arXiv:2301.01199v1 [math.CT] 3 Jan 2023

从解析单子到 ∞-幺 operad：经由 Lawvere 理论

RUNE HAUGSENG

摘要。我们证明，Lurie 的 ∞-幺 operad 模型（更准确地说，是其“带旗”或“带钉”版本）等价于 Gepner、Kock 和作者此前研究过的解析单子，其中一个 ∞-幺 operad 𝒪对应于空间中 𝒪-代数的单子。特别地， ∞-幺 operad 𝒪完全由这个单子决定。为证明这一点，我们研究解析单子的 Lawvere 理论，并证明它们恰好是采用 Lurie 定义略作（等价）变体的带钉 ∞-幺 operad；在这一变体中，有限基点集被有限集之间的 Span 所取代。

目录

1. 引言 1 2. ∞-幺 operad 与 Lawvere 理论 5 2.1. ∞-幺 operad 在 $\mathbb{F}_*$ 上及 Span(𝔽) 5 2.2. Span(𝔽)-∞-幺 operad 与 Lawvere 理论 8 2.3. 代数、幺半群与模型 11 3. Lawvere 理论与代数的单子 12 3.1. 由 Lawvere 理论得到代数的单子 12 3.2. 由代数的单子得到 Lawvere 理论 14 4. 解析单子与 ∞-幺 operad 19 4.1. 解析单子与代数的单子 19 4.2. 由 Span(𝔽)-∞-幺 operad 得到解析单子 22 4.3. 解析单子的 Lawvere 理论 23 5. ∞-幺 operad 与完备树形 Segal 空间 28 5.1. 线性单子与 ∞-范畴 29 5.2. 线性单子与 Segal 空间 32 5.3. 完备性 37 参考文献 40

1. 引言

-operad 理论 ∞ 提供了一个强大的框架，用于研究具有同伦相干性的代数结构。本文的目标是直接比较 *Lurie* 对 ∞-operad [Lur17] 的处理方法与解析单子（由[GHK22]引入）的处理方法。特别地，我们将证明，在 Lurie 的意义下，一个 ∞-operad 𝒪完全由空间中自由 𝒪-代数所对应的单子决定。

在进一步详细解释这些结果之前，先回顾一下 集合 中的幺 operad 与单子之间的关系会很有帮助；为简单起见，我们聚焦于单对象拟 operad[1] 在 集合中的情形。描述这类幺 operad 的一种常见方式是：它们是关于复合积的对称序列中的结合幺半群。这里的一个

日期：2023年1月4日。[1]不同于对象集／颜色集更一般的（带色）幺 operad。

集合 上的对称序列 由一列集合 $\mathcal{O}(n)$、 $n = 0, 1, \ldots\ldots$组成，其中 $\mathcal{O}(n)$带有对称群 Σ_n 的作用；这些数据也可以编码为一个函子 $\mathbb{F}^{\simeq} \to$ 集合，其中 $\mathbb{F}^{\simeq}$ 是有限集及其双射构成的群胚。两个对称序列 $\mathcal{O}$和 $\mathcal{P}$ 的复合积 由以下公式给出

$$(\mathcal{O} \circ \mathcal{P})(n) \cong \coprod_{k=0}^{\infty} \mathcal{O}(k) \times_{\Sigma_k} \left(\coprod_{i_1+\cdots+i_k=n} (\mathcal{P}(i_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(i_k)) \times_{\Sigma_{i_1} \times \cdots \times \Sigma_{i_k}} \Sigma_n \right),$$

类似于幂级数复合的公式。

Joyal [Joy86] 通过证明沿包含映射 $\mathbb{F}^{\simeq} \to \mathsf{Set}$，将 Set 中的对称序列（或 物种，按 Joyal 的术语）与某一类 解析的 自函子相对应，从而扩展了幂级数的类比。并非所有这类函子之间的自然变换都来自对称序列的态射，但如果考虑某一类“弱笛卡尔”变换，我们便得到范畴等价。此外，在这一等价下，复合积对应于自函子的复合，这意味着单对象拟 operad 可以与解析函子在复合下的结合幺半群相对应，即与 解析的 单子相对应，其底范畴为 Set。[2] 此外，与一个 operad $\mathcal{O}$相对应的解析单子，可以视为在 Set 中自由 $\mathcal{O}$-代数的单子。

解析单子 ∞在 -范畴语境中由 Gepner、Kock 和作者引入，见 [GHK22]。这里，恰当的[3] 解析函子概念比经典的 1-范畴语境中的刻画简单得多：若 $\mathcal{S}$是 ∞空间或 ∞-群胚的 -范畴，那么函子 $\mathcal{S}_{/I} \to \mathcal{S}_{/J}$是解析的当且仅当它保筛余极限和弱可缩极限。此外，这些函子之间恰当的态射正是笛卡尔自然变换，即其自然性方块全是笛卡尔方块。解析单子于是指切片 $\mathcal{S}_{/I}$ 上的单子，其底层自函子是解析的，且其乘法和单位变换都是笛卡尔的。

在 [GHK22]，中，我们定义了一个范畴，其对象是切片 $\mathcal{S}_{/I}$ 上的解析单子，基空间 I 可以变化；我们还证明该范畴与 Cisinski 和 Moerdijk 提出的树状 Segal 空间范畴等价，从而将这些解析单子与幺 operad 联系起来，见 ∞-幺 operad ∞ [CM13a]。根据 Cisinski–Moerdijk [CM13a,CM13b], 、Heuts–Hinich–Moerdijk [HHM16], 、Barwick [Bar18], 、Chu、Heuts 和作者 [CHH18],的比较结果，已知这些空间与幺 operad 的其他模型等价。最近，Hinich 和 Moerdijk [HM22]也证明了这一点（他们直接比较了 Lurie 的 ∞-幺 operad 与完备树状 Segal 空间）。

特别是，由这些比较可知，解析单子等价于 Lurie 的 ∞-幺 operad [Lur17]，模型，而这无疑是目前发展得最完善的方法。然而，两者之间由此产生的联系相当间接，因为它至少要经过另一种 ∞-幺 operad 模型。这并不令人满意，因为显然，直接等价在一个方向上应该这样构造：若 $\mathcal{O}$是一个 ∞-幺 operad，那么我们就可以明确描述 $\mathcal{O}$-代数在 $\mathcal{S}$中的自由单子，而它是一个解析单子。

因此，本文的主要目标是证明 Lurie 的 ∞-幺 operad 与解析单子之间存在直接的比较（即无需经过树状 Segal 空间及上述其他等价），并将一个 ∞-幺 operad $\mathcal{O}$对应到 $\mathcal{O}$ 中 $\mathcal{S}$-代数的单子。不过，要准确陈述这一点，我们首先需要解释一个小小的细节：我们在 [GHK22] 中证明了解析单子与树状

[2]对具有任意对象集的幺 operad，也可以作类似的描述；为求简洁，我们这里只讨论单对象情形。
[3]例如，恰当的（即与对称序列及其推广相对应的）情形，参见 [GHK22，§3。2]。

Segal 空间相对应，但 ∞-幺 operad 实际上应与 完备的树状 Segal 空间的全子范畴相对应。为修正这一点，我们可以（按照 [AF18]）转而考虑我们称为带标记的 ∞-幺 *operad*：即一对$(\mathcal{O}, p)$，其中 $\mathcal{O}$ 是一个 ∞-幺 operad，而 $p\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{O}^{\simeq}_{\langle 1\rangle}$ 是一个本质满态射，其定义域为一个 ∞-群胚，值域为该∞-幺 operad 的对象所成的 ∞-群胚 $\mathcal{O}$。复合

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{O}^{\simeq}_{\langle 1\rangle}, \mathcal{S}) \xrightarrow{p^*} \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S}) \tag{1}$$

随后也是一个与解析单子相对应的单子右伴随。现在我们可以将主要结果表述如下：

定理 A。 令 $\mathsf{POpd}(\mathbb{F}_*)$ 表示带标记的 ∞-幺 *operad* 所成的 ∞-范畴，AnMnd 表示解析单子所成的范畴。那么函子

$$\mathsf{POpd}(\mathbb{F}_*) \to \mathsf{AnMnd},$$

将一个带标记的 ∞-幺 *operad* $(\mathcal{O}, p)$ 映射为单子 *(1)*，是一个等价。

为证明这一点，我们还希望构造另一个方向上的显式函子，从解析单子中提取出一个带标记的 ∞-幺 operad。为此，我们将研究解析单子的 Lawvere 理论。对于某个 ∞-群胚 X，若函子 T 保持筛余极限，我们称函子 Ton $\mathsf{Fun}(X, \mathcal{S})$ 上的单子 T 是代数的；那么，T 的 Lawvere 理论 $(\mathscr{L}(T)\ p)$ 可定义为：令 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathsf{Alg}(T)$ 的全子范畴，该全子范畴由 $\mathsf{Fun}(X, \mathcal{S})$ 中有限余积的可表对象上的自由代数所张成，并连同函子 p：$X \to \mathscr{L}(T)$ 一起给出；该函子将 X 的一个点映射为由 x 表示的预层上的自由代数。更一般地，Lawvere 理论可以定义为一个带有限积的 ∞-范畴 $\mathscr{L}$，以及一个函子 p：$X \to \mathscr{L}$，使得 $\mathscr{L}$ 中的每个对象都是 p 的像中对象的有限积。我们推广 Gepner–Groth–Nikolaus [GGN15] 的一个结果（在情形 $X \simeq *$ 下），证明了多排序 Lawvere 理论的单子–理论对应的一个 ∞-范畴版本：

定理 B. 令 AlgMnd 为代数单子的 ∞-范畴，令 LwvTh 为 *Lawvere* 理论的 ∞-范畴。将代数单子映为其 *Lawvere* 理论，可得到一个函子

$$\mathfrak{Th}\colon \mathsf{AlgMnd} \to \mathsf{LwvTh}.$$

这个函子是一个等价，其逆函子为

$$\mathfrak{Mod}\colon \mathsf{LwvTh} \to \mathsf{AlgMnd}$$

它将 *Lawvere* 理论 $(\mathscr{L}, p)$ 映为其在 $\mathcal{S}$ 中的 ∞-范畴 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$，即模型 范畴；模型是指保持有限积的函子 $\mathscr{L} \to \mathcal{S}$，并附带到 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 的函子，该函子由沿 p 的限制给出（这是一个对应于代数单子的单子右伴随）。

我们可以将解析单子视为代数单子的一个（非满）子范畴，因此定理 B 将 AnMnd 与 LwvTh 的一个（非满）子范畴对应起来。对于普通范畴（以及单排序 Lawvere 理论），Szawiel–Zawadowski [SZ14]，已经确定了这个子范畴，但这并非我们所需的恰当对应： ∞-范畴 AnMnd 有一个终对象 Sym，它是交换幺半群的单子；而事实证明，AnMnd 是 Sym 上代数单子的一个全子范畴。Sym 的 Lawvere 理论可识别为由 $\mathrm{Span}(\mathbb{F})^{\natural} := (\mathrm{Span}(\mathbb{F}), \{1\})$ 构成的对，其中 $\mathrm{Span}(\mathbb{F})$ 是有限集跨度构成的 (2, 1)-范畴，并包含单元素集 1。由定理 B 可得，AnMnd 与 ∞-范畴 $\mathrm{LwvTh}^{\mathrm{an}}/\mathrm{Span}(\mathbb{F})^{\natural}$ 的一个全子范畴对应；后者是 $\mathrm{Span}(\mathbb{F})^{\natural}$ 上 Lawvere 理论的 ∞-范畴 $\mathrm{LwvTh}/\mathrm{Span}(\mathbb{F})^{\natural}$。这个 ∞-范畴还有一种非常漂亮的替代描述：

(2,1)-范畴 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$具有许多与 $\mathbb{F}_*$ 相同的特征（可将其视为仅包含反向映射为

单射的跨度的子范畴），因此我们可以修改 Lurie 关于 ∞-幺 operad 在 $\mathbb{F}_*$ 上的定义，从而得到一种将$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-*operads*视为$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$上某些 ∞-范畴的概念。一个关键区别是，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad 最终具有有限积，因此我们可以将带标记的$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad视为 Lawvere 理论。事实上，这给出了一个全忠实函子，从带标记的$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad 的 ∞-范畴$\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$到$\mathsf{LwvTh}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}$；并且，正如 $\mathbb{F}_*$上的带标记 ∞-幺 operad一样，相应的单子是解析的。因此我们有一个包含

$$\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \hookrightarrow \mathsf{LwvTh}^{\mathrm{an}}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}. \tag{2}$$

反过来，我们证明如下结论：

定理 C. 任意解析单子的 *Lawvere* 理论都是一个带标记的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 *operad*。

因此，函子 (2) 是本质满的，并结合定理B，我们得到等价关系

$$\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \simeq \mathsf{LwvTh}^{\mathrm{an}}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural} \simeq \mathsf{AnMnd}.$$

要由此推导定理 A，我们只需知道 ∞-幺 operad 的两个版本等价。这一点已在与 Barkan 和 Steinebrunner 的合作工作中证明BHS22]，，其方法是使用关于 $\mathbb{F}_*$ 和$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 的对称幺半包络。具体而言，[BHS22，推论 5.1.13 和推论 5.3.17] 表明，沿包含 $\mathbb{F}_* \hookrightarrow \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 拉回，会给出关于 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 的（带标记） ∞-幺 operad 与 $\mathbb{F}_*$ 之间的等价关系，而且这与代数的 ∞-范畴相容。

我们的最后一个主要结果是，将定理A 与 [GHK22], 中的解析单子与树状 Segal 空间之间的等价结合起来，就得到了完备树状 Segal 空间与 ∞-幺 operad 之间预期的关系：

定理 D。 在复合等价之下

$$\mathsf{POpd}(\mathbb{F}_*) \simeq \mathsf{AnMnd} \simeq \mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$$

完备树状 *Segal* 空间的全子范畴 $\mathsf{CSeg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 对应于 ∞-范畴 $\mathsf{Opd}(\mathbb{F}_*)$ 中的 ∞-幺 *operad*（将其识别为那些空间态射为等价的带标记 ∞-幺 *operad*）。

概述。 在 §2 中，我们首先介绍在 $\mathbb{F}_*$ 上的（带标记） ∞-幺 operad 以及 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$，并回顾二者之间的比较。我们还将介绍 Lawvere 理论及其模型，并证明带标记的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad 是 Lawvere 理论的例子，其模型恰好是空间的 ∞-范畴中的代数（或幺半群）。

在 §3 中，我们介绍代数单子及其相关的 Lawvere 理论，然后证明定理 B。

接着，我们在 §4 中研究解析单子及其 Lawvere 理论。在这里，我们还证明，带标记的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad 给出解析单子，并证明定理 C。

最后，在 §5 中，我们的目标是证明定理 D；这需要理解带标记的 ∞-幺 operad、解析单子和树状 Segal 空间之间的等价，如何限制为带标记的∞-范畴、线性单子和 Segal 空间之间的全子范畴等价 Δ。

记号。 本文使用的许多记号应该都相当标准，但为方便读者起见，我们在此提及几点：

- 若 T 是一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$上的单子，我们通常将相应的单子伴随记为

$$F_T : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathsf{Alg}(T) : U_T.$$

- 若 $\mathscr{C}$ 是一个局部小的 ∞-范畴，我们将 $\mathscr{C}$的 Yoneda 嵌入记为$\mathsf{y}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to$函子范畴$(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$。若上下文已清楚表明 ∞-范畴 $\mathscr{C}$，我们也将$\mathsf{y}_{\mathscr{C}}$简称为y。
- 我们将 $\mathsf{P}(\mathscr{C})$ 记作 ∞-范畴 函子范畴$(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$，即 $\mathscr{C}$上的预层范畴。我们将 P^*记作反变预层函子，将 $\mathsf{P}_!$ 记作协变版本（由 P^* 取左伴随函子得到）。我们将不加说明地使用 Yoneda 嵌入给出的自然变换 $\mathsf{y}\colon \mathrm{id} \to \mathsf{P}_!$，参见 [HHLN22, §8]。

致谢。 感谢 Hongyi Chu、David Gepner 和 Joachim Kock 就本文相关内容展开的有益讨论。

2. ∞-幺 operad 与 Lawvere 理论

本节主要关注 ∞-幺 operad 在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 上的情形，以及它们与 Lurie 的 ∞-幺 operad 和 Lawvere 理论之间的关系。在 §2.1 中，我们介绍定义在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 和 $\mathbb{F}_*$ 上的（带钉） ∞-幺 operad，并回顾它们之间的等价；在 §2.2 中，我们定义 Lawvere 理论，并证明带钉的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞-幺 operad 是这类理论的实例。最后，在简短的 §2.3 中，我们证明：若 $\mathcal{O}$ 是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞-幺 operad，那么在具有有限积的 ∞-范畴中，$\mathcal{O}$-代数或 $\mathcal{O}$-幺半群与由 $\mathcal{O}$ 视作 Lawvere 理论时的模型是同一回事。

2.1. ∞-幺 operad 在 $\mathbb{F}_*$ 和 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$。

本小节回顾 ∞- 幺 operad 在 $\mathbb{F}_*$ 和 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$的概念，以及 [BHS22]中证明的二者之间的比较。我们首先回顾 Lurie 在 ∞上定义的 -幺 operad $\mathbb{F}_*$，出自 [Lur17]:

记号 2.1.1. 令 $\mathbb{F}$ 表示有限集的普通范畴，$\mathbb{F}_*$ 表示有限基点集的普通范畴。对于集合 S，我们用 $S_+ := (S \amalg \{*\}\ *)$ 表示通过添加一个不相交的基点 $*$ 得到的基点集；$\mathbb{F}_*$ 中的所有对象都具有这种形式。若态射 $\phi\colon S_+ \to T_+$ 满足 $|\phi^{-1}(t)| = 1$ for $t \neq *$，换言之，若 ϕ 限制为同构$S \setminus \phi^{-1}(*) \to T$，则称其为惰性；若 $\phi^{-1}(*) := \{*\}$，也就是说，若 ϕ 限制为集合之间的态射$S \to T$，则称其为主动；我们用 $\mathbb{F}\mathrm{int}_*$ 和 $\mathbb{F}\mathrm{act}_*$ 表示 $\mathbb{F}_*$ 的宽子范畴，分别由惰性态射和主动态射组成。于是 $(\mathbb{F}_*, \mathbb{F}_*^{\mathrm{int}}, \mathbb{F}_*^{\mathrm{act}})$ 是一个分解系统：对于 $\mathbb{F}_*$ 中的每个态射 ϕ，将 ϕ 分解为先惰性态射后主动态射的分解所构成的群胚是可缩的。对于 $s \in S$，我们用 $\rho_s\colon S_+ \to 1_+$ 表示这样的惰性映射：它将 S 中除 s 以外的所有元素都映到基点。

定义 2.1.2. </style}一个 ∞-幺半范畴 </style}是一个 ∞-范畴的函子 $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{F}_*$，满足

(1) $\mathcal{O}$具有 $\mathbb{F}_*$中所有惰性态射的 p-余笛卡尔提升。(2) 给定 $X, Y \in \mathcal{O}$ 位于 S_+, $T_+ \in \mathbb{F}_*$ 以及位于 ρ_t上方的余笛卡尔提升 $Y \to Y_t$，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X, Y) & \longrightarrow & \prod_{t \in T} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X, Y_t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathbb{F}_*}(S_+, T_+) & \longrightarrow & \prod_{t \in T} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}_*}(S_+, 1_+) \end{array}$$

是笛卡尔的。

(3) 对每个 $S_+ \in \mathbb{F}_*$，函子

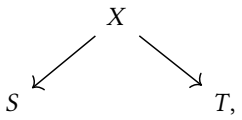
$$\mathcal{O}_{S_+} \to \prod_{s \in S} \mathcal{O}_{1_+}$$

