对《PT 对称与准厄米量子理论的操作基础》的评论

Miloslav Znojil

ˇ 捷克科学院核物理研究所，Hlavn´ı 130，250 68 Řež，捷克共和国
电子邮箱：znojil@ujf.cas.cz

arXiv:2301.01215v2 [quant-ph] 8 Jan 2023

摘要

在《物理学杂志 A：数学与理论》55 (2022) 244003 中，Alase 等人写道，“对可观测量施加准厄米性约束”并不足以“扩展标准量子理论”，因为“这样的系统等价于一个标准量子系统”。为阐明当前的研究进展，我们认为有必要补充三点。第一点涉及研究计划：在相关文献中，“扩展标准量子理论”这一最初目标在提出后不久便已被放弃。第二点涉及方法，即在“一般概率理论的框架”中进行研究。我们注意到，另有一些数学上自洽、类似 GPT 的理论可供采用。作者尤其没有提及在准厄米性约束下，采用效应代数的方法所取得的进展。我们还要指出，这一方法已在准厄米模型中获得了先进的实际应用：这些模型使用作用于无限维希尔伯特空间中的可观测量无界算子。第三，对于“究竟可能施加何种约束（如果存在的话），才能实现有意义的扩展”这一“引人深思的开放问题”（面向未来），我们立即给出一个初步答案：我们主张，理想的约束实际上可能仅仅是可观测量的准厄米性，前提是考虑其近期发展的非定态版本。

1 引言

作为“量子理论的基础结构”专题的一部分，Abhijeet Alase、Salini Karuvade 和 Carlo Maria Scandolo 的论文《PT 对称与准厄米量子理论的操作基础》 [1] 与本卷的主题十分契合。论文以严谨的数学风格，为读者提供了有趣的材料，证实了量子理论近期三项概念创新之间的相容性。尽管如此，我们认为作者对该主题的论述仍值得补充几点，主要是因为在上述文献中，令人十分满意的数学分析似乎伴随着对其在理论量子物理学语境中所蕴含意义不够审慎的阐述。

2 标准量子理论不存在扩展

我们的第一条补充意见源于 [1] 摘要的最后一句。该句指出：“我们的结果表明，无论是 PT 对称性约束还是准厄米性约束，都不足以一致地扩展标准量子理论。”事实上，遗憾的是，这一表述将注意力从论文极为有趣的主要数学结论（即严格证实量子理论的三个替代版本彼此相容）转移到了远不那么令人满意的物理背景阐释上。全文最后一段进一步强化了这种印象，其中写道：“总之，可观测量的 PT 对称性或准厄米性都无法扩展标准量子力学。”当然，非专业读者可能会误将这一结论理解为对通常所谓的 PT 对称量子理论（PTQT，一种方法，文献中第 2.1 节对其作了简要回顾）或所谓准厄米量子理论（QHQT，参见文献后续第 2.2 节中的简要回顾）之实用性的否定。摘要的第一句话与正文最后一句相结合，似乎彻底造成了这种误解：摘要开头告诉我们，“PT 对称量子理论最初是为了扩展标准量子理论而提出的”（这与眼下的讨论关系不大），而最后的问题则是：“究竟有哪些可能的约束（如果存在的话）能够带来这种有意义的扩展？” [1]

这种“理论扩展”动机以及论文 [1] 的“物理”框架，其主要弱点在于，“放宽哈密顿量的厄米性约束”这一最初目的（由 Bender 和 Boettcher 在其影响极为深远的短文 [2] 中提出）几乎立即就被证明过于雄心勃勃，且未能实现（例如，参见 Mostafazadeh 于 2010年 提出的、极具数学性且详尽的批评与解释：“PT 对称性和准厄米性约束都不足以扩展标准量子理论” [3]）。因此， [1] 的作者提出“旨在回答这样一个问题：具有 PT 对称性可观测量的一致物理理论是否扩展了标准量子理论”，为时已晚。十二年多来，人们早已知道答案是否定的 [4]。

