=e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[-\log(\overline{\eta}_1-\overline{\eta}_2+1-\overline{\eta}_3)\right]^\gamma}}-e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[-\log(1-\overline{\eta}_3)\right]^\gamma}},$$

$$\nu=e^{-\sqrt[\gamma]{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\left[-\log(1-\overline{\eta}_3)\right]^\gamma}},$$

and $\overline{\eta}_1=e^{-\sqrt[\gamma]{p\cdot\left(-\log\left(\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}\right)\right)^\gamma+q\cdot\left(-\log\left(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}\right)\right)^\gamma}}$, $\overline{\eta}_2=e^{-\sqrt[\gamma]{p\cdot\left(-\log\mu_{\alpha_i}\right)^\gamma+q\cdot\left(-\log\mu_{\alpha_j}\right)^\gamma}}$, $\overline{\eta}_3=e^{-\sqrt[\gamma]{p\cdot\left(-\log\left(1-\nu_{\alpha_i}\right)\right)^\gamma+q\cdot\left(-\log\left(1-\nu_{\alpha_j}\right)\right)^\gamma}}$.

定理 4.2（单调性）：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$、$\beta_i=\langle\mu_{\beta_i},\eta_{\beta_i},\nu_{\beta_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$ 是两组毕达哥拉斯模糊数，且 $\mu_{\alpha_i}\le\mu_{\beta_i}$, $\eta_{\alpha_i}\le\eta_{\beta_i}$, 以及$\nu_{\alpha_i}\ge\nu_{\beta_i}$。则对于 $p,q>0$，有

$$\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\preccurlyeq_{\mathrm{w}}\mathrm{PFIBM}^{p,q}_{T}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n).$$

证明：设 $\alpha=\langle\mu_\alpha,\ \eta_\alpha,\ \nu_\alpha\rangle=\mathrm{PFIBM}_T^{p,q},\ (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n)$ 和 $\beta=\langle\mu_\beta,\ \eta_\beta,\ \nu_\beta\rangle=\mathrm{PFIBM}_T^{p,q},\ (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots,\ \beta_n)$。应用定理4.1，可得

$$\begin{aligned}&\langle\mu_\alpha,\eta_\alpha,\nu_\alpha\rangle\\=&\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\mu\right)\right),\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\eta+\mu\right)\right)\right.\\&\left.-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\mu\right)\right),\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta\left(\nu\right)\right)\right\rangle,\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\mu=\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right),$$

$$\begin{aligned}\eta=&\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}\right)\right.\right.\right.\\&\left.+q\cdot\tau\left(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}\right)\right)-\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\\&\left.\left.+\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)\\&-\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

$$\nu=\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right),$$

and

$$\begin{aligned}&\langle\mu_\beta,\eta_\beta,\nu_\beta\rangle\\=&\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\mu'\right)\right),\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\eta'+\mu'\right)\right)\right.\\&\left.-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\mu'\right)\right),\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta\left(\nu'\right)\right)\right\rangle,\end{aligned}\tag{14}$$

其中

$$\mu'=\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right),$$

$$\begin{aligned}\eta'=&\tau^{-1}\left(\begin{matrix}1\\n\end{matrix}\ \ (n-1)\ \sum_{i,j=1}^{n}\ \overline{\qquad\qquad}_{i\neq j}\ \tau\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\eta_{\beta_i}+\mu_{\beta_i}\right)\right.\right.\right.\\&\left.+q\cdot\tau\left(\eta_{\beta_j}+\mu_{\beta_j}\right)\right)-\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)\\&\left.\left.+\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)\\&-\tau^{-1}\ \ \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

$$\nu'=\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right).$$

由于 τ 递减且 ζ 递增，由 $\mu_{\alpha_i}\leq\mu_{\beta_i}$和 $\nu_{\alpha_i}\geq\nu_{\beta_i}$ 可知，$\mu\leq\mu'$ 和 $\nu\geq\nu'$，因此$\mu_\alpha\leq\mu_\beta$ 和 $\nu_\alpha\geq\nu_\beta$。为了证明 $\alpha\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\beta$，我们考虑以下三种情况：

(1) 如果存在 $1\leq i_0\leq n$使得$\mu_{\alpha_{i_0}}<\mu_{\beta_{i_0}}$，注意到 τ 严格递减，ζ严格递增，且$\tau(0)=+\infty$、$\zeta(1)=+\infty$，由 $\mu_{\alpha_i}\leq\mu_{\beta_i}$和 $\nu_{\alpha_i}\geq\nu_{\beta_i}(i=1,2,\ldots,n)$，可得

$$\begin{aligned}\mu=&\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)\\=&\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j,i\neq i_0}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_{i_0}}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)\\<&\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j,i\neq i_0}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_{i_0}}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)\\=&\zeta^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\zeta\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)\\=&\mu',\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\nu=&\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)\\\geq&\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)\\=&\nu'.\end{aligned}$$

结合公式（13）和（14），可得 $\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\ \mu\right)<\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\ \mu'\right)=\mu_\beta$ $\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta\ \nu\right)\geq\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta\ \nu'\right)=\nu_\beta$ $\mu_\alpha=$ $\nu_\alpha=$()()以及 ()()，这意味着 $S\ (\alpha)$ $=\mu_\alpha-\nu_\alpha<\mu_\beta-\nu_\beta=S\ (\beta)$，因此 $\alpha\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\beta$。

(2) 若存在 $1\leq i_0\leq n$ 使得$\nu_{\alpha_{i_0}}>\nu_{\beta_{i_0}}$，类似于（1）的证明，可以验证 $\mu_\alpha\leq\mu_\beta$和 $\nu_\alpha>\nu^\beta$，这意味着 $S(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha<\mu_\beta-\nu_\beta=S(\beta)$，因此 $\alpha\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\beta$。

(3) 若对所有 $1\leq i\leq n$，$\mu_{\alpha_i}=\mu_{\beta_i}$且 $\nu_{\alpha_i}=\nu_{\beta_i}$，则$\mu=\mu'$、$\mu_\alpha=\mu_\beta$和 $\nu_\alpha=\nu_\beta$，因此 $S(\alpha)=S(\beta)$，且 $H_1(\alpha)=H_1(\beta)$。由于 τ 严格递减而ζ严格递增，根据 $\eta_{\alpha_i}\leq\eta_{\beta_i}(j=1,2,\ldots,n)$，可得

$$\begin{aligned}\eta=&\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\tau\left(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i}\right)\right.\right.\right.\\&\left.+q\cdot\tau\left(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}\right)\right)-\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\alpha_j}\right)\right)\\&\left.\left.+\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$-\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\alpha_j}\right)\right)\right)\right)$$

$$\leq\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\Big(\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\eta_{\beta_i}+\mu_{\beta_i}\right)\right.\right.$$
$$\left.+q\cdot\tau\left(\eta_{\beta_j}+\mu_{\beta_j}\right)\right)-\tau^{-1}\left(p\cdot\tau\left(\mu_{\beta_i}\right)+q\cdot\tau\left(\mu_{\beta_j}\right)\right)$$
$$\left.\left.+\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)$$
$$-\tau^{-1}\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\left(\zeta^{-1}\left(p\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_i}\right)+q\cdot\zeta\left(\nu_{\beta_j}\right)\right)\right)\right)$$
$$=\eta'.$$

结合 $\mu=\mu'$，可得

$$\eta_\alpha=\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\eta+\mu)\right)-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\mu)\right)$$
$$\leq\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\eta'+\mu')\right)-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\mu')\right)$$
$$=\eta_\beta.$$

于是，$H_2(\alpha)=\mu_\alpha+\eta_\alpha+\nu_\alpha\leq\mu_\beta+\eta_\beta+\nu_\beta=H_2(\beta)$，从而有 $\alpha\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\beta$。■

