arXiv:2301.01220v1 [cond-mat.mes-hall] 3 Jan 2023

软薄膜中的焦散自旋波束：性质与分类

Alexis Wartelle,* Franz Vilsmeier、Takuya Taniguchi 和 Christian H. Back
Fakultät fur Physik, Technische Universität München, Garching, Germany(日期：2023年1月4日)

在波传播的背景下，焦散通常定义为有限范围波前的包络；焦散中的折叠和尖点会导致波振幅增强。本文探讨一种相关现象，即仅由相应色散关系的几何性质所产生的定义明确的波束。此类定向发射称为焦散束，其形成得益于稳定的群速度方向；这一现象最早在声子的情形中得到观测。我们概述这一“聚焦”效应在软薄铁磁薄膜中激发自旋波时的表现。基于解析色散关系，我们提供了系统研究焦散自旋波束的工具。我们通过采用磁光克尔效应的时间分辨显微实验验证了这一理论方法。随后，我们指出了两个从基础研究和应用角度都特别值得关注的情形。实际上，这两种情形都能使宽带激发（就波矢而言）形成低发散的窄带波束。

一、引言

磁性材料中磁矩的集体运动称为自旋波，从基础研究的角度来看，它展现出许多引人注目的特性。例如，薄膜中的各向异性色散与磁振子学领域密切相关；此外，还有磁振子的玻色–爱因斯坦凝聚，以及类似受限相对论的有界畴壁速度。 [1], [2], [3]磁化动力学的应用也十分广泛，从无限波长的铁磁共振（FMR）[4] 一直延伸到亚微米波长；目前，后者被视为磁振子学领域中颇具前景的替代性信息载体。 [5]除了不产生焦耳热以及可缩小器件尺寸（通过采用较短波长）之外，自旋波干涉也很有吸引力， [6] 因为通过设计传播线，它能够实现逻辑运算。

目前已有多种实验技术可用于研究自旋波， [1], 尤其适用于薄膜或其图案化结构。其中，显微／相位分辨布里渊光散射（BLS） [7], 、时间分辨磁光克尔效应（TR-MOKE）显微成像 [8], ，以及借助X射线磁圆二色性（XMCD [9]）实现磁灵敏度的时间分辨扫描透射X射线显微镜（TR-STXM） [10]均展现出出色的成像能力。然而，与自旋波相关的磁化进动幅度通常极小，且其衰减长度（通常在微米量级）也构成了重大挑战，既影响基础研究，也制约实际应用。

为了使自旋波具有实用价值，必须采用高能效策略来加以利用：例如，Winter 的磁振子依赖于沿畴壁传输 [11], 另一些方法则依赖于对自旋波散射的精确控制 [12]。另一种可能性是利用焦散自旋波束（CSWB），即 传播方向明确、角宽度窄且功率高于例如 Damon-Eshbach 型 [13]自旋波的自旋波束。此外，软磁性薄膜中的焦散可能与众所周知的声学或光学焦散截然不同；后者源自非均匀介质 [14–16], ：在这里，仅凭色散关系中足够强的各向异性，完全均匀的薄膜在广泛的条件下也能产生自旋波焦散。事实上，后者使群速度方向在某些波矢附近保持稳定，从而形成明确的波传播方向，并伴随显著增强的发射。在声子传播领域，此类现象被称为“聚焦” [17], ，自 1969 [17–21] 年起便已得到观测和研究。

相比之下，铁磁薄膜中的焦散直到约 30 年后才首次被报道*ca.* [22]。此后已有不少相关报道 [23–31] ，但据我们所知，迄今尚无对自旋波焦散性质的系统调查，甚至没有针对某一类系统的研究例如 具有垂直各向异性的超薄膜或软薄膜。本文将研究范围限定于后者，概述软薄膜中的焦散，并介绍进一步研究焦散的方法。此外，我们还重点介绍两个特殊案例，它们看起来尤其值得关注，特别是在磁振子学应用方面。

II. 模型

A. 一般性考虑

我们的出发点是 Kalinikos 和 Slavin [32] 为软磁性薄膜中的自旋波推导的模型。这些激发对应于随时间和空间变化的磁化强度 $\vec{M}(\vec{r},\ t)$，但其模长

* alexis.wartelle@ens-lyon.org；现地址：格勒诺布尔阿尔卑斯大学、法国国家科学研究中心、格勒诺布尔国立理工学院、SIMaP，法国格勒诺布尔 38000

