arXiv:2301.01198v1 [math.NT] 3 Jan 2023

梅林变换在自守 L–函数中的新应用

Laurent Clozel

引言

在一篇较早的论文 [2], 及其附录中，我们与 Peter Sarnak 合作，对某些自守 L–函数的二次积分得到了普适下界。例如，若 π 是有理数域 $GL(m, \mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$上的一个尖点酉表示，且 $L(s) = L(s, \pi)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{L(1/2+it)}{1/2+it}\right|^2 dt > \frac{\pi}{2}. \tag{0.1}$$

参见 [2, 定理 D]。本文将探讨在这一背景下自然产生的一些问题。

第一个问题源于 Sarnak 的一条注释。根据这条注释，对于短区间上的积分，我们不可能得到这样的通用界，例如 $[-1, 1]$ in (0.1) 上的积分；至少，当允许 m 变化时，无法得到这样的界。参见 [2],§ 2 的引言。

当 m 固定时，这个论证行不通；作者也未能找到在 m 固定时，短区间上的绝对界。这仍然是一个有趣的问题。

在第 2 章中，对于固定的 m ，我们在区间 $[-A\log\ C, A\log\ C]$ 上得到了一个普适下界，其中 C 是解析导子。即便如此，我们仍无法得到一个固定下界。相反，我们证明该积分大于 $c(\log C)^{-1/2}$ ，其中 $c > 0$ 是一个绝对常数。这或许并非最优结果，但与林德勒夫猜想相称。（我们希望，熟悉梅林变换的解析数论学家，正如在近似函数方程的证明中所用的那样，能够大幅改进这一结果。）此外，我们可以平移纵坐标，从而在区间 $[X - T, X + T]$ 上得到一个一般性结果，其中 X 是任意的，而 T 的量级为 $\log X$。参见定理 2.2,

定理 2.3。证明依赖于 Molteni 的一个定理 [14], ，该定理后来又经 Xiannan Li 改进 [12]。

在第 3 章中，我们沿着 [2, §3.3]的思路继续探讨。在那里，我们考察了关于第一个二次非剩余的阶的维诺格拉多夫猜想，并证明它可通过梅林变换，直接由相应狄利克雷 L函数的林德洛夫猜想（包括 q方面）推出。（专家们或许早已熟知这一点。）

一个类似的问题是：给定数域E/F的伽罗瓦群 Gal(E/F) 的一个非平凡表示 ρ，确定 F 的“第一个”素数 $\mathfrak{p}$ ——也就是范数最小的素数——使得 ρ 非分歧且 $\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}) \neq 1$，其中 $\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}$ 是一个弗罗贝尼乌斯元素。 [2] 的证明可以自然地推广。我们先在第 3 章 § 1–3 中处理 ρ 为一维特征的情形。参见定理 3.1。对于非阿贝尔的 ρ，证明更为微妙，这促使我们引入阿廷 L 函数 $L(s,\rho)$的非分歧变体 $\mathcal{L}(s,\rho)$。参见定理 3.2。

在 §3.6 中，我们证明，在某些情况下，我们的估计优于已知的无条件估计。（此处相关的结果是 Zaman[21] 最近得到的结果。）不过，我们必须假设 F 是 $\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦扩张；更重要的是， $L(s,\rho)$ 是全纯的。请注意，我们不必假设 ρ 与某个自守表示相关联。

在第 4 章中，我们回顾了与 [2]的结果和论证有关的一些零散内容。特别是，我们指出，这些结果和论证适用于 Rankin L–函数，而不仅仅适用于 [2]的标准 L–函数；此外，我们还进一步阐述了 [2] 中关于求和函数 $A_0(x)$ 的估计（见 § 2.1）与 $L(s,\pi)$ 的次凸性之间关系的论述。

最后，在第 1 章中，我们回顾了关于 L–函数在临界带内增长的一些“众所周知”的结果，这些结果以解析导子为度量。值得庆幸的是，我们可以参考 Har-cos [5]清晰明了的论述。为方便读者，我们还汇集了一些特殊函数的公式。

我们采用解析数论中的标准记号，尤其是兰道符号 $\ll, O(\,)$；需要说明隐含常数所依赖的对象时，会为这些符号加上下标。对于 $f/g \to 0$，我们使用 $f \prec g$(f, g正函数)。我们用 A 表示（上下文中的）绝对常数；它在不同位置不一定相同。

致谢。——感谢 Farrell Brumley、Jesse Thorner 和 Asif Zaman 提供有用的参考文献，并感谢 Peter Sarnak 建议

将我的下界与 Ramachandra 的著名界进行比较。我还要感谢西蒙娜与奇诺·德尔杜卡基金会提供的经费支持。

1 上界估计和公式

1.1

在本预备章节中，我们汇总了本文将要用到的上界估计和公式，尤其是使用 Molteni 给出的 Friedlander–Iwaniec 估计的“绝对”版本时所需的内容。我们简要回顾一下我们的设定，即 [2]的设定。我们考虑 $GL(m,\mathbb{A})$的一个酉尖点表示 π，或 $GL(m_i,\mathbb{A})$的尖点表示 π_i 的乘积 $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_r$（抛物诱导）， $m = \sum m_i$。那么

$$L(s,\pi) = \prod_{i=1}^{r} L(s,\pi_i).$$

是标准的 L–函数。完备化的 L–函数

$$\Lambda(s,\pi) = D^{s/2}\ L(s,\pi_\infty)\ L(s,\pi),$$

其中 D 是导子，一个整数 ≥ 1，满足函数方程 n

$$\Lambda(s,\pi) = \varepsilon(\pi)\Lambda(1-s,\tilde{\pi}).$$

有关这些定理所适用的其他 L–函数的详细信息和回顾，请参见 [2,§ 2.1]。

我们不再像在 [2], 中那样假设 π_∞ 是自对偶的。函数方程于是可以写成

$$L(1-s,\pi) = \varepsilon(\pi)\gamma(s)L(s,\tilde{\pi}) \tag{1.1}$$

with

$$\gamma(s) = (\pi^{-m}D)^{s-1/2}\frac{c(\tilde{\pi}_\infty)\Gamma(s,\tilde{\pi}_\infty)}{c(\pi_\infty)\Gamma(1-s,\pi_\infty)}$$

and

$$\Gamma(s,\pi_\infty) = \prod_{j=1}^{m}\Gamma\Big(\frac{s+c_j}{2}\Big)$$

with

$$Re(c_j) \geq \frac{1}{m^2+1} - \frac{1}{2} \qquad [13].$$

仿照 Iwaniec 和 Sarnak 的做法，我们为 π 赋予其导子 $D = D(\pi)$ 以及其解析导子

$$C = C(\pi) = D(\pi) \prod_{j=1}^{m} (2 + |c_j|) \tag{1.2}$$

以及

$$C(s) = C(\pi, s) = C(\pi)\ (1 + |s|)^m.$$

（ $C(s)$有一个更精细的版本；关于这一点的讨论，参见 [7, 第 95]页。）我们需要在条带 $Re(s) \in]-\varepsilon, 1+\varepsilon[$内，根据这些数据，对 $\gamma(s)$和 $L(s,\pi)$给出一致估计。

1.2

我们回顾一下关于 $\gamma(s)$和 $L(s)$的已知界。对于 $\gamma(s)$，Harcos [5]给出了一个一致界。但请参见 [6], 中的勘误，尤其是 [6,(3)]，其中修正了 [5, 3.22][1]。

引理 1.1。（Harcos）对于$\sigma > \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2+1}$， $Re(s) = \sigma$,

$$\gamma(s) \underset{\sigma}{\ll} C(s)^{\sigma - 1/2}.$$

现在我们假设 π满足拉马努金猜想。固定 $\varepsilon > 0$ （较小）。由于 π_f 是温和的，对于 $Re(s) = 1 + \varepsilon$，我们有 $L(s, \tilde{\pi}) \ll 1$，且对固定的m 一致。对于 s的此类取值， $\gamma(s) \ll C(s)^{1/2+\varepsilon}$。于是函数方程推出

$$L(s, \pi) \ll C(s)^{1/2+\varepsilon}$$

对于 $Re(s) = -\varepsilon$。

根据 Phragm´en–Lindel¨of 原理，我们推导出：

命题 1.1。假设 π_f温和。对于 $-\varepsilon \leq Re(s) \leq 1 + \varepsilon$,

$$L(s, \pi) \ll_\varepsilon C(s)^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}.$$

参见 Iwaniec–Kowalski [7,第 100] 页。

[1]感谢 Farrell Brumley 提供这一参考。

1.3

这里我们补充几点关于解析导子的说明。对于固定的 $A > 0$，并非只存在有限个表示 π 使得$C(\pi) \leq A$。事实上，若 $m = 1$，且 $\pi = \chi$ 是一个导子为D的狄利克雷特征，经 $||^a$ 扭曲后（$a \in i\mathbb{R}$），其解析导子为 $D(2 + |a|)$。这一现象在更高秩的 m 中仍然存在，但本质上是由 $GL(m)$ 的中心$GL(1)$ 所致。

命题 1.2. 对任意 $A > 0$，存在有限个 $GL(m, \mathbb{A})$ 的尖点表示 π，其中心特征 ω 满足 $\omega|_{\mathbb{R}_+^\times} = 1$，并且 $C(\pi) < A$。