定理 4.3（幂等性）：如果所有 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 都相等，即对所有 $i=1,\ 2,\ldots,n,$ 均有 $\alpha_i=\alpha$，则

$$\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\alpha.$$

证明：根据定理 3.2 （v）、（vi）、（ix）、（x），可得

$$\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$
$$=\left[\frac{1}{n(n-1)}\cdot\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\alpha^p\otimes\alpha^q\right)\right]^{\frac{1}{p+q}}$$
$$=\left[\frac{1}{n(n-1)}\cdot\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha^{p+q}\right]^{\frac{1}{p+q}}\quad\text{(by Theorem 3.2 (vi))}$$
$$=\left[\frac{1}{n(n-1)}\cdot\left((n(n-1))\cdot\alpha^{p+q}\right)\right]^{\frac{1}{p+q}}\quad\text{(by Theorem 3.2 (v))}$$
$$=\left(\alpha^{p+q}\right)^{\frac{1}{p+q}}\quad\text{(by Theorem 3.2 (ix))}$$
$$=\alpha\quad\text{(by Theorem 3.2 (x)).}$$

■

定理 4.4（有界性）：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\ \eta_{\alpha_i},\ \nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,\ldots,n)$ 是一组图像模糊数，则 $\langle\min_i\{\mu_{\alpha_i}\}、\min_i\{\eta_{\alpha_i}\}、\max_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\langle\max_i\{\mu_{\alpha_i}\}、1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\}+\min_i\{\nu_{\alpha_i}\})、\min_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle$。

证明：令 $\alpha^-=\langle\mu_1,\eta_1,\nu_1\rangle=\langle\min_i\{\mu_{\alpha_i}\},\min_i\{\eta_{\alpha_i}\},\max_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle$，$\alpha^+=\langle\mu_2,\eta_2,\nu_2\rangle=\langle\max_i\{\mu_{\alpha_i}\},1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\}+\min_i\{\nu_{\alpha_i}\}),\min_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle$，且 $\alpha=\langle\mu_\alpha,\eta_\alpha,\nu_\alpha\rangle=\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$。

由 $\mu_1\leq\mu_{\alpha_i}$、$\eta_1\leq\eta_{\alpha_i}$ 和 $\nu_1\geq\nu_{\alpha_i}$，对所有 $1\leq i\leq n$，根据定理4.2 和 4.3，可得 $\alpha^-=\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha^-,\alpha^-,\ldots,\alpha^-)\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\alpha$.

显然，对所有 $1\leq i\leq n$，$\mu_{\alpha_i}\leq\mu_2$ 和 $\nu_{\alpha_i}\geq\nu_2$ 均成立。为证明 $\alpha\leq\alpha^+$，我们考虑以下三种情况：

(1) If there exists $1\leq i_0\leq n$ such that $\mu_{\alpha_{i_0}}<\mu_2$, since τ is strictly decreasing with $\tau(0)=+\infty$, ζ is strictly increasing with $\zeta(1)=+\infty$, and $\mu_{\alpha_i}\leq\mu_2$ $(j=1,2,\ldots,n)$, by Theorem 4.1, we have $\mu_\alpha=\tau^{-1}\big(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\zeta^{-1}(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\zeta(\tau^{-1}(p\cdot\tau(\mu_{\alpha_i})+q\cdot\tau(\mu_{\alpha_j}))))))<\tau^{-1}\big(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\zeta^{-1}(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\zeta(\tau^{-1}(p\cdot\tau(\mu_2)+q\cdot\tau(\mu_2))))))=\mu_2$, and from $\nu_{\alpha_i}\geq\nu_2$, we have $\nu_\alpha=\zeta^{-1}\big(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\tau^{-1}(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau(\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\nu_{\alpha_i})+q\cdot\zeta(\nu_{\alpha_j}))))))\geq\zeta^{-1}\big(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\tau^{-1}(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau(\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\nu_2)+q\cdot\zeta(\nu_2))))))=\nu_2$, implying that $S(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha<\mu_2-\nu_2=S(\alpha^+)$, and thus $\alpha\prec_{\mathrm{W}}\alpha^+$.

(2) 若存在 $1\leq i_0\leq n$ 使得 $\nu_{\alpha_{i_0}}>\nu_2$，类似于上述证明，可以验证 $S(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha<\mu_2-\nu_2=S(\alpha^+)$，因此 $\alpha\prec_{\mathrm{W}}\alpha^+$。

(3) 若 $\mu_{\alpha_i}=\mu_2$ 且 $\nu_{\alpha_i}=\nu_2$ 对所有 $1\leq i\leq n$成立，由 $\mu_{\alpha_i}+\eta_{\alpha_i}+\nu_{\alpha_i}\leq1$可得 $\eta_{\alpha_i}\leq\max_i\{\eta_{\alpha_i}\}\leq1-(\mu_{\alpha_i}+\nu_{\alpha_i})=\eta_2$。然后根据定理 4.2和 4.3，有$\alpha\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\alpha^+$。■

定理 4.5（交换性）：设 $\alpha_i(i=1、2、\ldots、n)$ 是一组图像模糊数。则 $\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\alpha_1、\alpha_2、\ldots、\alpha_n)=\mathrm{PFIBM}_T^{p,q}(\dot\alpha_1、\dot\alpha_2、\ldots、\dot\alpha_n)$，其中（$\dot\alpha_1、\dot\alpha_2、\ldots、\dot\alpha_n$）是（$\alpha_1、\alpha_2、\ldots、\alpha_n$）的任意排列。

证明：由运算 $\oplus$ 和 $\otimes$的交换性可直接得到。■

注 3：根据定义 2.3、定理4.2、4.3和4.5，以及公式（10）、（11）和（12），可知 [43,定理 2、定理 3 以及 6], [19], [21, 幂等性、单调性和交换性], 以及 [44, 定理 2 和 3] 均显然成立。

V. PFIWBM 和 PFINWM 算子

PFIBM 算子能够捕捉每对输入参数之间的相互关系；然而，它有一个不足之处，即没有考虑参数的重要性（即多准则决策或多准则群体决策问题中准则或专家的权重）。换言之，PFIBM 仅适用于权重相等的多准则决策问题。为克服这一不足，本节将介绍图像模糊交互加权 Bonferroni均值（PFIWBM）和图片模糊交互归一化加权Bonferroni均值（PFINWM）算子。

定义 5.1：设 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 为一组图像模糊数，$\omega=\begin{matrix}\omega_1&\omega_2&\ldots&\omega_n\end{matrix}^{\mathrm{T}}$ 为 $(1,2,\ldots,n)$ 的权重向量，且 $\omega_i\in(0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，并且 为严格 t- 范数。对于任意 $p,q>0$，定义由 T 导出的图像模糊交互加权Bonferroni均值（PFIWBM）如下：

$$\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\left[\frac{1}{n(n-1)}\cdot\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left((\omega_i\cdot\alpha_i)^p\otimes(\omega_j\cdot\alpha_j)^q\right)\right]^{\frac{1}{p+q}}.\quad(15)$$

定义5.2：设 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 为一组图像模糊数，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的权重向量，且 $\omega_i\in(0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，并且 T 为严格 t-范数。对于任意 p，$q>0$，定义由 T 导出的图片模糊交互归一化加权 Bonferroni均值（PFINWBM）如下：

$$\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\left[\bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{1-\omega_i}\cdot\left(\alpha_i^p\otimes\alpha_j^q\right)\right]^{\frac{1}{p+q}}. \tag{16}$$