由沿映射 $\rho_s\ (s \in S)$ 的余笛卡尔传输给出，是一个等价。

.....的定义 ∞-代数中没有用到 $\mathbb{F}_*$ 的任何特殊性质，除了惰性–主动分解系统和对象 1_+ —— 正如 [CH21，§9] 所阐述的那样，它可以直接推广到任何配备了分解系统的 ∞-范畴

以及一组特殊的“初等”对象。这里我们关注这样一种变体：将 $\mathbb{F}_*$ 替换为有限集的跨度构成的 (2,1)-范畴：

定义 2.1.3. 我们将 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 记作 ∞-范畴（事实上是一个 (2,1)-范畴），它由有限集的跨度构成，定义方式见 [Hau18] 或 [Bar17]。直观地说，其对象是有限集，态射由跨度给出，即如下形式的图表



复合由取拉回给出。更正式地，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 可以定义为由下式给出的完备 Segal 空间

$$\mathsf{Map}([n], \mathsf{Span}(\mathbb{F})) \simeq \mathsf{Map}_{\mathrm{cart}}(\mathsf{Tw}([n]), \mathbb{F});$$

这里，$\mathsf{Tw}([n])$ 是 $[n]$ 的扭曲箭头范畴，可以简洁地描述为由有序对 (i,j)、$0 \le i \le j \le n$ 构成的偏序集，其中

$$(i,j) \le (i',j') \iff i \le i' \le j' \le j,$$

而 $\mathsf{Map}_{\mathrm{cart}}(\mathsf{Tw}([n]), \mathbb{F})$ 表示 $\mathsf{Map}(\mathsf{Tw}([n]), \mathbb{F})$ 的子空间，该子空间由函子 $F\colon \mathsf{Tw}([n]) \to \mathbb{F}$ 所张成，并且这些函子满足 F 将所有如下形式的方块映射为

$$\begin{array}{ccc} (i,j) & \longrightarrow & (i',j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (i,j') & \longrightarrow & (i',j') \end{array}$$

到 $\mathbb{F}$ 中的笛卡尔方形。

定义 2.1.4. 我们称态射 $S \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} T$ 在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是 *主动* 的，f 是一个同构；称其为 *惰性* 的，g 是一个同构。惰性态射和活性态射在复合下封闭。若以 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})^{\mathrm{int}}$ 和 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})^{\mathrm{act}}$ 表示 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中仅包含这些态射的宽子范畴，那么容易看出（参见 [HHLN22，命题 2.15]），我们有如下等价

$$\mathsf{Span}(\mathbb{F})^{\mathrm{int}} \simeq \mathbb{F}^{\mathrm{op}}, \qquad \mathsf{Span}(\mathbb{F})^{\mathrm{act}} \simeq \mathbb{F}.$$

对于 $s \in S$，令 ρ_s' 表示跨度 $S \hookleftarrow \{s\} \xrightarrow{\sim} 1$（惰性）。

观察 2.1.5. 惰性态射和活性态射在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 上构成一个分解系统；事实上，类似的断言对任意 ∞-跨度范畴都成立，参见 [HHLN22，命题 4.9]。

那么我们可以考虑定义 2.1.2 的以下变体：

定义 2.1.6. A $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-*operad* 是一个 ∞-范畴的函子 $p\colon \mathcal{O} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$，满足

(1) $\mathcal{O}$ 具有 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中惰性态射的所有 p-余笛卡尔提升。(2) 给定 X，$Y \in \mathcal{O}$ 在 S，$T \in \mathbb{F}_*$ 之上，以及 $Y \to Y_t$ 在 ρ_t' 之上的余笛卡尔提升，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X,Y) & \longrightarrow & \prod_{t\in T} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X,Y_t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S,T) & \longrightarrow & \prod_{t\in T} \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S,1) \end{array}$$

是笛卡尔的。

（3）对于每个 $S \in \mathsf{Span}(\mathbb{F})$，函子

$$\mathcal{O}_S \to \prod_{s \in S} \mathcal{O}_1$$

由沿映射 $\rho'_s\,(s \in S)$ 的余笛卡尔传输给出的是一个等价。

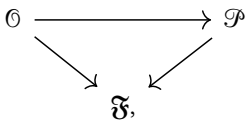
观察 2.1.7. 条件 (3)略显冗余：由 (1)和 (2)可知，对所有 $X,\ X' \in \mathcal{O}_n$ 等价

$$\mathsf{Map}_{\mathcal{O}_n}(X', X) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X', X_i)_{\rho'_i} \xleftarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}_1}(X'_i, X_i),$$

其中，第一个映射是由(2)中的一个笛卡尔方形给出的纤维等价，第二个则由余笛卡尔映射的泛性质$X' \to X'_i$得到。这表明函子 $\mathcal{O}_n \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_1$ 在 (3) 中是全忠实的。因此，要得出它是等价，只需额外假设这些函子是本质满的。

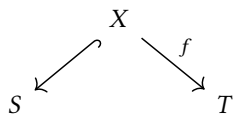
定义 2.1.8. 对于 $\mathfrak{F} = \mathbb{F}_*$，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 和 $p\colon\ \mathcal{O} \to \mathfrak{F}$ 一个 $\mathfrak{F}$-∞-幺 operad，若态射 $\phi\colon X \to Y$ 在 $\mathcal{O}$中是*惰性* 的，当且仅当它是余笛卡尔的，且它在 $\mathfrak{F}$ 中的像是惰性的；若其在 $\mathfrak{F}$ 中的像是主动的，则称其为*主动*。惰性态射和活性态射在 $\mathcal{O}$上构成一个分解系统，依据 [Lur17，命题 2.1.2。5]。

定义 2.1.9。 对于 $\mathfrak{F} = \mathbb{F}_*$，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$，一个态射 $\mathfrak{F}$-∞-幺 *operad* 是一个交换三角形



其中两个对角映射是 $\mathfrak{F}$-∞-幺 operad，且水平映射保持惰性态射。我们将 $\mathsf{Opd}(\mathfrak{F})$ 定义为 $\mathsf{Cat}_\infty/\mathfrak{F}$ 的子范畴，该子范畴由 $\mathfrak{F}$-∞-幺 operad及其态射所张成。对于 $\mathfrak{F}$-∞-幺 operad $\mathcal{O}$和 $\mathcal{P}$，我们也用 $\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{P})$ 表示$\mathsf{Fun}/\mathfrak{F}(\mathcal{O},\ \mathcal{P})$的全子范畴，该子范畴由 $\mathfrak{F}$-∞-幺 operad的态射所张成。

观察 2.1.10。 我们可以将 $\mathbb{F}_*$ 视为$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$的宽子范畴，其中仅包含那些态射



其中反向映射是单射：我们将其识别为由$S_+ \to T_+$ 给出的基点集合映射

$$s \mapsto \begin{cases} *, & s \notin X, \\ f(s), & s \in X. \end{cases}$$

因此，我们有一个包含 $\mathfrak{i}\colon\ \mathbb{F}_* \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$，而 $\mathbb{F}_*$上的分解系统是沿着 $\mathfrak{i}$将 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 上的分解系统限制而得的。

定理 2.1.11 ([BHS22，推论 5.1.13 和 5.3。17])。 沿 $\mathfrak{i}$ 拉回会诱导出一个等价

$$\mathfrak{i}^*\colon \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Opd}(\mathbb{F}_*).$$

此外，对于任意 $\mathcal{O}, \mathcal{P} \in \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$，我们也得到一个自然等价

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Alg}_{\mathfrak{i}^*\mathcal{O}}(\mathfrak{i}^*\mathcal{P})$$

代数的 ∞-范畴之间。 □

定义 2.1.12. 对于 $\mathfrak{F}$ 任一 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 或 $\mathbb{F}_*$（我们将其视为 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 的子范畴），我们称一个带标记的 $\mathfrak{F}$-∞-运算子为一个 $\mathfrak{F}$-∞-运算子 $\mathcal{O}$ 连同一个态射 $p\colon X \to \mathcal{O}_1^{\simeq}$，该态射本质满（即在 π_0 上满射）；我们将态射 p 称为（$\mathcal{O}$的）标记。接着，我们将 ∞-范畴 $\mathsf{POpd}(\mathfrak{F})$ 定义为以下拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{POpd}(\mathfrak{F}) & \longrightarrow & \mathsf{Opd}(\mathfrak{F}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)_1^{\simeq}} \\ \mathsf{Fun}([1], \mathcal{S})_{\mathrm{es}} & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} & \mathcal{S}, \end{array}$$

其中，函子范畴$([1],\ \mathcal{S})_{\mathrm{es}}$是由本质满态射张成的函子范畴$([1],\ \mathcal{S})$的全子范畴。

记号 2.1.13。 若 $\mathcal{O}$是一个 $\mathfrak{F}$-∞-算子，则记 $\mathcal{O}^\natural$ 为标记的 $\mathfrak{F}$-∞-算子$(\mathcal{O},\ \mathcal{O}_1^{\simeq} \xrightarrow{=} \mathcal{O}_1^{\simeq})$。（容易看出，这给出了一个函子 $(-)^\natural\colon \mathsf{Opd}(\mathfrak{F}) \to \mathsf{POpd}(\mathfrak{F})$，它是遗忘标记的函子的右伴随。）

注 2.1.14。术语“标记”取自 [BKW18]。Ayala 和 Francis [AF18] 此前以“带旗标的(∞, n)-范畴”之名研究过(∞, n)-范畴的类似概念。他们的术语受到向量空间中“旗标”一词的启发；对于一般的 n，考虑一列(∞, k)-范畴（$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$）时，这个说法是有意义的。不过，由于我们只考虑 $n = 1$这种情形，实际上并没有多少旗标可言，因此我们选择使用不同的术语。

沿 $\mathfrak{i}$ 的基变换与定义带钉住的 ∞-幺 operad 的拉回方块相容，从而得到：

推论 2.1.15. 沿 $\mathfrak{i}$ 的拉回诱导出一个等价

$$\mathfrak{i}^*\colon \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \xrightarrow{\sim} \mathsf{POpd}(\mathbb{F}_*)$$

于带钉住的 ∞-幺 *operad* 的 ∞-范畴之间。 □

2.2. $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 **operad 与 Lawvere 理论。** 本小节的目标是说明，我们可以从以下意义上将 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺 operad 视为 *Lawvere* 理论：

定义 2.2.1. 一个 *Lawvere* 理论 $(\mathscr{L}, p)$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴 $\mathscr{L}$，连同一个函子 $p\colon X \to \mathscr{L}$，该函子从一个 ∞-群胚 X 出发，并且 $\mathscr{L}$ 中的每个对象都可以写成 p 像中对象的积。

观察 2.2.2. 若向一个 ∞-群胚 X 自由添加有限余积，就得到 ∞-范畴 $\mathbb{F}_{/X} := \mathbb{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_{/X}$，即带有到 X 的映射的有限集。若 $\mathscr{L}$ 是具有有限积的 ∞-范畴，则态射 $p\colon X \to \mathscr{L}$ 因此唯一地延拓为一个保积函子 $p\colon \mathbb{F}^{\mathrm{op}}{}_{/X} \to \mathscr{L}$；而 $(\mathscr{L}, p)$ 成为 Lawvere 理论的条件可以表述为：p 是本质满的。

注记 2.2.3. 我们对 Lawvere 理论的定义，是经典的（有限元）多排序 Lawvere 理论概念的 ∞-范畴版本。单排序版本最早由 Lawvere 在其博士论文中引入 [Law04],，之后 Cranch ∞将其研究推广到 [Cra10], Gepner–Groth– Nikolaus [GGN15]和 Berman [Ber20]也进行了相关研究。关于 1-范畴 Lawvere 理论及其推广，已有大量文献，我们不打算在此综述；在 ∞-范畴框架下，Henry–Meadows 最近提出了代数理论的一般概念 [HM21]，Kositsyn [Kos21]亦然。

定义 2.2.4. 从 $(\mathscr{L}, p\colon X \to \mathscr{L})$ 到 $(\mathscr{L}', p'\colon X' \to \mathscr{L}')$ 的 *Lawvere* 理论态射是一个保积函子 $F\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}'$，并满足交换方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathscr{L} & \xrightarrow{F} & \mathscr{L}'. \end{array}$$

我们将 LwvTh 记作 Lawvere 理论的 ∞-范畴，它定义为函子范畴$([1], \mathsf{Cat}_\infty)$ 的一个子范畴。

引理 2.2.5. 有限集的不交并给出Span(𝔽)中的笛卡尔积。特别地，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural := (\mathsf{Span}(\mathbb{F}), \{1\} \hookrightarrow \mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 是一个 *Lawvere* 理论。

证明。 对于 $S, T \in \mathbb{F}$，沿包含映射 $S, T \hookrightarrow S \amalg T$取拉回，得到一个等价

$$\mathbb{F}_{/S \amalg T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{/S} \times \mathbb{F}_{/T}.$$

由于我们有 $\mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S', S) \simeq \mathbb{F}^{\simeq}_{/S' \times S}$，因此得到一个等价

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S', S \amalg T) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S', S) \times \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S', T)$$

由与映射 $S \xleftarrow{=} S \hookrightarrow S \amalg T$和 $T \xleftarrow{=} T \hookrightarrow S \amalg T$复合给出。因此，这些映射表明 $S \amalg T$ 是 Span(𝔽) 中 S和 T的积。□

命题 2.2.6。 函子 $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是一个 Span(𝔽)-∞-运算，如果且仅如果满足以下条件：

(1′) $\mathcal{O}$ 在 Span(𝔽)中的惰性态射上具有 π-余笛卡尔态射。*(2′)* 对于 Span(𝔽)中的 $\mathbf{n}$ 上的 $X \in \mathcal{O}$， $X \to X_i$在 $\rho'_i\colon \mathbf{n} \mapsto \mathbf{1}$上的 π-余笛卡尔态射将 X展示为 $\mathcal{O}$中的积 $\prod_{i=1}^n X_i$。*(3′)* 函子 $\mathcal{O}_{\mathbf{n}} \to \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\mathbf{1}}$由沿映射 ρ'_i进行余笛卡尔传输给出，并且是本质满的。

证明。 我们来检查，定义 (1)–(3) 中的条件 2.1.6 与给定的条件 (1′)–(3′)相对应。这里 (1′) 与 (1)相同。对于 (2)，考虑交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X', X) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^n \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(X', X_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{n}', \mathbf{n}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^n \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{n}', \mathbf{1}). \end{array}$$

其中 X和 X'分别是 $\mathcal{O}$ 中位于 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 上方的对象，而 $X \to X_i$是位于 $\rho'_i\colon \mathbf{n} \mapsto \mathbf{1}$ 上方的余笛卡尔态射。这里底部的水平映射是一个等价，因为根据引理 2.2.5，映射ρ'_i表明 $\mathbf{n}$ 是 Span(𝔽) 中 n 个 $\mathbf{1}$ 的积。这意味着该方块是笛卡尔的，当且仅当顶部的水平态射是一个等价；而对所有 X'，这都成立，当且仅当余笛卡尔态射 $X \to X_i$ 表明 X 是 $\mathcal{O}$中的积 $\prod_{i=1}^n X_i$。因此，(2) 等价于 (2′)。根据观察 2.1.7，我们知道可以将 (3) 替换为附加假设：映射

$$\mathcal{O}_{\mathbf{n}} \to \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathbf{1}}$$

是本质满的，这正是 (3′)。 □

引理 2.2.7。 假设 $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是一个 Span(𝔽)-∞-代数。给定对象 $X_i \in \mathcal{O}_{S_i}$对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$，则一组态射 $p_i\colon X \to X_i$在 $\mathcal{O}$ 中表明 X是积 $\prod_i X_i$，当且仅当

(i) $\pi(p_i)$将 $\pi(X)$表示为 S_i在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$中的积（因此它们是对应于 S_i在 $\coprod_i S_i$中的包含映射的惰性态射），*(ii)* 对每个 i，p_i 都是余笛卡尔的。

特别地，$\mathcal{O}$ 有有限积，π保留这些积，并且$(\mathcal{O}, \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 是一个 *Lawvere* 理论。

证明。由于积若存在则在等价意义下唯一，因此只需证明存在唯一一个满足这些条件的对象，而该对象就是一个积。

令 η_j 表示 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中对应于余积中 S_j 的包含的惰性态射 $S := \coprod_i S_i \rightarrowtail S_j$。沿映射$\eta_j$进行的余笛卡尔传输构成一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S & \xrightarrow{(\eta_{i,!})_i} & \prod_i \mathcal{O}_{S_i} \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \prod_S \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{\sim} & \prod_i \left(\prod_{S_i} \mathcal{O}_1\right), \end{array}$$

其中，竖直态射根据条件(3)（定义2.1.6）都是等价。因此，水平函子也是一个等价，这意味着存在唯一一个对象 $X \in \mathcal{O}_S$，其余笛卡尔态射 $X \rightarrowtail X_i$位于 η_i之上。接下来只需证明这些态射将 X 展示为一个积。

为此，注意，若 $X_i \rightarrowtail X_{i,s}$ 表示位于 $\rho'_s\colon S_i \rightarrowtail \mathbf{1}$ 上的余笛卡尔态射，那么对于任意 $Y \in \mathcal{O}$，我们都有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(Y, X) & \longrightarrow & \prod_i \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(Y, X_i) \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \prod_{(i,s)\in S} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(Y, X_{i,s}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_i \left(\prod_{s\in S_i} \mathsf{Map}_{\mathcal{O}}(Y, X_{i,s})\right), \end{array}$$

其中，竖直映射由命题 2.2.6可知是等价。因此，顶部的水平映射也是等价，这表明X是一个积，正如所需。只需再注意到 $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 是一个 Lawvere 理论，因为根据命题$\mathcal{O}_1$ 2.2.6，每个对象都是$\square$中的对象的积。

观察 2.2.8。更一般地，任意固定的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-算子 $(\mathcal{O}, q\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 都是一个 Lawvere 理论。

引理 2.2.9。设 $\pi\colon \mathcal{O} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-拟运算。态射 $\phi\colon X \to X'$在 $\mathcal{O}$ 中是惰性的，当且仅当复合 $X \to X' \rightarrowtail X'_i$对所有 $i \in \pi(X')$都是惰性的，其中 $X' \to X'_i$在 ρ'_i上是余笛卡尔的。

证明。由于惰性态射在复合下封闭，“仅当”方向是立即的。对于“如果”方向，我们首先验证态射

$$S \xleftarrow{f} T \xrightarrow{g} S'$$

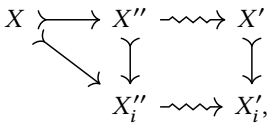
在 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中是惰性的，当且仅当它与 ρ'_i的复合对每个 $i \in S'$都是惰性的。该复合是 Span

$$S \leftarrow T_i \to \mathbf{1},$$

其中 T_i 是 g 在 i处的纤维。当且仅当每个纤维 T_i都只有一个元素时，对于所有 i，该 Span 都是惰性的；这等价于 g 是一个同构，也就是说，原始 Span 是惰性的，证毕。

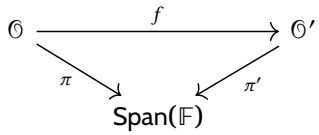
因此，若 ϕ满足条件，则 $\pi(\phi)$ 在$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中是惰性的。若 $X \rightarrowtail X'' \rightsquigarrow X'$ 是 ϕ的惰性–主动分解，则可得 $X'' \rightsquigarrow X'$位于 $\mathrm{id}_{\pi(X')}$之上；又由于我们有一个分解系统，映射 ϕ 是惰性的，当且仅当这个活性映射是一个