$M_s = ||\vec{M}(\vec{r},\ t)||$ 自发磁化强度是均匀的。因此，考虑归一化磁化强度 $\vec{m}(\vec{r},\ t) = \vec{M}(\vec{r},\ t)/M_s$ 更为简单，其模长为 1。我们关注线性区间，即偏离平衡磁化强度（未施加激发时）$\delta\vec{m}(\vec{r},\ t) = \vec{m}(\vec{r},\ t) - \vec{m}_0(\vec{r},\ t)$ 的情况，其中 $\vec{m_0}$ 满足 $||\delta\vec{m}|| \ll 1$。在假设模态混合可以忽略且铁磁材料完全各向同性的条件下，薄膜的色散关系可写为：

$$\begin{aligned}\omega^2 = &\left[\gamma_0 H_a + \frac{2A\gamma_0}{\mu_0 M_s}k^2\right]\left[\gamma_0\left(M_s + H_a\right) + \frac{2A\gamma_0}{\mu_0 M_s}k^2\right] \\ &-\gamma_0^2 M_s^2 \cdot \xi(kd)\left[1 - \xi(kd) + \frac{H_a}{M_s} + \frac{2A\gamma_0}{\mu_0 M_s^2}k^2\right]\cos^2\varphi \\ &+\gamma_0^2 M_s^2 \cdot \xi(kd)\cdot[1-\xi(kd)] \end{aligned} \tag{1}$$

其中，ω 为自旋波角频率，$\gamma_0 = \mu_0|\gamma|$为 $\gamma = q_e/$，其中$2m_e$（$q_e = -e$ 和 m_e 分别为电子的电荷和质量），μ_0 为真空磁导率；A 为所研究软铁磁材料的微磁交换常数，M_s 为其自发磁化强度，k 为与波矢 $\vec{k}$ 对应的自旋波波数，$H_a = ||\vec{H_a}||$ 为外加磁场 $\vec{H_a}$ 的强度，由此定义 $\varphi = 角\left(\vec{H_a}, \vec{k}\right)$波前角；$d$ 为薄膜厚度，ξ 为一个函数，其取值定义如下：

$$\xi(u) = 1 - \frac{1-e^{-u}}{|u|}. \tag{2}$$

由于铁磁材料较软，在没有激发时，我们的薄膜中的平衡磁化构型为单区域态，对应的约化磁化强度 $\vec{m}_0$ 恰好沿着外加磁场方向。图1展示了 $\vec{m}_0$、$\vec{H_a}$和 $\vec{k}$的取向，同时还标出了自旋波的自然波长 $\lambda_0 = 2\pi/||\vec{k}||$ 以及单位向量 $\vec{e_x}$、$\vec{e_y}$ 和 $\vec{e_z}$。

这里，我们关注沿薄膜厚度方向没有振幅节点的自旋波，即 不考虑垂直驻波自旋波（PSSW）。不过，我们指出，在足够厚的薄膜上进行的实验中，后者可能会发挥作用；例如，实际使用的天线可能会因其非均匀磁场而激发这类自旋波。

我们引入以下物理量：与磁化强度 $\omega_M = \gamma_0 M_s$ 以及所施加磁场 $\omega_H = \gamma_0 H_a$相关的拉莫尔角频率、材料的偶极交换长度 $l_{ex} = \sqrt{2A/(\mu_0 M_s^2)}$。随后，~~我们将方程~~改写为：

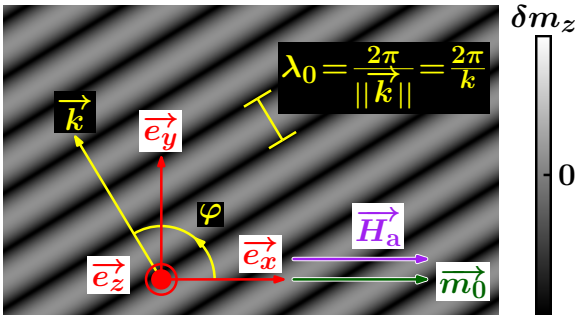

图 1. 在软薄膜中传播的自旋平面波示意图。灰度表示磁化强度动态分量的局部垂直分量，δm_z。

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{\omega_M^2} = &\left(\frac{\omega_H}{\omega_M} + l_{ex}^2 k^2\right)\left(1 + \frac{\omega_H}{\omega_M} + l_{ex}^2 k^2\right) \\ &-\xi(kd)\left[1 - \xi(kd) + \frac{\omega_H}{\omega_M} + l_{ex}^2 k^2\right]\cos^2\varphi \\ &+\xi(kd)\left[1-\xi(kd)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

引入约化频率 $\nu = \omega/\omega_M$ 和所施加磁场 $h = \omega_H/\omega_M = H_a/M_s$，并使用 $\eta = l_{ex}/d$ 和 $k = kd$将偶极交换长度和波数均按薄膜 ˜厚度 d 进行归一化后，可得：

$$\begin{aligned}\nu^2 = &\left(h + \eta^2\tilde{k}^2\right)\left(1 + h + \eta^2\tilde{k}^2\right) \\ &-\xi(\tilde{k})\left[1 - \xi(\tilde{k}) + h + \eta^2\tilde{k}^2\right]\cos^2\varphi \\ &+\xi(\tilde{k})\left[1-\xi(\tilde{k})\right] \end{aligned} \tag{4}$$