与定理 4.1的证明类似，可以得到以下结果。

定理5.1：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$ 是一组毕达哥拉斯模糊数，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的权重向量，使得 $\omega_i\in(0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，且 T 是具有加法生成元 τ 的严格 t-范数。那么，对于 $p,q>0$，使用由 T 诱导的 PFIWBM 得到的聚合值也是一个图像模糊数，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau\left(\bar{\mu}\right)\right),\right.\\&\quad\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\bar{\eta}+\bar{\mu})\right)-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\bar{\mu})\right),\\&\quad\left.\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\bar{\nu})\right)\right\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

where $\bar{\mu}=\zeta^{-1}\Big(\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\zeta\big(\tau^{-1}(p\cdot\tau(\zeta^{-1}(\omega_i\cdot\zeta(\mu_{\alpha_i})))+q\cdot\tau(\zeta^{-1}(\omega_j\cdot\zeta(\mu_{\alpha_j})))\big)\Big)$, $\bar{\eta}=\tau^{-1}\Big(\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\Big(\tau^{-1}\Big(p\cdot\tau(\tau^{-1}(\omega_i\cdot\tau(\eta_{\alpha_i}+\nu_{\alpha_i}))-\tau^{-1}(\omega_i\cdot\tau(\nu_{\alpha_i}))+\zeta^{-1}(\omega_i\cdot\zeta(\mu_{\alpha_i})))+q\cdot\tau(\tau^{-1}(\omega_j\cdot\tau(\eta_{\alpha_j}+\nu_{\alpha_j}))-\tau^{-1}(\omega_j\cdot\tau(\nu_{\alpha_j}))+\zeta^{-1}(\omega_j\cdot\zeta(\mu_{\alpha_j})))\Big)-\tau^{-1}\Big(p\cdot\tau(\zeta^{-1}(\omega_i\cdot\zeta(\mu_{\alpha_i})))+q\cdot\tau(\zeta^{-1}(\omega_j\cdot\zeta(\mu_{\alpha_j})))\Big)+\zeta^{-1}\Big(p\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_i\cdot\tau(\nu_{\alpha_i})))+q\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_j\cdot\tau(\nu_{\alpha_j})))\Big)\Big)\Big)-\tau^{-1}\Big(\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\Big(\zeta^{-1}\Big(p\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_i\cdot\tau(\nu_{\alpha_i})))+q\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_j\cdot\tau(\nu_{\alpha_j})))\Big)\Big)\Big)$, $\bar{\nu}=\tau^{-1}\Big(\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\tau\Big(\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_i\cdot\tau(\nu_{\alpha_i}))))+q\cdot\zeta(\tau^{-1}(\omega_j\cdot\tau(\nu_{\alpha_j})))\Big)\Big)$, and $\zeta(x)=\tau(1-x)$.

定理5.2：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$ 是一组毕达哥拉斯模糊数，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的权重向量，其中 $\omega_i\in(0,1]$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，且 T 是具有加法生成元 τ 的严格 t-范数。那么，对于 $p,q>0$，由 T 诱导的 PFINWBM 算子得到的聚合值也是一个图像模糊数，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\\&=\left\langle\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\hat{\mu})\right),\right.\\&\quad\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\hat{\eta}+\hat{\mu})\right)-\tau^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\tau(\hat{\mu})\right),\\&\quad\left.\zeta^{-1}\left(\frac{1}{p+q}\cdot\zeta(\hat{\nu})\right)\right\rangle,\end{aligned} \tag{18}$$

where $\hat{\mu}=\zeta^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{1-\omega_i}\cdot\zeta(\tau^{-1}(p\cdot\tau(\mu_{\alpha_i})+q\cdot\tau(\mu_{\alpha_j})))\Big)$, $\hat{\eta}=\tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{1-\omega_i}\cdot\tau(\tau^{-1}(p\cdot\tau(\eta_{\alpha_i}+\mu_{\alpha_i})+q\cdot\tau(\eta_{\alpha_j}+\mu_{\alpha_j}))-\tau^{-1}(p\cdot\tau(\mu_{\alpha_i})+q\cdot\tau(\mu_{\alpha_j}))+\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\nu_{\alpha_i})+q\cdot\zeta(\nu_{\alpha_j})))\Big)-\tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{1-\omega_i}\cdot\tau(\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\nu_{\alpha_i})+q\cdot\zeta(\nu_{\alpha_j})))\Big)$, $\hat{\nu}=\tau^{-1}\Big(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i\omega_j}{1-\omega_i}\cdot\tau\Big(\zeta^{-1}(p\cdot\zeta(\nu_{\alpha_i})+q\cdot\zeta(\nu_{\alpha_j}))\Big)\Big)$, and $\zeta(x)=\tau(1-x)$.

定理5.3（交换性）：设 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 是一组毕达哥拉斯模糊数。那么

$$\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\dot{\alpha}_1,\ldots,\dot{\alpha}_n),$$

and

$$\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\dot{\alpha}_1,\ldots,\dot{\alpha}_n),$$

其中 $(\dot{\alpha}_1,\ldots,\dot{\alpha}_n)$ 是 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 的任意排列。

定理5.4（单调性）：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$、$\beta_i=\langle\mu_{\beta_i},\eta_{\beta_i},\nu_{\beta_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$ 是两组毕达哥拉斯模糊数，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为权重向量，满足 $\omega_i\in(0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，并且 T 是具有加法生成元 τ 的严格 t-范数。若 $\mu_{\alpha_i}\leq\mu_{\beta_i}$、$\eta_{\alpha_i}\leq\eta_{\beta_i}$ 和 $\nu_{\alpha_i}\geq\nu_{\beta_i}$，则对于 $p,q>0$，有

$$\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}(\beta_1,\ldots,\beta_n),$$

and

$$\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\beta_1,\ldots,\beta_n).$$

证明：与定理4.2的证明类似，通过使用定理5.1 和 5.2，可以验证该定理成立。■

定理5.5（幂等性）：设 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 是一组毕达哥拉斯模糊数，$\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 的权重向量，满足 $\omega_i\in(0,1]$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，并设 T 为严格 t-范数。若所有 $\alpha_i(i=1,2,\ldots,n)$ 均相等，即对所有 $i=1,2,\ldots,n$，均有 $\alpha_i=\alpha$，则对于任意 $p,q>0$，有 $\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\alpha$.

证明：由公式（18）直接计算即可得出。■

注4：应注意，根据公式(17)，PFI-WBM 算子 $\mathrm{PFIWBM}_T^{p,q}$，不具有幂等性。例如，取 $\alpha_1=\alpha_2=\langle\frac{1}{3}、\frac{1}{3}、\frac{1}{3}\rangle$、$\omega=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$、$p=q=1$ 和 $T=T_{\mathbf{P}}$。应用公式 (17)，经直接计算可得 $\mathrm{PFIWBM}_T^{1,1}(\alpha_1,\alpha_2)\approx\langle0.17304,0.22599,0.60097\rangle\neq\langle\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\rangle$.

定理5.6（有界性）：设 $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\eta_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2,\ldots,n)$ 为一组图像模糊数，则 $\langle\min_i\{\mu_{\alpha_i}\},\min_i\{\eta_{\alpha_i}\},\max_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\preccurlyeq_{\mathrm{W}}\langle\max_i\{\mu_{\alpha_i}\},1-(\max_i\{\mu_{\alpha_i}\}+\min_i\{\nu_{\alpha_i}\}),\min_i\{\nu_{\alpha_i}\}\rangle$。

证明：与定理4.4的证明类似，利用定理5.2可以验证该结论成立。■

VI. 基于图形模糊信息的多准则决策模型

由于 PFINWBM 算子不仅具有一些预期的性质，包括单调性、幂等性、有界性和交换性（见定理 5.3 –5.6），而且还考虑了准则或专家的权重，因此本节将其用于图片模糊环境下的多准则决策问题。

对于图片模糊环境下的多准则决策（MCDM），设 $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ 为待选备选方案集合，$G = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ 为待评估准则集合，其权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$，且满足 $\omega_j \in (0, 1]$ 和 $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$。假设备选方案 A_i 关于准则 G_j 的表现由图像模糊数（PFN）$\alpha_{ij} = \langle \mu_{ij}, \eta_{ij}, \nu_{ij} \rangle$ 度量，其中 μ_{ij} 表示正向隶属度；η_{ij} 表示中性隶属度，ν_{ij} 表示备选方案 A_i 不满足属性 G_j 的程度。为对备选方案进行排序，给出以下步骤：

步骤 1：（构建决策矩阵）已知决策者以图像模糊数 $\alpha_{ij} = \langle \mu_{ij}, \eta_{ij}, \nu_{ij} \rangle$ 的形式，给出了针对准则 G_j 下备选方案 A_i 的偏好，因此构建图模糊决策矩阵 $D = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ 如下