由于 $D(\pi) < C(\pi)$，$D(\pi)$ 只有有限种可能。令 S 表示 $GL(m, \mathbb{R})$ 的中心 $Z(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$ 中包含 1 的连通分支。考虑由 S 不变的 L^2 尖点形式空间 $\mathcal{L} = L^2_{cusp}(SGL(m, \mathbb{Q})\backslash GL(m, \mathbb{A}))$。海克代数 $\bigotimes \mathcal{H}_v$（其中 $\mathcal{H}_\infty = C_c^\infty(GL(n, \mathbb{R}))$，且对于有限的 $v = p$，$\mathcal{H}_p$ 是紧支撑光滑函数代数）通过右平移作用于 L^2_{cusp}，众所周知，这一作用是迹类的。固定 $D \geq 1$，令 $K(D) \subset GL(m, \mathbb{A}_f)$ 为 Jacquet、Piaterskii-Shapiro 和 Shalika 在 [8, §5、定理 ´or`ème], 中定义的同余子群，并令 $\varphi_D \in \bigotimes \mathcal{H}_p$ 为其示性函数。于是 φ_D 将 $\mathcal{L}$ 投影到其 p 子空间，该子空间由尖点表示 π 中的 $K(D)$ 不变向量组成（其中 $\omega_\pi|_{\mathbb{R}_+^\times} = 1$）。这是 $GL(m, \mathbb{R})$ 的表示 ρ 的无穷和；函数 $\varphi_\infty \in C_c^\infty(GL(m, \mathbb{R}))$ 在其上作用为迹类算子。特别地，$GL(m, \mathbb{R})$ 的酉对偶中的任意紧子集只包含有限个这样的表示。然而，满足 $C_\infty(\rho) = \prod(2 + |c_j|) \leq A$ 的表示 ρ 的集合是紧的。（关于 c_j 与 π_∞ 的朗兰兹参数之间的关系，见 [2, § 2.2] 。）

再次假设 π 是尖点的。对于 $a \in i\mathbb{R}$，令 $\pi[a] = \pi \otimes |\det|^a$。我们可以选择 a，使得 $\pi[a]$ 在 $\mathbb{R}_+^\times$ 上具有平凡中心特征。鉴于此，了解 $C(\pi)$ 与 $C(\pi[a])$ 之间的关系很有用。

再次参见 [2, § 2.2]。表示 π_∞ 与一组实特征及以下特征之和相关联：

$$\nu(x) = (sgnx)^\varepsilon |x|^c \qquad (x \in \mathbb{R}_+^\times); \varepsilon = 0, 1)$$

$\mathbb{C}^\times$ 的特征

$$\mu(z) = z^p(\bar{z})^q,\ p-q \in \mathbb{Z}.$$

（Luo–Rudnick–Sarnak 的结果 [13] 蕴含了关于 $Re(c)$、$Re(p+q)$的简单界。）

与 ν 相关联的数据 c_j 为 $c+\varepsilon$；与 μ 相关联的数据 c_j 为

$$\begin{array}{ll}(q, q+1) & \text{if} \quad Re(p-q) < 0 \\ (p, p+1) & \text{if} \quad Re(p-q) > 0.\end{array}$$

若我们用 $|\ |^a$进行扭曲，则 c_j 变为 $c_j + a$。因此

$$C(\pi[a]) \leq C(\pi)(1+|a|)^m. \tag{1.3}$$

我们还要指出，若 $C(\pi) = 2^m$、 $D(\pi) = 1$ ，且 c_j 等于 0。因此，在此假设下， π 的数量有限。

最后，值得了解何时可以用 c_j来表示 $\omega|_{\mathbb{R}_+^\times} = 1$。然而，这种关系并非直接。实特征 ν_j 贡献了 $c_j = c+\varepsilon$，其中$\nu_j(x) = x^c, x > 0$； A 复特征 $\mu(z)$确定了 $GL(2,\mathbb{R})$ 的一个表示 π_2，其中心特征为 $x^{p+q}(x>0)$，且 c_j, $c_{j'}$ 等于 $(q, q+1)$ 或 $(p, p+1)$。可以验证， $c_j + c_{j'} = p+q+n$ ，其中 $n = |p-q| > 0$ 是 π_2的分歧。因此， π_∞在 $\mathbb{R}_+^\times$上的中心特征为 x^A,

$$A = \sum c_j - Ram(\pi_\infty),$$

其中

$$Ram(\pi_\infty) = \sum \varepsilon + \sum n$$

π_∞ 的分歧。为了得到具有 $\omega|_{\mathbb{R}_+^\times} = 1$ 的表示，我们必须用 $|det|^{-A/m}$ 扭曲。新的导子（粗略地说）有如下界

$$C(\pi)(1+|A/m|)^m.$$

1.4

为方便读者，我们回顾一些关于特殊函数的事实。我们将使用以下函数

$$\begin{aligned} Erf(x) &= \int_0^x e^{-t^2}dt, \\ Erfc(x) &= \int_x^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - Erf(x). \end{aligned}$$

参见 [3, 第 147]页。特别地，我们有 $Erfc(x)$在 $x \gg 0$时的渐近展开:

$$Erfc(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^{-1} + O(x^{-3})).$$

我们还需要对.....进行估计

$$I(a,T) = \int_T^\infty e^{-t^2}t^a dt \qquad (T > 0).$$

最好将其计算为不完全伽马函数。令

$$\begin{aligned}
\Gamma(a,x) &= \int_x^\infty e^{-t}t^a\frac{dt}{t}\,, \\
I(a,T) &= \int_T^\infty e^{-t^2}t^{a+1}\frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{2}\int_{T^2}^\infty e^{-s}s^{\frac{a+1}{2}}\frac{ds}{s} \\
&= \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{a+1}{2}, T^2\Big)
\end{aligned}$$

以及渐近展开 [3, p. 135]

$$\Gamma(a,x) = x^{a-1}e^{-x}(1 + O(\frac{1}{x}))$$

现在得到

$$I(a,T) = \frac{1}{2}T^{a-1}e^{-T^2}(1 + O(T^{-2})).$$

2 短区间上 $L_{(1/2+it)}$ $1/2+it$ 的二次积分

2.1

在本节中，我们假设 m 固定；我们考虑满足 (1.1) 中假设的 π 。记

$$\begin{aligned}
L(s) &= L(s,\pi), \\
L(s,\pi) &= \sum a_n n^{-s}, \\
A_0(x) &= \sum_{n\le x} a_n \quad (x \ge 1).
\end{aligned}$$

假设给定 ξ、 $\nu > 0$ ，且只考虑满足 $\nu \geq \sigma_c(\pi)$ 的 π ，其中$\sigma_c(\pi)$ 是 $L(s, \pi)$ 的收敛横坐标。假设对于$x \geq 1$ 以及任意 ε，我们有如下估计

$$A_0(x) \ll_\varepsilon C^\xi x^{\nu+\varepsilon} \tag{2.1}$$

其中隐含常数仅依赖于 ε，且 $C = C(\pi)$。对于定义在 $\mathbb{R}_+^\times$ 上的适当函数 f ，我们定义

$$\widetilde{\mathcal{M}} f(s) = \int_0^\infty f(x) x^{-s} \frac{dx}{x}.$$

引理 2.1。（参见 $[2, \S\ 3.3]$）对于 $Re(s) > \nu$，定义 $\mathcal{M}A_0(s)$ 的积分绝对收敛，且 $\widetilde{\mathcal{M}} A_0(s) = {}^{L}{}_{(s)}\ {}_{s}$ 。

事实上

$$\begin{aligned}
&\int_0^X \Big(\sum_{n \leq x} a_n \Big) n^{-s} \frac{dx}{x} \\
&= \sum_{n \leq X} a_n \int_n^X x^{-s-1} dx \\
&= \frac{1}{s} \sum_{n \leq X} a_n n^{-s} - \frac{1}{s} \Big(\sum_{n \leq X} a_n \Big) X^{-s}.
\end{aligned}$$

由于 $Re(s) > \sigma_c(\pi)$，当 $X \to \infty$ 时，第一项和收敛于 $L(s, \pi)$。第二项由 $X^{\nu+\varepsilon/2} X^{-\nu-\varepsilon} \to 0$ 控制。

对于 $\sigma > \nu$，于是有

$$\int_1^\infty x^{-\sigma} A_0(x) x^{-it} \frac{dx}{x} = \frac{L(\sigma + it)}{\sigma + it}. \tag{2.2}$$

为了得到 $L(\frac{1}{2}+it)^{1/2+it}$ 在区间 $[-T, T]$ 上的 L^2 范数下界，我们考虑它与一个高斯函数的内积。因此，对 $\alpha > 0$，令:

$$g_\alpha(t) = e^{-\pi \alpha t^2}.$$

我们将 g_α 扩展为关于 s 的函数，当 $s = 1/2 + it$ 时，该函数等于 $g_\alpha(t)$。因此

$$G_\alpha(s) = e^{\pi \alpha (s-1/2)^2}.$$

这是一个关于 t ($s = \sigma + it$) 的快速衰减函数，并且在任意垂直条带内一致。特别地，对于 $\sigma > \nu$:

$$\int_{\sigma} \frac{L(s)}{s} G_{\alpha}(s) ds = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(1/2+it)}{1/2+it} g_{\alpha}(t) dt \tag{2.3}$$

因为 $L(s)$ 和 $G_{\alpha}(s)$ 没有极点。我们利用傅里叶变换估计左边。由 (2.2) 得

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\sigma X} A_0(e^X) e^{-itX} dX = \frac{L(\sigma+it)}{\sigma+it},$$

i.e.

$$\frac{L(\sigma+it)}{\sigma+it} = \mathcal{F}(e^{-\sigma X} A_0(e^X))$$

其中

$$\mathcal{F}h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(X) e^{-itX} dX.$$

逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1}k(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) e^{itX} dt. \tag{2.4}$$

标量积公式为

$$\int k_1(X) \overline{k_2(X)} dX = \frac{1}{2\pi} \int h_1(t) \bar{h}_2(t) dt.$$