由此可知，任何给定的自旋波激发实验都对应于无量纲三元组（η，ν，h）的一个特定取值。换言之，它们是该模型中唯一的独立参数。

对于（η，ν，h）的一个取值，方程 (4) 的解是可达无量纲波矢 $\vec{k}\,d$ 构成的集合，该集合也可能为空。自旋波焦散的存在及其性质取决于该集合的几何特征，因此我们将首先回顾它的若干一般性质。

请注意，在下文中我们关注的是低于激发频率处铁磁共振场的外加磁场，因此实际上总是存在非空解，该解通常是波矢空间中围绕原点缠绕的一条闭合曲线。这就是所谓的慢度曲线，其名称源于这样一个事实：在固定频率 $k \propto 1/||\vec{v_p}||$ 下，$\vec{v_p}$ 是相速度 [33], ，当然其方向沿波矢。考虑到余弦函数的奇偶性及其关于反射 $\varphi \to \pi - \varphi$的反对称性，我们可以将分析限制在象限 $\varphi \in [0, \pi/2]$ 内，并利用镜像对称性推导出其他象限的结果。

还可以使用曲线坐标对慢度曲线进行参数化：我们将其定义为在 $\varphi = \pi/2$处对应于最低~无量纲波数 $k_{\min}$ 的点的曲线坐标为零。确实可以证明，在象限 $\varphi \in [0, \pi/2]$内，使式（4）在 $\varphi = \pi/2$ 处（分别在 0 处）成立的约化波数分别为最小值（分别为最大值）。因此，在最大的无量纲波数~ ~ $k_{\max} = k$（$\varphi = 0$）处，相应的曲线坐标 s_{M} 等于慢度曲线在象限 $\varphi \in [0, \pi/2]$ 内的长度即 整条曲线长度的四分之一。

慢度曲线的另一个重要几何特征，也是本文的核心内容之一，是其局部法线。根据定义，慢度曲线是波矢空间中色散关系的等频截线，因此频率梯度 $\vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega$ 必然垂直于慢度曲线。由此，可以直接根据慢度曲线局部法线的方向读出自旋波群速度 $\vec{v_{\mathrm{g}}} = \vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega$ 的方向。按照本文的记号：

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}}\omega \equiv \sum_{\beta=x,y,z} \frac{\partial \omega}{\partial k_\beta} \cdot \vec{e_\beta} \qquad \text{where} \quad k_\beta = \vec{k} \cdot \vec{e_\beta}.$$

下文中，我们将使用角度 θ_{V} = angle($\vec{H_{\mathrm{a}}}$, $\vec{v_{\mathrm{g}}}$)。需要指出的是，在本文讨论的情形中，相速度与群速度不一定共线；相反， θ_{V} 与φ之间的差异可能远大于光在各向异性介质中传播时的差异 [34]。图 2 以约化外加场为零时重建的慢度曲线为例说明了这一点。

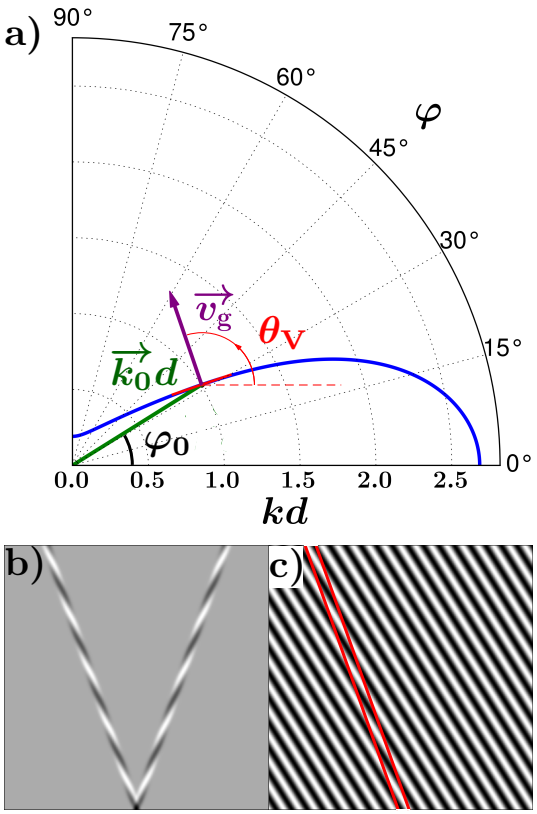

图 2. a) (ν, h, η) =(0.2873, 10^{-20}, 0.15) 的示例性慢度曲线。从 $kd = \tilde{k}(\varphi)$ 的极坐标图中可以清楚看出，点 $\vec{k_0}d$ 处相位速度 $\vec{v_{\mathrm{p}}}$ 的方向（φ_0 =32.00°）与群速度 $\vec{v_{\mathrm{g}}}$ 的方向（θ_{V} =108.9°）截然不同。b) 假设的源仅激发非常接近 $||\vec{k_0}||d$的波数时的辐射方向图（δm_z 以灰度编码）。c) 与载波矢量 $\vec{k_0}d$ 对应的平面波（红线为视线引导线）。