	G_1	G_2	$\cdots$	G_n
A_1	$\langle \mu_{11}, \eta_{11}, \nu_{11} \rangle$	$\langle \mu_{12}, \eta_{12}, \nu_{12} \rangle$	$\cdots$	$\langle \mu_{1n}, \eta_{1n}, \nu_{1n} \rangle$
A_2	$\langle \mu_{21}, \eta_{21}, \nu_{21} \rangle$	$\langle \mu_{22}, \eta_{22}, \nu_{22} \rangle$	$\cdots$	$\langle \mu_{2n}, \eta_{2n}, \nu_{2n} \rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_m	$\langle \mu_{m1}, \eta_{m1}, \nu_{m1} \rangle$	$\langle \mu_{m2}, \eta_{m2}, \nu_{m2} \rangle$	$\cdots$	$\langle \mu_{mn}, \eta_{mn}, \nu_{mn} \rangle$

步骤 2：（归一化决策矩阵）将图模糊决策矩阵 $D = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ 转换为归一化图片模糊决策矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n}$，如下所示：

$$r_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{for benefit criteria } G_j, \\ \alpha_{ij}^{\complement}, & \text{for cost criteria } G_j, \end{cases}$$

其中，$\alpha_{ij}^{\complement} = \langle \nu_{ij}, \eta_{ij}, \mu_{ij} \rangle$ 是 α_{ij} 的补。

步骤 3：（计算聚合值）基于步骤 2 得到的归一化决策矩阵 R，使用 PFINWBM 算子 $\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}$，（通常可取 $p = q = 1$），针对某个严格 t-范数 T，计算每个备选方案 $A_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 在不同准则 $G_1, G_2, \ldots, G_n$ 下的总体聚合值，从而得到每个备选方案 A_i 的集体值 r_i：

$$r_i = \mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in}).$$

步骤 4：(对备选方案排序) 对备选方案进行排序 $A_1, A_2, \ldots, A_m$，依据定义 2.3 中给出的全序，选出最理想的备选方案。

VII. 说明性示例

本节将通过一个实际的多准则决策问题，说明第 VI 节所提出方法的应用。假设某组织计划实施企业资源规划（ERP）系统（改编自 [45]）。第一步是组建项目团队，成员包括首席信息主管以及来自相关部门的两名高级代表。通过收集有关 ERP 供应商和系统的所有可能信息，项目团队选出五种潜在的 ERP 系统 $A_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ 作为候选方案。项目团队选取四项准则来评估备选方案：(1) G_1 为功能与技术；(2) G_2 为战略适配性；(3) G_3 为供应商能力；(4) G_4 为供应商声誉。决策者将根据上述四项准则，使用毕达哥拉斯模糊数对五种潜在的 ERP 系统 $A_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ 进行评估，其权重向量为 $\omega = (0.2, 0.1, 0.3, 0.4)^{\mathrm{T}}$。由于所研究的问题不包含任何成本准则，因此图模糊决策矩阵 $D = (\alpha_{ij})_{5 \times 4}$ 与表 I 所示的归一化图片模糊决策矩阵 $R = (r_{ij})_{5 \times 4}$ 相同。

表I 图模糊决策矩阵 D

	G_1	G_2	G_3	G_4
A_1	$\langle 0.53, 0.33, 0.09 \rangle$	$\langle 0.89, 0.08, 0.03 \rangle$	$\langle 0.42, 0.35, 0.18 \rangle$	$\langle 0.08, 0.89, 0.02 \rangle$
A_2	$\langle 0.73, 0.12, 0.08 \rangle$	$\langle 0.13, 0.64, 0.21 \rangle$	$\langle 0.03, 0.82, 0.13 \rangle$	$\langle 0.73, 0.15, 0.08 \rangle$
A_3	$\langle 0.91, 0.03, 0.02 \rangle$	$\langle 0.07, 0.09, 0.05 \rangle$	$\langle 0.04, 0.85, 0.10 \rangle$	$\langle 0.68, 0.26, 0.06 \rangle$
A_4	$\langle 0.85, 0.09, 0.05 \rangle$	$\langle 0.74, 0.16, 0.10 \rangle$	$\langle 0.02, 0.89, 0.05 \rangle$	$\langle 0.08, 0.84, 0.06 \rangle$
A_5	$\langle 0.90, 0.05, 0.02 \rangle$	$\langle 0.68, 0.08, 0.21 \rangle$	$\langle 0.05, 0.87, 0.06 \rangle$	$\langle 0.13, 0.75, 0.09 \rangle$

接下来，我们使用由 Hamacher t-范数 $T_{\mathbf{H}\gamma} (\gamma \in (0, +\infty))$ 诱导的 PFINWBM 算子 $\mathrm{PFINWBM}_{T_\gamma^{\mathbf{H}}}^{p,q}$ 来选择最佳 ERP系统。

Step 1. According to Table I, aggregate all PFNs by using $\mathrm{PFINWBM}_{T_\gamma^{\mathbf{H}}}^{p,q}$ $(\gamma \in (0, +\infty))$ to obtain the overall PFNs r_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ of the alternative A_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, where we take T as Hamacher t-norms $T_\gamma^{\mathbf{H}}$ $(\gamma \in (0, +\infty))$ as follows: $r_i = \mathrm{PFINWBM}_{T_\gamma^{\mathbf{H}}}^{p,q}(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}) = \left\langle \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\hat{\mu}} + 1 - \gamma\right)^{\frac{1}{p+q}} + \gamma - 1}, \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\hat{\eta} + \hat{\mu}} + 1 - \gamma\right)^{\frac{1}{p+q}} + \gamma - 1} - \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{\hat{\mu}} + 1 - \gamma\right)^{\frac{1}{p+q}} + \gamma - 1}, 1 - \frac{\gamma}{\left(\frac{\gamma}{1 - \hat{\nu}} + 1 - \gamma\right)^{\frac{1}{p+q}} + \gamma - 1} \right\rangle$, where

$$\hat{\mu} = 1 - \frac{\gamma}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{4} \left[\frac{\gamma^2}{\left(\frac{\gamma}{\mu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{\mu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q - 1} + 1 \right]^{\frac{\omega_j \omega_k}{1 - \omega_j}} + \gamma - 1},$$

$$\hat{\eta} = + \frac{\gamma}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{4} \left[\frac{1}{\frac{1}{\overline{\eta}_1} - \frac{1}{\overline{\eta}_2} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\overline{\eta}_3}} + 1 - \gamma \right]^{\frac{\omega_j \omega_k}{1 - \omega_j}} + \gamma - 1} - \frac{\gamma}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{4} \left[\frac{\gamma^2}{\left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q - 1} + 1 \right]^{\frac{\omega_j \omega_k}{1 - \omega_j}} + \gamma - 1},$$

$$\overline{\eta}_1 = \left(\frac{\gamma}{\eta_{ij} + \mu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{\eta_{ik} + \mu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q + \gamma - 1,$$

$$\overline{\eta}_2 = \left(\frac{\gamma}{\mu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{\mu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q + \gamma - 1, \quad \overline{\eta}_3 = \left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q + \gamma - 1, \quad \text{and} \quad \hat{\nu} = \frac{\gamma}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{4} \left[\frac{\gamma^2}{\left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ij}} + 1 - \gamma\right)^p \left(\frac{\gamma}{1 - \nu_{ik}} + 1 - \gamma\right)^q - 1} + 1 \right]^{\frac{\omega_j \omega_k}{1 - \omega_j}} + \gamma - 1}.$$

设 $p = q = 1$。当 $\gamma = 2$，$T_2^{\mathbf{H}}$ 为 Einstein算子，聚合结果如表 II所示。

表II ERP系统的聚合值

	PFINWBM $_{T_2^{\mathbf{H}}}^{1\ 1}$
r_1	$\langle 0.3749, 0.5173, 0.0774\rangle$
r_2	$\langle 0.4403, 0.4039, 0.1079\rangle$
r_3	$\langle 0.4789, 0.3357, 0.0598\rangle$
r_4	$\langle 0.2901, 0.6297, 0.0587\rangle$
r_5	$\langle 0.3295, 0.5697, 0.0732\rangle$

步骤 2. 根据表 II中所示的聚合值，ERP系统的得分见表 III。

表III ERP系统的得分

	PFINWBM $_{T_2^{\mathbf{H}}}^{1\ 1}$
S_{r_1}	0.2975
S_{r_2}	0.3324
S_{r_3}	0.4191
S_{r_4}	0.2313
S_{r_5}	0.2563