然而，(2.3) 是一个双线性乘积，因此:

$$\int h_1(t) h_2(t) dt = 2\pi \int k_1(X) k_2(-X) dX.$$

因此，(2.3) 的左边等于 $i = \sqrt{-1}$ 与下式的乘积

$$2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma X} A_0(e^X) \hat{G}_{\alpha}(-X) dX \tag{2.5}$$

其中 $G_{\alpha}(X)$ 是将 (2.4) 应用于 $k(t) = G_{\alpha}(\sigma+it)$ 得到的。现在

$$G_{\alpha}(\sigma+it) = e^{\pi\alpha(\sigma-1/2)^2} e^{-\pi\alpha t^2} e^{2\pi\alpha(\sigma-1/2)it}. \tag{2.6}$$

我们有

$$\mathcal{F}^{-1}k(X) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_0^{-1}k(\frac{X}{2\pi})$$

wh这里 $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_0^{-1}$表示通常的傅里叶变换，其归一化方式为 2π。现在

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0^{-1}(f(t)e^{2i\pi\beta t}) &= \mathcal{F}_0^{-1}f(X+\beta),\\ \mathcal{F}_0^{-1}(e^{-\pi\alpha t^2}) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi}{\alpha}X^2}\end{aligned}$$

因此，根据 (2.6)， $\mathcal{F}_0^{-1}G_\alpha)(X)$ 等于

$$\begin{aligned}&e^{\pi\alpha(\sigma-1/2)^2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi}{\alpha}(X+\alpha(\sigma-1/2))^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{\pi}{\alpha}X^2}e^{-2\pi X(\sigma-1/2)},\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{F}^{-1}G_\alpha(-X) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}e^{(\sigma-1/2)X}.$$

2.2

现在我们考虑积分 (2.5)，它等于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty e^{-\sigma X}A_0(e^X)e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}e^{(\sigma-1/2)X}dX\\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty A_0(e^X)e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}e^{-\frac{X}{2}}dX.\end{aligned} \tag{2.7}$$

（鉴于复积分的平移性质，它理应与 σ无关。）

对于 $1 \le x \le 2$, $A_0(x) = 1$。我们先求出一个下界

$$I_1 := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\log 2} e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}e^{-\frac{X}{2}}dX.$$

下文中，当隐含常数为绝对常数时，使用不带下标的兰道符号 $O(\,) \ll, \ldots$。我们有

$$I_1 \ge \sqrt{1/2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\log 2} e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}dX.$$

我们令 $X = \sqrt{4\pi\alpha}Y$；于是积分为

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{\pi}\int_0^{\log 2/2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-Y^2}dY \\ = \;& 2\sqrt{\pi}Erf\Big(\frac{\log 2}{2\sqrt{\pi\alpha}}\Big) \\ = \;& 2\sqrt{\pi}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - Erfc\Big(\frac{\log 2}{2\sqrt{\pi\alpha}}\Big)\Big). \end{aligned}$$

对于 $x \to \infty$, $Erfc(x) = \frac{1}{2x}e^{-x^2}(1 + O(\frac{1}{x^2}))$。因此，当 α 较小时，

$$I_1 \geq \pi\sqrt{1/2} - O\Big(\sqrt{\alpha}\; e^{-\frac{\log^2 2}{4\pi\alpha}}\Big)$$

并且 $I_1 \geq \frac{\pi}{2}$：对于充分小的 α，$= 2c$

现在我们需要估计余项，它由以下项主导:

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\log 2}^{\infty} C^{\xi}\; e^{(\nu+\varepsilon-1/2)X}e^{-\frac{X^2}{4\pi\alpha}}dX.$$

设 $\theta = \nu + \varepsilon - 1/2$，并令

$$Y = X - 2\pi\theta\alpha.$$

被积函数中的指数项于是为

$$\exp\Big(-\frac{Y^2}{4\pi\alpha}\Big)e^{\pi\theta^2\alpha}.$$

W由于 α 会很小，我们可以忽略常数。因此， I_2 由以下项主导:

$$\begin{aligned} I_3 \;&= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{\ell}^{\infty} C^{\xi}e^{-\frac{1}{4\pi\alpha}X^2}dX, \\ \ell &= \log 2 - 2\pi\theta\alpha. \end{aligned}$$

对于较小的 α，因此与 $[\ell, \log\ 2]$ 相关的部分由 $C^{\xi}\sqrt{\alpha}\cdot e^{-a_1/\alpha}$ 主导，其中 $a_1 > 0$ 固定。现在我们考虑

$$I_4 = C^{\xi}\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{1}{4\pi\alpha}X^2}dX.$$

该积分等于 $2\sqrt{\pi}\ Erfc(\frac{\log 2}{2\sqrt{\pi\alpha}})$（参见 §1 中的公式）；它可以表示为

$$\sqrt{\pi}\ e^{-\frac{\log^2 2}{4\pi\alpha}}\Big(\frac{2\sqrt{\pi\alpha}}{\log 2}+O(\alpha^{3/2})\Big) \tag{2.8}$$

当 α 较小时。此项（乘以 C^{ξ} 后）与小线段上的积分同阶。

我们希望确保此项受 I_1 控制，这可由下式推出：

$$\sqrt{\alpha}\ e^{-\frac{a_2}{\alpha}}C^{\xi}\le a_3$$

其中 a_3 是一个较小的常数，即

$$\frac{1}{2}\log\alpha-\frac{a_2}{\alpha}+\xi\log C\le -a_4$$

（$a_4>0$）。我们可以假设 $\alpha\le 1$，因此我们要寻求

$$\frac{a_2}{\alpha}\ge a_4+\xi\log C. \tag{2.9}$$

由于 $C\ge 2^m$、$\xi\log C>a_5>0$ 且

$$\frac{1}{a_4+\xi\log C}>\frac{1}{N\xi\log C}$$

对于满足 $a_4<(N-1)\xi\log C$ 的 N，因此 N 由与 π 无关的常数确定。

因此，当满足以下条件时，(2.9)
得到验证：

$$\alpha\le\frac{a_5}{\log C}. \tag{2.10}$$

我们总结如下结果

命题 2.1. 假设 π 尖点的，且 $\sigma_c(\pi)\le\nu$。存在正常数 c, b_1（仅依赖于 ξ,ν），使得如果 $C=C(\pi)$，并且

$$\alpha\le\frac{b_1}{\log C},$$

then

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L(1/2+it,\pi)}{1/2+it}g_\alpha(t)dt\Big|\ge c.$$

2.3

现在我们可以利用 Molteni 的一个定理 [14]，沿用前面的证明。

定理 2.1。（Molteni）设 π 是 $GL(m,\mathbb{A})$ 的尖点酉表示。那么

$$\sum_{n\le x}|a_n| = O_\varepsilon(C^\varepsilon x^{1+\varepsilon}) \qquad (x\ge 1).$$

（隐含常数仅取决于 m 和 ε。）事实上，Molteni 证明了一个更强的结果：

$$\sum_{n\le x}\frac{|a_n|}{n} = O(C^\varepsilon x^\varepsilon).$$

因此，在前面的证明中，我们可以取 $\nu = 1$、$\xi = \varepsilon$。（Xiannan Li [12] 改进了这一结果；改进后的估计似乎与我们无关，但该定理可推广到满足 §1.1 中条件的自守表示。）当然，假设 $\sigma_c(\pi) \le \nu$ 是成立的。

我们说明了适用于其他指数的证明，这是因为以下事实。只考虑满足拉马努金猜想的温和表示 π。此外，假设 π_∞ 是自对偶的。那么根据 Friedlander 和 Iwaniec 的一个结果，(2.1) 在 $\xi = \frac{1}{m+1}$、$\nu = \frac{m-1}{m+1}$ 的条件下成立。（见 [4]；其中自对偶条件是隐含的，并在 [2] 中明确提出。）然而，Friedlander 和 Iwaniec 只考虑算术导子，因此 (2.1) 要替换为

$$A_0(x) \ll D^{\frac{1}{m+1}} x^{\frac{m-1}{m+1}+\varepsilon}.$$

他们还必须假设 π_∞ 有界，即 $C_\infty(\pi) = \prod(2+|c_i|)$ 有界。他们关于 x 的估计更好，但这似乎与当前证明无关。

这些表示 π 满足 $\sigma_c(\pi) \le \frac{m-1}{m+1}$ 这一事实已在 [2] 中得到证明。

遗憾的是，在下一段中我们不得不假设拉马努金猜想成立。

2.4

为了利用命题 2.1 在一个“短”区间上得到下界，我们现在必须估计尾项

$$I_5(T) = \int_T^\infty \frac{L(1/2+it)}{1/2+it} g_\alpha(t)dt$$

（以及相反的情形）。为了得到一致估计，我们现在必须假设 π 满足拉马努金猜想。于是我们有

$$L(\frac{1}{2}+it) \ll C(t)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

固定 $g_\alpha(t) = e^{-\pi\alpha t^2}$，使得 $\alpha = {}^{b_1}\underline{\text{对数}C}$。对于 $T \geq 1$,

$$I_5(T) \ll C^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \int_T^\infty e^{-\pi\alpha t^2} t^{\frac{m}{4}-1+\varepsilon} dt. \tag{2.11}$$

我们需要对下式作出估计

$$\int_T^\infty e^{-\pi\alpha t^2} t^a dt;$$

如第 1 章所回顾的,

$$\int_T^\infty e^{-\pi\alpha t^2} t^a dt = \frac{1}{2}\pi^{-1}\alpha^{-1}T^{a-1}e^{-\pi\alpha T^2}\cdot \cdot\Big(1+O\Big(\frac{1}{\pi\alpha}T^{-2}\Big)\Big).$$

我们希望确保 $|I_5(T)| \leq \frac{1}{4}c$；也就是说,

$$C^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\alpha^{-1}T^{a-1}e^{-\pi\alpha T^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\alpha}T^{-2}\Big)\Big) \ll 1.$$