3 关于该方法的评论

当然，没有人声称 PTQT 本身毫无用处，也无人能否认论文 [1] 中所呈现的数学结果的重要性和新颖性。遗憾的是，作者没有更充分地强调他们的分析与专刊主题是多么契合，尤其是

他们创新性地将注意力转向了所谓的一般概率理论（GPT，参见他们在 [1] 第 2.3 节中的简要概述）。

矛盾的是，在 GPT 的语境下，人们立刻就能发现这篇论文的第二个弱点。问题在于，代表 GPT 研究路径的参考文献列表短得出人意料。论文的参考文献仅收录了八篇较新的论文 [5] - [12] （均发表于 2000 年之后），以及一篇由 Foulis 合著的 1970 年旧文 [13]。更令人意外的是，参考文献中没有包含 Gudder 的任何研究成果——毕竟，论文 [1] 是专刊的一部分，而该专刊明确表示旨在致敬他对这一领域的贡献。因此，人们原本会期待看到对他后来综述论文 [14, 15] 的引用；他在这些论文中提出了一项与 GPT 相关的关键数学论点："在实验研究中、并受某种科学理论（该理论可能会根据新的实验证据进行修正）支配的物理系统 S，可由一个 CB-效应代数表示。"另一个同样令人意外的参考文献缺失，是 Foulis 与 Bennet 于 1994 年发表的开创性论文 [16], ，该文引入了效应代数；此外，他较近年的综述 [17] 也未被引用。事实上，这两篇论文都致力于探索并提出操作基础，并深入探讨了量子理论与经典概率论之间、对 GPT 研究具有启发意义的关系（ [5], 等文献也强调了这一点）。

更糟糕的遗漏是，参考文献列表中没有收录其他相关主题的研究，例如论文 [18] 。在该文中，本文作者的前辈明确考察了PTQT-GPT关系，并再次确认："从（广义）效应代数理论的角度来看，我们的量子系统的两种表述是一致的。"类似地，论文 [19] 研究了QHQT-GPT关系，其数学分析相当深入，甚至纳入了使用无界算子的颇为现实的量子模型。事实上，进展速度令人瞩目，尤其是回想起仅早几年发表的报告 [14] ，其中"可分复希尔伯特空间"被假定为"维数至少为1"。

4 新颖且前景广阔的非定常约束

目前，尽管现有量子理论的"标准"表述具有稳健性，尤其是幺正系统的量子力学，但我们仍有理由承认，其各种具体实现方式在实际适用性上存在差异。"没有 [任何一种] 特定表述能为量子力学提供一条康庄大道" [20]，这正是多样性存在的原因。从某种意义上说，这意味着"扩展"现有量子理论这一概念含义模糊。当前量子力学各种替代表述之间看似微小的技术差异（例如 [20], 中对基础层面的介绍），未来可能会带来"决定性的扩展"。

即便是在 QHQT 当前的定态形式中，也可以给出一个很好的例证。事实上，即使在这一框架下，也可以说其形式体系确实等价于标准教科书形式。不过，只有在满足某些相当详尽且具体的数学假设时，才能确认这种等价性（参见 [21]）。即便在泛函分析这一抽象语境中，这些假设也绝非显而易见 [22]。矛盾的是，后来人们发现，Bender 和 Boettcher 提出的那些广受欢迎的物理量子模型 [2] 也不属于"可容许的"、与 QHQT 兼容的类别（相应的微妙细节参见 [23, 24] ）。因此，尽管这些模型显然始终具有 PT 对称性，但这些最初提出的基准模型仍有待获得对其完全一致的 GPT 解释的"有意义的扩展"。

在我们的第三篇、也是最后一篇补遗中，我们现在准备重新探讨一个模糊却重要的问题：

“扩展”“标准”量子理论这几个词究竟可能或确实意味着什么。一方面，众所周知且广为接受的是，量子理论现有的各种表述“在数学和概念层面的整体图景上差异巨大，但对所有实验结果的预测却完全相同” [20]。另一方面，理论如此僵化，远不能令人满意。例如，要澄清量子引力这一至今仍未解决的概念，就有必要在未来适时修正量子理论 [25]。