步骤 3. 根据表 III中的得分，我们有

$$S_{r_3} > S_{r_2} > S_{r_1} > S_{r_5} > S_{r_4},$$

因此

$$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4,$$

即， A_3 是最佳的EPR系统。

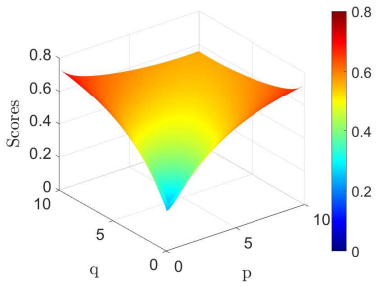
A. 参数 p 和 q 对多准则决策结果的影响

为说明参数 p 和 q 对上述示例的影响，我们在PFINWBM 算子p 中使用参数 q 和PFINWBM$_{T_2^{\mathbf{H}}}^{p\ q}$,的不同取值。排名结果见表IV。从表IV可以看出，采用不同参数 p 和 q 进行聚合时，ERP系统的排名略有不同。但对于参数的所有不同组合，最佳ERP系统均为 A_3 。

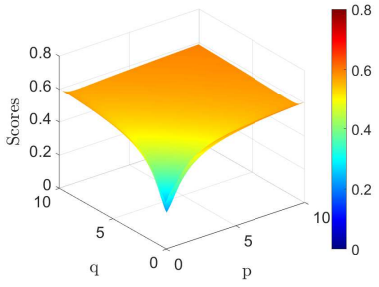
表IV 不同参数的排名结果 p 和 q 由PFINWBM$_{T}^{p\ q}$,获得，H2

	排名
$p=2, q=1$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4$
$p=1, q=2$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4$
$p=3, q=1$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1$
$p=7, q=2$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4 \succ_{\mathrm{w}} A_1 \succ_{\mathrm{w}} A_2$
$p=8, q=1$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_1 \succ_{\mathrm{w}} A_4 \succ_{\mathrm{w}} A_2$
$p=6, q=9$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1$
$p=10, q=10$	$A_3 \succ_{\mathrm{w}} A_5 \succ_{\mathrm{w}} A_4 \succ_{\mathrm{w}} A_2 \succ_{\mathrm{w}} A_1$

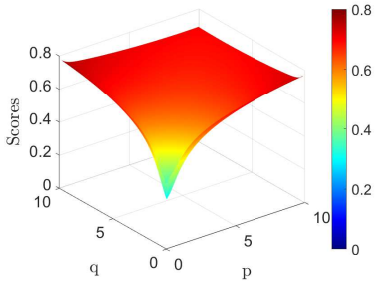
为了说明在上述示例中参数 p 和 q通过使用由 $T_{\mathbf{H}\gamma}$、$T_{\mathbf{SS}\gamma}$、 $T_{\mathbf{F}\gamma}$、 $T_{\mathbf{D}\gamma}$ 以及 $T_{\gamma}^{\mathbf{AA}}$诱导的不同PFINWBM 算子所产生的详细影响，备选方案 A_1、 A_2、A_3、 A_4、 A_5 的得分分别如图 1–5所示。



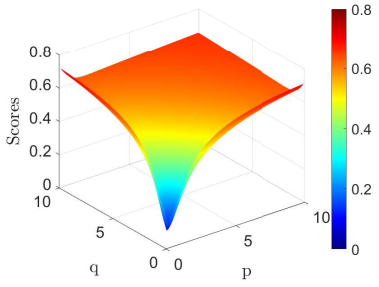
(a) A_1的得分



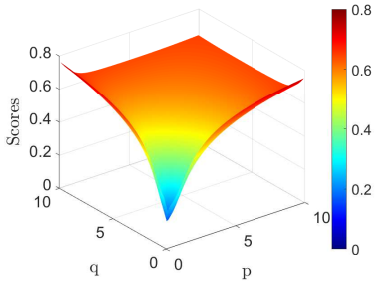
(b) A_2的得分



(c) A_3的得分

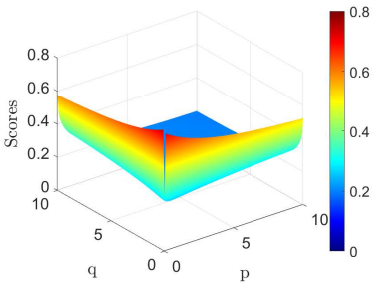


(d) A_4的得分

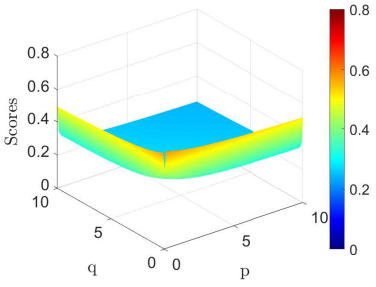


(e) A_5的得分

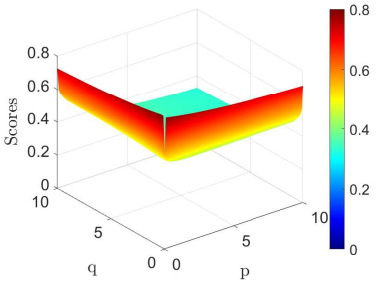
图1. 不同取值下备选方案的得分 p， q 通过PFINWBM$_{T}^{p\ q}$获得H2



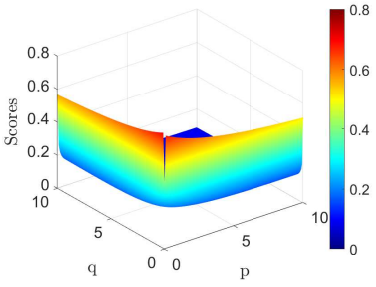
(a) A_1的得分



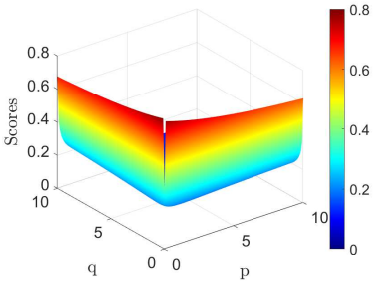
(b) A_2的得分



(c) A_3的得分

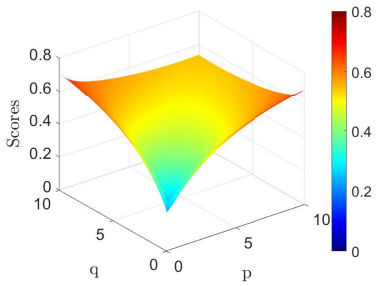


(d) A_4的得分

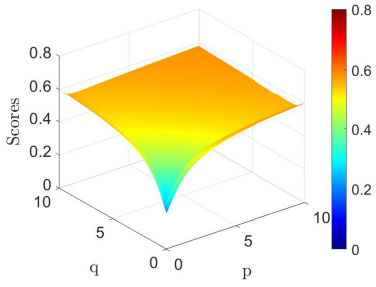


(e) A_5的得分

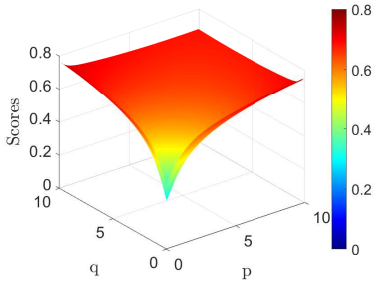
图2. 不同取值下备选方案的得分 p, q 由PFINWBM$_T^{p,q}$获得SS−2