B. 色散关系焦散的显著特征

通常，非均匀介质中的焦散出现在波前折叠并与自身重合时；在这种情况下，存在一个曲面（二维波传播中则为一条线），其两侧空间中某一点处穿过的射线数目相差偶数 [15, 16]：这就是焦散。换言之，焦散也可以看作波传播过程中所有波前上射线束位置的局部极值所构成的集合。正是这种极值特性，使焦散处的强度相较于射线束上的其他点更大且更为集中。在几何光学方法中，当波前上一块初始面积有限的部分收缩至面积为零时，强度会发散 [15]。然而，波动光学处理表明，由于干涉，强度仍然有限：原则上，可以通过考察焦散处的照明分布来确定

考虑相位随到焦散 [14]的距离变化的情况。

Schneider等人[26] 曾采用这种方法研究自旋波焦散：自旋波在波导中传播，并在波导末端发生散射后激发焦散；该波导终止于一整片坡莫合金（$Ni_{80}Fe_{20}$）薄膜中。不过，与上述情况相比，这里的情形截然不同。事实上，波前并非因介质性质的空间变化而发生折叠，其延展范围几乎完全由自旋波传播特性决定（这得益于亚波长的源尺寸）。自旋波传播特性由各向异性的自旋波色散关系决定；由于群速度方向可能保持不变，因而能够形成焦散即形成一束传播方向明确、但包含载波附近一系列波矢的波束。更准确地说，焦散对应于群速度方向的局部极值；换言之，焦散自旋波束意味着慢度曲线上存在一个焦散~点 k_{c}，使得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}\tilde{k}}\right|_{\tilde{k}_{\mathrm{c}}} = 0. \qquad (5)$$

~因此，CSWB 的载波波数为 k_{c}，对应中心波前角 $\varphi_{\mathrm{c}} = \varphi(k_{\mathrm{c}})$，并且

˜波束方向 $\theta_{\mathrm{V,c}} = \theta_{\mathrm{V}}(k_c)$。

回到波前范围这一问题，偏离载波过远的波矢所对应的射线无法对焦散波振幅产生作用，原因仅仅是传播方向不同。具体而言，Schneider等人 给出的实验数据表明，波束发散角可达到 2° 或更小。因此，假定用于定义波束轮廓的立方色散关系与测量结果似乎存在矛盾。不过，CSWB 轮廓的问题超出了本文的讨论范围。尽管如此，许多实验报告中观察到的波束发散角很小 [23, 27, 35] ，这清楚地表明，只有慢度曲线上较短且近乎笔直的部分必须对 CSWB 有贡献。

事实上，像 [26]中所做的那样，将波矢的贡献积分至无穷远，忽略了一个几何上的不可能性：这些波矢无法产生从点源传播到远处焦散上某点的波。换言之，出于几何原因，由色散关系中的各向异性单独引起、并由点状源激发的焦散，自然会限制相关波矢的范围；这与传播介质中的非均匀性所导致的焦散不同。

我们希望通过指出以下事实来强调上述观点：在大多数情况下， [15, 36], 焦散的处理都基于波在各向同性或弱各向异性介质中的传播。其结果之一是，功率流即群速度，沿着波矢方向或与其近乎平行 [14]。对于轻微各向异性介质（如常见的晶体光学情形），这仍是合理的近似；但对于完全软、且完全极化的薄铁磁膜，如图2所示，这种共线性可能会发生显著偏离。因此，即使波矢发生微小变化，也可能导致群速度方向发生巨大变化。相较之下，波矢的大幅变化未必会导致表观波长λ 发生显著变化，我们将其定义为：

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot ||\vec{v_{\mathrm{g}}}||}{\vec{k} \cdot \vec{v_{\mathrm{g}}}} = \frac{2\pi}{\vec{k} \cdot \vec{e_{\mathrm{g}}}} = \frac{\lambda_0(\varphi)}{\cos(\theta_{\mathrm{V}} - \varphi)}, \qquad (6)$$