等价。现在注意，复合 $X \to X'_i$的惰性–主动分解给出了一个交换图



根据假设，映射 $X \to X'_i$是惰性的，因此 $X''_i \rightsquigarrow X'_i$是等价。但 ∞-范畴 $\mathcal{O}_{\pi(X')} \simeq (\mathcal{O}_{\mathbf{1}})^{\times|\pi(X')|}$的等价表明， $X'' \rightsquigarrow X'$是等价，当且仅当对每个 i， $X''_i \to X'_i$都是等价。□

命题 2.2.10。 给定一个交换三角形



其中 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}'$ 是 Span（$\mathbb{F}$）-∞-幺 *operad*，函子 f保留惰性态射，当且仅当它保留有限积。

证明。首先假设 f 保持有限积。为了证明 f 保持惰性态射，我们先注意到， f 保持在 ρ'_i 上的惰性态射：考虑 $X \in \mathcal{O}_{\mathbf{n}}$，其中有惰性态射 ξ_i： $X \rightarrowtail X_i$ 在 ρ'_i 上。于是根据假设，态射 $f(\xi_i)$： $f(X) \to f(X_i)$ 构成了 $f(X)$ 作为各个 $f(X_i)$ 的积，因此根据引理 2.2.7，它们确实是惰性态射。现在考虑 $\mathcal{O}$ 中任意一个惰性态射 $X \rightarrowtail X'$。根据引理 2.2.9，要证明 $f(X) \to f(X')$ 是惰性态射，只需证明对于每个 i， $f(X) \to f(X') \rightarrowtail f(X')_i$ 是惰性态射，其中 $f(X') \to f(X')_i$ 在 ρ'_i 上是余笛卡尔的。但我们知道 $f(X') \rightarrowtail f(X')_i$ 是惰性态射 $X' \rightarrowtail X'_i$ 的像，因此 $f(X) \to f(X')_i$ 确实是惰性态射，因为它是惰性复合 $X \rightarrowtail X' \rightarrowtail X'_i$ 的像。

反过来，假设我们知道 f保惰性态射。那么引理2.2.7推出 f保积，因为积可以用惰性态射来刻画。□

综合以上结果，我们已经证明：

推论 2.2.11。存在一个全忠实函子$\mathrm{POpd}(\mathrm{Span}(\mathbb{F})) \hookrightarrow \mathrm{LwvTh}^{/\mathrm{Span}(\mathbb{F})^\natural}$。 □

2.3. **代数、幺半群与模型**。若 $\mathcal{O}$ 是一个Span($\mathbb{F}$)-∞-算子，且 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴，本小节的目标是确定 $\mathcal{C}$ 中由 $\mathcal{O}$ 参数化的三种结构：由 $\mathcal{C}$ 上的笛卡尔积给出的对称幺半 ∞-范畴中的 $\mathcal{O}$-代数、 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{O}$-幺半群，以及作为 Lawvere 理论的 $\mathcal{O}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的模型。

我们先来介绍最后两种结构的定义：

定义 2.3.1。 若 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{C}$是具有有限积的 ∞-范畴（例如 Lawvere 理论的底层 ∞-范畴），则 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{C}$中的模型 是一个保持有限积的函子 $\mathcal{L} \to \mathcal{C}$。我们用 模$_{\mathcal{L}}(\mathcal{C})$ 表示由这些模型张成的函子范畴$(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ 的全子范畴。

定义 2.3.2。 若 $\mathcal{O}$ 是一个 Span($\mathbb{F}$)-∞-算子，且 $\mathcal{C}$ 是一个具有有限积的 ∞-范畴，则 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathcal{O}$-幺半群 是一个函子 M: $\mathcal{O} \to \mathcal{C}$，使得对于每个位于$\mathbf{n} \in \mathrm{Span}(\mathbb{F})$ 上方的 $X \in \mathcal{O}$，由惰性态射 在 上方诱导的态射

$$M(X) \to \prod_{i=1}^{n} M(X_i),$$

是一个等价。我们用 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathsf{Fun}(\mathcal{O},\mathcal{C})$ 中由这些 $\mathcal{O}$-幺半群张成的全子范畴。

命题 2.3.3. 若 $\mathcal{O}$ 是一个$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-幺半群厄 *operad*，且 $\mathcal{C}$ 是一个 ∞-范畴，则函子 $M\colon \mathcal{O}\to\mathcal{C}$是一个 $\mathcal{O}$-幺半群，当且仅当 M保有限积。特别地，$\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})\simeq$模$_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$是函子范畴$(\mathcal{O},\mathcal{C})$的全子范畴。

证明。由(2′)及命题 2.2.6 可知，若 M 是一个 $\mathcal{O}$-模型，则 M 是一个$\mathcal{O}$-幺半群。为证明逆命题，我们再次使用引理 2.2.7 中对 $\mathcal{O}$内积的描述：设（必为惰性的）态射 $X\rightarrowtail X_i$（其中 $i=1,\dots,n$）将X在 $\mathcal{O}$ 中、位于 S之上，表示为位于 S_i之上的对象 X_i 的积。若 $X_i\rightarrowtail X_{i,s}$表示位于 $\rho'_s\colon S_i\rightarrowtail\mathbf{1}$之上的余笛卡尔态射，则有如下交换方块

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \longrightarrow & \prod_i M(X_i) \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \prod_{(i,s)\in S} M(X_{i,s}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_i\left(\prod_{s\in S_i} M(X_{i,s})\right). \end{array}$$

因此，顶部的水平态射也是一个等价，所以 M 保留这个积。□

命题 2.3.4。 设 $\mathcal{C}$是一个具有有限积的 ∞-范畴。那么存在一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-*operad* $\mathcal{C}^{\times}\to\mathsf{Span}(\mathbb{F})$（事实上是一个余笛卡尔纤维化），以及一个（保积）函子$\mathcal{C}^{\times}\to\mathcal{C}$，使得与此函子复合会导出一个等价

$$\mathsf{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\times})\xrightarrow{\sim}\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$$

对于每个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-*operad* $\mathcal{O}$,

证明。这可由与将 $\mathbb{F}_*$ 替换为 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$所得版本相同的证明得到；该证明见 [Lur17，第 2.4 节。1], 此处不再赘述。□

3. LAWVERE 理论与代数单子

Linton 首先证明了 [Lin66] 单排序 Lawvere 理论等价于集合范畴上的有限元单子，而这一对应关系的 ∞-范畴论类比由 Gepner–Groth–Nikolaus [GGN15]证明了。在本节中，我们将把这一结果推广到多排序 Lawvere 理论的概念，证明定理 B。我们首先介绍相关的代数的单子概念，并在 §3.1中说明任意 Lawvere 理论都能导出这样的单子。在 §3.2 中，我们将定义与代数单子相关联的 Lawvere 理论，并证明其模型能够还原出我们最初的单子。

3.1. 由 Lawvere 理论得到的代数单子。

本小节的目标是说明，在 ∞-空间范畴中，Lawvere 理论的模型总能给出一个代数单子，具体如下：

定义 3.1.1. 一个代数单子是函子范畴$(X,\mathcal{S})$上的单子 T，其中 $X\in\mathcal{S}$ 满足 T 的底层自函子保持筛余极限。

注 3.1.2. 在 1-范畴语境中，Lawvere 理论与有限元单子相关，即保持滤过 余极限的单子。但在我们的 ∞-范畴框架中并非如此，因为这里要求单子保持筛 余极限（这在$\mathcal{S}_{/X}$意味着保持滤过余极限和单纯形余极限）。造成这种差异的根本原因是：集合 是通过自由添加滤过余极限，从范畴 $\mathbb{F}$ 有限集得到的，而 $\mathcal{S}$则是通过自由添加筛余极限，从 $\mathbb{F}$ 得到的。这里 $\mathbb{F}$ 之所以相关，是因为在这两种情况下，我们都希望用有限积而非更一般的极限来定义 Lawvere 理论。

我们指出一个关于单子与余极限的一般结果，该结果引自 Henry 和 Meadows [HM21]:

命题 3.1.3。 设 T 是 ∞-范畴 $\mathscr{C}$上的一个单子，其中存在所有由某个 ∞-范畴 $\mathscr{I}$ 索引的 $\mathscr{I}$-形余极限。则以下条件等价：
(1) 自函子 $T\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ 保留由 $\mathscr{I}$索引的余极限。*(2)* ∞-范畴 $\mathsf{Alg}(T)$ 存在由 $\mathscr{I}$索引的余极限，且函子 $U_T\colon \mathsf{Alg}(T) \to \mathscr{C}$保留这些余极限。

证明。 由于 $T \simeq U_T F_T$其中 F_T是一个左伴随，因此从 (2) 到 (1) 的蕴含显然成立。非平凡的方向是 [HM21，引理 6。6], 而这又是 [Lur17，推论 4.2.3.5]的应用。□

推论 3.1.4. T 上的单子 $\mathcal{S}_{/X}$ 是代数的，当且仅当对应的单子伴随

$$F_T\colon \mathcal{S}_{/X} \rightleftarrows \mathsf{Alg}(T)\ :U_T,$$

∞-范畴 $\mathsf{Alg}(T)$ 具有筛余极限，且右伴随 U_T 保留这些余极限。 □

观察 3.1.5. 若 T是 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 上的代数单子，则 $\mathsf{Alg}(T)$ 是局部小的。事实上，若 T是局部小 ∞-范畴 $\mathscr{C}$ 上的任意单子，则 $\mathsf{Alg}(T)$ 是局部小的：任意对象 $A \in \mathsf{Alg}(T)$ 都可写成自由分解的单纯形余极限，这意味着 $\mathsf{Map}^{\mathsf{Alg}(T)}(A, B)$ 是 $\mathscr{C}$ 中映射空间的余单纯形极限，因此是小的。

命题 3.1.6. 设 $(\mathscr{L}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathscr{L})$ 是一个 *Lawvere* 理论。则：

(i) ∞-范畴 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ 是可呈示的，并且包含 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ $\hookrightarrow$ 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$ 有一个左伴随。*(ii)* 函子 $p^*\colon$模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ $\to$ 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 是一个单子右伴随。*(iii)* 相应的单子 $T_{\mathscr{L}}$ 是代数的。*(iv)* 左伴随 L *of* p^* 满足

$$L\mathsf{y}_X x \simeq \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(px).$$

证明。 ∞-范畴 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ 可以定义为 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$ 的全子范畴，其对象由关于以下形式的映射集合而言是局部的对象所张成：

$$\coprod_{i=1}^{n} \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(px_i) \to \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}\left(\prod_{i=1}^{n} px_i\right)$$

对于 x_1，……， x_n属于 X。因此 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ 是 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$的可达局部化，这意味着包含有一个左伴随 L_{prod}，并且 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ 是可呈示的。这就证明了 (i)。

若 $p_!\colon$ 函子范畴$(X,\ \mathcal{S})$ $\to$ 函子范畴$(\mathscr{L},\ \mathcal{S})$ 表示沿着 p的左 Kan 延拓，那么复合$L_{\mathrm{prod}}p_!$ 是 p^*的左伴随。要证明这是一个代数单子的单子伴随，根据 ∞-范畴单子性定理，[Lur17，定理 4.7.3，5],只需证明 p^* 是保守的且保留筛余极限。

要看出 p^* 是保守的，注意若 $\eta\colon F \to G$ 是保积函子 $\mathscr{L} \to \mathcal{S}$之间的自然变换，那么由于 $\mathscr{L}$中的每个对象都是 p像中对象的积，对于每个 $A \in \mathscr{L}$，如果它在 p像中对象上的分量是等价，即 $p^*\eta$ 是等价，那么分量 η_A 必定也是等价。

若将 p^* 视为函子 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$ $\to$ 函子范畴$(X, \mathcal{S})$，它保留所有余极限，因此要证明 p^* 保留筛余极限，只需验证 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$ 在 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$ 中对筛余极限封闭。换言之，给定一个筛化图表 $\phi\colon \mathscr{I} \to$ 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$，其中$\phi(i)$ 属于 模$_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$，那么 ϕ 的余极限也属于该类。这是因为 函子范畴$(\mathscr{L}, \mathcal{S})$ 中的余极限是逐点计算的，并且对于 $\mathscr{L}$ 中的积 $A \times B$，有

$$\mathrm{colim}_{i\in\mathscr{I}}\, \phi_i(A \times B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{colim}_{i\in\mathscr{I}}\, \phi_i(A) \times \phi_i(B) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{colim}_{i\in\mathscr{I}}\, \phi_i(A)) \times (\mathrm{colim}_{i\in\mathscr{I}}\, \phi_i(B)),$$

其中，第二个等价成立，是因为根据定义，筛余极限与 $\mathcal{S}$中的有限积可交换。这证明了 (ii) 和(iii)

还需证明(iv)。我们已经看到， p^* 的左伴随是 $L_{\mathrm{prod}}p_!$，并且已知$p_!\mathsf{y}_X x \simeq \mathsf{y}_{\mathcal{L}^{\mathrm{op}}}p(x)$，因此只需验证$\mathsf{y}_{\mathcal{L}^{\mathrm{op}}}p(x)$已经属于全子范畴$\mathsf{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$。换言之，我们必须证明该函子

$$\mathsf{Map}_{\mathcal{L}}(p(x),-)\colon \mathcal{L} \to \mathcal{S}$$

保持有限积，这一点显然。 □

定义 3.1.7。 对我们而言，适当的代数单子态射是单子的松弛态射，即代数单子之间的松弛自然变换 $S \to T$，将其视为从泛单子 2-范畴到$(\infty,2)$-范畴的函子CAT_∞，即$(\infty,2)$-范畴的 ∞-范畴。如 [Hau21], 所示，这样的松弛态射等价于一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Alg}(T) & \xrightarrow{F^*} & \mathsf{Alg}(T) \\ \downarrow{\scriptstyle U_T} & & \downarrow{\scriptstyle U_S} \\ \mathsf{Fun}(X,\mathcal{S}) & \xrightarrow{f^*} & \mathsf{Fun}(Y,\mathcal{S}), \end{array} \tag{3}$$

在此处，我们希望 f^* 由与一个 $Y \to X$ of∞-群胚态射 f复合给出。因此，我们可以将代数单子的 ∞-范畴 $\mathsf{AlgMnd}^{\mathrm{op}}$ 定义为 $\mathsf{ev}_1\colon \mathsf{Fun}([1], \widehat{\ }\mathsf{Cat}_\infty) \to \widehat{\ }\mathsf{Cat}_\infty$ 沿着 $\mathsf{Fun}(-,\mathcal{S})\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \widehat{\ }\mathsf{Cat}_\infty$ 的拉回中的全子范畴，其对象是与代数单子相对应的单子右伴随。等价地，根据推论 3.1.4，这些右伴随是保守的，且保持筛余极限。

观察 3.1.8. 给定一个如（3）中的代数单子态射，函子 F^*自动保持极限和筛余极限：由于 U_S 是保守的，且保持极限和筛余极限，只需证明 $U_S F^*$ 保持这些极限；但根据假设，这等价于 $f^* U_T$，而它保持这些极限，因为 U_T和 f^* 都如此。

观察 3.1.9. 给定一个 Lawvere 理论的态射

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{F} & \mathcal{L}', \end{array}$$

与 F复合会保留保积函子，因此可限制为一个函子$F^*\colon$模$_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S}) \to$模$_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$。这与一个交换方块相容

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Mod}_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{F^*} & \mathsf{Mod}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle p'^*} & & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ \mathsf{Fun}(X',\mathcal{S}) & \xrightarrow{f^*} & \mathsf{Fun}(X,\mathcal{S}), \end{array}$$

根据命题 3.1.6，这是一个代数单子态射 $T_{\mathcal{L}} \to T_{\mathcal{L}'}$。因此我们有一个函子 $\mathfrak{Mod}\colon \mathsf{LwvTh} \to \mathsf{AlgMnd}$，它将一个 Lawvere 理论映射到其在 $\mathcal{S}$ 中的 ∞-模型范畴，并通过给定的映射将其视为来自一个 ∞-群胚的代数单子。

3.2. **由代数单子得到 Lawvere 理论**。 我们的下一个目标是证明每个代数单子都可通过以下构造由一个 Lawvere 理论得到：

定义 3.2.1. 如果 T 是 函子范畴$(X,\mathcal{S})$ 上的代数单子，那么 T 的 *Lawvere* 理论$\mathfrak{Th}(T)$是一对 $(\mathcal{L}(T)\ p_T)$，其中 $\mathcal{L}(T)^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathsf{Alg}(T)$ 的全子范畴，其对象由以下对象张成

形式为 $\coprod_{i=1}^n F_T \mathsf{y}_X x_i$ 的对象，其中 x_i 属于 X，以及映射 $p_T\colon X \to \mathscr{L}(T)$；该映射由限制 F_T 得到。

记号 3.2.2。方便起见，将 $(x_1,\dots,x_n)$ 记作 函子范畴$(X,\mathcal{S})$ 中的余积 $\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x)$，将 $F_T(x_1,\dots,x_n)$ 记作其像 $F_T(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \simeq \coprod_{i=1}^n F_T \mathsf{y}_X x_i$于 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$ 中。

引理 3.2.3。若$(\mathscr{L},p)$ 是一个 *Lawvere* 理论，则 $\mathscr{L}^{\mathrm{op}}$ 的 *Yoneda* 嵌入通过一个全忠实函子分解

$$\mathscr{L}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$$

其像恰为 $\mathscr{L}(T_{\mathscr{L}})$。这给出了 *Lawvere* 理论的一个等价

$$(\mathscr{L},p) \simeq \mathfrak{Th}(T_{\mathscr{L}}).$$

证明。首先注意，对于 $X \in \mathscr{L}$，余预层

$$\mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}} X \simeq \mathsf{Map}_{\mathscr{L}}(X,-)$$

显然保持积，因此$\mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}$ 可分解为经由$\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$这一$\mathsf{Fun}(\mathscr{L},\mathcal{S})$的全子范畴。

若 L 表示 $p^*\colon \mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S}) \to \mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})$，那么我们在命题3.1.6中已经看到

$$L\mathsf{y}_X(x) \simeq \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(px). \tag{4}$$

于是 $L(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \simeq \coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(px)$，从而得到自然等价

$$\begin{aligned}
\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})}\left(L\left(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)\right),\Phi\right) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(\mathscr{L},\mathcal{S})}\left(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(px_i),\Phi\right) \simeq \prod_{i=1}^n \Phi(px_i) \\
&\simeq \Phi\left(\prod_{i=1}^n px_i\right) \\
&\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})}\left(\mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}\left(\prod_{i=1}^n px_i\right),\Phi\right)
\end{aligned}$$

对任意 $\Phi \in \mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S})$。由 Yoneda 引理，我们于是得到一个等价

$$L(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \simeq \mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}(\prod_{i=1}^n px_i).$$

根据定义，这些恰好是属于全子范畴 $\mathscr{L}(T_{\mathscr{L}})^{\mathrm{op}}$的对象。另一方面，根据假设，$\mathscr{L}$中的每个对象都是的像中的对象之积，因此这些也恰好是 $\mathscr{L}^{\mathrm{op}}$的像中的对象。因此，$\mathscr{L}^{\mathrm{op}}$ 的像就是 $\mathscr{L}(T_{\mathscr{L}})^{\mathrm{op}}$，这正是所需。

等价关系（4）可改述为给出一个交换方块

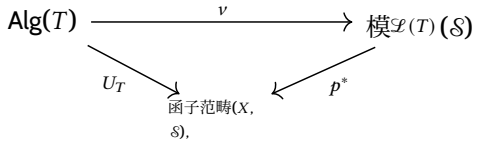
$$\begin{array}{ccc}
X & \xhookrightarrow{\mathsf{y}_X} & \mathsf{Fun}(X,\mathcal{S}) \\
{\scriptstyle p^{\mathrm{op}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} \\
\mathscr{L}^{\mathrm{op}} & \xhookrightarrow{\mathsf{y}_{\mathscr{L}^{\mathrm{op}}}} & \mathsf{Mod}_{\mathscr{L}}(\mathcal{S}).
\end{array}$$

