arXiv:2301.01195v1 [math.PR] 2 Jan 2023

仅取决于均值的概率测度的积分泛函

Daniel W. Stroock

2023年1月4日

在本文中，我证明以下结论：

假设 $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是一个连续函数，且具有如下性质：存在一个函数 F 使得

$$\int f\,d\mu = F\left(\int y\,\mu(dy)\right)$$

对 $\mathbb{R}$ 上的所有紧支撑概率测度 μ，均成立。因此，f 是一个仿射函数。

证明：令 ρ 为任意一个非负的、C^∞、紧支撑偶函数，且其勒贝格积分为 1，并对 $\epsilon>0$ 定义 $\rho_\epsilon(x)=\epsilon^{-1}\rho(\epsilon^{-1}x)$。于是

$$\int \rho_\epsilon(x-y)\,dy = x \text{ for all } \epsilon>0 \text{ and } x\in\mathbb{R},$$

因此，对所有 $\epsilon>0$ 均有 $\rho_\epsilon * f = F$。故 $f=F\in C^\infty$。接下来，

$$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = \int f\,d\left(\frac{\delta_{a+h}+\delta_{a-h}}{2}\right) = f(a) \text{ for all } a\in\mathbb{R} \text{ and } h>0.$$

因此

$$f''(a) = \lim_{h\searrow 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = 0 \text{ for all } a\in\mathbb{R}.$$