其中，我们引入 $\vec{e_{\mathrm{g}}}$ 作为沿群速度方向的单位向量。表观波长就是沿波束方向测得的空间周期。由于很容易获得较大的差异 $\theta_{\mathrm{V}} - \varphi$ （参见图 2，其中 $\cos(\theta_{\mathrm{V}} - \varphi_0) \simeq 0.227$），更重要的是，由于投影

$k(\varphi)\cos(\theta_{\mathrm{V}} - \varphi)$ 在慢度曲线相当长的区段内可能几乎保持恒定，因此应谨慎考虑自旋波束的传播诱导相位或谱宽等概念 [37]。

III. 结果与讨论

A. 模型适用性极限：厚膜

我们先举例说明一种情况：我们使用的模型无法完全信赖，以此突出其局限性。图 3 展示了一个案例，其中重构的慢度曲线在超过某一阈值频率后分裂为两个彼此分离的连通分支。

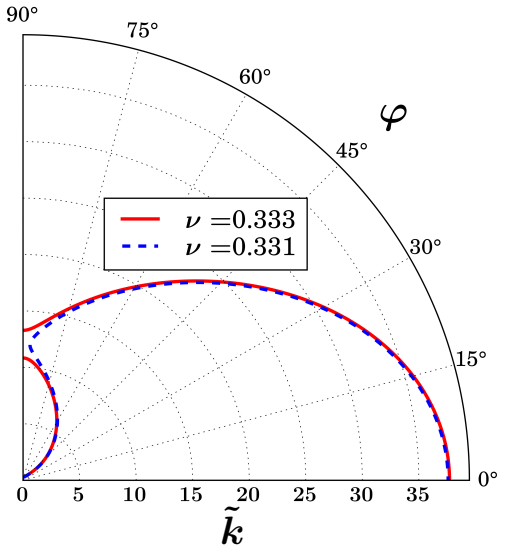

图 3. $\eta = 0.015$、 $h = 10^{-20}$和0.331 $\nu = 0.333$ $\nu =$ 的慢度曲线（分别以蓝色虚线和红色实线表示）。

Kreisel等人[38]已描述过这种行为：所选用的自旋波色散模型预测， ω（k， $\varphi = \pi/2$）随波数变化的曲线上存在一个局部最大值，但一种不基于薄膜近似 [39]、旨在处理偶极交换区的形式化方法无法复现这一极值点。该最大值的存在会导致在一定频率范围内出现一对额外的波数解，从而使慢度曲线分裂为两个独立的部分。

显然，采用我们的方法得到的关于偶极交换区深处焦散的结果并不可靠。从经验上看，当 η 达到约 0.075 时，慢度曲线会分裂成彼此分离的分量；作为比较，Kreisel等人 研究的最薄薄膜根据钇铁石榴石（YIG）的文献数据，其特征为 $\eta < 0.035$ [40]。不过，这种分裂的缺失并不能证明重构的慢度曲线是准确的，因此在讨论波数处于偶极交换区的CSWB时，我们仍应保持谨慎。最后需要指出的是，诸如Harms和Duine最近推导出的偶极交换色散关系 [39] 等富有前景的理论进展，最终或许能够使我们更准确地处理偶极交换区中的焦散。

B. 一般特征

让我们先看一个频率和场图的示例，其中展示了图4中的焦散特性。在所示图中，红色表示相应的（h，ν）点未被研究，这是因为其约化场高于约化铁磁共振场 h_{FMR}，或者因为在那里未找到焦散点。

首先，可以看到，(h，ν) 平面上确实存在一部分区域，其中没有焦散点。当频率高于某个 $\nu_{\mathrm{m}}(h,\ \eta)$ 时，就会出现这种情况。随后，随着约化频率降低，图中两个区域之间似乎出现了一条倾斜的边界。在其上方，k_{c} 迅速进入偶极交换区；我们只会展示这一情况，而不进行定量讨论，因为它对应的情形下，我们的模型可靠性较低。在边界下方，约化焦散波数远小于 1。与此相应，在 φ_{c}图上同一位置出现了一条边界，我们将其标记为 $\nu_{\mathrm{b}}(h,\ \eta)$；在边界下方的大部分区域内，这个角度似乎也接近于常数。在这两种情况下，随着 h降低，边界的锐利程度都会减弱；当约化场趋于零时，k_{c} 和 φ_{c} 中的转变都很平滑。所有这些特征都呈现在 k_{c} 图的简化表示中，如 φ_{c} 图中的插图所示，其中包括点 (h_{c}，ν_{c})，锐利边界似乎在此处终止。(h_{c},ν_{c}) 的放大视图见图4.b)中的插图。