这限制为一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
{\scriptstyle p^{\mathrm{op}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_T^{\mathrm{op}}} \\
\mathscr{L}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{L}(T_{\mathscr{L}})^{\mathrm{op}},
\end{array}$$

从而得到所需的 Lawvere 理论等价。 □

命题 3.2.4。 设 T 是 X 上的一个代数单子。则全忠实嵌入$\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{Alg}(T)$ 诱导出一个交换三角形



其中 v来自将 *Yoneda* 嵌入作用于 $\mathsf{Alg}(T)$ 后限制到 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$，而 p是诱导映射 $X \to \mathscr{L}(T)$。此外，函子 v是一个等价。

证明。 由观察 3.1.5 可知， ∞-范畴 $\mathsf{Alg}(T)$ 是局部小的，因此我们有一个 Yoneda 嵌入 $\mathsf{Alg}(T) \hookrightarrow$ 函子范畴 $(\mathsf{Alg}(T)^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$。将其与包含 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{Alg}(T)$ 复合，得到一个受限 Yoneda 函子

$$v\colon \mathsf{Alg}(T) \to \mathsf{Fun}(\mathscr{L}(T), \mathcal{S}).$$

这个余预层将 $A \in \mathsf{Alg}(T)$ 映到余预层

$$F_T(x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{L}(T) \quad \mapsto \quad \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_T(x_1,\dots,x_n), A) \simeq \prod_{i=1}^{n} U_T A(x_i).$$

由于前者对应于 $\mathsf{Alg}(T)$ 中的余积，因此它将 $\mathscr{L}(T)$ 中的有限积映到 $\mathcal{S}$ 中的积，并且经过全子范畴 $模_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$。另请注意，我们有一个自然等价

$$vF_T(x_1,\dots,x_n) \simeq \mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}} F_T(x_1,\dots,x_n), \tag{5}$$

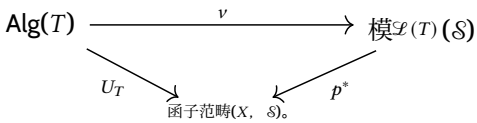
因为根据引理 3.2.3，我们知道对于 $\mathscr{L}(T)$ 中的任意对象 $\Lambda \simeq F_T(y_1,\dots,y_m)$，$\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}\Lambda$ 都属于 $模_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$，因此我们有自然等价

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}\Lambda, vF_T(x_1,\dots,x_n)) &\simeq (vF_T(x_1,\dots,x_n))(\Lambda)\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(\Lambda, F_T(x_1,\dots,x_n))\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathscr{L}(T)}(\Lambda, F_T(x_1,\dots,x_n))\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}\Lambda, \mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_T(x_1,\dots,x_n)).\end{aligned}$$

现在，对于 $A \in \mathsf{Alg}(T)$，我们有自然等价

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(\mathsf{y}_X x, p^* vA) \simeq (vA)(px) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_T x, A) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(\mathsf{y}_X x, U_T A), \tag{6}$$

因此，根据 Yoneda 引理，存在一个自然等价 $p^*v \simeq U_T$。这意味着我们有所需的交换三角形



这里，根据命题 3.1.6，两个对角函子都是单子右伴随，因此，根据 [Lur17，推论 4.7.3，16]要证明水平函子是等价，只需验证诱导变换

$$L \to vF_T$$

是等价，其中 L表示左伴随函子范畴$(X, \mathcal{S}) \to 模_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$ 到 p^*。由于 p^* 是保守的，这等价于自函子之间的变换

$$p^*L \to p^*vF_T \simeq T$$

是一个等价。注意，这里 p^* 保持筛余极限，因为$模_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$中的筛余极限是在函子范畴$(\mathscr{L}(T), \mathcal{S})$中计算的，而 T保持筛余极限，因为它是代数的。此外，函子范畴$(X, \mathcal{S})$中的每个对象都是由形如以下形式的对象构成的筛余极限

$(x_1, \ldots\ldots, x_n) \coloneqq \coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)$，其中 $x_i \in X$，因此只需验证对于这类对象我们有一个等价。

我们先考虑 $n = 1$ 的情形。此时，对于 $M \in \text{模}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$，我们有自然等价

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(Lx, M) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, p^*M) \simeq p^*M(x) \simeq M(F_Tx) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx, M).\end{aligned}$$

因此，由 Yoneda 引理可得一个等价 $Lx \xrightarrow{\sim} \mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx$。由于 Yoneda 嵌入是全忠实的，这个等价是映射空间$\mathsf{Map}^{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(Lx, \mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx)$ 中与等价下的 id_{F_Tx}对应的点

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(Lx, \mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, p^*\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx) \\ &\simeq p^*\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}(F_Tx)(x) \simeq (\mathsf{y}_{\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}}F_Tx)(F_Tx) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_Tx, F_Tx).\end{aligned} \tag{7}$$

另一方面，典范映射 $Lx \to \nu F_Tx$ 在这些等价下对应于

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(Lx, \nu F_Tx) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, p^*\nu F_Tx) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, U_TF_Tx)$$

单位映射 $x \to U_TF_Tx$。对于这里的第二个等价，我们用到了等价$U_T \simeq p^*\nu$，并利用（6）将其分解为

$$\text{映射}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, p^*\nu F_Tx) \simeq (p^*\nu F_Tx)(x) \simeq \text{映射}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_Tx, F_Tx) \simeq \text{映射}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, U_TF_Tx),$$

其中，单位映射对应于最后一个伴随等价下的 F_Tx 的恒等映射。

换言之，我们已经证明，典范映射 $Lx \to \nu F_Tx$ 是在该等价下对应于 id_{F_Tx} 的点

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Mod}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})}(Lx, \nu F_Tx) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(x, p^*\nu F_Tx) \simeq (p^*\nu F_Tx)(x) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_Tx, F_Tx).$$

现在只需注意，当我们将 νF_Tx 与 $\mathsf{y}F_Tx$ 等同起来时，这个等价恰好就是 (7) 中的等价，这从定义即可看出。由此可知，复合映射$Lx \to \nu F_Tx \simeq \mathsf{y}F_Tx$ 恰好就是我们已证明为等价的映射，因此典范映射 $Lx \to \nu F_Tx$ 确实是等价。

现在考虑一般情形，此时我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i=1}^n Lx_i & \xrightarrow{\sim} & L(x_1, \ldots, x_n) \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow \\ \coprod_{i=1}^n \nu F_Tx_i & \longrightarrow & \nu F_T(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

其中，顶部的水平映射是等价，因为 L 保余积，而左侧的垂直映射根据我们刚刚证明的结果是等价。要证明右侧的垂直映射是等价，只需证明底部的水平映射是等价。将其映入一个对象 $M \in \text{模}_{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$ 后，利用等同关系 (5)，得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}(\nu F_T(x_1, \ldots, x_n), M) & \xrightarrow{\sim} & M(F_T(x_1, \ldots, x_n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}(\coprod_{i=1}^n \nu F_T(x_i), M) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^n M(F_Tx_i). \end{array}$$

这里右侧的垂直映射是一个等价，因为 M 是一个 $\mathscr{L}(T)$-模型，因此根据 Yoneda 引理，典范映射

$$L(x_1, \ldots, x_n) \to \nu F_T(x_1, \ldots, x_n)$$

在 模$^{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$ 中是一个等价，正如所要求的。 □

注释 3.2.5. 如果 T 是代数单子，我们已经看到 $\mathsf{Alg}(T)$ 等价于 $\mathsf{Mod}^{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$。按照 [Lur09], 的术语，这将 $\mathsf{Alg}(T)$ 认定为 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$ 的 " 非阿贝尔导出 ∞- 范畴 "；根据 [Lur09, Proposition 5.5.8.15]，它就是 ∞-范畴 $\mathcal{P}_\Sigma(\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}})$，由向 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$ 自由添加筛余极限而得。

推论 3.2.6。

(i) 若 T 是 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 上的代数单子，则 $\mathsf{Alg}(T)$ 是一个可呈示的 ∞-范畴。
(ii) 对于任意如 *(3)* 中的代数单子态射，函子 $F^*\colon \mathsf{Alg}(T) \to \mathsf{Alg}(S)$ 有一个左伴随 $F_!$。
(iii) 左伴随 $F_!$ 限制为函子 $\mathscr{L}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$，它给出一个 *Lawvere* 理论态射

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle p_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_T} \\ \mathscr{L}(S) & \xrightarrow{F} & \mathscr{L}(T). \end{array}$$

证明。 部分 (i) 由命题 3.2.4 可立即得到：我们知道 $\mathsf{Alg}(T)$ 等价于 $\mathsf{Mod}^{\mathscr{L}(T)}(\mathcal{S})$，根据命题 3.1.6(i)，它是可呈示的。函子

$$F^*\colon \mathsf{Alg}(T) \to \mathsf{Alg}(S)$$

根据观察 3.1.8 保持极限和筛余极限；因此，它是可呈示 ∞-范畴之间保持极限的可达函子，因此有一个左伴随$F_!$，由 [Lur09，推论 5.5.2。9]这就证明了 (ii)，并将方块（3）中的函子换成左伴随后，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Fun}(Y, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f_!} & \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle F_S} & & \downarrow{\scriptstyle F_T} \\ \mathsf{Alg}(S) & \xrightarrow{F_!} & \mathsf{Alg}(T). \end{array}$$

因此我们有

$$F_!F_S(\coprod_{i=1}^{n} \mathsf{y}_Y(y_i)) \simeq F_T f_!(\coprod_{i=1}^{n} \mathsf{y}_Y(y_i)) \simeq F_T(\coprod_{i=1}^{n} \mathsf{y}_X f(y_i)),$$

这表明，$F_!$ 将全子范畴 $\mathscr{L}(S)^{\mathrm{op}}$ 映入 $\mathscr{L}(T)^{\mathrm{op}}$，并且还给出了所需的交换方块。此外，$F_!$ 保持余积，因为它是一个左伴随，因此诱导函子 $F\colon \mathscr{L}(S) \to \mathscr{L}(T)$保持积，因为这些积对应于代数的余积。□

观察 3.2.7。 由推论 3.2.6可知，将 Lawvere 理论 $\mathfrak{Th}(T)$ 赋给代数单子 T的对应关系可扩展为一个函子 $\mathfrak{Th}\colon \mathsf{AlgMnd} \to \mathsf{LwvTh}$。此外，这个函子与观察 $\mathfrak{Mod}$ 中的函子 3.1.9互为逆：对于 Lawvere 理论 $(\mathscr{L}, q)$ 存在自然等价

$$\mathfrak{Th}(\mathfrak{Mod}(\mathscr{L}, q)) \simeq (\mathscr{L}, q)$$

根据引理 3.2.3，而对于代数单子 T 存在自然等价

$$\mathfrak{Mod}(\mathfrak{Th}(T)) \simeq T$$

根据命题 3.2.4。

因此我们证明了：

定理 3.2.8. 函子

$$\mathfrak{Mod} : \mathsf{LwvTh} \rightleftarrows \mathsf{AlgMnd}: \mathfrak{Th}$$

是 ∞-范畴之间的互逆等价。

注 3.2.9. 文献中关于普通范畴的、更一般的"单子/理论对应"有许多版本。"带算术结构的单子"的这些版本已被 Henry–Meadows 推广到 ∞-范畴情形 [HM21]以及 Kositsyn [Kos21], 不过，他们并未明确讨论在 Lawvere 理论这一特殊情形下，情况如何简化。

4. 解析单子与 ∞-幺 operad

我们在推论 2.2.11 中看到，带标记的 Span(𝔽)-∞-幺 operad 构成 $\mathrm{Span}(\mathbb{F})^{\natural}$ 上的 Lawvere 理论的一个全子范畴。特别地，每个带标记的 Span(𝔽)-∞-幺 operad 都给出一个代数单子；本节的总体目标是将这个全子范畴与来自一类特殊代数单子的全子范畴对应起来，这类单子即解析单子。我们先在 §4.1 中介绍解析单子，然后在 §4.2 中证明，任意带标记的 Span(𝔽)-∞-幺 operad 都给出这样的解析单子。此后，我们便可以在 §4.3 中研究解析单子的 Lawvere 理论，并在其中证明定理 C（这与我们此前的工作共同完成定理 A 的证明）。

4.1. **解析单子与代数单子。** 在本小节中，我们将回顾解析单子的定义，该定义由 [GHK22], 提出，并将解析单子描述为某个代数单子切片中的一个全子范畴，这一描述很有用。

定义 4.1.1. 函子 $F\colon \mathcal{S}_{/X} \to \mathcal{S}_{/Y}$ 若满足 F 保留筛余极限和弱可缩极限（即由分类空间可缩的 ∞-范畴所指标的极限），则称为解析的 。

注 4.1.2. 根据 [GHK22，定理 2.2.3 和命题 3.1，9] 任意解析函子$\mathcal{S}_{/X} \to \mathcal{S}_{/Y}$ 都可唯一地表示为 $t_! p_* s^*$ 某个空间图表

$$X \xleftarrow{s} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{t} Y,$$

其中， p 的纤维是有限集。这就是与该函子对应的多项式图表 。

定义 4.1.3. 函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 之间的自然变换 $\alpha\colon F \to G$，若对 $\mathcal{C}$中的每个态射 $\phi\colon x \to y$，其自然性方块

$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\alpha_x} & Gx \\ \downarrow{\scriptstyle F\phi} & & \downarrow{\scriptstyle G\phi} \\ Fy & \xrightarrow{\alpha_y} & Gy \end{array}$$

都是笛卡尔的。笛卡尔单子 是指单位变换和乘法变换均为笛卡尔的单子；而解析单子 是指在形如 $\mathcal{S}_{/X}$ 的 ∞-范畴上的笛卡尔单子，且其底层自函子是解析的。

注释 4.1.4. 解析单子也可以定义为一个（∞,2）-范畴中的单子，该范畴的对象是形如 函子范畴$(X, \mathcal{S})$（其中 $X \in \mathcal{S}$）的 ∞-范畴，态射为解析函子，2-态射为笛卡尔自然变换。因此，对我们而言，解析单子之间恰当的态射概念是这个（∞,2）-范畴中的某些单子的松弛态射。它们也可以用单子伴随来描述，如下所示：

定义 4.1.5. 设 T 是 X 上的一个解析单子，且 S 是 $\mathcal{X}$ 上的一个解析单子。一条从 S 到 T 的解析单子态射 是一个 ∞-范畴的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Alg}(T) & \xrightarrow{F^*} & \mathsf{Alg}(S) \\ \downarrow{\scriptstyle U_T} & & \downarrow{\scriptstyle U_S} \\ \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S}) & \xrightarrow{f^*} & \mathsf{Fun}(Y, \mathcal{S}), \end{array} \tag{8}$$

其中，底部水平函子来自空间的一个映射 $f\colon Y \to X$，而诱导变换

$$Sf^* \to f^*T$$

是笛卡尔的。（由于 U_S 和 U_T 检测拉回，我们也可以等价地要求伴随变换

$$F_S f^* \to F^* F_T \tag{9}$$

是笛卡尔的。）

定义 4.1.6。 我们将 AnMnd 定义为 AlgMnd 的子范畴，其对象是解析单子，其态射是那些伴随变换（9）为笛卡尔的态射。

为了更有用地描述 ∞-范畴 AnMnd ，第一步是确定其终对象：

命题 4.1.7。 AnMnd 有一个终对象 Sym，它由 $\mathcal{S}$ 上终解析自函子唯一的解析单子结构给出。后者是如下自函子

$$X \mapsto \coprod_{n=0}^{\infty} X^{\times n}_{h\Sigma_n},$$

由以下图表给出

$$* \leftarrow \mathbb{F}_*^{\simeq} \to \mathbb{F}^{\simeq} \to *, \tag{10}$$

其中，映射 $\mathbb{F}_*^{\simeq} \to \mathbb{F}^{\simeq}$ 由遗忘基点给出；这是具有有限离散纤维的空间态射的分类映射。[4]

证明。 将 [GHK22 命题 4.4.2] 限制到解析单子上，我们特别得到遗忘函子 AnMnd $\to \mathcal{S}$是一个笛卡尔纤维化，它位于如下交换三角形中

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{AnMnd} & \xrightarrow{\mathfrak{U}} & \mathsf{AnEnd} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{S}, & \end{array}$$

其中AnEnd 是解析自函子的 ∞-范畴。这里，函子AnEnd $\to \mathcal{S}$是一个笛卡尔与余笛卡尔纤维化，而遗忘函子 $\mathfrak{U}\colon$ AnMnd $\to$ AnEnd保留笛卡尔态射。为了证明An Mnd 有一个终对象，只需证明纤维AnMnd$(*)$有一个终对象 Sym，并且对于每个态射$q\colon X \to *$ in $\mathcal{S}$，其笛卡尔传输 q^* Sym 是AnMnd(X)中的终对象。

[4]注意，群胚 $\mathbb{F}_*^{\simeq}$和 $\mathbb{F}^{\simeq}$都与 $\coprod_{n=0}^{\infty} B\Sigma_n$等价，而这个分类映射可以描述为由将 Σ_n 包含到 Σ_{n+1} 中所诱导的映射 $B\Sigma_n \to B\Sigma_{n+1}$ 的不交并，其中 Σ_{n+1} 是集合 **n+1** 中固定一个元素的自同构所构成的子群。

纤维$\mathsf{AnMnd}(X)$是一个 ∞-范畴，其中的结合代数位于 ∞-范畴$\mathsf{AnEnd}(X)$中；后者是从$\mathsf{Fun}(X, \mathcal{S})$到自身的解析自函子构成的范畴，运算为复合；而到$\mathsf{AnEnd}(X)$的遗忘函子检测极限。此外，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{AnMnd}(*) & \xrightarrow{q^*} & \mathsf{AnMnd}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{U}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{U}_X} \\ \mathsf{AnEnd}(*) & \xrightarrow{q^*} & \mathsf{AnEnd}(*) \end{array}$$

其中，下方的水平函子保极限，因为它是右伴随；而竖直函子反映极限。因此，若 Sym 是 $\mathsf{AnMnd}(*)$ 中的终对象，那么 $q^*\mathrm{Sym}$ 在 $\mathsf{AnMnd}(X)$ 中是终对象，当且仅当 $\mathfrak{U}_X q^* \mathrm{Sym} \simeq q^* \mathfrak{U}_* \mathrm{Sym}$ 在 $\mathsf{AnEnd}(X)$ 中是终对象；由于 q^* 和 $\mathfrak{U}_*$ 保极限，这一点成立。此外，由 [Lur17, Corollary 3.2.2.5]可知，若 $\mathsf{AnEnd}(*)$ 有终对象，则 ∞-范畴 $\mathsf{AnMnd}(*)$ 也有终对象；该终对象由这个终解析自函子上唯一的结合代数结构给出。为完成证明，我们现在注意到，[GHK22, Corollary 3.1.13] 蕴含 (10) 给出了 $\mathsf{AnEnd}(*)$ 的终对象，正如所需。□

由于AnMnd 有终对象，包含$\mathsf{AnMnd} \to \mathsf{AlgMnd}$ 可经由$\mathsf{AlgMnd}^{/\mathrm{Sym}}$分解。现在我们有：