我们暂且假设可以选择 T，使得 $\frac{1}{\alpha}T^{-2}$ 很小。于是这可由下式推出

$$\frac{1}{2}\log C - \log\alpha + (a-1)\log T - \pi\alpha T^2 \leq -X \tag{2.12}$$

其中 X 是一个正常数；这里 $a = \frac{m}{4} - 1 + \varepsilon$；我们将 a 替换为满足 $a-1>0$的值。对于 $\alpha = {}^{b_1}\underline{\text{对数}C}$，我们希望确保

$$\pi\alpha T^2 - a\log T \geq X - \log\alpha + \frac{1}{2}\log C,$$

由此得出

$$\pi b_1 T^2 - a \log C \log T \geq \log C(X' + \log\log C + \frac{1}{2}\log C).$$

假设 $T^2 = A_1 \log^2 C$ 是一个较大的正常数。于是左侧为

$$\pi b_1 A_1 \log^2 C - a \log C(\log\log C + \log\sqrt{A_1}) \geq A_2 \log^2 C$$

当 A_1 足够大且 $C \geq 2^m$时，这支配右侧。此外，$\frac{1}{\alpha}T^{-2} \ll (\log C)^{-1}A_1^{-2} \leq \frac{1}{2}$ 对于足够大的 A_1成立（与 C 无关），正如先前所假设的。因此:

引理 2.2. 对于 $T = A\log C$，其中 A 是一个足够大的正常数，且 $\alpha = \frac{b_1}{\text{对数}C}$，

$$\Big|\int_{|t|\geq T} \frac{L(1/2+it)}{1/2+it} g_\alpha(t)dt\Big| \leq \frac{c}{2}.$$

当 $|t| \leq T$ 时，积分的绝对值为$\geq \frac{c}{2}$。因此

$$\operatorname*{Sup}_{t\in[-T,T]} \Big|\frac{L(1/2+it)}{1/2+it}\Big| \geq \frac{c}{2} \Big|\int_{t\leq T} g_\alpha(t)dt\Big|^{-1} \tag{2.13}$$

$$\Big\|\frac{L(1/2+it)}{1/2+it}\Big\|_2 \Big\|g_\alpha(t)\Big\|_2 \geq \frac{c}{2} \tag{2.14}$$

其中，L^2-范数是在 $[-T,T]$ 中计算的。

现在我们需要估计 $g_\alpha(t)$ 在$[-T,T]$上的积分和二次积分。我们有

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-\pi\alpha t^2}dt &= \int_0^{\sqrt{\pi\alpha}T} e^{-s^2}(\sqrt{\pi\alpha})^{-1}ds \\ &= a_6(\log C)^{1/2}\int_0^{a_7(\log C)^{1/2}} e^{-s^2}ds \\ &\asymp (\log C)^{1/2}\end{aligned}$$

二次积分也满足相同的估计。因此我们得到

定理 2.2. 存在绝对正常数 A, c_1, c_2 ，使得对于任意满足拉马努金猜想的尖点 π

(i) $\underset{t\in[-T,T]}{\text{Sup}}\left|\frac{L(1/2+it),\pi}{1/2+it}\right| \geq c_1(\log C)^{-1/2}$

(ii) $\int_{-T}^{T}\left|\frac{L(1/2+it),\pi}{1/2+it}\right|^2 dt \geq c_2(\log C)^{-1/2}$

if $T \geq A\log C$, $C = C(\pi)$.

可以注意到，在（i）中，林德勒夫猜想给出了一个估计$\ll (\log\ C)^{\varepsilon}$（当 T 的阶为 $A\log\ C$ 时）。

我们使用 π 的尖点性，只是为了依赖 Molteni 的结果；李贤安的结果使这一点变得不必要。

现在，我们可以利用 §1.3 中关于积分平移的注，得到 $L(\frac{1}{2}+it,\pi)$ 在短区间上的下界，这些短区间不必以 0 为中心。我们有

$$\begin{gathered} L(s,\pi[X] = L(s+iX,\pi) \\ C(\pi[X]) \leq C(\pi)(1+|X|)^m \\ \log C(\pi[X]) \leq \log C(\pi) + m\log(1+|X|). \end{gathered}$$

Let

$$S = \underset{t\in[-T,T]}{\text{Sup}}\left|\frac{L(1/2+it,\pi[X])}{1/2+it}\right|.$$

根据定理 2.2，对于 $T \geq A\log\ C(\pi[X])$:

$$S \geq c_1(\log C + m\log(1+|X|))^{-1/2}.$$

然而

$$S = \underset{t\in[-T,T]}{\text{Sup}}\left|\frac{L(1/2+i(t+X),\pi}{1/2+it}\right| \leq 2\underset{t\in[-T,T]}{\text{Sup}}|L(1/2+i(t+X,\pi)|$$

因此，我们得到了关于“短区间”的以下结果。

定理 2.3. 存在绝对正常数 A, $c_3, c_4 > 0$ ，使得对于任何满足拉马努金猜想的尖点 π

(i) $\underset{t\in[X-T,X+T]}{\text{Sup}}|L(1/2+it,\pi)| \geq c_3\cdot(\log C(\pi) + m\log(1+|X|))^{-1/2}.$

(ii) $\int_{X-T}^{X+T} \left|\frac{L(1/2+it,\pi}{1/2+i(t-X)}\right|^2 dt \geq c_4(\log C(\pi)+m\log(1+|X|))^{-1/2}$

if $T \geq A(\log C+\log(1+|X|),\ C=C(\pi).$

这些绝对常数仅依赖于 m。

Sarnak 建议将估计 (ii) 与 Ramachandra 在 [18] 中得到的短区间下界进行比较。（Ramachandra 指出，他针对黎曼ζ函数所写的证明可推广到具有欧拉乘积的L函数。见 [18, 注 3]。）事实上，由于积分中的分母很大，我们的下界似乎优于显然可由 Ramachandra 的结果推出的下界。我们假设 X 为正且足够大，而 T 相对于 X 足够小。（接下来的几行中，常数 A 取决于所用公式。）那么 Ramachandra 的估计为

$$\int_X^{X+T} |L(1/2+it)|^2 dt \geq AT\log T,\ T \geq A\log\log X$$

而我们在此得到

$$\int_{X-T}^{X+T} \left|\frac{L(1/2+it,\pi}{1/2+i(t-X)(}\right|^2 dt \geq A(\log C+\log X)^{-1/2}$$

对于 $T \geq A$(log C + log X)。

固定 C 时，我们对 T 的条件蕴含 Ramachandra 的条件。我们考察$T \approx A$log X。我们公式中的分母小于 T^2。因此，Ramachandra 的下界对该积分给出

$$\int_{X-T}^{X+T} \left|\frac{L(1/2+it,\pi}{1/2+i(t-X)}\right|^2 dt$$

AT^{-1}log T的下界。但对于 $T \approx A$log X，(log X)$^{-1}$log log X被我们的界 (log X)$^{-1/2}$所控制。因此，对于固定的 C，这些结果似乎无法相提并论。（若能了解导子如何出现在 Ramachandra 的公式中，将会很有意思。）

3 伽罗瓦表示中的第一个非平凡弗罗贝尼乌斯元素

3.1

本章考虑一个非平凡的不可约表示 $\rho : \mathrm{Gal}(E/F) \to GL(m, \mathbb{C})$，其中 E/F是数域的伽罗瓦扩张。若 ρ 在 F的素数 $\mathfrak{p}$ 处非分歧，我们可以考虑像 $\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})$，它是 $GL(m, \mathbb{C})$中的一个共轭类。我们希望得到 β 的下界，其中 β 是满足以下条件的最小值：$N\mathfrak{p}$ 使得 ρ 非分歧且 $\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}) \neq 1$。当然，分歧的存在使问题变得复杂；也就是说，可能存在一个分歧素数 $\mathfrak{q}$ 使得 $N\mathfrak{q} \leq \beta$。若 $m = 1$，这适用于 $\mathbb{A}_F^\times$ 的阿廷特征。

3.2

我们首先考虑阿贝尔情形，$m = 1$。若 $F = \mathbb{Q}$，我们考察模 $q = D$ 的原始狄利克雷特征。若 $L(s, \chi) \ll (q|s|)^{\mu+\varepsilon}$ 对$Re(s) = \frac{1}{2}$，则 [2, § 3.3] 中已证明 $\beta \ll q^{2\mu+\varepsilon}$。由于 Petrow 和 Young [17] 已证明韦伊界 $\mu \leq \frac{1}{6}$，通过这一简单应用梅林变换，我们得到

$$\text{For } \chi \text{ a primitive Dirichlet character } \mod q,\ \beta(x) \underset{\varepsilon}{\ll} q^{1/3+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

当然，这远弱于伯吉斯界（当 q 为素数时）

$$\beta(\chi) \underset{\varepsilon}{\ll} q^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}.$$

然而，现在我们可以将这一方法推广到任意数域 F 上的 $\mathbb{A}_F^\times$ 阿廷特征。

因此，设 χ 是一个有限阶特征，ρ 是由类域论与 χ 相关联的 Gal(F_χ/F) 的一维表示。我们将 $L(s, \chi)$ 这一 L–函数视为实数域 $\mathbb{Q}$ 上的 L–函数。Friedlander–Iwaniec 论文中的所有条件均已满足——对于次数为 > 1 的伽罗瓦表示，情况也同样如此。因此，我们具备 § 2.3 中回顾的 $L(s, \chi)$ 的性质。

我们不采用 [2], 中的公式，而是采用 § 2.1 中的梅林变换。

因此，令

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \sum_n a_n n^{-s}, \\ A_0(x) &= \sum_{n\le x} a_n \end{aligned}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{M}}\, A_0(x) = \int_1^\infty A_0(x) x^{-s} \frac{dx}{x}. \tag{3.2}$$