下文中，我们将这个边界保持锐利时的最低约化场称为 h_{c}，并记作$\nu_{\mathrm{c}} = \nu_{\mathrm{b}}(h_{\mathrm{c}},\ \eta)$。正如我们稍后将详细看到的，这个突变边界对应于焦散点数量变化两个。最低点（h_{c}，ν_{c}）实际上是两个额外焦散点存在区域中的一个尖点。需要指出的是，对于所有约化场和频率，图4所示的图分别显示了最低焦散波数及其对应的波前角。

在继续讨论低频口袋、其边界和额外焦散点的存在性，最后讨论焦散点消失时的阈值频率之前，我们强调，焦散的行为强烈依赖于 η。例如，我们在图 5 中展示了 $\eta = 0.09$，0。3，0。6（从左到右）时的场-频率图。在最低值下，边界ν_{b} 一直延伸到 $h = 0$，而另外两幅图则没有呈现这种锐利的变化。此外，除了 k_{c}取值范围的预期变化之外，还可以看到，CSWB存在区域的整体形状也发生了变化。从这里开始，我们将该区域称为$\mathcal{D}$。从 $\eta = 0.09$ 到 0。3，可以看到，$\mathcal{D}$ 在低 h时沿竖直方向扩展了。在更薄的薄膜中，对于$\eta = 0.6$，$\nu_{\mathrm{m}}(h,\ \eta)$ 的平均斜率变化不大，但 $\nu_{\mathrm{m}}(0,\ \eta)$减小了；因此，$\mathcal{D}$ 在竖直方向收缩。

相比之下，即使焦散群速度方向与焦散波前角和约化波数一样呈现出丰富多样的特征，但跨越边界 ν_{b} 的跃变（若存在）也要小得多。图 6 展示了一个例子，其中给出了在与图 5 相同的 η 值下的 $\theta_{\mathrm{V,c}}$ 分布图。

在约化偶极交换长度的某个范围内，我们发现慢度曲线上实际上可能不止一个焦散点。根据经验观察，当满足 $k_{\mathrm{c}} < 1$ 时，可能存在额外的焦散点 $\tilde{}$。当这一不等式成立时，焦散点的数量为一个或三个；也可能为两个，但仅出现在场与频率平面的一条一维曲线上；该曲线包含前述边界 ν_{b}。从定性角度看，这是因为在相应的场与频率范围 $\tilde{}$ 内，当 $\mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}k$ 穿过 0 时，其局部行为在某种程度上类似于如下类型的多项式：$P(\tilde{k};\ a,\ b) = (\tilde{k} - \tilde{k}_{\mathrm{c}})^3 + a \cdot (\tilde{k} - \tilde{k}_{\mathrm{c}}) + b$，其中 a 和 b 是实参数。如果 $a > 0$，则只有一个根；而如果 $a < 0$ 且 $|b|$ 足够小，则有三个互不相同的根。

具有这三个根的场与频率平面区域从现在起称为 $\mathcal{D}_3$，以区别于 $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_3$；在后者中，只有一个焦散点，而不是三个。为简单起见，我们现在将使用 P（k；a，b）近似式来描述 $\tilde{}$ $\mathcal{D}_3$ 对 $\mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}k$ 的情况。

先来看图7，它展示了与图4相同的场$\tilde{}$和频率映射（针对 k_{c}），以及另外两个约化焦散波数的映射。可以证明，另外两个解在左下方 $\mathcal{D}_3$ 的圆弧边界上重合，该边界将称为$\partial\mathcal{D}_{3,\ l}$。随着 ν 增大并穿过这条边界进入 $\mathcal{D}_3$，对应的情形是：$|b|$变得足够小，使另外两个焦散$\tilde{}$点（相对于具有最低 k_{c}的那个点）得以出现，这归因于a 足够负。另一方面，增大 h 主要会降低 a：穿过$\partial\mathcal{D}_{3,\ l}$后，会出现一对 k_{c}较高的焦散点。当然，恰好位于$\tilde{}\partial\mathcal{D}_{3,\ l}$ 上时，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}k$ 的另外两个根相同。

从 $\mathcal{D}_3$ 内部出发，如果增大约化频率，最终，中间 $\tilde{}$ 值的 k_{c} 焦散点会与具有最小约化波数的焦散点合并。这发生在 $\mathcal{D}_3$ 的另一条边界上，我们从现在起将其称为$\partial\mathcal{D}_{3,\ u}$。这种情况对应于 $\nu = \nu_{\mathrm{b}}(h,\ \eta)$。略高于这条边界时，$b$ 的值足够低，因此只剩下 $\tilde{}$个 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}k$ 的根。这就是图4中 k_{c} 不连续的原因：最低的焦散波数$\tilde{}$会跃变至边界ν_{b} 以下三个 k_{c} 中原本最大的那个。在实验中，这可能意味着，在该阈值波数附近的自旋波激发，其强度会随频率变化而显著改变。