引理 4.1.8. 函子$\mathsf{AnMnd} \to \mathsf{AlgMnd}^{/\mathrm{Sym}}$ 是全忠实的。

证明。设我们有分别定义在空间 X 和 Y上的解析单子 T 和 S。那么，从 S 到 $\mathsf{AlgMnd}^{/\mathrm{Sym}}$ 中 T 的一个态射给出一个态射 $f\colon Y \to X$、一个自然变换 $\alpha\colon Sf^* \to f^*T$，以及一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} Sp^* & \xrightarrow{\alpha q^*} & f^*Tq^* \\ & {\scriptstyle p^*\mathrm{Sym}_{\mathcal{S}}} \swarrow \quad \searrow & \end{array}$$

其中，q 和 p 分别表示映射 $X \to *$、$Y \to *$。这里两个对角自然变换都是笛卡尔的，因为根据假设，指向 Sym 的两个映射都来自AnMnd，我们的目标是证明此时 α 也是笛卡尔的。

拉回方块的粘贴引理表明，给定一个由自然变换构成的交换三角形

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & G \\ & {\scriptstyle \psi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \chi} & \\ & H & \end{array}$$

其中 χ 是笛卡尔的，当且仅当 ψ 是笛卡尔的时，变换 ϕ 是笛卡尔的。由上方的三角形，我们因此可以得出 αq^* 是笛卡尔的。接下来我们可以构造一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} Sf^* & \xrightarrow{\alpha} & f^*T \\ \downarrow & & \downarrow \\ Sp^*q_! & \xrightarrow{\alpha q^* q_!} & f^*Tq^*q_! \end{array}$$

使用余单位变换 $\mathrm{id} \to q^*q_!$，根据 [GHK22，引理 2.1，5]该变换是笛卡尔变换。因此，方格中的竖直映射都是笛卡尔变换，底部水平映射也是如此。再次使用粘贴引理可知，顶部水平变换 α 也是笛卡尔变换。□

观察 4.1.9。 由定理3.2.8现在可知，函子

$$\mathsf{AnMnd} \hookrightarrow \mathsf{AlgMnd}_{/\mathrm{Sym}} \xrightarrow{\mathfrak{Th}} \mathsf{LwvTh}_{/\mathfrak{Th}(\mathrm{Sym})}$$

将 AnMnd 识别为 $\mathsf{LwvTh}^{\mathrm{an}}_{\mathfrak{Th}(\mathrm{Sym})}$ 在 $\mathsf{LwvTh}_{/\mathfrak{Th}(\mathrm{Sym})}$中的一个全子范畴。在接下来的几节中，我们将把这个全子范畴识别为由带钉住数据的 Span(𝔽)-∞- 幺 operad 构成的全子范畴。

注 4.1.10。 ∞-范畴 AnMnd 也可以视为 AlgMnd的一个（非满）子范畴，LwvTh。这意味着它也对应于 LwvTh中的某个子范畴。若能对此作出明确描述，将会很有意思。在 1-范畴情形中，Szawiel 和 Zawadowski 给出了一个排序解析单子的 Lawvere 理论的描述，见 [SZ14]。

4.2. **由 Span(𝔽)-∞-幺 operad 导出的解析单子**。 在本小节中，我们将描述与带钉住数据的 Span(𝔽)-∞-幺 operad 相对应的单子，并证明它总是解析的。利用这一点，我们随后将把 ∞-范畴 POpd(Span(𝔽)) 识别为 AnMnd的一个全子范畴。

记号 4.2.1. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 Span(𝔽)-∞-代数。我们将限制函子记作 $U_{\mathcal{O}}$

$$\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathsf{Fun}(\mathcal{O}, \mathcal{S}) \to \mathsf{Fun}(\mathcal{O}_1^{\simeq}, \mathcal{S})$$

并且 $F_{\mathcal{O}}$ 将其左伴随记作。注意，$(\mathcal{O}, \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 根据引理 2.2.7是一个 Lawvere 理论；根据命题 2.3.3， ∞-范畴 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S})$ 是该 Lawvere 理论的 ∞-模型范畴。因此， $U_{\mathcal{O}}$ 根据命题 3.1.6，它是某个代数单子的单子右伴随；我们将 $T_{\mathcal{O}}$ 该单子记作。

命题 4.2.2. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 Span(𝔽)-∞-代数。则 $T_{\mathcal{O}}$ 是一个解析单子，其底层自函子在 $F \in$ 函子范畴 $(\mathcal{O}_1^{\simeq}, \mathcal{S})$ 上的取值由以下公式给出

$$(T_{\mathcal{O}}F)(x) \simeq \mathrm{colim}_{y \rightsquigarrow x \in \mathsf{Act}_{\mathcal{O}}(x)} \prod_{y \mapsto y_i} F(y_i),$$

其中 $\mathsf{Act}_{\mathcal{O}}(x) := (\mathcal{O}^{\mathrm{act}}/_x)^{\simeq}$ 表示到 x 中 $\mathcal{O}$ 的主动映射的 ∞-群胚，且该极限取遍位于 ρ_i'上的惰性映射 $y \mapsto y_i$的集合。此外，任意 Span(𝔽)-∞-幺 *operad* 的态射都会诱导一个解析单子态射。

证明。 在此证明中，采用一些来自 [CH21]的术语会很方便。带有其惰性-活性分解系统以及位于 1 上的对象的 ∞-范畴 $\mathcal{O}$ 是一个代数模式，而 $\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S})$ 是该模式的 Segal $\mathcal{O}$-空间的 ∞-范畴。

代数模式 Span(𝔽) 根据 *BHS22* [BHS22，例 3.3，25]，是可扩张的，因此任意Span(𝔽)-∞-幺 operad 根据 [CH21，推论 9，17]（或 [BHS22，引理 4.1，15]）也都是可扩张的。该 $T_{\mathcal{O}}$ 的公式于是成为 [CH21，推论 8，12]的一个特例。

由此可得 [CH21命题 106] 中的单子 $T_{\mathcal{O}}$ 是笛卡尔的，且保持弱可缩极限。由于我们已经知道 $T_{\mathcal{O}}$ 是代数的，即保持筛余极限，因此这表明 $T_{\mathcal{O}}$ 是一个解析单子。根据Span(𝔽)-∞-幺 operad 的态射会诱导出一个解析单子态射，依据是 [CH21命题 110]。□

推论 4.2.3。 设 $(\mathcal{O}, q\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 是一个带钉的 Span(𝔽)-∞-幺 *operad*。那么复合

$$\mathsf{Mon}_{\mathcal{O}}(\mathcal{S}) \xrightarrow{U_{\mathcal{O}}} \mathsf{Fun}(\mathcal{O}_1^{\simeq}, \mathcal{S}) \xrightarrow{q^*} \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S})$$

是解析单子 $T_{(\mathcal{O},q)}$ 的单子右伴随。此外，任意带标记的 Span(𝔽)-∞-幺 *operad* 态射都会诱导出一个解析单子态射。

证明。 自函子 $T_{(\mathcal{O},q)}$ 是复合 $q^*T_{\mathcal{O}}q_!$。这里，函子 q^* 保留所有极限和余极限，而 $q_!$ 保留所有余极限（因为它是左伴随），也保留弱可缩极限（根据 [GHK22，引理 2.2。10]），因此 $T_{(\mathcal{O},q)}$ 是解析函子，因为 $T_{\mathcal{O}}$ 是解析函子。此外， $T_{(\mathcal{O},q)}$ 的乘法变换和单位变换由以下复合给出

$$q^*T_{\mathcal{O}}q_!q^*T_{\mathcal{O}}q_! \to q^*T_{\mathcal{O}}T_{\mathcal{O}}q_! \to q^*T_{\mathcal{O}}q_!, \qquad \mathrm{id} \to q^*q_! \to q^*T_{\mathcal{O}}q_!$$

对应于 $T_{\mathcal{O}}$ 的变换，以及伴随$q_! \dashv q^*$的余单位和单位。根据 [GHK22 的引理 2.1，后两者是笛卡尔变换5], ；因此这些复合也是如此，因为我们知道 $T_{\mathcal{O}}$ 是一个笛卡尔单子。因此， $T_{(\mathcal{O},q)}$ 确实是一个解析单子。类似地，与带基点的 Span(𝔽)-∞-幺 operad 的态射相关联的自然变换，由底层 Span(𝔽)-∞-幺 operad 态射所对应的自然变换和笛卡尔（余）单位变换构成，因此我们得到一个解析单子的态射。□

带基点的 Span(𝔽)-∞-幺 operad $(\mathcal{O},q)$ 所对应的单子 $T_{(\mathcal{O},q)}$，按定义就是与 Lawvere 理论 $(\mathcal{O},q)$ 相对应的单子。接下来我们注意到，与终端（带基点的）Span(𝔽)-∞-幺 operad 相对应的单子就是终端解析单子：

引理 4.2.4. 与 *Lawvere* 理论 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural$ 相对应的单子 $T_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}$ 是 Sym。等价地，*Lawvere* 理论 $\mathfrak{Th}(\mathrm{Sym})$ 是 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural$。

证明。 由命题 4.1.7 可知，Sym 是其在 $\mathcal{S}$ 上的底层自函子所具有的唯一解析单子结构，而该底层自函子为

$$X \mapsto \coprod_{n=0}^{\infty} X^{\times n}_{h\Sigma_n}.$$

因此，只需证明这也是解析单子 $T_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}$ 的底层自函子。由命题 4.2.2 中的公式可得此结论，因为我们有$\mathsf{Act}^{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{1}) \simeq \coprod_{n=0}^{\infty} B\Sigma_n$，于是

$$T_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(X) \simeq \mathrm{colim}_{\mathbf{n}\rightsquigarrow\mathbf{1}\in\mathsf{Act}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{1})} X^{\times n} \simeq \coprod_{n=0}^{\infty} X^{\times n}_{h\Sigma_n}.$$

□

由此我们证明了，POpd(Span(𝔽)) 和 AnMnd 都给出 $\mathsf{LwvTh}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}$ 的全子范畴，并且前一个子范畴包含于后一个子范畴之中：

推论 4.2.5. $\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 是$\mathsf{LwvTh}^{\mathrm{an}}{}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}$ $\simeq$ AnMnd的全子范畴。 □

4.3. **解析单子的 Lawvere 理论。** 在上一小节中，我们证明了存在一个全忠实函子 $\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \hookrightarrow \mathsf{LwvTh}^{\mathrm{an}}{}_{/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural}$。本小节的目标是证明它也是本质满的。换言之，我们要证明，任意解析单子的 Lawvere 理论都是一个带标记的 Span(𝔽)-∞-算子。为此，我们首先描述这类 Lawvere 理论上的一个惰性–主动分解系统。它源自整个 Kleisli∞-范畴上的一个分解系统，该分解系统构造于 [CH21]中。我们先回顾这一结果，这需要先引入一些术语：

定义 4.3.1. 函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是局部右伴随，如果对每个对象 $C \in \mathscr{C}$，诱导的切片函子 $F_{/C}\colon \mathscr{C}_{/C} \to \mathscr{D}_{/FC}$ 都是右伴随。

观察 4.3.2. 根据 [GHK22，定理 2.2.3], 函子 F: 函子范畴$(X,\mathcal{S}) \to$ 函子范畴$(\mathcal{Y},\mathcal{S})$ 是局部右伴随，当且仅当它是可达的且保弱可缩极限。特别地，每个解析函子都是局部右伴随。

观察 4.3.3. 对于解析函子 F: 函子范畴$(X, \mathcal{S}) \to$ 函子范畴$(Y\mathcal{S})$，我们可以相当明确地描述 $F_{/*}$ 的左伴随 L_*：回想一下，解析函子 F 具有如下形式 $t_!p_*s^*$，其中对应一个唯一的空间双跨

$$X \xleftarrow{s} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{t} Y$$

其中 p 具有有限离散纤维。这里，$t\colon B \to Y$ 在直化等价 函子范畴$(Y\ \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}_{/Y}$ 下对应于 $F(*)$，因为 $t_!$ 在切片上由与 t 复合给出，而 p_*s^* 保留终对象。因此，$F_{/*}$ 可识别为函子 p_*s^*: 函子范畴$(X,\ \mathcal{S}) \to$函子范畴$(B,\ \mathcal{S})$，其左伴随 L_* 为 $s_!p^*$。特别地，映射 $\mathsf{y}_Y(y) \to F(*)$ 对应于 $y \in Y$上的一个点 $b \in B$，而 $L_*\mathsf{y}_Y(y)$ 对应于 $s_!p^*b$，它是复合 $E_b \hookrightarrow E \xrightarrow{s} X$。由于 E_b 是有限集，我们有

$$L_*(\mathsf{y}_Y(y) \to F(*)) \simeq \coprod_{e \in E_b} \mathsf{y}(s(e)). \tag{11}$$

定义 4.3.4。 对于任意定义在某个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子 T，我们将 $\mathcal{K}(T)$ 记作 T 的 *Kleisli* ∞-范畴，它定义为 $\mathsf{Alg}(T)$ 的全子范畴，其中包含 $C \in \mathcal{C}$ 的自由代数 F_TC。

定义 4.3.5. 设 T是 函子范畴$(X, \mathcal{S})$上的一个解析单子，并考虑 $\mathcal{K}(T)$中的一个态射 ϕ: $F_TI \to F_TJ$。在伴随 $F_T \dashv U_T$下，这对应于 函子范畴$(X, \mathcal{S})$中的一个态射 $\phi'\colon I \to TJ$，我们可以通过 T下从 J到终对象的唯一映射的像 $TJ \to T*$，将其视为 函子范畴$(X, \mathcal{S})$中的一个态射 $/_{T*}$。于是，ϕ'对应于 函子范畴$(X, \mathcal{S})$中的一个态射 $\phi''\colon L_*I \to J$，其中 L_*是 $T_{/*}$的左伴随。于是，伴随 $L_* \dashv T_{/*}$ 的单位给出 ϕ' 的如下分解:

$$J \to TL_*J \xrightarrow{T\phi''} TI,$$

它与对 ϕ 作如下分解相伴

$$F_TJ \to F_TL_*J \xrightarrow{F_T\phi''} F_TI.$$

我们称之为 ϕ 的 典范分解，并称若映射 $F_TJ \to F_TL_*J$ 是等价，则 ϕ 是 惰性的；若 $F_T\phi''$ 是等价，则称其为 主动的。

定理 4.3.6。 若 T 是解析单子，则主动态射和惰性态射在 $\mathcal{K}(T)$上构成一个分解系统，且典范分解是一个主动–惰性分解。此外，对于任意解析单子态射（8），函子 $F_!\colon \mathcal{K}(S) \to \mathcal{K}(T)$ 保主动态射和惰性态射。

证明。 主动态射和惰性态射构成分解系统，是 [CH21，定理 12 的特例。1], 而解析单子态射保它们的性质，则可由与 [CH21，引理 11 的证明18]相同的论证得出。□

推论 4.3.7。 设 T是 函子范畴$(X, \mathcal{S})$上的一个解析单子。上的惰性–主动分解系统 $\mathcal{K}(T)^{\mathrm{op}}$ 限制在 *Lawvere* 理论 $\mathcal{L}(T)$上。此外，对于任意解析单子态射（8），函子 $F\colon \mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}(T)$ 都保持惰性态射和主动态射。

证明。 给定一个态射 $F_T(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \to F_T(\coprod_{j=1}^m \mathsf{y}_X(y_j))$，其典范分解为

$$F_T(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \to F_TL_*(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i)) \to F_T(\coprod_{j=1}^m \mathsf{y}_X(y_j))$$

其中 $L_*(\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i))$ 是相对于该复合定义的

$$\coprod_{i=1}^n \mathsf{y}_X(x_i) \to T(\coprod_{j=1}^m \mathsf{y}_X(y_j)) \to T(*)$$

伴随映射与 T 作用于唯一映射 $\coprod_{j=1}^{m} \mathrm{y}_X(y_j) \to *$ 的复合。因此，只需验证对于任意映射 $\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{y}_X(x_i) \to T(*)$，$L_*(\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{y}_X(x_i))$ 仍是可表对象的有限余积。这在 $n = 1$ 的情形下由 (11) 得出；一般情形也成立，因为 L_* 是左伴随，所以有 $L_*(\coprod_{i=1}^{n} \mathrm{y}_X(x_i)) \simeq \coprod_{i=1}^{n} L_* \mathrm{y}_X(x_i)$。主动和惰性态射的保持性随后由定理 4.3.6 得出。□

命题 4.3.8。考虑一个解析单子态射（*8*），并设 $F_!$ 是 F^* 的左伴随（由推论 *3.2.6* 可知其存在）。那么：

(i) $\mathcal{H}(S)$ 中的每个惰性态射都是 $F_!$-笛卡尔的。*(ii)* 给定 $F_S I \in \mathcal{H}(S)$ 以及一个态射 $\psi\colon J \to f_! I$ 函子范畴$(X, \mathcal{S})$中的态射，存在一个位于 $F_T \psi$ 之上的 $F_!$-笛卡尔态射，它属于 $\mathcal{H}(T)$，由 $F_S \phi$ 给出，其中 ϕ 由以下拉回方块确定

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^* J & \xrightarrow{f^*\psi} & f^* f_! I \end{array}$$

属于函子范畴$(\mathcal{Y}\mathcal{S})$。

(iii) $\mathcal{H}(S)$ 中的一个态射是惰性的，当且仅当它是位于 $\mathcal{H}(T)$中的一个惰性态射之上的笛卡尔态射。

证明。 $\mathcal{H}(S)$中的每个惰性态射都是一个自由态射与一个等价的复合。由于等价总是笛卡尔的，要证明 (i)，只需证明 $\mathcal{H}(S)$中的自由态射是笛卡尔的。给定态射 $\phi\colon I \to J$ in 函子范畴$(\mathcal{Y}\mathcal{S})$，我们必须证明，对于每个对象 $K \in$ 函子范畴$(\mathcal{Y}\mathcal{S})$，交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(S)}(F_S K, F_S I) & \xrightarrow{(F_S\phi)_*} & \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(S)}(F_S K, F_S J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_! F_S K, F_! F_S I) & \xrightarrow{(F_! F_S \phi)_*} & \mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_! F_S K, F_! F_S J) \end{array}$$

是笛卡尔的。利用自然等价 $F_! F_S \simeq F_T f_!$ 以及涉及的各种伴随，我们将其识别为交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(Y,\mathcal{S})}(K, SI) & \xrightarrow{(S\phi)_*} & \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(Y,\mathcal{S})}(K, SJ) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(Y,\mathcal{S})}(K, f^* T f_! I) & \xrightarrow{(f^* T f_! \phi)_*} & \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(Y,\mathcal{S})}(K, f^* T f_! J). \end{array}$$

当且仅当交换方块对所有 K 都是笛卡尔的

$$\begin{array}{ccc} SI & \xrightarrow{S\phi} & SJ \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^* T f_! I & \xrightarrow{f^* T f_! \phi} & f^* T f_! J \end{array}$$

是 函子范畴$(\mathcal{Y}\ \mathcal{S})$ 中的一个笛卡尔方形。现在，这个方形确实是笛卡尔方形，因为它是自然变换 $S \to S f^* f_! \to f^* T f_!$ 的自然性方形；该自然变换是笛卡尔的，因为其中涉及的所有函子都保持拉回，并且单位变换 $\mathrm{id} \to f^* f_!$ 和变换 $S f^* \to f^* T$ 都是笛卡尔的。这就证明了 (i)。

为证明 (ii)，先通过以下拉回方块定义 $\phi\colon K \to I$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\phi} & I \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*J & \xrightarrow{f^*\psi} & f^*f_!I. \end{array}$$

接下来考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} f_!K & \xrightarrow{f_!\phi} & f_!I \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_!f^*J & \xrightarrow{f_!f^*\psi} & f_!f^*f_!I \\ \downarrow & & \downarrow \\ J & \xrightarrow{\psi} & f_!I \end{array}$$