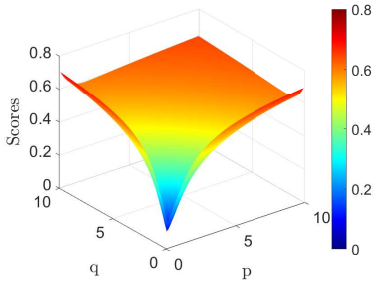
(a) A_1的得分



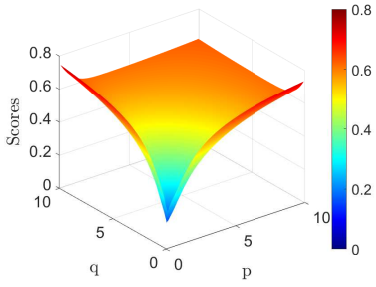
(b) A_2的得分



(c) A_3的得分

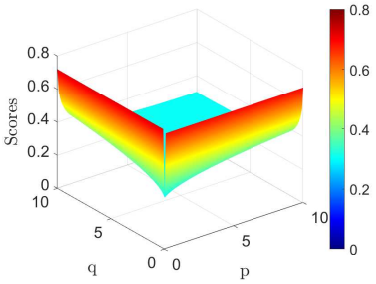


(d) A_4的得分

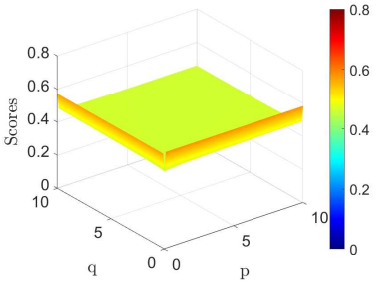


(e) A_5的得分

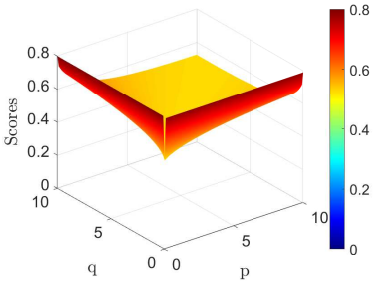
图 3. 不同取值下备选方案的得分 p, q 通过PFINWBM$_T^{p,q}$, F2



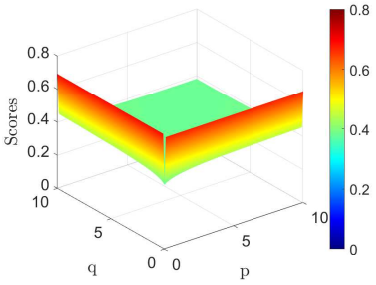
(a) 得分为 A_1



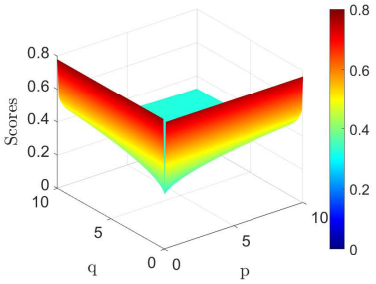
(b) 得分为 A_2



(c) 得分为 A_3

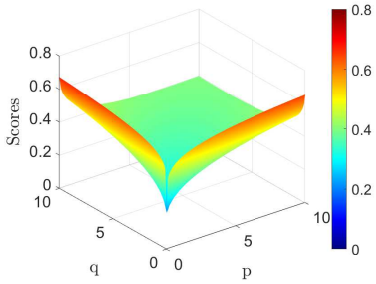


(d) 得分为 A_4

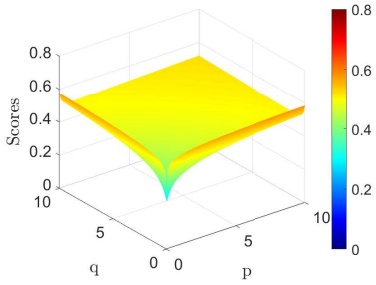


(e) 得分为 A_5

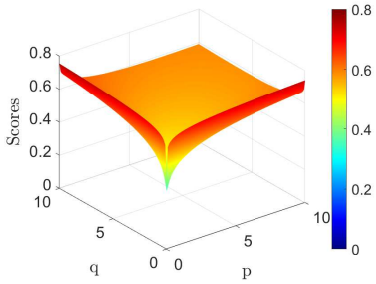
图 4. 不同取值下各备选方案的得分 p, q 由$\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}$, D2



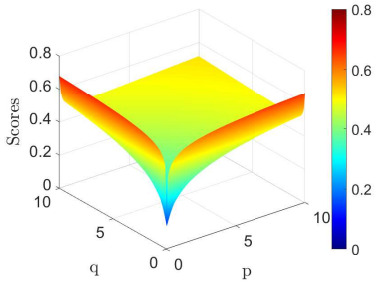
(a) 得分（对应 A_1）



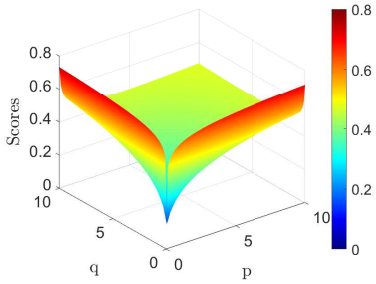
(b) 得分（对应 A_2）



(c) 得分（对应 A_3）



(d) 得分（对应 A_4）



(e) 得分（对应 A_5）

图 5. 不同取值下备选方案的得分 p, q 由$\mathrm{PFINWBM}_T^{p,q}$, AA2

B. 参数 γ 对多准则决策结果的影响

为研究备选方案 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 的得分和排名随 t-范数 T 与参数 γ 变化的趋势，我们通过以下内容来说明这些问题。

(1) 令 $p = q = 1$和 $\gamma = 2$。若使用 PFINWBM$^{p\,q}_{T^{\mathbf{F}}_{\gamma}}$，，PFINWBM$^{p\,q}_{T^{\mathbf{D}\gamma}}$，PFINWBM$^{p\,q}_{T^{\mathbf{AA}^{\gamma}}}$聚合表 I 中的上述毕达哥拉斯模糊数，则聚合值、得分和排名结果分别如表 V–VII 所示。

表 V ERP系统的聚合值

	PFINWBM $^{1,1}_{T^{\mathbf{F}}_{\gamma}}$	PFINWBM $^{1,1}_{T^{\mathbf{D}}_{\gamma}}$	PFINWBM $^{1,1}_{T^{\mathbf{AA}}_{\gamma}}$
r_1	⟨0.3672, 0.5241, 0.0779⟩	⟨0.3639, 0.5385, 0.0606⟩	⟨0.3718, 0.5102, 0.0852⟩
r_2	⟨0.4369, 0.4114, 0.1080⟩	⟨0.5669, 0.2601, 0.1053⟩	⟨0.5160, 0.3238, 0.1097⟩
r_3	⟨0.4750, 0.3296, 0.0599⟩	⟨0.5871, 0.1807, 0.0599⟩	⟨0.5393, 0.2353, 0.0637⟩
r_4	⟨0.2806, 0.6396, 0.0587⟩	⟨0.4399, 0.4979, 0.0579⟩	⟨0.3640, 0.5723, 0.0591⟩
r_5	⟨0.3171, 0.5820, 0.0733⟩	⟨0.3939, 0.5094, 0.0699⟩	⟨0.3493, 0.5542, 0.0775⟩

表 VI ERP系统的得分

	PFINWBM $^{1\,1}_{'T^{\mathbf{F}}_{\gamma}}$	PFINWBM $^{1\,1}_{'T^{\mathbf{D}}_{\gamma}}$	PFINWBM $^{1\,1}_{'T^{\mathbf{AA}}_{\gamma}}$
S_{r_1}	0.2893	0.3033	0.2865
S_{r_2}	0.3289	0.4616	0.4062
S_{r_3}	0.4151	0.5272	0.4756
S_{r_4}	0.2219	0.3819	0.3049
S_{r_5}	0.2438	0.3240	0.2717