根据以上内容，由于铁磁共振之外的两条边界分别意味着一对不同的焦散点重合，我们可以推断，在$\partial\mathcal{D}_{3,\ l}$ 与 $\partial\mathcal{D}_{3,\ u}$的尖点交点处，存在一个单独的焦散点，对应于慢度曲线上三个焦散点重合。这恰好就是图4插图中的点（h_{c}，ν_{c}）。

需要注意的是，尽管纯数学

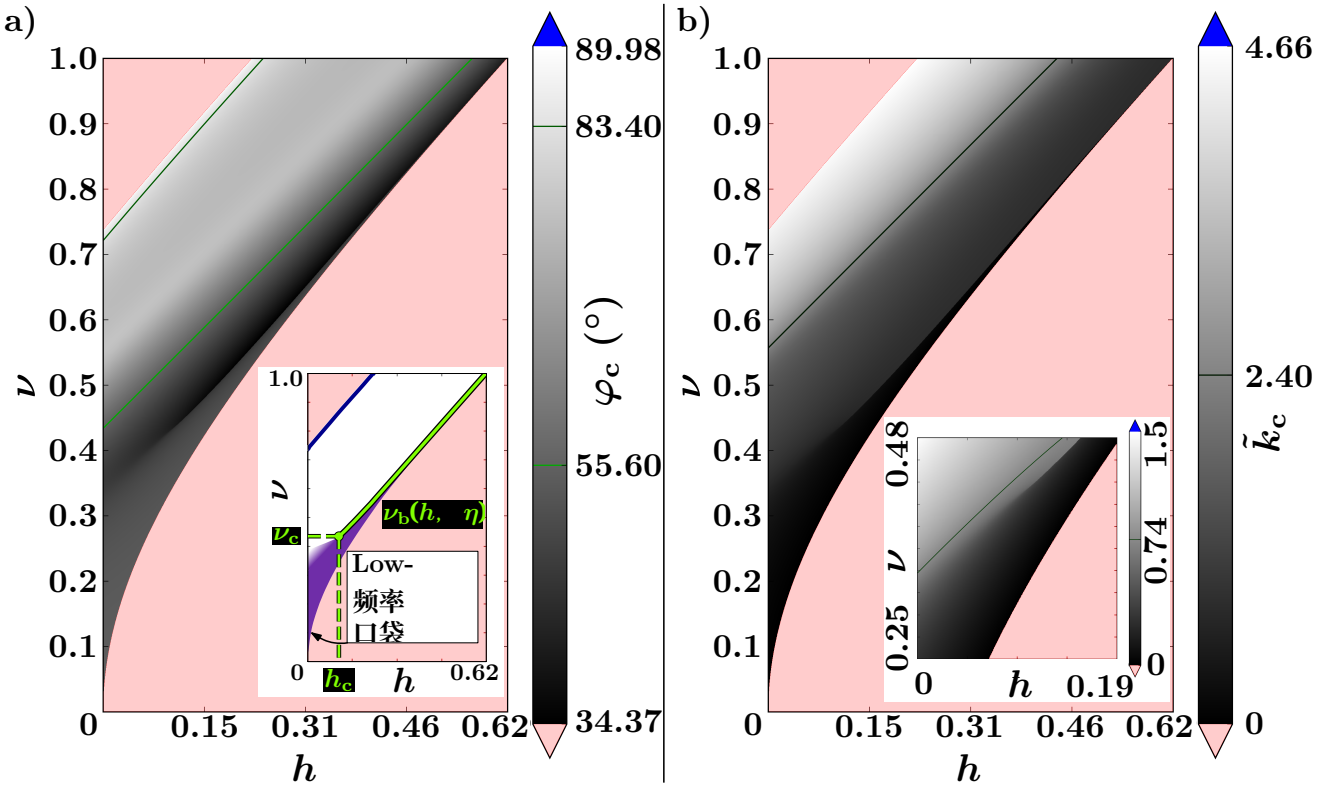

图4. $\eta = 0.12$时的频率和磁场图。磁场足够强时，在约化频率高于 $ca.\ 0.42$ 的区域，可以看到这两种性质都出现急剧上升。提醒读者，本文不考虑高于铁磁共振的磁场。为清晰起见，仅显示少数等值线。a) 焦散波前角 φ_c，插图示意了该图的显著特征。b) 归一化波数 $\tilde{k}_c = k_c d$；放大显示急剧上升幅度发生显著变化的区域。