在 函子范畴$(X,\ \mathcal{S})$ 中。这里，底部方块是笛卡尔的，因为余单位 $f_!f^* \to \mathrm{id}$ 是笛卡尔的；顶部方块是笛卡尔的，因为 $f_!$ 保持拉回。于是复合方块也是笛卡尔的；又因为右侧的竖直复合是恒等态射，可知映射 $f_!K \to J$ 是等价。因此，复合方块给出了 $f_!\phi$ 与 ψ 之间的等价。根据 (i)，自由态射 $F_S\phi$ 在 $F_T f_!\phi \simeq F_T\psi$ 上是笛卡尔的，这就证明了 (ii)。

为了证明 (iii)，还需证明 $\mathcal{K}(S)$ 中每个位于 $\mathcal{K}(T)$ 的惰性态射之上的笛卡尔态射都是惰性的。由于惰性态射是自由态射与等价的复合，我们不妨假设 $\mathcal{K}(T)$ 中的态射是自由态射。于是，(ii) 中的构造给出了一个在 $\mathcal{K}(T)$ 中具有相同像、且显然是惰性的笛卡尔态射。由于笛卡尔态射存在时是唯一的，这就完成了证明。□

将其限制到 Lawvere 理论上，我们得到：

推论 4.3.9。 考虑一个解析单子态射 *(8)*，并令 $F\colon \mathcal{L}(S) \to \mathcal{L}(T)$ 为其诱导的 *Lawvere* 理论态射。则：

(i) $\mathcal{L}(S)$ 具有覆盖 $\mathcal{L}(T)$ 中惰性态射的 F-余笛卡尔态射，而这些恰好是 $\mathcal{L}(S)$ 中的惰性态射。*(ii)* $\mathcal{L}(S)$ 中的态射是主动的，当且仅当它覆盖 $\mathcal{L}(T)$ 中的主动态射。

证明。由命题 4.3.8， $\mathcal{K}(S)$ 中每个惰性态射都是覆盖 $\mathcal{K}(T)$ 的笛卡尔态射。将其限制到全子范畴 $\mathcal{L}(S)^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathcal{L}(T)^{\mathrm{op}}$，再取对偶后，我们得到 $\mathcal{L}(S)$ 中每个惰性态射都是覆盖 $\mathcal{L}(T)$ 的余笛卡尔态射。为了证明 $\mathcal{L}(S)$ 具有覆盖 $\mathcal{L}(T)$ 中惰性映射的余笛卡尔态射，只需验证：给定 $\Xi := \coprod_{i=1}^n \mathrm{y}_Y(y_i)$ 以及函子范畴 $\mathrm{Fun}(X,\mathcal{S})$ 中的态射 $\psi\colon \coprod_{j=1}^m \mathrm{y}_X(x_j) \to f_!\Xi \simeq \coprod_{i=1}^n \mathrm{y}_X f(y_i)$，命题 4.3.8(ii) 中覆盖 ψ 的笛卡尔态射属于全子范畴 $\mathcal{L}(S)^{\mathrm{op}}$。首先注意，映射 ψ 相当于指定一个态射 $h\colon \mathrm{m} \to \mathrm{n}$ 以及 X 中的等价 $x_j \simeq f(y_{h(j)})$。在笛卡尔方形中

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \coprod_{i=1}^n \mathrm{y}(y_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*\coprod_{j=1}^m \mathrm{y}_X(x_j) & \longrightarrow & f^*\coprod_{i=1}^n \mathrm{y}_X f(y_i), \end{array}$$

在 $\mathcal{K}(S)$ 中诱导出笛卡尔态射，因此对象 K 可以被识别为 $\coprod_{j=1}^m \mathrm{y}(y_{h(j)})$，这是因为余积互不相交且余极限在

函子范畴$(\mathcal{YS})$。要证明 (i)，还需证明每个在 $\mathscr{L}(S)$ 中、在 $\mathscr{L}(T)$ 中的惰性映射之上为余笛卡尔的态射都是惰性的；这是成立的，因为余笛卡尔态射若存在便是唯一的，而且命题 4.3.8(ii) 中的构造给出了一个惰性的余笛卡尔态射。

由于 $\mathscr{L}(S)$ 具有在 $\mathscr{L}(T)$ 中惰性映射之上的余笛卡尔态射，我们可以将 $\mathscr{L}(T)$ 上的惰性–主动分解系统提升为 $\mathscr{L}(S)$ 上的分解系统，使得一个态射分解为：先是在 $\mathscr{L}(T)$ 中惰性映射之上的余笛卡尔态射，随后是一个映射到 $\mathscr{L}(T)$ 中主动映射的态射。根据 (i)，第一类恰好就是 $\mathscr{L}(S)$ 中的惰性态射。然而，根据 [Lur09，命题 5.2.8，分解系统中的一类完全由另一类决定。因此，这意味着 $\mathscr{L}(S)$ 中的主动态射必恰好是那些位于 $\mathscr{L}(T)$ 中主动态射之上的态射。□

引理 4.3.10. 在识别 $\mathsf{Span}(\mathbb{F}) \simeq \mathscr{L}(\mathrm{Sym})$ 后，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 上的惰性–主动分解系统（如定义 2.1.4 中所述）与推论 4.3.7 中的分解系统相对应。

证明。我们将说明，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 和 $\mathscr{L}(\mathrm{Sym})$ 均可识别为与 [CH21 第 13] 节中的单子 Sym 相关联的典范图式 $\mathscr{W}(\mathrm{Sym})$。其中，$\mathscr{W}(\mathrm{Sym})^{\mathrm{op}}$ 被定义为 $\mathsf{Alg}(\mathrm{Sym}) \simeq \mathsf{Mon}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathcal{S})$ 的全子范畴，它由全子范畴 $\mathcal{U}(\mathrm{Sym})^{\mathrm{op}} \subseteq \mathcal{S}$ 上对象的自由代数组成；该全子范畴包含形如 $L_*(p)$ 的对象，其中态射为 $p\colon * \to \mathrm{Sym}(*)$。由 (11) 可知，这些对象恰好是点的有限余积，也就是有限集，因此 $\mathscr{W}(\mathrm{Sym})^{\mathrm{op}}$ 恰好是 $\mathscr{L}(\mathrm{Sym})^{\mathrm{op}}$。两者上的分解系统都是通过限制 $\mathcal{K}(\mathrm{Sym})$ 上的分解系统得到的，并且两者都有点上的自由代数作为唯一的初等对象。

剩下要证明的是，典范图式 $\mathscr{W}(\mathrm{Sym})$ 实际上属于 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$。为此，我们应用 [CH21，推论 14.18]。如前所见，图式 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 可扩张，见 [BHS22，例 3.3.25]，；并且显然，$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中的每个对象都存在一个（唯一的）指向初等对象 1 的活性态射。因此，唯一尚待验证的条件是图式 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是饱和的，也就是说，对于每个对象 $S \in \mathsf{Span}(\mathbb{F})$，函子 $\mathrm{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(S, -)\colon \mathsf{Span}(\mathbb{F}) \to \mathcal{S}$ 是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-幺半群。这等价于该函子将集合的不交并映为积，换言之，不交并是 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中的笛卡尔积；这一点我们已在引理 2.2.5 中证明。□

命题 4.3.11。 设 T 是函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 上的解析单子。那么，与唯一的解析单子态射对应的 *Lawvere* 理论态射 $\mathscr{L}(T) \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$，

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Alg}(\mathrm{Sym}) & \xrightarrow{Q^*} & \mathsf{Alg}(T) \\ \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{Sym}}} & & \downarrow{\scriptstyle U_T} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{q^*} & \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S}) \end{array}$$

到 Sym，是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞-代数。*Moreover*，函子 $p\colon X \to \mathscr{L}(T)$ 使得 $\mathfrak{Th}(T) \simeq (\mathscr{L}(T)\ p)$ 成为一个带标记的 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞- 代数。

证明。我们验证 (1′)–(3′) 命题 2.2.6 中的条件 (1′) 由推论 4.3.9 以及引理 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 中惰性态射的刻画（见引理 4.3.10）可得。拉回方块

$$\begin{array}{ccc} F_T x_i & \longrightarrow & F_T(x_1, \dots, x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_T q^*\{i\} & \longrightarrow & F_T q^* \mathbf{n} \end{array}$$

在 $\mathcal{K}(T)$ 根据命题 4.3.8 中对笛卡尔态射的描述可知，因子 $F_T x_i$ 在余积 $F_T(x_1, \dots, x_n) \simeq \coprod_{i=1}^n F_T x_i$ 中的包含在 $\{i\} \hookrightarrow \mathbf{n}$ 上方是笛卡尔的。在 $\mathscr{L}(T)$ 上方，这意味着余笛卡尔态射

$F_T(x_1,\dots,x_n) \to F_T(x_i)$ 在 ρ_i 上展示了 $F_T(x_1,\dots,x_n)$ 作为积 $\prod_{i=1}^n F_T x_i$，这正是条件 (2′)。此外，给定 $i = 1,\dots,n$ 对应的对象 $F_T x_i$，同样的论证表明，$\mathscr{L}(T)_{\mathfrak{n}}$ 中的对象 $F_T(x_1,\dots,x_n)$ 沿映射 ρ_i 进行余笛卡尔传输后，被映射到 $\prod_{i=1}^n \mathscr{L}(T)_1$ 中的 $(F_T(x_1)\dots, F_T(x_n))$。这给出了条件 (3′)，从而完成了 $\mathscr{L}(T)$ 是一个 Span(𝔽)-∞-operad 的证明。

我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & \mathscr{L}(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{1\} & \longrightarrow & \mathsf{Span}(\mathbb{F}), \end{array}$$

这表明 p 可分解为经过态射 $X \to \mathscr{L}(T)_1^{\simeq}$。接下来需要证明它是本质满的。$\mathscr{L}(T)$中的每个对象都是$p$的像中的对象之积，但由于到 Span(𝔽) 的函子保持积，如果这些积包含多于一个因子，它们就不可能位于1 之上。因此，$\mathscr{L}(T)$中映射到1的唯一对象，就是 p的像中的对象，正如所需。□

命题 4.3.11 表明，任意解析单子的 Lawvere 理论都是一个带基点的 Span(𝔽)-∞-代数。我们已经在推论 4.2.5 中看到，POpd(Span(𝔽)) 是 $\mathrm{LwvTh}^{\mathrm{an}}/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural$ 的一个全子范畴，因此这意味着该子范畴实际上就是整个 ∞-范畴 $\mathrm{LwvTh}^{\mathrm{an}}/\mathsf{Span}(\mathbb{F})^\natural$。结合定理 3.2.8 和观察 4.1.9，我们得到：

推论 4.3.12. 我们有互为逆的等价

$$\mathfrak{Mod} : \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \rightleftarrows \mathsf{AnMnd} : \mathfrak{Th}$$

由定理 3.2.8 所诱导。

5. ∞-operads and complete dendroidal Segal spaces

迄今为止的工作给出了一个等价

$$\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \simeq \mathsf{AnMnd}.$$

另一方面，在 [GHK22] 中，我们将 AnMnd 识别为树状 Segal 空间的 ∞-范畴 $\mathrm{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$。本节的目标是证明定理 D，即证明由此得到的 POpd(Span(𝔽)) 与 $\mathrm{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 之间的复合等价限制为 Opd(Span(𝔽)) 之间的等价。我们将 Opd(Span(𝔽)) 识别为 POpd(Span(𝔽)) 的全子范畴，其对象由这样的带钉 Span(𝔽)-∞-幺 operad $(\mathcal{O}, \alpha: X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_1^{\simeq})$ 构成，其中映射 α 是一个等价；另一边则是完备树状 Segal 空间的全子范畴，也就是说，其底层 Segal 空间按照 Rezk [Rez01] 的意义是完备的树状 Segal 空间。

我们可以将（带钉的）∞-范畴视为仅具有一元运算的（带钉）∞-幺 operad；类似地，我们可以将 Δ 上的 Segal 空间视为去花冠 Segal 空间的一个全子范畴（其在所有非一元花冠上的取值均为 $\emptyset$）。本节大部分内容旨在说明，我们的等价与 [GHK22] 的等价限制到这些全子范畴后仍是等价，从而得到以下交换图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{AnMnd} & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{PCat}_\infty & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{LinMnd} & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \end{array} \tag{12}$$

这里：

- PCat_∞ 是由固定 ∞-范畴构成的 ∞-范畴，也就是说，是配备了 ∞-群胚 $X \twoheadrightarrow \mathscr{C}^{\simeq}$的本质满射的 ∞-范畴 $\mathscr{C}$。
- 全忠实嵌入 $\mathsf{PCat}_\infty \hookrightarrow \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 是以下函子的左伴随：

$$(\mathcal{O}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_1^{\simeq}) \mapsto (\mathcal{O}_1, p).$$

- LinMnd 是AnMnd 的全子范畴，包含线性单子 （它们保持所有余极限）。

- 全忠实嵌入 $\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 是沿包含 $\Delta^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \Omega^{\mathrm{op}}$ 的左 Kan 延拓，因此是底层 Segal 空间函子的左伴随。

我们首先构造第 5.1 节中的左侧方块，这相当于理解等价 $\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \simeq \mathsf{AnMnd}$ 限制到仅含一元运算的带标记 ∞-幺 operad 的全子范畴；我们将其识别为带标记的 ∞-范畴。随后，我们在第 5.2 节构造右侧方块；这需要证明文献 [GHK22] 中解析单子与树状 Segal 空间之间的等价，限制后给出线性单子与 Δ^{op} 上 Segal 空间之间的等价。最后，在第 5.3 节，我们证明带标记 ∞-范畴与 Segal 空间之间的复合等价，限制后给出 ∞-范畴与完备 Segal 空间之间的等价，并将其推广到幺半范畴框架。

5.1. **线性单子与 ∞-范畴。** 任何 ∞-范畴都可以视为仅含一元运算的 ∞-幺 operad。本小节将首先用 Span(𝔽)-∞-幺 operad 具体描述这一嵌入，然后确定 AnMnd 的全子范畴；当我们将推论 ∞4.3.12 中的等价限制为（带钉住的）4.3.12-范畴时，该子范畴与之对应。

定义 5.1.1。 对于 $\mathscr{C} \in \mathsf{Cat}_\infty$，我们将 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}} \to \mathbb{F}^{\mathrm{op}}$ 定义为对应于该函子的余笛卡尔纤维化

$$j_*\mathscr{C}\colon \mathbb{F}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}_\infty$$

通过沿包含 j 对 $\mathscr{C}$ 作右 Kan 延拓而得到：$\{1\} \hookrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{op}}$。函子$j_*\mathscr{C}$于是由下式给出

$$j_*\mathscr{C}(\mathbf{n}) \simeq \mathsf{Fun}(\mathbf{n}, \mathscr{C}) \simeq \mathscr{C}^{\times n}.$$

引理 5.1.2。 复合 $\mathbb{F}_{\mathrm{op}\,\mathscr{C}} \to \mathbb{F}_{\mathrm{op}} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 是一个 Span(𝔽)-∞-幺 *operad*，而 $\mathbb{F}_{\mathrm{op}\,(-)}$ 给出一个函子 $\mathsf{Cat}_\infty \to \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$。

证明。 我们可以将 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 视为复合函子

$$\mathsf{Cat}_\infty \xrightarrow{j_*} \mathsf{Fun}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Cat}_\infty) \simeq \mathsf{Cat}^{\mathrm{coc}}_{\infty/\mathbb{F}^{\mathrm{op}}} \to \mathsf{Cat}_{\infty/\mathsf{Span}(\mathbb{F})},$$

其中最后一个函子由与惰性（即反向）态射的包含 $i\colon \mathbb{F}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 复合而成。这里 i 显然存在 Span(𝔽) 中惰性态射的余笛卡尔提升，因此复合 $\mathbb{F}_{\mathrm{op}\,\mathscr{C}} \to \mathsf{Span}(\mathbb{F})$ 也如此（由 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}$ 中态射的余笛卡尔提升给出）；而由 Cat_∞ 中任意函子 $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 诱导的函子 $\mathbb{F}_{\mathrm{op}\,\mathscr{C}} \to \mathbb{F}_{\mathrm{op}\,\mathscr{D}}$ 保持这些提升，因为它保持 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}$ 上的余笛卡尔态射。

接下来需要验证 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}$ 是一个 ∞-operad。根据定义，我们有 Segal 条件 $(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}})_{\mathbf{n}} \simeq \prod_{i=1}^{n} \mathscr{C}$。对于 $\mathbb{F}$ 中的任意对象 $\mathbf{n}$、$\mathbf{m}$，我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{n},\mathbf{m}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{m} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{n},1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{n},\mathbf{m}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{m} \mathsf{Map}_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})}(\mathbf{n},1), \end{array}$$

因此，只需证明对于 $\phi\colon \mathbf{n} \to \mathscr{C}, \psi\colon \mathbf{m} \to \mathscr{C}$，我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}}(\phi,\psi) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{m} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}}(\phi,\psi(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{n},\mathbf{m}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{m} \mathsf{Map}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{n},\mathbf{1}). \end{array}$$

为此，注意对于 $f\colon \mathbf{m} \to \mathbf{n}$，在 f 上的纤维映射可以识别为

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(\mathbf{m},\mathscr{C})}(\phi \circ f, \psi) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{m} \mathsf{Map}_{\mathscr{C}}(\phi(f(i)), \psi(i)). \qquad \square$$

引理 5.1.3. 如果 $\mathcal{O}$ 是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-运算子，则存在一个自然等价

$$\mathcal{O} \times_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})} \mathbb{F}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}_1}.$$

证明。 投影 $\mathcal{O} \times_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})} \mathbb{F}\mathrm{op} \to \mathbb{F}\mathrm{op}$ 是一个余笛卡尔纤维化，对应于一个函子 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Cat}_\infty$。因此，伴随的单位 $j^* \dashv j_*$ 对应于余笛卡尔纤维化之间的一个态射 $\mathcal{O} \times_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})} \mathbb{F}\mathrm{op} \to \mathbb{F}\mathrm{op}_{\mathcal{O}_1}$，它们位于 $\mathbb{F}\mathrm{op}$ 之上。要证明这是一个等价，只需证明它在每个$\mathbf{n} \in \mathbb{F}^{\mathrm{op}}$上的纤维上都是等价。为此，我们注意到，由于该函子保留余笛卡尔态射，因此有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbf{n}} & \longrightarrow & (\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}_1})_{\mathbf{n}} \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle\sim} \\ \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}_1 & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}_1})_1, \end{array}$$

其中，竖直映射是等价，因为两边都满足 Segal 条件；底部的水平映射是等价，因为根据构造，$\mathbf{1}$上的两个纤维相同。$\square$

命题 5.1.4. 函子 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)}$ 是全忠实的，并且是下列函子的左伴随

$$(-)_1\colon \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \to \mathsf{Cat}_\infty$$

该函子提取 ∞-范畴中一元运算所构成的底层范畴。$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-$\infty$-$Opd$。

证明。 利用引理 5.1.3，对于 $\mathscr{C} \in \mathsf{Cat}_\infty, \mathcal{O} \in \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$，有自然等价

$$\begin{aligned} \mathsf{Map}_{\mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}, \mathcal{O}) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}^{\mathrm{coc}}_{\infty/\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}, \mathcal{O} \times_{\mathsf{Span}(\mathbb{F})} \mathbb{F}^{\mathrm{op}}) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}^{\mathrm{coc}}_{\infty/\mathbb{F}^{\mathrm{op}}}}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}, \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathcal{O}_1}) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(\mathbb{F}^{\mathrm{op}},\mathsf{Cat}_\infty)}(j_*\mathscr{C}, j_*\mathcal{O}_1) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}(j^*j_*\mathscr{C}, \mathcal{O}_1) \\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}(\mathscr{C}, \mathcal{O}_1). \end{aligned}$$