令 ν_0 为 Friedlander–Iwaniec 的指数：

$$\nu_0 = \frac{d-1}{d+1},\ d = [F:\mathbb{Q}].$$

so

$$A_0(x) \underset{d,\varepsilon}{\ll} D^{\frac{1}{d+1}} x^{\nu_0+\varepsilon} \quad (x \ge 1). \tag{3.3}$$

注意，与 χ 相关的阿基米德数据（c_j）是一致有界的，因此常数仅依赖于（d,ε）。此外，Friedlander–Iwaniec 对 $x \ge D^{1/2}$ 得到了（3.2）（修正见 [2, 第 2.5] 节），但对 $x \le D^{1/2}$ 而言这是显然的，因为对于任意 $\varepsilon' > o$，都有 $|a_n| \ll n^{\varepsilon'}$。

当 $Re(s) > \nu_0$，例如 $Re(s) = \nu > \nu_0$ 时，（3.2）中的积分绝对收敛。于是，函数 $A_0(x)x^{-\nu}$ 属于 $L^2(\mathbb{R}_+^\times, \frac{dx}{x})$。由此（参见 Titchmarsh [19]）可知，$L(s)$ 在直线 $Re(s) = \nu$ 上是 L^2，并且

$$\int_1^\infty |x^{-\nu} A_0(x)|^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_\nu \left|\frac{L(s)}{s}\right|^2 |ds|. \tag{3.4}$$

然而，若 ν 接近 ν_0，右端的收敛性并不能由凸性推出：参见 [2, 第 3.2] 节；我们将在第 4 章对此进行回顾。因此，我们不能使用命题 1.1 来估计右端。

由命题 1.1，我们有 $\mu(\nu) \le \frac{d}{2}(1-\nu)$，因此当 $\nu > 1 - \frac{1}{d}$ 时，$\mu(\nu) < \frac{1}{2}$。右侧的收敛性随即由凸性得出，并且再次由命题 1.1 可知：

引理 3.1. 对于 $\nu > 1 - \frac{1}{d}$，

$$\int_\nu \left|\frac{L(s)}{s}\right|^2 |ds| \ll D^{1-\nu+\varepsilon}.$$

3.3

现在我们希望得到 (3.4) 左侧的下界。我们考虑 $[1,\beta]$ 上的积分，其中 β 是第一个满足 $\chi(\mathfrak{p})\neq 1$ 的非分歧素数的范数。

在此之前，我们回顾“绝对”导子 D 的表达式。令 D_F 为 F 的判别式的绝对值；令 $\mathfrak{f}(\chi)$ 为 χ（视为 $\mathbb{A}_F^\times$ 的特征）的导子，它是 F 的一个理想。于是

$$D = D_F\ N_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{f}(\chi). \tag{3.5}$$

我们需要求出 $A_0(x)$ 关于 $x<\beta$ 的表达式。它由下式给出：

$$a_n = \sum_{N\mathfrak{a}=n} a(\mathfrak{a})$$

其中 $\sum a(\mathfrak{a})N\mathfrak{a}^{-s}$ 是 $L(s,\chi)$ 作为 F 上的 L 函数的表达式，而 $N\mathfrak{a}<\beta$，这意味着 $\mathfrak{a}$ 的因式分解只涉及满足 $N\mathfrak{p}<\beta$ 的 $\mathfrak{p}$ 素数。我们有

$$L_{\mathfrak{p}}(s,\chi) = (1-N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

若 χ 在 $\mathfrak{p}$ 和 $N\mathfrak{p}<\beta$ 处非分歧，

$$L_{\mathfrak{q}}(s,\chi) = 1$$

χ 在 $\mathfrak{q}$ 处分歧。若 $\mathfrak{a}=\prod \mathfrak{q}_i^{\alpha_i}\prod \mathfrak{p}_j^{\beta_j}$（这里用 $\{\mathfrak{q}_i\}$ 表示所有分歧素数），则这意味着

$$a(\mathfrak{a}) = 0$$

若对某个 i 有 $\alpha_i>0$，否则 $a(\mathfrak{a})=1$。因此，除去 $x=\beta$，$A_0(x)$ 是 ζ_F 的求和函数的一种变体：

$$A_0(x) = \sum_{n\le x}\sum_{\substack{N\mathfrak{a}=n\\(\mathfrak{q}_i,\mathfrak{a})=1}} 1 \tag{3.6}$$

其中，对所有 i，均施加条件 $(\mathfrak{q}_i,\mathfrak{a})=1$。令 $B_0(x)$ 为 ζ_F 的求和函数。于是，差值 B_0-A_0 为

$$\sum_{n\le x}\sum_{N\mathfrak{a}=n}{}' 1 \tag{3.7}$$

其中， $\sum'$ 受以下条件限制

$$\exists\ i : \mathfrak{q}_i | \mathfrak{a}. \tag{3.8}$$

此时有必要推广 [4] 的主要结果。一般地，假设 π 是 $GL(m, \mathbb{A})$ 的温和表示；假设 π 是由尖点表示构成的乘积（至多带有一个因子 $m_i = 1$, $\pi_i = 1$）；假设 π_∞ 自对偶。令 $A_0(x)$ 为相应的求和函数。令 κ 为 $L(s, \pi)$ 在 1 处的留数。我们用 D 表示 π 的导子。

命题 3.1。对于 $x \geq 1$,

$$A_0(x) = \kappa x + O(\mathbf{D}^{\frac{1}{m+1}+\varepsilon} x^{\frac{m-1}{m+1}+\varepsilon})$$

其中隐含常数仅依赖于 m、ε 以及 π 的阿基米德参数。

对于函数 ζ_F，隐含常数仅依赖于 d 和 ε。

对于 $x \geq \mathbf{D}^{1/2}$，这是 [4] 的结果。对于 $x \leq \mathbf{D}^{1/2}$，§ 3.2 中已经指出，$A_0(x) \ll \mathbf{D}^{\frac{1}{m+1}} x^{\frac{m-1}{m+1}+\varepsilon}$。（这与 $L(s)$ 是否全纯无关。）若 $x \leq \mathbf{D}^{1/2}$，则 $\mathbf{D}^{\frac{1}{m+1}} x^{-\frac{2}{m+1}} \geq 1$，只需验证：

$$\kappa \ll (\mathbf{D}x)^{\varepsilon}$$

这成立是因为 $\kappa \ll \mathbf{D}^{\varepsilon}$，参见 [7, 第 100] 页。（对于 ζ 函数，这是布劳尔–西格尔定理中较简单的部分。）

现在我们可以将此应用于 B_0:

$$B_0(x) = \kappa x + O(D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon} x^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon}),$$

$\kappa = Res_{s=1}\zeta_F(s)$。现在固定 i，并考虑和式 (3.7)，条件为$\mathfrak{q}_i | \mathfrak{a}$。通过变量替换，

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq x \\ \mathfrak{q}_i | \mathfrak{a}}} 1 = \sum_{N\mathfrak{b} \leq \frac{x}{q_i}} 1$$

其中，$q_i = N\mathfrak{q}_i$ 和 $\mathfrak{b}$ 遍历整理想。这可以表示为

$$\kappa \frac{x}{q_i} + O(D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon} (x/q_i)^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon}).$$

不过，需要谨慎处理。对于 $x \geq q_i$，这当然成立；然而对于 $x < q_i$，求和为空，因此我们必须检验

$$\kappa \frac{x}{q_i} \ll D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}(x/q_i)^{1-\frac{2}{d+1}+\varepsilon}$$

（当 d 固定时一致成立。）这就化简为

$$\kappa \ll D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}(x/q_i)^{-\frac{2}{d+1}+\varepsilon};$$

但 $x/q_i \leq 1$ 和 $\kappa \ll D_F^{\varepsilon}$。

现在回到和式 (3.7)。根据容斥原理，它等于

$$\sum S_i - \sum S_{ij} + \sum S_{ijk} - \cdots$$

其中

$$S_{ij\cdots\ell} = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leq x \\ \mathfrak{q}_i\cdots\mathfrak{q}_\ell \mid \mathfrak{a}}} 1.$$

同样的论证给出，取 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_i \cdots \mathfrak{q}_\ell$、$q = q_i \cdots q_\ell$：

$$S_{ij\cdots\ell} = \kappa \frac{x}{q_i} + O\Big(D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}(x/q)^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon}\Big).$$

此前的论证对 $x \leq q$ 仍然成立，且具有相同的一致性。记 $\xi = \frac{d-1}{d+1} + \varepsilon$。于是我们得到

$$A_0(x) = \prod_i \Big(1 - \frac{1}{q_i}\Big)\kappa x + O(\prod (1 + q_i^{-\xi}) D_F^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon} x^{\xi}). \tag{3.9}$$

在 (3.9) 中，我们可以（直接）用 $D \geq D_F$ 替换 D_F。我们需要计算 $Q = \prod(1 - \frac{1}{q_i})$ 和 $R = \prod(1 + q_i^{-\xi})$。

令 p_i 为 q_i 的素因子。于是

$$Q \geq \prod_i \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).$$

与 p_i 相关联的素数可能有多个，但少于 $d = [F : \mathbb{Q}]$。因此

$$Q \geq \prod_j \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big)^d$$

此处的 p_j 现已互不相同。但 p_j 整除 $N\mathfrak{f}_\chi$，因此 $p_j \le N = N\mathfrak{f}_\chi$ 和

$$Q \ge \prod_{p\le N}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^d.$$

由于 $\prod_{p\le N}(1-\frac{1}{p}) = \frac{e^{-\gamma}}{\text{对数 } N}(1+O(\frac{1}{\text{对数 } N}))$，我们推得 $Q \ge A$对数$(N\mathfrak{f}_\chi)^{-d}$. (If χ 处处非分歧，$Q=1$。）。