表 VII ERP系统的排名结果

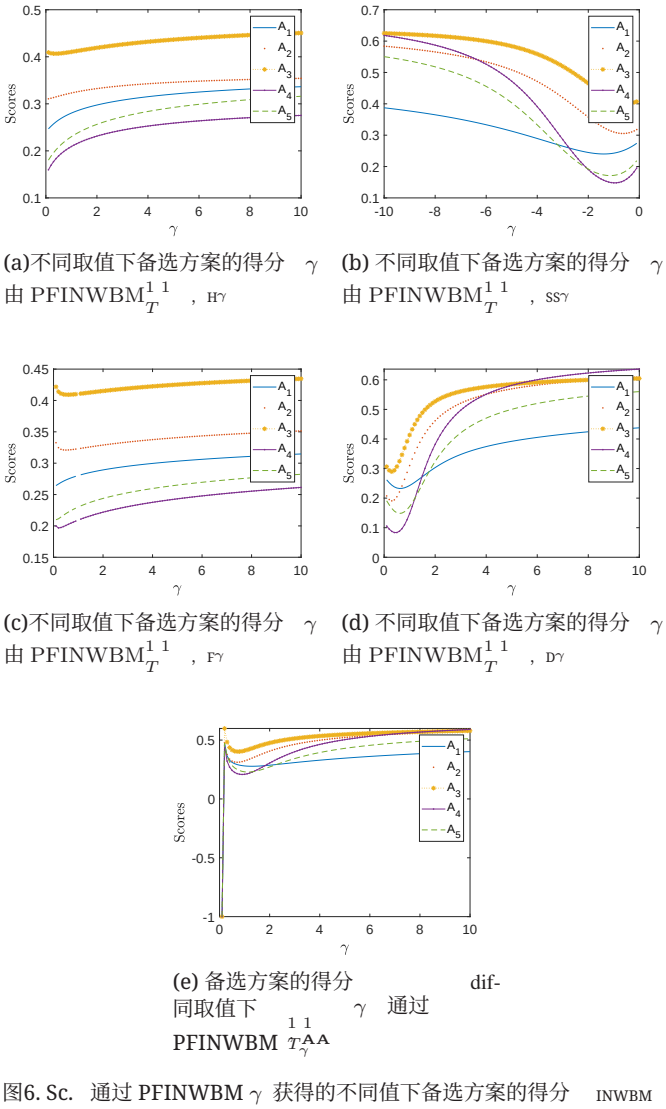
	排名
PFINWBM$^{1,1}_{T^{\mathbf{F}}_{\gamma}}$	$A_3 \succ_{\mathrm{W}} A_2 \succ_{\mathrm{W}} A_1 \succ_{\mathrm{W}} A_5 \succ_{\mathrm{W}} A_4$
PFINWBM $^{1\,1}_{'T^{\mathbf{D}}_{\gamma}}$	$A_3 \succ_{\mathrm{W}} A_2 \succ_{\mathrm{W}} A_4 \succ_{\mathrm{W}} A_5 \succ_{\mathrm{W}} A_1$
PFINWBM $^{1\,1}_{'T^{\mathbf{AA}}_{\gamma}}$	$A_3 \succ_{\mathrm{W}} A_2 \succ_{\mathrm{W}} A_4 \succ_{\mathrm{W}} A_1 \succ_{\mathrm{W}} A_5$

(2) 令 $p = q = 1$。如果改变参数γ在由 $T_{\mathbf{H}\gamma}$、$T_{\mathbf{SS}\gamma}$、$T_{\mathbf{F}\gamma}$、$T_{\mathbf{D}\gamma}$和 $T^{\mathbf{AA}}_{\gamma}$诱导的 PFINWBM 算子中的取值，备选方案 A_1、A_2、A_3、A_4和 A_5的得分分别如图 6 (a)–(e) 所示。

总的来说，根据上述分析，我们发现参数 γ 可以视为决策者偏好的反映。尽管参数 γ 在一定范围内变化时，备选方案的得分和排名各不相同，但最佳 ERP 系统始终是 A_3，只有 PFINWBM$^{1\,1}_{T^{\mathbf{D}}_{\gamma}}$，得出的聚合结果例外。因此，我们有充分理由得出结论：最佳 ERP 系统是 A_3。

VIII. 结论

由于毕达哥拉斯模糊数具有特殊的三维度结构，许多现有的毕达哥拉斯模糊数算子不具备封闭性。然而，封闭性对于确保决策公平性至关重要，它能确保聚合输出仍为图像模糊数；因此，评价



(a)不同取值下备选方案的得分 γ 由 PFINWBM$^{1\,1}_{T}$，$_{\mathrm{H}\gamma}$

(b) 不同取值下备选方案的得分 γ 由 PFINWBM$^{1\,1}_{T}$，$_{\mathrm{SS}\gamma}$

(c)不同取值下备选方案的得分 γ 由 PFINWBM$^{1\,1}_{T}$，$_{\mathrm{F}\gamma}$

(d) 不同取值下备选方案的得分 γ 由 PFINWBM$^{1\,1}_{T}$，$_{\mathrm{D}\gamma}$

(e) 备选方案的得分 dif- 同取值下 γ 通过 PFINWBM $^{1\,1}_{T^{\mathbf{AA}}_{\gamma}}$

图6. Sc. 通过 PFINWBM γ 获得的不同值下备选方案的得分 INWBM

准则处于统一框架之下。因此，Wu 等人[41] 提出了图像模糊数（PFN）的四种基本运算，包括加法、乘法、数乘和幂运算，并证明这些运算在图像模糊数中封闭，且具有单调性、幂等性、有界性、平移不变性和齐次性。基于图像模糊数的这四种基本运算，我们提出了图像模糊交互 Bonferroni 均值（PFIBM）、图像模糊交互加权 Bonferroni 均值（PFIWBM）和图像模糊交互归一化加权 Bonferroni 均值（PFINWBM）算子。此外，我们证明，PFIBM、PFIWBM 和 PFINWBM 算子在线性序下具有单调性 $\preccurlyeq_{\mathrm{W}}$ 、 [41]，幂等性、有界性和交换性。为此，我们提出了一种基于 PFINWBM 算子的图片模糊环境下的新型多准则决策方法，并将其应用于企业资源规划系统的选择。采用六类众所周知的三角范数，包括代数乘积 $T_{\mathbf{P}}$、Schweizer-Sklar t范数 $T^{\mathbf{SS}}_{\gamma}$、Hamacher t范数 $T^{\mathbf{H}}_{\gamma}$、Frank t范数 $T^{\mathbf{F}}_{\gamma}$、Dombi t范数 $T_{\mathbf{D}\gamma}$和 Acz´el-Alsina t 范数 $T_{\mathbf{AA}\gamma}$时，得到的最佳 ERP 系统始终相同，这证明了我们方法的有效性。