这表明 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)}$ 是 $(-)_1$ 的左伴随。此外，单位映射 $\mathscr{C} \to (\mathbb{F}\mathrm{op}_{\mathscr{C}})_1$ 是等价，这意味着 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)}$ 是全忠实的。$\square$

定义 5.1.5. 我们将 PCat_∞ 定义为拉回 $\mathsf{Cat}_\infty \times_{\mathcal{S}}$ 函子范畴$([1], \mathcal{S})_{\mathrm{es}}$ （由函子 $(-)^{\simeq}$ 和 ev_1 给出），其中 函子范畴$([1], \mathcal{S})_{\mathrm{es}}$ 是 函子范畴$([1], \mathcal{S})$ 中由本质满射所张成的全子范畴。

记号 5.1.6. 若 $\mathscr{C}$ 是一个 ∞-范畴，我们将带钉的 ∞-范畴记为

$$(\mathscr{C}, \mathscr{C}^{\simeq} \xrightarrow{=} \mathscr{C}^{\simeq})$$

作者：$\mathscr{C}^{\natural}$。

观察 5.1.7。 若 $\mathscr{C}$ 是一个 ∞-范畴，且 $(\mathscr{D},\ q\colon X \twoheadrightarrow \mathscr{D}^{\simeq})$ 是一个带钉的 ∞-范畴，则有

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{PCat}_\infty}(\mathscr{C}^{\natural}, (\mathscr{D}, q)) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \times_{\mathsf{Map}_{\mathcal{S}}(\mathscr{C}^{\simeq}, \mathscr{D}^{\simeq})} \mathsf{Map}_{\mathcal{S}}(\mathscr{C}^{\simeq}, X).$$

引理 5.1.8。 伴随 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}{}_{(-)} \dashv (-)_1$ 延拓为一个伴随

$$\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)} : \mathsf{PCat}_\infty \rightleftarrows \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) : (-)_1$$

其中左伴随 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}{}_{(-)}$ 仍然是全忠实的。

证明。 这直接源于以下观察：两个伴随函子以及（余）单位变换都与函子 $(-)^{\simeq}\colon \mathsf{Cat}_\infty \to \mathcal{S}$ 和 $(-)_1^{\simeq}\colon \mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \to \mathcal{S}$ 相容。□

命题 5.1.9. 范畴 ∞-范畴 $\mathbb{F}_{\mathrm{op}}\mathscr{C}$ 具有有限积。若 $\mathscr{D}$是具有有限积的 ∞-范畴，则函子 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$ 保积当且仅当它沿包含 $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}$ 作右 *Kan* 延拓。因此，沿此包含作限制给出一个等价

$$\mathsf{Mon}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}}(\mathscr{D}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}).$$

证明. 由于 $\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}$ 是一个 $\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞-运算子，我们由命题 2.2.6 知道它具有有限积；由命题 2.3.3 可知，函子 $F\colon \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$ 保留这些积当且仅当它是一个 $\mathbb{F}\mathrm{op}\,\mathscr{C}$-幺半群；也就是说，对每个对象 $X = (x_1, \dots, x_n)$，典范映射

$$F(X) \to \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \tag{13}$$

是一个等价。

∞-范畴

$$\mathscr{C}_{X/} := \mathscr{C} \times_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}} (\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}})_{X/}$$

包含余笛卡尔映射的离散集合 S_X $X \to x_i$ 作为一个子范畴。我们断言包含 $S_X \to \mathscr{C}_{X/}$ 是共初的。为此，首先注意，投影的目标

$$\mathscr{C}_{X/} \to \{1\} \times_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}} \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathbf{n}/}$$

是态射的离散集合 $1 \to \mathbf{n}$ 在 $\mathbb{F}$中，即集合 $\mathbf{n}$。元素$i \in \mathbf{n}$ 上方的纤维可通过余笛卡尔态射 $X \to x_i$识别为 $\mathscr{C}_{x_i/}$，其中 x_i 显然是始对象。由此，[Lur09定理 4.1.31] 中的判据立即推出 S_X是共初的。

由此可知，只要目标范畴具有有限积，沿包含 $\mathscr{C} \hookrightarrow \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}$ 的逐点右 Kan 扩张就存在；并且函子 $F\colon \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{D}$ 是其在 $\mathscr{C}$上的限制的右 Kan 扩张，当且仅当映射 (13) 是等价。□

因此，复合函子 $\mathsf{PCat}_\infty \to \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \xrightarrow{\sim} \mathsf{AnMnd}$ 将这一对 $(\mathscr{C}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathscr{C}^{\simeq})$ 映射为单子右伴随

$$\mathsf{Mon}_{\mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{\mathscr{C}}}(\mathcal{S}) \simeq \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathcal{S}) \xrightarrow{p^*} \mathsf{Fun}(X, \mathcal{S}).$$

我们的下一个目标是精确地将PCat_∞ 的像刻画为线性的 单子在AnMnd中的全子范畴：

定义 5.1.10. 线性单子 是指函子范畴$(X, \mathcal{S})$上的解析单子，其底层自函子保持小余极限。

观察 5.1.11. 由于 ∞-范畴上的预层是其自由余完备化，我们可以将保余极限函子 函子范畴$(X, \mathcal{S}) \to$ 函子范畴$(Y\mathcal{S})$ for $X, Y \in \mathcal{S}$ 识别为

$$\mathsf{Fun}(X, \mathsf{Fun}(Y, \mathcal{S})) \simeq \mathsf{Fun}(X \times Y, \mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}_{/X\times Y},$$

因此，保余极限函子对应于一个*Span*

$$\begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & \swarrow^{f} & & \searrow^{g} & \\ X & & & & Y, \end{array}$$

此 Span 对应于函子 $g_! f^*$。用多项式图表来表示，这意味着保余极限函子对应于一个图表

$$X \xleftarrow{s} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{t} Y,$$

其中 p 是一个等价。

作为命题 3.1.3的一个特例，我们有：

推论 5.1.12。 单子 T 在 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 上是线性的，当且仅当对于相应的单子伴随 $F_T \dashv U_T$，∞-范畴 $\mathsf{Alg}(T)$ 具有小余极限，且右伴随 $U_T\colon \mathsf{Alg}(T) \to$ 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 保留这些余极限。□

命题 5.1.13。 设 T是 函子范畴$(X, \mathcal{S})$上的一个线性单子，并设 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathsf{Alg}(T)$ 中由对象 $F_T \mathsf{y}_X(x)$ （$x \in X$）张成的全子范畴。那么，受限 *Yoneda* 嵌入 $\mathsf{Alg}(T) \to$ 函子范畴$(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ 是一个等价。

证明。 我们应用 [GHK22，引理 3.3。11], 为此，只需验证 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的对象是完全紧且联合保守的。我们有一个自然等价

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{Alg}(T)}(F_T \mathsf{y}_X(x), A) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(\mathsf{y}_X(x), U_T A) \simeq (U_T A)(x),$$

由此可见， $F_T \mathsf{y}_X(x)$ 是完全紧的，因为$\mathsf{y}_X(x)$ 在 函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 中是完全紧的，并且 U_T 由推论 5.1.12 保持小余极限。此外， $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的对象是联合保守的，因为 U_T 是保守的，而且可通过在 X的各点上求值来检测函子范畴$(X, \mathcal{S})$ 中的等价。□

推论 5.1.14。 解析单子 T 是线性的，当且仅当它属于PCat_∞的像。 □

推论 5.1.15。 我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{AnMnd} \\ {\scriptstyle \mathbb{F}^{\mathrm{op}}_{(-)}}\uparrow & & \uparrow \\ \mathsf{PCat}_\infty & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{LinMnd}, \end{array}$$

其中，底部的水平函子将一个带钉的 ∞-范畴$(\mathcal{C}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\simeq})$ 映至单子右伴随函子范畴$(\mathcal{C}, \mathcal{S}) \xrightarrow{p^*}$ 函子范畴$(X, \mathcal{S})$。 □

5.2. **线性单子与 Segal 空间。** 本节的目标是证明，从 [GHK22] 得到的解析单子与树状 Segal 空间之间的等价，限制到线性情形后仍给出线性单子与 Segal 空间之间的等价。

为此，我们将简要回顾比较中的每个步骤，并讨论它如何限制到线性情形；有关完整细节，请参阅 [GHK22]。

首先，通过对 ∞-范畴AnMnd给出另一种描述，我们构造了（见 [GHK22，§5.1]）一个遗忘函子 $U_{\mathrm{an}}\colon \mathrm{AnMnd} \to \mathrm{AnEnd}$，其中AnEnd

是一个由形如 $\mathcal{S}_{/X}$ 的 ∞-范畴上的 ∞-范畴解析自函子组成的范畴；AnEnd 的对象是一个空间 X，以及一个解析自函子 $T\colon \mathcal{S}_{/X} \to \mathcal{S}_{/X}$；态射 $(X,T) \to (YS)$ 是一个空间态射 $f\colon X \to Y$，以及一个笛卡尔变换 $Tf^* \to f^*S$。

定义 5.2.1. 我们将 LinEnd 定义为 AnEnd 的全子范畴，其中包含线性的（即保余极限的）自函子。根据构造，我们于是得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LinMnd} & \hookrightarrow & \mathsf{AnMnd} \\ \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{lin}}} & & \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{an}}} \\ \mathsf{LinEnd} & \hookrightarrow & \mathsf{AnEnd}. \end{array}$$

接下来，我们将树及惰性态射（或子树包含）组成的范畴 Ω^{int} 定义为 AnEnd的全子范畴。这里我们将树 T 视为对应于多项式图表的自函子

$$E \xleftarrow{s} V_* \xrightarrow{p} V \xrightarrow{t} E,$$

其中，E是 T的边集，V是顶点集，而 V_*是带有标记入边的顶点集。映射 s 是投影 $(v,e) \mapsto e$，而 p是投影 $(v,e) \mapsto v$；t 则将顶点 v 映射到其唯一的出边。这里，p 在v 处的纤维是 v的入边集，因此，树 T 是线性的，也就是说，它仅有单价顶点，当且仅当 p 是一个等价；我们在观察 5.1.11 中看到，这等价于相应函子是线性的。容易看出，Ω^{int} 中由线性树组成的全子范畴是 Δ^{int}，因此我们得到一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathrm{int}} & \hookrightarrow & \mathsf{LinEnd} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{\mathrm{int}} & \hookrightarrow & \mathsf{AnEnd}. \end{array}$$

令 Ω^{el} 表示 Ω^{int} 中由边 η和花冠 C_n（其中C_n有 n 个叶，适用于 $n = 0,\ 1,\ \ldots\ldots$）构成的全子范畴。然后，我们将 Δ^{el} 定义为 Ω^{el} 与Δ^{int}的交，因此 Δ^{el} 的对象为 $\eta = [0]$ 和 $C_1 = [1]$。

在 [GHK22 的 §3.3] 中，我们证明了受限 Yoneda 嵌入 $\mathsf{AnEnd} \to \mathcal{P}(\Omega^{\mathrm{el}})$ 是一个等价，而 $\mathsf{AnEnd} \to \mathcal{P}(\Omega^{\mathrm{int}})$ 是全忠实的，其像是满足树状 Segal 条件的函子；等价地说，这些函子是从 Ω^{el}右 Kan 延拓得到的。为推导出线性自函子的相应等价陈述，我们先证明以下刻画：

命题 5.2.2。 对于对象 $F \in \mathsf{AnEnd}$，以下条件等价。

(i) F是线性的。*(ii)* 对于 $n \neq 1$，$\mathit{Map}_{\mathsf{AnEnd}}(C_n, F) \simeq \emptyset$。
(iii) 对每个非线性树 $T \in \Omega^{\mathrm{int}}$，$\mathit{Map}_{\mathsf{AnEnd}}(T, F) \simeq \emptyset$。*(iv)* $\mathit{Map}_{\mathsf{AnEnd}}(-\ F)|_{\Omega^{\mathrm{int}}} \in \mathcal{P}(\Omega^{\mathrm{int}})$ 是从 $\Delta^{\mathrm{int},\mathrm{op}}$左 *Kan* 延拓得到的。
(v) $\mathit{Map}_{\mathsf{AnEnd}}(-\ F)|_{\Omega^{\mathrm{el}}} \in \mathcal{P}(\Omega^{\mathrm{el}})$ 是从 $\Delta^{\mathrm{el},\mathrm{op}}$左 *Kan* 延拓得到的。

证明。 假设 F 对应于多项式图表

$$X \xleftarrow{s} E \xrightarrow{p} B \xrightarrow{t} X,$$

其中 p 具有有限离散纤维。于是，映射 p 由映射 $\pi\colon B \to \mathbb{F}^{\simeq}$分类。根据 [GHK22，引理 3.3，6] 空间 $\mathsf{Map}_{\mathsf{AnEnd}}(C_n, F)$ 等价于 π 在一个 n-元素集合处的纤维。当且仅当 p 没有 n-元素纤维时，这个纤维为空

集合，因此条件 (ii) 等价于 p 的所有纤维大小均为 1，也就是说，p 是一个等价，这根据观察 5.1.11 对应于 F 是线性的。

条件 (ii) 是 (iii) 的特例，但它也蕴含 (iii)，因为根据 AnEnd 中的 GHK22 引理 3.3，每棵树都是由其边和花冠构成的余极限 [, Lemma 3.3.5], 因此，每当 T 包含一个非单元顶点时，映射 $\mathsf{AnEnd}(T,\ F)$ 必须为空。

要证明 (ii) 和 (iii) 分别等价于 (iv) 和 (v)，只需注意，在 Ω^{int} 中不存在从非线性树到线性树的映射。□

推论 5.2.3。我们有交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LinEnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}(\Delta^{\mathrm{el}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{AnEnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}(\Omega^{\mathrm{el}}), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{LinEnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}_{\mathsf{Seg}}(\Delta^{\mathrm{int}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{AnEnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}_{\mathsf{Seg}}(\Omega^{\mathrm{int}}), \end{array}$$

其中，两个方块右侧的竖直箭头均为左 *Kan* 延拓。

证明。令 λ，δ^{el}，ω^{el}，L^{el} 分别表示包含映射 $\mathsf{LinEnd} \hookrightarrow \mathsf{AnEnd}$、$\Delta^{\mathrm{el}} \hookrightarrow \mathsf{LinEnd}$、$\Omega^{\mathrm{el}} \hookrightarrow \mathsf{AnEnd}$、$\Delta^{\mathrm{el}} \hookrightarrow \Omega^{\mathrm{el}}$。由交换方块

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathrm{el}} & \xhookrightarrow{\delta^{\mathrm{el}}} & \mathsf{LinEnd} \\ \downarrow{\scriptstyle L^{\mathrm{el}}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ \Omega^{\mathrm{el}} & \xhookrightarrow{\omega^{\mathrm{el}}} & \mathsf{AnEnd} \end{array}$$

我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{LinEnd} & \xrightarrow{\mathsf{y}_{\mathsf{LinEnd}}} & \mathsf{P}(\mathsf{LinEnd}) & \xrightarrow{\delta^{\mathrm{el},*}} & \mathsf{P}(\Delta^{\mathrm{el}}) \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_!} & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle L^{\mathrm{el}}_!} \\ \mathsf{AnEnd} & \xrightarrow{\mathsf{y}_{\mathsf{AnEnd}}} & \mathsf{P}(\mathsf{AnEnd}) & \xrightarrow{\omega^{\mathrm{el},*}} & \mathsf{P}(\Omega^{\mathrm{el}}), \end{array}$$

其中，左侧方块来自 Yoneda 嵌入，右侧方块是上方方块中限制函子的方块的伴随变换。要得到第一个交换方块，只需证明复合的松弛方块实际上是交换的，也就是说，对于线性自函子 F，映射 $L^{\mathrm{el}}{}_! \delta^{\mathrm{el},\ *}\mathsf{y}_{\mathsf{LinEnd}}F \to \omega^{\mathrm{el},\ *}\mathsf{y}_{\mathsf{AnEnd}}\lambda F$ 是一个等价。我们可以在每个对象 $T \in \Omega^{\mathrm{el}}$处求值来验证这一点，此时得到典范映射

$$\mathrm{colim}_{X \in (\Delta^{\mathrm{el}})^{\mathrm{op}}_{/T}} \mathsf{Map}(\delta^{\mathrm{el}}(X), F) \to \mathsf{Map}(\omega^{\mathrm{el}}(T), \lambda F);$$

如果 T 属于 Δ^{el}，那么这是一个等价，因为 $(\Delta^{\mathrm{el}})^{\mathrm{op}}{}_{/T}$ 有一个终对象；如果 T不属于 Δ^{el}，那么这也是一个等价，因为 $(\Delta^{\mathrm{el}})^{\mathrm{op}}{}_{/T}$ 为空，而右侧是 $\emptyset$，这是因为 F 是线性的。因此，我们有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LinEnd} & \longrightarrow & \mathsf{P}(\Delta^{\mathrm{el}}) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L^{\mathrm{el}}_!} \\ \mathsf{AnEnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}(\Omega^{\mathrm{el}}), \end{array}$$

而要得到第一个方块，只需证明顶端的水平态射是一个等价。为此，我们首先注意到，这个函子自动是全忠实的（因为本质满函子与全忠实函子在 Cat_∞ 上构成一个分解系统）。接下来只需注意到，LinEnd 在 $\mathsf{P}(\Omega^{\mathrm{el}})$ 中的像恰好由以下对象构成

由命题 Δ^{el} 5.2.2通过左 Kan 延拓得到的函子。第二个方块的论证基本相同，因此省略。□

在 [GHK22，§5.2], 中，我们证明了 U_{an} 有一个左伴随 $F_{\mathrm{an}}\colon \mathsf{AnEnd} \to \mathsf{AnMnd}$，它将解析自函子映到其上的自由单子。我们可以将 Ω 定义为 AnMnd 的全子范畴，其中包含 Ω^{int}中各对象上的自由单子；于是，$\Delta \subseteq \Omega$ 是 AnMnd 的全子范畴，其中包含线性树上的自由单子。

引理 5.2.4。 F_{an} 限制为一个函子 $F_{\mathrm{lin}}\colon \mathsf{LinEnd} \to \mathsf{LinMnd}$，它是 U_{lin}的左伴随。

证明。 若 P是一个线性自函子，那么我们必须证明其上的自由解析单子 $F_{\mathrm{an}}P$是一个线性单子。这相当于检查 $F_{\mathrm{an}}P$的底层自函子是线性的。这由 [GHK22定理 5.2 中对该自函子的显式描述可知，4], 因为如果 P 是一个线性自函子，那么从任意非线性树到 P 的映射空间都是空的。□

命题 5.2.5。 解析单子 $M \in \mathsf{AnMnd}$ 满足以下条件等价。

(i) M是线性的。*(ii)* 映射$\mathsf{AnMnd}(C_n, M) \simeq \emptyset$对 $n \neq 1$成立。
(iii) 映射$\mathsf{AnMnd}(T, M) \simeq \emptyset$对每个非线性的 $T \in \Omega$ 都成立。
(iv) 映射$\mathsf{AnMnd}(-\ M)|_{\Omega^{\mathrm{op}}} \in \mathsf{P}(\Omega)$是从 Δ^{op} 左 *Kan* 延拓而来。

证明。 根据定义，M 是线性的，当且仅当 $U_{\mathrm{an}}M$ 是线性的；由于 Ω 的元素是自由的，前三个条件等价，直接由命题 5.2.2 得出。最后两个条件等价，因为当且仅当预层在所有非线性树上的取值均为 $\emptyset$时，定义在 Ω 上的预层才是从其在 Δ^{op} 上的限制左 Kan 延拓而来；这是因为在 Ω中，不存在从非线性树到线性树的映射。□