现在考虑 $R=\prod(1+q_i^{-\xi})$。同样，$R \le \prod_i(1+p_i^{-\xi}) \le (\prod_j(1+p_j^{-\xi}))^d$, 记号与前相同。但 $\prod(1+p_j^{-\xi}) = \sigma_{-\xi}(p_1\cdots p_j) < \sigma_0(p_1\cdots p_j) \ll (p_1\cdots p_j)^\varepsilon \ll (N\mathfrak{f}_\chi)^\varepsilon$，并且对 R 也有相同的估计。

现在固定 $\nu > 1-\frac{1}{d}$，并考虑积分

$$\int_1^\beta |x^{-\nu}A_0(x)|^2\frac{dx}{x}.$$

由 (3.9) 可知，这可以写成三项之和，其中一项是精确项:

$$I_1 = \int_1^\beta (Q\kappa x^{1-\nu})^2\frac{dx}{x},$$

so

$$I_1 \asymp Q^2\kappa^2\beta^{2-2\nu} \qquad (\beta\ge 2). \tag{3.10}$$

第二项被以下表达式控制

$$I_2 = D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}Q\kappa\int_1^\beta x^{2-\frac{2}{d+1}-2\nu}\frac{dx}{x}$$

利用 $R \ll D^\varepsilon$，因此

$$I_2 \asymp D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}Q\kappa\beta^{2-\frac{2}{d+1}-2\nu}. \tag{3.11}$$

第三项由.....控制

$$I_3 = D^{\frac{2}{d+1}+\varepsilon}\int_1^\beta x^{-2\nu+1-\frac{4}{d+1}+\varepsilon}dx$$

（重新缩放 $\varepsilon\cdots$）。

对于 $\nu > 1 - \frac{1}{d}$，积分中的指数始终为 < -1 （假设$d > 1$。）因此

$$I_3 \asymp D^{\frac{2}{d+1}+\varepsilon}. \tag{3.12}$$

现在我们比较 I_1 和 I_2；我们希望假设 I_1 占主导，即

$$Q\kappa \succ D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}\beta^{-\frac{2}{d+1}}.$$

现在假设扩张 $F/\mathbb{Q}$ 是伽罗瓦扩张。根据布劳尔–西格尔定理，$\kappa \gg D_F^{-\varepsilon}$，其中隐含常数仅依赖于 d。根据我们对 Q的估计，必有

$$D_F^{-\varepsilon}(\log N\mathfrak{f}_\chi)^{-d} \succ D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon}\beta^{-\frac{2}{d+1}}$$

若满足以下条件，则通过改变 ε，可知

$$\beta^{\frac{2}{d+1}} \succ D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon},$$

i.e.

$$\beta \gg D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{3.13}$$

现在考虑 I_1 和 I_3。在这种情况下，再次利用对 $Q\kappa$的估计，必有

$$\beta^{2-2\nu} \succ D^{\frac{2}{d+1}+\varepsilon};$$

当 ν接近 $1 - \frac{1}{d}$时，我们看到这推出

$$\beta \gg D^{\frac{d}{d+1}+\varepsilon}. \tag{3.14}$$

现在我们将假设占主导的 I_1与引理 3.1给出的估计进行比较，由此得到

$$D^{1-\nu+\varepsilon} \gg Q^2\kappa^2\beta^{2-2\nu};$$

由于我们可以忽略 Q κ，因此得到

$$\beta \ll D^{1/2+\varepsilon}.$$

结论是：

$$\beta \gg D^{\frac{d}{d+1}+\varepsilon} \Rightarrow \beta \ll D^{1/2+\varepsilon}.$$

我们得出，当 D 足够大时，$\beta \ll D^{\frac{d}{d+1}+\varepsilon}$。满足 $D_F N(\mathfrak{f}_\chi) \leq A$ 的配对 (F, χ) 只有有限多个。事实上，此时 F 只有有限种可能；固定 F 后，χ 的素数和分歧度有界。因此：

定理 3.1. 设 F 是 $\mathbb{Q}$ 上次数为 $d \geq 2$ 的伽罗瓦扩张，χ 是 F 上非平凡的阿廷特征。令 $\beta = N\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是范数最小且满足 $\chi(\mathfrak{p}) \neq 1$ 的非分歧素数。那么

$$\beta \ll D^{\frac{d}{d+1}+\varepsilon}$$

其中 $D = D_F N(\mathfrak{f}_\chi)$，且隐含常数仅依赖于 d 和 ε。

注。通过避免在 (3.9) 之后将 D_F 改为 D，或许可以得到一个略好的估计，具体取决于 $N\mathfrak{f}_\chi$。

3.4

现在设 F 是一个数域，且

$$\rho : \mathrm{Gal}(E/F) \longrightarrow GL(M, \mathbb{C})$$

是一个次数为 M的不可约表示。我们考虑其 Artin L–函数$L(s, \rho)$，它由一个次数为 M、取遍 F的欧拉乘积给出。我们可以将其视为一个在 $\mathbb{Q}$上次数为 $m = Md$ 的 L–函数。我们假设 ρ 非平凡，且阿廷猜想对 ρ 成立： $L(s, \rho)$ 是全纯的。（关于阿廷猜想近期结果的综述，参见 Calegari [Ca] 及其中的参考文献。）我们回顾一下，Friedlander–Iwaniec 的结果适用于 $L(s, \rho)$（参见 [2, § 2.1]。）

D $L(s, \rho)$ 的（绝对）导子等于 $D_F^M N(\mathfrak{f}_\rho)$，其中 $\mathfrak{f}_\rho$ 是 F 的一个理想，也是 ρ 的阿廷导子，参见 Neukirch [16, 命题 11/7]。

∞设 $L(s, \rho) = \sum a_n n^{-s}$。其欧拉乘积（取遍 F）为

1

$$L(s, \rho) = \prod_{\mathfrak{p}} \det((1 - \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s}) \mid V^{I_\mathfrak{p}})^{-1}$$

其中 V 是 ρ 的空间，而 $I_\mathfrak{p}$ 是惯性群。特别是，分歧素数会引入因子 $\prod (1 - \alpha_{i,\ \mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$，其中 $\alpha_{i,\ \mathfrak{p}}$ 是一个不等于 1 的单位根$_i$，这些因子并非正数。为了应用 § 3.2 的方法，我们引入非分歧 L–函数

$$\mathcal{L}(s, \rho) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s, \rho)$$

其中乘积仅遍及非分歧素数。因此，当 $\mathfrak{q}$遍及分歧素数时，

$$\mathcal{L}(s,\rho) = L(s,\rho)\prod_{\mathfrak{q}} D_{\mathfrak{q}}(s,\rho)$$

其中 $D_{\mathfrak{q}}(s,\rho) = \prod(1-\alpha_{i,\ \mathfrak{q}}N\mathfrak{q}^{-s})$。令 $D(s,\rho) = \prod D_{\mathfrak{q}}(s,\rho)$。我们需要控制临界带内 $\mathcal{L}(s,\rho)$ 的增长。对于 $Re(s) \geq 0$，$D_{\mathfrak{q}}(s,\rho) \leq 2^{M-1}$。因此

$$|D(s,\rho)| \leq 2^{(M-1)r} \leq 2^{d(M-1)t}$$

其中 r 是分歧素数的个数，$\mathfrak{q}$ 和 $\{p_1,\dots p_t\}$ 是整除某个 $\mathfrak{q}_j$ 的互异有理素数。

固定 d，并固定 $\varepsilon > 0$。我们首先证明

$$|D(s,\rho)| \leq (D_F^M\ N\mathfrak{f}_\rho)^\varepsilon \tag{3.15}$$

除有限多个数对 $(F,\mathfrak{f})$ 外。先假设 $r \to \infty$。我们有$r \leq dt$，因此 $t \geq [\frac{r}{d}]$。此外 $p_i \mid N\mathfrak{f}_\rho$，所以 $N\mathfrak{f}_\rho \geq \prod p_i \geq t!$ 因此，当 $2^{(M-1)r} \leq \Gamma([\frac{r}{d}]+1)^\varepsilon$ 时，(3.14) 得证；也就是说，当

$$2^{M-1)r} \leq \left(\Gamma\left(\frac{r}{d}\right)\right)^\varepsilon.$$

由于 ε 固定，由斯特林公式可知，当 r 足够大时，该结论成立。

因此现在假设 $r \leq r_0$。那么 $|D(s,\rho)| \leq 2^{(M-1)r_0}$，并且当 D_F足够大时，(3.15) 成立；也就是说，除去有限个 F。

同样，对于固定的 F，当 $N\mathfrak{f}_\rho$ 足够大时，(3.15) 成立。如果 $N\mathfrak{f}_\rho \leq A$，那么 $\mathfrak{f}_\rho$的赋值和次数只有有限种可能。

最后，只有有限个 $(F,\mathfrak{f}_\rho)$ 取值会使 (3.15) 不成立。因此我们有

$$|D(s,\rho)| \leq A(D_F^M N\mathfrak{f}_\rho)^\varepsilon$$

其中 A是一个充分大的常数。由命题 1.1，得：

引理 3.2. 对于 $Re(s) \geq 0$,

$$\mathcal{L}(s,\rho) \ll C(s)^{\frac{1-\sigma}{2}+\varepsilon}$$

其中 $C(s)$ 是 $L(s,\rho)$ 的解析导子。

现在我们可以仿照第2节的论证。设 β 是满足 $\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}) \neq 1$ 的非分歧素数中范数 $N\mathfrak{p}$ 最小的一个。若 $\mathcal{L}(s,\rho) = \sum_{\mathfrak{a}} b_1(\mathfrak{a}) N\mathfrak{a}^{-s}$ $\mathcal{L}(s,\rho)$在 F上的狄利克雷级数，其系数 $b_1(\mathfrak{a})$在$N\mathfrak{a} < \beta$时与欧拉乘积（$S = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s\}$）的系数一致

$$\begin{aligned} L^S(s,\rho) &= \prod_{\mathfrak{p}\notin S} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-M} \\ &= (\zeta_F^S(s,\rho))^M. \end{aligned}$$