参考文献

[1] L. A. Zadeh，“模糊集”，《信息与控制》，第 8 卷，第 3 期，第 338–353 页，1965 年。[2] K. T. Atanassov，《直觉模糊集：理论与应用》，模糊与软计算研究丛书。Springer-Verlag Berlin Heidelberg，1999 年，第 35 卷。[3] V. Torra，“犹豫模糊集”，《国际智能系统杂志》，第 25 卷，第 6 期，第 529–539 页，2010 年。[4] B. Cuong 和 V. Kreinovich，“图像模糊集”，《计算机科学与控制论杂志》，第 30 卷，第 4 期，第 409–420 页，2014 年。[5] B. C. Cuong 和 V. Kreinovich，“图像模糊集——计算智能问题的新概念”，载于《2013年第三届世界信息与通信技术大会（WICT 2013）》。IEEE，2013 年，第 1–6 页。[6] K. Ullah、Z. Ali、N. Jan、T. Mahmood 和 S. Maqsood，“基于图像犹豫模糊集平均聚合算子的多属性决策”，《技术杂志》，第 23 卷，第 04 期，第 84–95 页，2018 年。[7] C. Bonferroni，“幂的多重平均”，《意大利数学联合会公报》，第 5 卷，第 3-4 期，第 267–270 页，1950 年。[8] J. Liu、S. Lin 和 H. Chen，“模糊 Bonferroni 平均算子及其在多准则群决策中的应用”，《系统工程与电子技术》，第 34 卷，第 1 期，第 115–119 页，2012 年，中文。[9] W.-Q. Zhu、P. Liang、L.-J. Wang 和 Y.-R. Hou，“三角模糊 Bonferroni 平均算子及其在多属性决策中的应用”，《应用软计算》，第 29 卷，第 4 期，第 1272 页，2015 年，no. pp. – 1265。[10] G. Beliakov 和 S. James，“将广义 Bonferroni 平均扩展到决策情境中的 Atanassov 正交对”，《模糊集与系统》，第 211 卷，第 84–93 页，2013 年。[11] S. Das、D. Guha 和 R. Mesiar，“基于严格 t-余范数的直觉模糊环境下扩展 Bonferroni 平均”，IEEE《系统、人和控制论汇刊：系统》，第 47 卷，第 8 期，第 2083–2099 页，2016 年。[12] H. Garg 和 R. Arora，“直觉模糊软集环境下的 Bonferroni 平均聚合算子及其在决策中的应用”，《运筹学会杂志》，第 69 卷，第 11 期，第 1711–1724 页，2018 年。[13] Y. He 和 Z. He，“Atanassov 直觉模糊交互 Bonferroni 平均的扩展及其在多属性决策中的应用”，IEEE《模糊系统汇刊》，第 24 卷，第 3 期，第 573 页，2016 年，558no. pp. – 。[14] Y. He、Z. He 和 H. Chen，“直觉模糊交互 Bonferroni 平均及其在多属性决策中的应用”，IEEE《控制论汇刊》，第 45 卷，第 1 期，第 116–128 页，2015 年。[15] P. Liu、S.-M. Chen 和 J. Liu，“基于直觉模糊交互分区 Bonferroni 平均算子的多属性群决策”，《信息科学》，第 411 卷，第 98–121 页，2017 年。[16] J. Tian，“基于平均型聚合算子的多属性决策方法研究”，河北大学：博士学位论文，2020 年。[17] M. Xia、Z. Xu 和 B. Zhu，“广义直觉模糊 Bonferroni 平均”，《国际智能系统杂志》，第 27 卷，第 1 期，第 23–47 页，2012 年。[18] ——，“几何 Bonferroni 平均及其在多准则决策中的应用”，《知识型系统》，第 40 卷，第 88–100 页，2013 年。[19] Z. Xu 和 X. Cai，《直觉模糊信息聚合：理论与应用》，数学专著丛书。科学出版社，2012 年，第 20 卷。[20] Z. Xu 和 Q. Chen，“基于区间值直觉模糊 Bonferroni 平均的多准则决策程序”，《系统科学与系统工程杂志》，第 20 卷，第 2 期，第 217–228 页，2011 年。[21] Z. Xu 和 R. R. Yager，“直觉模糊 Bonferroni 平均”，IEEE《系统、人和控制论汇刊 B：控制论》，第 41 卷，第 2 期，第 568–578 页，2011 年。[22] W. Zhou 和 J. He，“直觉模糊几何 Bonferroni 平均及其在多准则决策中的应用”，《国际智能系统杂志》，第 27 卷，第 12 期，第 995–1019 页，2012 年。[23] P. Liu 和 J. Liu，“一些 q 阶正交对模糊 Bonferroni 平均算子及其在多属性群决策中的应用”，《国际模糊系统杂志》，第 33 卷，第 2 期，第 315–347 页，2018 年。[24] P. Liu 和 P. Wang，“基于 q 阶正交对模糊数的阿基米德 Bonferroni 算子的多属性决策”，IEEE《模糊系统汇刊》，第 27 卷，第 5 期，第 834–848 页，2018 年。[25] W. Yang 和 Y. Pang，“新型 q 阶正交对模糊分区 Bonferroni 平均算子及其在多属性决策中的应用”，《国际智能系统杂志》，第 34 卷，第 3 期，第 439–476 页，2019 年。[26] I. Deli，“广义梯形犹豫模糊数的 Bonferroni 平均算子及其在决策问题中的应用”，《软计算》，第 25 卷，第 6 期，第 4925–4949 页，2021 年。[27] Y. He、Z. He、G. Wang 和 H. Chen，“犹豫模糊幂 Bonferroni 均值及其在多属性决策中的应用”，IEEE 模糊系统汇刊，第 23 卷，第 5 期，第 1655–1668 页，2015 年。[28] T. Mahmood、M. Ahsen 和 Z. Ali，“基于 Bonferroni 均值算子的图像犹豫模糊数多属性群决策”，《软计算》，第 25 卷，第 21 期，第 13 315–13 351 页，2021 年。[29] Z. Xu，《犹豫模糊集理论》，《模糊与软计算研究》系列。施普林格，多德雷赫特，2014 年，第 314 卷。[30] Z. Xu 和 H. Zhao，《犹豫模糊集理论与应用》，《模糊数学、系统及其应用》系列。科学出版社，2018 年，第 1 卷，中文。[31] B. Zhu 和 Z. Xu，“多准则决策中的犹豫模糊 Bonferroni 均值”，《运筹学会杂志》，第 64 卷，1840，2013 12，1831 no. pp. – 。[32] B. Zhu、Z. Xu 和 M. Xia，“犹豫模糊几何 Bonferroni 均值”，《信息科学》，第 205 卷，第 72–85 页，2012 年。[33] K. Chiao，“基于区间二型模糊 Bonferroni 均值的多准则决策”，《专家系统与应用》，第 176 卷，第 114789 页（17 页），2021 年。[34] Y. Gong、N. Hu、J. Zhang、G. Liu 和 J. Deng，“基于梯形区间二型模糊数几何 Bonferroni 均值算子的多属性群决策方法”，《计算机与工业工程》，第 81 卷，第 167–176 页，2015 年。[35] A. Halder、A. Konar、R. Mandal、A. Chakraborty、P. Bhowmik、N. R. Pal 和 A. K. Nagar，“情绪识别的一般型与区间二型模糊脸空间方法”，IEEE《系统、人类与控制论汇刊：系统》，第 43 卷，第 3 期，第 587–605 页，2013 年。[36] P. Liu 和 H. Gao，“基于区间二型模糊优先 Choquet Bonferroni 均值的新型绿色供应商选择方法”，《IEEE/CAA 自动化学报》，第 8 卷，第 9 期，第 1549–1566 页，2021 年。[37] P. Liu、H. Gao 和 J. Ma，“将质量功能展开与区间二型模糊环境下的分区 Bonferroni 均值算子相结合的新型绿色供应商选择方法”，《信息科学》，第 490 卷，第 292–316 页，2019 年。[38] E. Farrokhizadeh、S. A. S. Shishavan、Y. Donyatalab、F. G¨undo˘gdu 和 C. Kahraman，“球形模糊 Bonferroni 均值聚合算子及其在多属性决策中的应用”，载于 Kahraman C.、G¨undo˘gdu F.（编），《球形模糊集决策》，《模糊与软计算研究》系列。施普林格，多德雷赫特，2021 年，第 392 卷，第 111–134 页。[39] F. Ates¸ 和 D. Akay，“若干图像模糊 Bonferroni 均值算子及其在多准则决策中的应用”，《国际智能系统杂志》，第 35 卷，第 4 期，第 625–649 页，2020 年。[40] G. Wei，“图像不确定语言 Bonferroni 均值算子及其在多属性决策中的应用”，《Kybernetes》，第 46 卷，第 10 期，第 1777–1800 页，2017 年。[41] X. Wu、Z. Zhu、G. D. C¸aylı、P. Liu、X. Zhang 和 Z. Yang，“基于严格三角范数的图像模糊交互聚合算子及其在多准则决策中的应用”，2022 年。 [在线]。获取地址：http://arxiv.org/abs/2204 03878 。[42] E. P. Klement、R. Mesiar 和 E. Pap，《三角范数》，《逻辑趋势——Studia Logica 文库》系列。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2000 年，第 8 卷。[43] D. Nie，“基于 Archimedean 范数的广义直觉模糊 Bonferroni 均值及其在多属性决策中的应用”，《运筹与管理科学》，第 25 卷，第 3 期，第 151–158 页，2016 年，中文。[44] P. Liu、J. Liu 和 S.-M. Chen，“若干直觉模糊 Dombi Bonferroni 均值算子及其在多属性群决策中的应用”，《运筹学会杂志》，第 69 卷，第 1 期，第 1–24 页，2018 年。[45] X. Liao、Y. Li 和 B. Lu，“基于语言信息处理的 ERP 系统选择模型”，《信息科学》，第 32 卷，第 7 期，第 1005–1017 页，2007 年。