为简洁起见，这里暂且略过有关 PT对称量子模型的平行问题的讨论。话虽如此，我们认为 QHQT 形式体系本身尚未穷尽其可能性。事实上，我们对其潜在 “ 理论拓展空间 ” 的乐观态度，源于近期对其适用范围和结构所作的根本性澄清。首先，人们已经清楚，在对幺正系统进行 QHQT 描述时，只需区分两种表述：一种是“广义薛定谔图景”（GSP，定态形式；在我们看来，综述 [21, 26] 和 [3] 对其阐述得最为出色），另一种则是非定态的“非厄米相互作用图景”（NIP， [27, 28]）。采用这一术语后便会立即发现，论文 [1] 中与 QHQT 相关的讨论仅涉及 GSP 方法。换言之，文中将物理内积度量（记作符号 η）视为严格不随时间变化。这意味着，在 GSP 术语中，人们可以轻易地将波函数演化的（定态）生成元 G 与（“可观测能量”）哈密顿量 H 等同起来（后者具有实谱，并且按假设是准厄米的 $\eta-$）。

将 QHQT 方法扩展到非定常 NIP 动力学框架后，情况便有所不同。在这种情况下，我们将内积度规记作另一个专用符号 $\Theta = \Theta(t)$，如 [29] 中对 NIP 的首次描述所引入的那样。重要的是，可观测能量算符 $H = H(t)$ 将分解为两个辅助算符 $G(t)$ 和 $\Sigma(t)$ 之和。由于通常二者都既不可观测，也不具有 Θ-准厄米性，我们将“哈密顿量”这一名称专门用于瞬时能量算符 H（其谱为实数）；同时也提醒读者，其他一些作者往往采用不同且不那么严谨的术语（参见例如 [30, 31]）。尽管通常 $G(t)$ 的谱和 $\Sigma(t)$ 的谱都不是实数，但引入这些算符为 NIP 形式体系增添了灵活性；我们相信，这种灵活性有望为当代量子物理开辟新天地。例如，在相对论量子力学背景下，这种假设性的“理论扩展”可能性已在 [27] 中得到详细讨论。针对多体背景下量子相变的幺正演化模型问题，可能采取一种全新方法， [32] 对该形式体系作了略微调整。最后但同样重要的是，我们最近发表的论文 [28] 探讨了在量子引力和宇宙学背景下，将 NIP 演化方程用于基于惠勒–德维特方程的大爆炸示意模型的可能性。因此，本着这一思路，某些足够贴近现实的 NIP 模型或许在不久的将来便能获得“扩展量子力学”的地位。

5 结论

论文 [1] 讨论的核心主题，是量子理论总体上可能扩展其适用范围的问题，以及如何在各自的 PTQT 和 QHQT 理论框架内实现这一雄心勃勃的研究计划。我们在这篇评论中略微提醒读者，相关文献中还存在若干较早且同样持怀疑态度的结论（详情见第 2 节）。随后在第 3 节中，我们补充了几条

类似的评论，强调了更广阔的背景，并涉及 [1] 结果中与 GPT 相关的数学方面。尽管如此，我们当前论述的核心（见篇幅最长的第 4 节）仍关乎物理学。我们指出，目前即便是在范围较窄的 PTQT 和 QHQT 框架内，标准量子理论的适用范围是否可能扩展，仍是一个开放问题。

为支持后一种说法，我们提到，

- 即使对于定态且显然最基础的 PTQT 势（例如由最受欢迎的 $V(x) = \mathrm{i}x^3$ 所取样的势），人们最初普遍抱有的乐观态度，以及认为其物理意义和数学背景“没什么新意”的直觉理解，最近都因更严格的数学分析而破灭；

- 即便是在数学上理解得好得多的定态QHQT（亦称GSP框架）中，也很难说“没什么新意”；在该框架中，通常可以通过采用某些更强的假设来绕过严格数学分析所揭示的障碍。事实上，即使在GSP框架中，也能探寻全新的物理学。通常，在所谓例外点的无穷小邻域内，QHQT模型会描述一种非标准的唯象学：论文 [33] 提供了一个示例，展示了无法用标准量子理论描述的量子系统；