在 [GHK22，§5.3] 中，我们证明了作为主要定理，受限 Yoneda 嵌入 $\mathsf{AnMnd} \to \mathsf{P}(\Omega)$ 构成一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{AnMnd} & \hookrightarrow & \mathsf{P}(\Omega) \\ \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{an}}} & & \downarrow \\ \mathsf{AnEnd} & \hookrightarrow & \mathsf{P}(\Omega^{\mathrm{int}}), \end{array}$$

因此将 AnMnd 与全子范畴 $\mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{P}(\Omega)$等同起来。结合命题 5.2.5 可得推论 5.2.3的以下类似结果（证明基本相同）：

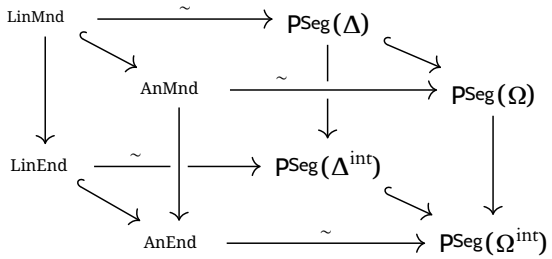
推论 5.2.6。 存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{LinMnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}_{\mathsf{Seg}}(\Delta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathsf{AnMnd} & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{P}_{\mathsf{Seg}}(\Omega), \end{array}$$

其中右侧的垂直箭头是左 *Kan* 延拓。□

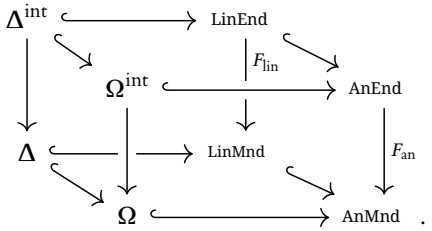
本节的最终目标是将这个方形与推论 5.2.3中的方形合并为一个交换立方体：

命题 5.2.7。 存在一个交换图

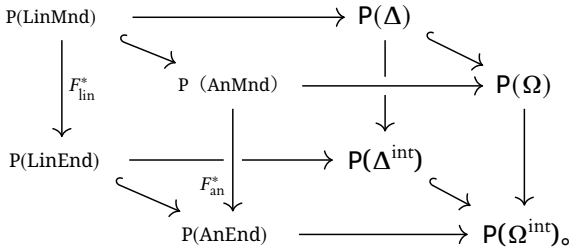


其中所有方块都是笛卡尔的。

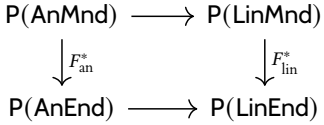
证明。 我们有一个交换立方体



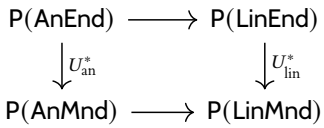
取预层和伴随 mate 后，我们得到（由于伴随变换在 Cat_∞ 中是函子性的，正如 [HHLN21] 中所证明的）下图，其中除前后两个方块外，其余方块先验地都是松弛的：



函子P^*保留伴随，因此我们可以将 F^*_{an} 识别为 $U^*\mathrm{an}$ 的左伴随。此外，P^* 保留伴随方块，因此该方块在竖直方向上的伴随变换



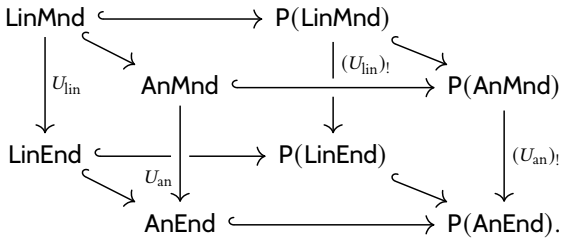
是交换方块



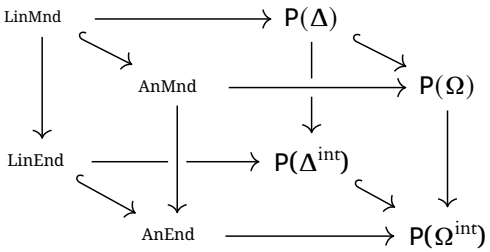
将 P^* 应用于该方块得到

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LinMnd} & \hookrightarrow & \mathrm{AnMnd} \\ \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{lin}}} & & \downarrow{\scriptstyle U_{\mathrm{an}}} \\ \mathrm{LinEnd} & \hookrightarrow & \mathrm{AnEnd}\ . \end{array}$$

因此，我们上方立方体中的左侧方块，是通过对这个最后的方块沿垂直和水平方向分别取伴随变换得到的，所以它恰好是相应的左伴随函子的交换方块（因此实际上并非松弛的）。由此，我们可以将这个立方体与下面这个由 Yoneda 嵌入的自然性所产生的交换立方体复合：



这就得到了如下形式的图表



其中顶部、底部和右侧的方块可能是松弛的。要完成证明，还需证明这些方块实际上是交换的。对于顶部和底部，这分别由推论 5.2.6 和推论5.2.3得出；至于右侧方块，则显然成立（因为两个左 Kan 延拓都相当于在非线性树上将函子扩张为 $\emptyset$）。□

这就完成了图表（12）的构造。

注记 5.2.8。综合本节目前为止的工作，我们特别得到一个等价 $\mathsf{PCat}_\infty \simeq \mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$，它将带钉的 ∞-范畴与 Rezk 意义下（不一定完备的）Segal 空间联系起来 [Rez01]。Ayala 和 Francis 之前已证明了这种等价 [AF18] (作为 $n = 1$ 一个更一般等价的特例，该等价涉及 带标记的 (∞, n)-范畴 与 Rezk 的 Segal Θ_n-空间 [Rez10])。

5.3. **完备性**。本节的目标是理解这些等价的复合

$$\mathsf{PCat}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathrm{LinMnd} \xleftarrow{\sim} \mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}),$$

并证明它限制在 ∞-范畴与完备 Segal 空间之间的标准等价上。利用这一点，我们便可完成证明：$\mathsf{Span}(\mathbb{F})$-∞- 幺 operad 等价于完备树状 Segal 空间。

引理 5.3.1。 复合函子 $\mathsf{PCat}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathsf{LinMnd} \xrightarrow{U_{\mathrm{lin}}} \mathsf{LinEnd}$ 将一个带标记的 ∞-范畴 $(\mathcal{C}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\simeq})$映到 *Span*

$$S(\mathcal{C},p) \quad := \quad X \leftarrow \mathsf{Map}([1],\mathcal{C}) \times_{\mathcal{C}^{\simeq}\times\mathcal{C}^{\simeq}} X\times X \to X,$$

其中，拉回沿着$(\mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1)\colon \mathsf{Map}([1],\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{\simeq}\times\mathcal{C}^{\simeq}$ 进行，并取 p 的两个副本。

证明。 我们首先确定与自函子 $X\times X \to \mathcal{S}$对应的函子

$$\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S}) \xrightarrow{p_!} \mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S}) \xrightarrow{p^*} \mathsf{Fun}(X,\mathcal{S}).$$

这个函子是

$$\begin{aligned}(x,x') \mapsto \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(X,\mathcal{S})}(\mathsf{y}_X(x), p^*p_!\mathsf{y}_X(x')) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{S})}(p_!\mathsf{y}_X(x), p_!\mathsf{y}_X(x'))\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathcal{C}}(p(x),p(x')).\end{aligned}$$

为找出相应的 Span，我们现在注意到$\mathsf{Map}([1], \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{\simeq}\times\mathcal{C}^{\simeq}$ 是映射空间函子在底层 ∞-群胚上的限制所对应的纤维化（因为$\mathsf{Map}([1], \mathcal{C})$ 是扭箭头 ∞-范畴的底层 ∞-群胚），而函子复合对应于拉回纤维化。□

命题 5.3.2。 在复合等价 $\epsilon\colon \mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LinMnd} \xrightarrow{\sim} \mathsf{PCat}_\infty$下，$\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 中的全子范畴 Δ 对应于 Δ 在$\mathsf{Cat}_\infty \subseteq \mathsf{PCat}_\infty$中的标准嵌入。

证明。 由于所得函子 $\Delta \to \mathsf{PCat}_\infty$ 是全忠实的，因此只需检查它在对象上的作用是否正确。此外，由于我们有余极限分解 $[n] \simeq [1] \amalg_{[0]} \cdots \amalg_{[0]} [1]$，它位于$\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$中，因此对于其在$\mathsf{PCat}_\infty$中的像也是如此，所以只需考察对象 $[0]$ 和 $[1]$。

根据构造， $[0]$ 和 $[1]$ 分别对应于跨度上的自由线性单子

$$\eta \quad = \quad \mathbf{1} \leftarrow \emptyset \to \emptyset \to \mathbf{1},$$

$$C_1 \quad = \quad \mathbf{2} \leftarrow \{1\} \to \{2\} \to \mathbf{2}.$$

根据 [GHK22，引理 3.3。6] 于是对任意跨度 $T = X \leftarrow Y \to X$，我们有

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{LinEnd}}(\eta, T) \simeq \mathsf{Map}_{\mathcal{S}}(\mathbf{1}, X) \simeq X,$$

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{LinEnd}}(C_1, T) \simeq Y.$$

因此，利用观察 5.1.7，我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}([0], \epsilon^{-1}(\mathcal{C},p)) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{LinEnd}}(\eta, S(\mathcal{C},p)) \simeq X\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{PCat}_\infty}([0]^\natural, (\mathcal{C},p)),\\ \mathsf{Map}([1], \epsilon^{-1}(\mathcal{C},p)) &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{LinEnd}}(C_1, S(\mathcal{C},p)) \simeq \mathsf{Map}([1],\mathcal{C}) \times_{\mathcal{C}^{\simeq}\times\mathcal{C}^{\simeq}} X\times X\\ &\simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{PCat}_\infty}([1]^\natural, (\mathcal{C},p)),\end{aligned}$$

如所需。这将函子 $\Delta \to \mathsf{PCat}_\infty$ 确定到 Δ的自同构为止，其中唯一的非平凡自同构是反序函子 $\mathrm{op}\colon \Delta \xrightarrow{\sim} \Delta$。要看出我们的函子没有反转顺序，只需注意，$[0]$ 在 $[1]$ 中的两个包含映射确实按预期顺序出现。□

观察 5.3.3. 由命题 5.3.2 可知，与一个钉住的 ∞-范畴 $(\mathcal{C}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\simeq})$ 在等价 ϵ 下对应的 Segal 空间为

$$[n] \mapsto \mathsf{Map}_{\mathsf{PCat}_\infty}([n]^\natural, (\mathcal{C},p)) \simeq \mathsf{Map}_{\mathsf{Cat}_\infty}([n],\mathcal{C}) \times_{(\mathcal{C}^{\simeq})^{\times n}} X^{\times n}.$$

命题 5.3.4。 PCat_∞ 中的一个对象属于全子范畴Cat_∞，当且仅当它相对于该映射是局部的

$$E := ([0], \mathbf{2} \twoheadrightarrow *) \to [0]^\natural.$$

证明。 对于 $(\mathscr{C}, p\colon X \twoheadrightarrow \mathscr{C}^{\simeq})$，我们有一个自然等价

$$\mathsf{Map}_{\mathsf{PCat}_\infty}(E, (\mathscr{C}, p)) \simeq X \times_{\mathscr{C}^{\simeq}} X,$$

在这种对应关系下，映射 $X \simeq \mathsf{Map}([0]^\natural, (\mathscr{C}, p)) \to \mathsf{Map}(E, (\mathscr{C}, p))$ 对应于对角映射。但对角映射 $X \to X \times_{\mathscr{C}^{\simeq}} X$ 是等价，当且仅当映射 p 是单态射，依据 [Lur09，引理 5.5.6。15]。由于 p 根据假设是满射，若它是单态射，则必然是等价，由此证明得证。 □

推论 5.3.5。 在等价 $\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{LinMnd} \xrightarrow{\sim} \mathsf{PCat}_\infty$下，全子范畴 $\mathsf{Cat}_\infty \subseteq \mathsf{PCat}_\infty$ 与 $\mathsf{CSeg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 的全子范畴相对应，后者属于完备的 *Segal* 空间。

证明。 由观察 5.3.3 的公式，对象 $E := ([0],\ 2 \twoheadrightarrow *)$ 对应于单纯集合

$$\mathsf{Map}([n], [0]) \times_{*^{\times n}} 2^{\times n} \simeq 2^{\times n}.$$

这恰好是具有两个对象的可缩群胚的脉络；根据定义，$\mathsf{CSeg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 是 $\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 的全子范畴，其对象是相对于从该对象到终对象的映射局部的。□

推论 5.3.6。 在等价 $\mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) \simeq \mathsf{AnMnd} \simeq \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$下，全子范畴 $\mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \subseteq \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 被识别为完备树状 *Segal* 空间的全子范畴 $\mathsf{CSeg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$。

证明。 我们构造了一个交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{LinMnd} & \xleftarrow{\sim} & \mathsf{PCat}_\infty \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{AnMnd} & \xleftarrow{\sim} & \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})).
\end{array}$$

这里，左侧和右侧的垂直箭头分别有左伴随，分别由沿包含 $\Delta \hookrightarrow \Omega$ 的限制以及取出1上的纤维给出。因此，我们也有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{PCat}_\infty
\end{array}$$

带有这些左伴随。这里，$\mathsf{CSeg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 可以定义为$\mathsf{Seg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 的全子范畴，其中包含那些在 $\mathsf{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 中的像属于$\mathsf{CSeg}_{\Delta^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 的对象。由推论 5.3.5 可知，在我们的等价下，这个全子范畴对应于 $\mathsf{POpd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 的全子范畴，其中包含那些在PCat_∞ 中的像属于Cat_∞的对象，而这恰好就是$\mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$。□

注记 5.3.7. 我们还可以明确指出，在我们的等价下，对应于 $\mathsf{Opd}(\mathsf{Span}(\mathbb{F}))$ 和 $\mathsf{CSeg}_{\Omega^{\mathrm{op}}}(\mathcal{S})$ 的 AnMnd 全子范畴：它由 $\mathrm{Fun}(X, \mathcal{S})$ 上的解析单子 T 构成，这些单子在如下意义下是完备的：诱导的本质满射 $X \to \mathscr{S}(T)_1^{\simeq}$ 是一个等价。（这里，$\mathscr{S}(T)_1^{\simeq}$ 与 $\mathscr{U}(T)$ 是同一个对象，按照 [CH21, §15]，的记法，因此这里对完备解析单子的定义与其中定义的完备性概念一致。）

参考文献

[AF18] David Ayala 和 John Francis，《标记高阶范畴》，《相互作用中的拓扑与量子理论》，《当代数学》，第 718 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2018 年，第 137–173 页，参见 arXiv:1801.08973。[BHS22] Shaul Barkan、Rune Haugseng 和 Jan Steinebrunner，《代数模式的包络》（2022），参见 arXiv:2208.07183。[Bar18] Clark Barwick，《从算子范畴到高阶运算子》，《几何与拓扑》22 (2018)，第 4 期，1893–1959，参见 arXiv:1302.5756。[Bar17] ，《谱 Mackey 函子与等变代数 K-理论》（I），《数学进展》304 (2017)，646–727，参见 arXiv:1404.~~0108~~。[BKW18] Michael Batanin、Joachim Kock 和 Mark Weber，《正则模式、替代子、费曼范畴与幺 operad》，《范畴论及其应用》33 (2018)，148–192。[Ber20] John D. Berman，《高阶 Lawvere 理论》，《纯粹与应用代数杂志》224 (2020)，第 9 期，106362，17 页。[CH21] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng，《通过 Segal 条件实现同伦相干代数》，《数学进展》385 (2021)，107733，参见 arXiv:1907.03977。[CHH18] Hongyi Chu、Rune Haugseng 和 Gijs Heuts，《∞-运算子的同伦论的两个模型》，《拓扑学杂志》11 (2018)，第 4 期，856–872，参见 arXiv:1606.03826。[CM13a] Denis-Charles Cisinski 和 Ieke Moerdijk，《树状 Segal 空间与 ∞-运算子》，《拓扑学杂志》6 (2013)，第 3 期，675–704。[CM13b] ，《树状集合与单纯运算子》，《拓扑学杂志》6 (2013)，第 3 期，705–756，参见 arXiv:1109.1004。[Cra10] James Cranch，《代数理论与 (∞,1)-范畴》（2010），参见 arXiv:1011.3243。[GGN15] David Gepner、Moritz Groth 和 Thomas Nikolaus，《乘法无限环路空间机器的普适性》，《代数几何与拓扑》 15 (2015)，第 6 期，3107–3153。[GHK22] David Gepner、Rune Haugseng 和 Joachim Kock，《∞-运算子即解析单子》，《国际数学研究通知》16 (2022)，12516–12624，参见 arXiv:1712.06469。[Hau18] Rune Haugseng，《迭代跨度与经典拓扑场论》，《数学杂志》289 (2018)，第 3 期，1427–1488，参见 arXiv:1409.0837。[Hau21] ，《(∞,2)-范畴中的弱变换、伴随与单子》，《高阶结构》5 (2021)，第 1 期，244–281，参见 arXiv:2002.01037。[HHLN21] Rune Haugseng、Fabian Hebestreit、Sil Linskens 和 Joost Nuiten，《弱幺半伴随、双变量纤维化与伴随态射演算》（2021），参见 arXiv:~~2011.08~~808。[HHLN22] ，《双变量纤维化、分解系统与跨度的 ∞-范畴》（2022），参见 arXiv:2011.11042。[HM21]Simon Henry 和 Nicholas J. Meadows，《高阶理论与单子》（2021），参见 arXiv:2106.02706。[HHM16] Gijs Heuts、Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk，《Lurie 模型与无穷运算子的树状模型之间的等价》，《数学进展》302 (2016)，869–1043，参见 arXiv:1305.3658。[HM22] Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk，《Lurie 的 ∞-运算子与树状∞-运算子的等价性》（2022），参见 arXiv:2206.14033。[Joy86] André Joyal，《解析函子与结构种》，《计数组合学》（蒙特利尔/魁北克，1985），1986 年，第 126–159 页。[Kos21] Roman Kositsyn，《单子与理论的完备性》（2021），参见 arXiv:2104.00367。[Law04] F. William Lawvere，《代数理论的函子语义学及其语境中的一些代数问题》，《范畴论及其应用》5 (2004)，1–121。转载自《美国国家科学院院刊》50 (1963)，869–872 [MR0158921] 及《中西部范畴研讨会报告》II，41–61，施普林格，柏林，1968 [MR0231882]。MR2118935[Lin66] F. E. J. Linton，《方程范畴的若干方面》，《范畴代数会议论文集》（加利福尼亚州拉霍亚，1965），施普林格，纽约，1966 年，第 84–94 页。[Lur09] Jacob Lurie，《高阶托扑斯理论》，《数学年刊研究丛书》第 170 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009 年。可从 http://math.ias.edu/~lurie/ 获取。[Lur17] ，《高阶代数》，2017 年。参见 http://math.ias.edu/~lurie/。[Rez01] Charles Rezk，《同伦论的同伦论模型》，《美国数学会会刊》353 (2001)，第 3 期，973–1007。[Rez10] ，《弱 n-范畴的笛卡尔表示》，《几何与拓扑》14 (2010)，第 1 期，521–571。[SZ14] Stanisław Szawiel 和 Marek Zawadowski，《解析单子理论》，《数学结构与计算机科学》24 (2014)，第 6 期，e240604，33 页。

挪威科技大学（NTNU），特隆赫姆，挪威网址：http://folk.ntnu.no/runegha