若 $\mathfrak{a}$ 能被 $\mathfrak{q}_i$之一整除，则这些系数等于 0；否则为 ≥ 1。（使用 $(1-X)^{-M}$ 的显式级数并不能得到更好的估计。）因此，令 $\mathfrak{q} = \prod \mathfrak{q}_j$:

$$\mathcal{L}(s,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^{-s} \tag{3.16}$$

其中

$$b_n \geq \sum_{\substack{N\mathfrak{a}=n \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{q})=1}} 1 \quad (n < \beta). \tag{3.17}$$

现在令 B_0 为 $\mathcal{L}(s,\rho)$的求和函数:

$$B_0(x) = \sum_{n\leq x} b_n.$$

对于 $x < \beta$，由（3.16）给出，并且已在第 3.3 节中分析。（参见公式（3.6）至（3.9）。）事实上，按照由（3.6）定义的 $A_0(x)$，现在有

引理 3.3。对于 $x < \beta$,

$$B_0(x) \geq A_0(x)$$

其中（对于 $x < \beta$）

$$A_0(x) = Q\kappa x + O(RD^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon} x^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon}).$$

同样，我们将 D_F 替换为 D； κ 是 ζ_F 的留数。

不过，我们仍需检验梅林变换能否用于得到求和函数 $B_0(x)$，以及它适用于哪些 s 值。

3.5
我们简写为 $D(s,\rho) = \prod_j (1-\alpha_j N\mathfrak{q}_j^{-s})$，其中 $\mathfrak{q}_j$遍历分歧素数，而 α_j 遍历相应的根。令 $q_j = N\mathfrak{q}_j$。对于 $L(s,\rho) = \sum a(n)n^{-s}$，$n$

$$L(s,\rho)(1-\alpha q^{-s}) = \sum_{n\geq 1}(a(n)-\alpha a(n/q))n^{-s}$$

其中，当 $\alpha_{n/q} = 0$ $q \nmid n$ 时。由此可推出 $\mathcal{L}(s,\rho) = \sum b_n n^{-s}$，其中$n$

$$b_n = a(n) - \sum_j \alpha_j a(n/q_j) + \sum_{j_1,j_2} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2} a(n/q_{j_1}q_{j^2}) - \\ \cdots + (-1)^N \alpha_1 \cdots \alpha_N a(n/q_1\cdots q_N),$$

N是 $D(s,\rho)$ 的次数；对 $a(n/q_1\cdots q_n)$ 也适用相同的条件。回想一下，$m = dM$。根据 Friedlander–Iwaniec 定理，我们有

$$\mathbf{A}_0(x) \ll D^{\frac{1}{m+1}+\varepsilon} x^{\frac{m-1}{m+1}+\varepsilon} \qquad (x \geq 1)$$

其中 A_0 是 $L(s,\rho)$ 的求和函数，并且我们推得，当 x 充分大时，对 $B_0(x)$ 同样成立该估计。特别地（引理 2.1）$\sim \mathcal{M}B_0(s)$ 可表示为绝对收敛积分，只要 $Re(s) > 1 - \frac{2}{m+1}$；而对于 $\nu = Re(s) > 1 - \frac{1}{m}$，

$$\int_\nu \left|\frac{\mathcal{L}(s)}{s}\right|^2 |ds| \ll D^{1-\nu+\varepsilon} \tag{3.18}$$

（见引理 3.1。）

根据引理 3.3，积分

$$\int_1^\beta |x^{-\nu} B_0(x)|^2 \frac{dx}{x}$$

大于

$$\int_1^\beta |x^{-\nu} A_0(x)|^2 \frac{dx}{x}$$

其中，A_0 的表达式已在引理 3.3 中回顾。现在我们仿照第 3.3 节中的计算。首先得到一个显式项，参见（3.10）

$$I_1 \asymp Q^2 \kappa^2 \beta^{2-2\nu}.$$

然而，在计算 I_2 时，当 $\nu > 1 - \frac{1}{m}$ 时，指数 $2 - \frac{2}{d+1} - 2\nu$ 为负，因此

$$I_2 \ll D^{\frac{1}{d+1}+\varepsilon} Q\kappa R.$$

第三项也是如此，

$$I_3 \ll D^{\frac{2}{d+1}+\varepsilon} R^2.$$

注意，Q、R 和 κ 取决于 F，而不是 ρ。不过 $D_F \ll D$，因此我们可以使用第 3.3 节中的估计；若 F 是 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦扩张，则可忽略这些项。由 $\nu \sim 1 - \frac{1}{m}$可知，若

$$\beta \gg D^{\frac{m}{2(d+1)}+\varepsilon}, \tag{3.19}$$

并且若，则它支配 I_3

$$\beta \gg D^{\frac{m}{d+1}+\varepsilon}. \tag{3.20}$$

利用 (3.18)，我们可知

$$\beta \gg D^{\frac{m}{d+1}+\varepsilon} \Rightarrow \beta \ll D^{1/2+\varepsilon}.$$

与第 3.3 节中的结论一样，结论是

$$\beta \ll D^{\frac{m}{d+1}+\varepsilon}.$$

定理 3.2。设 $\rho\colon \mathrm{Gal}(E/F) \to GL(M,\mathbb{C})$ 是一个不可约的非平凡表示，且 $\beta = N\mathfrak{p}$ 是 F 的一个素数 $\mathfrak{p}$ 的最小范数，并满足$\rho(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p}) \neq 1$。那么，若 $L(s,\rho)$ 是全纯的且 $F/\mathbb{Q}$ 为伽罗瓦，

$$\beta \ll D^{\frac{m}{d+1}+\varepsilon}$$

其中 $d = [F\colon \mathbb{Q}]$、$m = Md$ 和 $D = D_F^M N(\mathfrak{f}_\rho)$。

隐含常数仅取决于 M 和 d，但由于我们使用了布劳尔–西格尔定理，因此该常数不可有效计算。

3.6

当然，比较这一结果与先前的估计也很有意义。假设 E 是极小的，即 ρ: $\mathrm{Gal}(E/F) \to GL(M,\mathbb{C})$ 是单射；令 $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ 且 $g = |G|$。若 $\mathcal{C}$ 是 G 中的一个共轭类，令 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ 为 F 中满足以下条件的素数 $\mathfrak{p}$ 的集合： ρ 在 $\mathfrak{p}$ 处非分歧，且 $\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{q}}) \in \mathcal{C}$；令 $\mathcal{P}_1(\mathcal{C})$ 为由满足 $f(\mathfrak{p}/p) = 1$ 的素数组成的子集；即 $N\mathfrak{p} = p$。令 $\beta(\mathcal{C})$、 $\beta_1(\mathcal{C})$ 分别表示 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$、 $\mathcal{P}_1(\mathcal{C})$ 中元素的最小范数。以下结果是已知的：

$$\beta(\mathcal{C}) \ll (\log D_E)^2 (\log\log D_E)^4 \tag{3.21}$$

（Lagarias 和 Odlyzko，1975年，在广义黎曼猜想成立的假设下）

$$\beta_1(\mathcal{C}) \ll D_E^A \tag{3.22}$$

（Lagarias、Montgomery 和 Odlyzko，1979年，无条件地）Zaman（2017年）将其改进为

$$\beta_1(\mathcal{C}) \ll D_E^{40}. \tag{3.23}$$

在最后两个结果中，隐含常数可有效计算。见 [10, 11, 20]。最后一个估计已改进为 $\beta_1(\mathcal{C}) \le D_E^{16}$，当 D_E 较大时，见 [9]。

显然， $\beta_1(\mathcal{C}) \ge \beta(\mathcal{C})$，且 $\beta \le \inf_{\mathcal{C}} \beta(\mathcal{C})$，其中 $\mathcal{C}$ 遍历非平凡共轭类。由于这些估计关于 $\mathcal{C}$ 是一致的，(3.20)– (3.22) 给出了 β 的上界。不过，

$$D_E = D_F^g N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d}_{E/D}),$$

由 F¨uhrerdiskriminantenproduktformel 等于

$$D_F^g \prod_{\rho} (N_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{f}_\rho)^{\dim \rho}, \tag{3.24}$$

与.....比较

$$D^{\frac{m}{d+1}} = D_F^{M^2 \frac{d}{d+1}} N(\mathfrak{f}_\rho)^{M\frac{d}{d+1}}, \tag{3.25}$$

$M =$维 ρ。我们有 $M^2 < g$，因此 (3.25) 的第一因子相较于 (3.24) 的第一因子可以忽略。类似地，由于 $M =$ 维 ρ，第二因子

(3.25) 相对于我们选取的 ρ，比 (3.24) 的第二因子更小。一般而言，新界限要好得多。不过，我们的论证仅适用于次数有界的域 F 和表示 ρ，其中次数分别为 d, M。

不过，更恰当的比较对象是 Zaman 的论文 $[21],$，该文给出了 β（$\mathfrak{p}$ 中不在 E 中完全分裂的素数 F 的最小范数）的估计；Zaman 还假设 $\mathfrak{p}$ 在 F上是 1 次的。为简便起见，我们只考虑 $F = \mathbb{Q}$的情形。在这种情况下，$[21,$ 推论 1.2$],$ 取$g = [E: \mathbb{Q}]$，Zaman 的估计为

$$\beta \ll D_E^{\frac{1+\varepsilon}{4A(g-1)}}$$

$$\ll (\prod_{\rho}(N\mathfrak{f}_\rho)^{\dim\rho})^{\frac{1+\varepsilon}{4A(g-1)}}$$