- 事实上，我们对乐观态度的重拾，以及对QHQT可能是一种“根本上具有创新性”的理论的期待，在第4节得到了最明确的阐述。简言之，我们在那里揭示了QHQT方法在经过最终的非定态NIP推广后，其灵活性大幅提升。在某种意义上，我们强调这种灵活性在概念层面蕴含着深远的前景，这可以视为本文评论与主旨的核心。

数据可用性声明

本研究未创建或分析任何新数据。

ORCID iD

https://orcid.org/0000-0001-6076-0093

参考文献

[1] Alase A, Karuvade S and Scandolo C M 2022《物理学杂志 A：数学与理论》55 244003[2] Bender C M and Boettcher S 1998《物理评论快报》80 5243 - 5246[3] Mostafazadeh A 2010年《国际几何方法与现代物理杂志》07 1191 - 1306[4] Znojil M 2015 量子物理中的非自伴算子：思想、人物与趋势（纽约：Wiley）第1章，第7 - 58页[5] Hardy L 2001 基于五条合理公理的量子理论（arXiv:quant-ph/0101012）[6] Barrett J 2007《物理评论 A》75 032304[7] Chiribella G, D’Ariano G M and Perinotti P 2010《物理评论 A》81 062348[8] Hardy L 2011 一般概率理论的可叶化操作结构（剑桥：剑桥大学出版社）第409 - 442页[9] Barnum H and Wilce A 2011《电子理论与计算机科学笔记》270 3 - 15[10] J anotta P and Hinrichsen H 2014《物理学杂志 A：数学与理论》47 323001[11] Barnum H and Wilce A 2016 后经典概率理论（柏林：施普林格）第367.420页[12] Scandolo C M 2018 一般概率理论中的热力学的信息论基础。博士论文，牛津大学[13] Randall C H and Foulis D J 1970《美国数学月刊》77 363 - 374[14] Gudder S P 2004《数学物理报告》54 93 - 114[15] Gudder S P 2006《数学论证》39 43 - 54[16] Foulis D J and Bennett M K 1994《基础物理学》24 1331 - 1352[17] Foulis D J 2007《数学物理报告》60 329 - 346[18] Paseka J 2011《国际理论物理学杂志》50 1198 - 1205[19] Paseka J, Pulmannova S and Riecanova Z 2013《国际理论物理学杂志》52 1994 - 2000[20] Styer D F et al 2002《美国物理学杂志》70 288 - 297[21] Scholtz F G, Geyer H B and Hahne F J W 1992《物理学年鉴》213 74 - 101[22] Dieudonne J 1961 线性空间国际研讨会论文集（培格曼出版社，牛津，1961），第115 - 122页[23] Siegl P and Krejˇciˇr´ık D 2012《物理评论 D》86 121702(R) Krejˇciˇr´ık D, Siegl P, Tater M and Viola J 2015《数学物理学杂志》56 103513

[24] Guenther U 和 Frank Stefani F 2019 红外截断的 PT 对称 ix^3 模型及其渐近谱标度图。arXiv 1901.08526 Semor´adov´a I 和 Siegl P 2022 SIAM J. Math. Anal. 54 5064 - 5101[25] Rovelli C 2004 量子引力（剑桥大学出版社，英国剑桥）[26] Bender C M 2007 Rep Prog Phys 70 947 - 1118[27] Znojil M 2017 《物理学年鉴》（NY）385 162 - 179[28] Znojil M 2022 《宇宙》8 385[29] Znojil M 2008 《物理评论 D》78 085003 Znojil M 2009 SIGMA 5 001

[30] Fring A 和 Moussa M H Y 2016 《物理评论 A》93 042114

[31] B´ıla H 2009 电子预印本 arXiv: 0902.0474 Gong J-B and Wang Q-H 2013 J Phys A Math Theor 46 485302 Amaouche N, Sekhri M, Zerimeche R, Maamache M and Liang J-Q 2022 《开放物理》13 100126[32] Bishop R F and Znojil M 2020 Eur Phys J Plus 135 374[33] Znojil M 2022 《数学》10 3721