其中 $A \approx 1$，可与本文的结果相比较

$$\beta \ll N(\mathfrak{f}_{\rho_0})^{M/2+\varepsilon},\ M = \dim\rho_0$$

其中 ρ_0 是我们选定的表示。因此，这种比较取决于伽罗瓦群 G的复杂性，尤其取决于其大型表示的数量及其分歧。对于较大的域 F $[21,$，定理 1.1$],$中的量还要乘以一个至少为 exp(Ag(log D_F)²) 量级的项（这里的 A仍为隐含常数），其乘积很可能大于定理 3.2 的估计。还要注意，Zaman 并未假设这些扩张是伽罗瓦扩张。

例：假设 ρ 与 $\Gamma_0(q)$ 上的一个权1归一化新形式 f 相关联。那么 $\mathfrak{f}_\rho = (q)$ $\subset \mathbb{Z}$，由定理 3.2 可得 $\beta \ll q^{1+\varepsilon}$。

4 对 $[2]$ 的补充，以及关于 Friedlander–Iwaniec 一篇论文的注

4.1

Friedlander–Iwaniec 的方法以及 $[2],$附录中的证明，只使用（假定的）表示 π 的 L– 函数。特别是，它们适用于两个尖点表示的 Rankin L– 函数 $L(s, \pi_1 \boxtimes \pi_2)$

$GL(m_1, \mathbb{A})$ 和 $GL(m_2, \mathbb{A})$。特别地，我们有：

$$\begin{gathered} The\ lower\ bounds\ on\ the\ quadratic\ integrals \\ of\ L(s)\ in\ Theorems\ A-D\ of\ [2] are\ true \\ if\ L(s)=L(s,\pi_1\boxtimes\pi_2),\ \pi_1,\pi_2\ cuspidal. \end{gathered} \tag{4.1}$$

此外，假设 π_1, π_2 是温和的，且 $\pi_{1,\infty}, \pi_{2,\infty}$ 是自对偶的。令

$$L(s,\pi_1\boxtimes\pi_2)=\sum a_n n^{-s} \text{ and}$$
$$A(x)=\sum_{n\le x} a_n n^{-s}. \text{ Then}$$

$$A(x)=\kappa x+O(D^{\frac{1}{m+1}}x^{1-\frac{2}{m+1}+\varepsilon}) \tag{4.2}$$

其中 $m=m_1m_2$，而 κ 是通常的留数，D 是 $L(s, \pi_1\times\pi_2)$ 的导子。

[2, 定理 2.2]，中对 $A_s(x)$ 的估计也适用；对于 $\pi_1 \ncong \tilde{\pi}_2|\ |^{ia}$，可得：

$$\begin{gathered} The\ abscissa\ of\ convergence\ of\ L(s,\pi_1\boxtimes\pi_2) \\ satisfies\ \sigma_c\le 1-\tfrac{2}{m+1}. \end{gathered} \tag{4.3}$$

4.2

然而，第 2 章关于“短”积分的结果通常不适用于 Rankin L–函数。事实上，Molteni 利用了 $L(s, \pi\boxtimes\tilde{\pi})$ 的性质；对于 $\pi=\pi_1\boxtimes\pi_2$，这就需要假设四重张量积的 L–函数具有相应性质。

4.3

在 [2, §3.4] 中，我们讨论了估计 $A_0(x)$ 时指数 ν 之间的关系：

$$A_0(x)=O(x^{\nu+\varepsilon})$$

其中 $A_0(x)$ 与一个尖点的 π 相关，并且满足凸性估计。为简单起见，我们假设 $L(s, \pi)$ 全纯。我们有如下关系

$$\int_1^\infty A_0(x)x^{-s}\frac{dx}{x}=\frac{L(s)}{s}$$

$(Re(s) > \nu)$。设 $s = \sigma + it, \sigma > \nu$。这可以写成

$$\int_0^\infty A_0(e^X)e^{-\sigma X}e^{-itX}dX.$$

函数 $A_0(e^X)e^{-\sigma X}$ 呈指数递减，因此，这个傅里叶变换是关于 t 的 C^0 函数；这意味着 $\mu(\sigma) \leq 1$。

$\mu(\sigma)$ 的凸性估计为 $\frac{m}{2}(1-\sigma)$。因此，如果 $\sigma < 1 - \frac{2}{m}$， $\mu(\sigma) \leq 1$ 就优于凸性估计。

Friedlander 和 Iwaniec 已证明，对于 $L(s) = L(s, \pi_1)L(s, \pi_2)$ 以及 $m = m_1 + m_2, m_1, m_2 \geq 2$，可以得到指数 $\nu = 1 - \frac{2}{m}$。参见 [4,§3][2]。我们看到，对 $\nu = 1 - \frac{2}{m}$ 的任何改进，一般而言都会使 $GL(m)$ 在 t 方向上达到次凸性（而不仅仅是在 $\mathbb{Q}$ 上）。[3] 如果假设他们猜想的最优值 $\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$，我们便得到以下对林德勒夫猜想的近似：

$$\mu(\sigma) \leq \frac{m}{2} - \frac{m(m-2)}{m-1}\sigma \qquad (\sigma \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}) \tag{4.4}$$

$$\mu(\sigma) \leq \frac{2m}{m+1}(1-\sigma) \qquad (\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}). \tag{4.5}$$

在涉及次凸性时，限制为两个因子并非限制，因为对 $L(s, \pi \times \pi)$ 的估计蕴含了对 $L(s, \pi)$ 的估计。

参考文献

[1] Calegari, Frank 某些 S_5-扩张的阿廷猜想。《数学年刊》356（2013），第 1 期，191–207。

[2] Clozel, Laurent 关于某些自守 L 函数积分的一个统一下界。附录由 L. Clozel 和 Peter Sarnak 撰写。arxiv：2203.12475。[3]Erd´elyi, Arthur；Magnus, Wilhelm；Oberhettinger, Fritz；Tricomi, Francesco G.《高等超越函数》第二卷。部分内容根据 Harry Bateman 遗留的笔记编写。麦格劳-希尔图书公司，纽约—多伦多—伦敦，1953年。

[2]然而，他们并未给出证明。Friedlander 和 Brumley 已向作者说明了这一点。[3]对于实数域上的 $GL(n)$，Nelson 最近已证明了这一点 [15]

[4] Friedlander, John B.；Iwaniec, Henryk L 函数系数的求和公式。《加拿大数学杂志》57（2005年），第3期，494—505。[5] Harcos, Gergely 主 L 函数的统一近似函数方程。《国际数学研究通知》2002年，第18期，923—932。[6] Harcos, Gergely 《主 L 函数的统一近似函数方程》勘误。《国际数学研究通知》2004年，第13期，659—660。[7] Iwaniec, Henryk；Kowalski, Emmanuel《解析数论》。美国数学学会学术出版物，第53卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2004年。[8]Jacquet, H.；Piatetski-Shapiro, I. I.；Shalika, J. 线性群表示的导子。《数学年刊》256（1981年），第2期，199—214。´Kadiri, Habiba；Ng, Nathan；Wong, Peng-Jie 切博塔廖夫密度定理中的最小素理想。《美国数学学会会刊》147（2019年），第6期，2289—2303。[9] Lagarias, J. C.；Odlyzko, A. M. 切博塔廖夫密度定理的可有效计算版本。《代数数域：L 函数与伽罗瓦性质》（《纯数学专题讨论会论文集》，达勒姆大学，达勒姆，1975年），第409—464页。学术出版社，伦敦，1977年。[11] Lagarias, J. C.；Montgomery, H. L.；Odlyzko, A. M. 切博塔廖夫密度定理中最小素理想的一个界。《数学发明》54（1979年），第3期，271—296。[12] Li, Xiannan 临界带边缘处 L 函数的上界。《国际数学研究通知》IMRN 2010年，第4期，727—755。[13] Luo, Wenzhi；Rudnick, Ze´ev；Sarnak, Peter 关于 GL(n) 的广义拉马努金猜想。《自守形式、自守表示与算术》（得克萨斯州沃思堡，1996年），301—310，《纯数学专题讨论会论文集》，第66卷，第2部分，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1999年。[14] Molteni, Giuseppe 关于某些带有欧拉乘积的狄利克雷级数在 s=1 处的上界与下界。《杜克数学杂志》111（2002年），第1期，133—158。

[15] Nelson, Paul D.，《标准L函数的界》。arXiv: 2109.15230。[16] Neukirch, J¨urgen，《代数数论》。施普林格出版社，柏林，1992年。 [英文版：Neukirch, J¨urgen，《代数数论》。由 Norbert Schappacher 从1992年的德文原版翻译，并附有一篇说明。G. Harder 作序。数学基础论丛，322。施普林格出版社，柏林，1999年。]

[17]Petrow, Ian；Young, Matthew P.《无立方因子导子的 Dirichlet L 函数的韦伊界》。数学年刊（第2辑）192（2020年），第2期，437-486。

[18] Ramachandra, K.《黎曼ζ函数的分数阶矩》。Acta Arith. 78（1997年），第3期，255-265。

[19] Titchmarsh，E. C.《傅里叶积分理论导论》第三版。Chelsea出版公司，纽约，1986年。

[20] Zaman，Asif：《切博塔廖夫密度定理中最小素理想的界》。《函数逼近与数学评论》57（2017年），第1期，115-142页。[21] Zaman, Asif：《不完全分裂的最小非分歧素数》。《数学论坛》30（2018年），第3期，651-661页。

Laurent Clozel 数学´系，
307号楼 巴黎-萨克雷大学´
91405奥赛 Cedex 法国