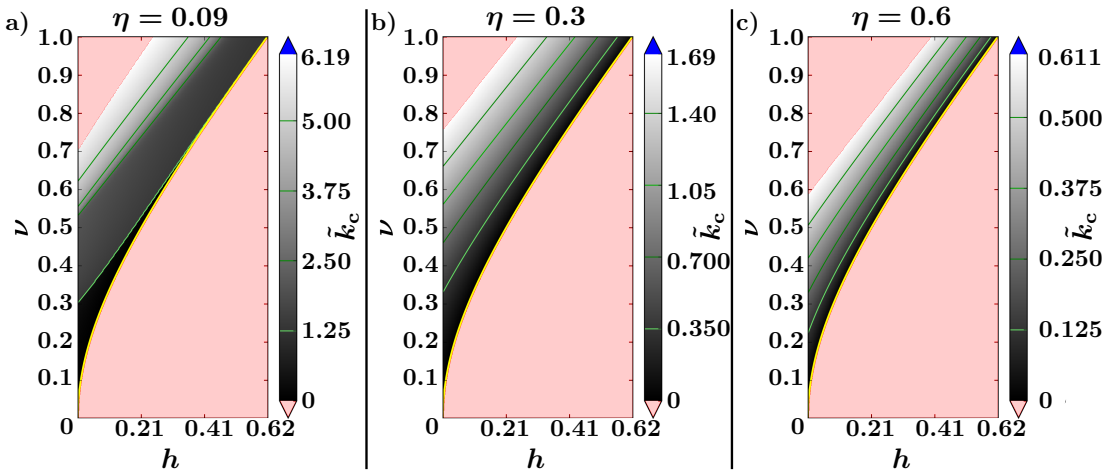

图 5. 场-频率图示例：a) $\eta = 0.09$，b) $\eta = 0.3$，以及 c) $\eta = 0.6$；图中仅显示约化焦散波数。

数学分析得出了定义明确且彼此分离的焦散点，但在实验中，区分彼此接近的焦散点或许是不可能的。事实上，˜并不存在能够直接表明 dθ_{V}/dk穿过 0 的实验特征；正如 Gallardo等人[41]所指出的，慢度曲线上导数较小但非零的区段，其表现可能与实际焦散点相似。尽管如此，多个焦散点的存在会限制慢度曲线，使其在这些点附近几乎呈直线；这应有利于形成显著的焦散。

C. 低频口袋

低频区间很重要，因为它既对应于我们的理论模型公认的有效区域，也对应于在实验中仍可较为容易地激发和检测的波长。

1. *Analytics*

如图 5 所示，低频口袋的形状乃至其是否存在，都强烈取决于所选的 η 值。尽管如此，我们可以通过取极限 $\nu \to 0$ 来研究该处焦散的行为。为了保持在铁磁共振以下，我们也取极限 $h \to 0$。假设 $h = 0$ 可简化量˜ tan θ_{V} =tan $\varphi \cdot [1 + f(k,\ \nu,\ \eta)]$, 的计算，其中 f 是补充材料中给出的函数。随后，我们可以对其关于 k 求导，取极限 $\nu \to 0$ 并对导数作泰勒展开；详情见补充材料。最终，我们得到:

$$\tilde{k}_{\mathrm{c}}(\nu \to 0) = 3\nu^2 + \mathcal{O}(\nu^4). \tag{7}$$

我们预计焦散波数趋于零；此外还可以证明，慢度曲线上最低的约化波数（仍然是在零外加磁场下），即 Damon-Eshbach 波数，按如下方式趋于零:

$$\tilde{k}_{\min}(\nu \to 0) = 2\nu^2 + \mathcal{O}(\nu^4) \tag{8}$$

这证明，无论其取值如何，焦散自旋波束都存在于频率趋近于零的范围内。在此极限下，相应的焦散波前角满足:

$$\cos\varphi_{\mathrm{c}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(\nu^2). \tag{9}$$

由后者，我们也可以得到 CSWB方向 $\theta_{\mathrm{V},\ \mathrm{c}}$:

$$\tan\theta_V(\tilde{k}_{\mathrm{c}}, h \to 0, \nu \to 0) = -2\sqrt{2} + \mathcal{O}(\nu^2) \tag{10}$$

这一结果的优点在于它不依赖于η；这并不令人意外，因为在我们所考虑的极限情况下，CSWB 的波长趋于无穷大，这意味着无论薄膜厚度 d 和偶极交换长度 l_{ex}多大，它的波长都必然远大于二者。 φ_{c} 和 $\theta_{\mathrm{V},\ \mathrm{c}}$ 极限值的数值分别约为 约54。74° 和 109。5°。

2. *Comparison with literature*

我们在表 I 中比较了关于焦散的实验报告与我们针对相同条件所作的预测，重点关注 CSWB方向。当存在三个焦散点时，对于$\theta_{\mathrm{V},\ \mathrm{c}}$ 所示的预测值，是在所有三个焦散点中找到的最接近值。

我们发现，在不少情况下，两者吻合得相当好，通常是在 η 取值较大时（即薄膜较薄时）；值得注意的例外是 Sebastian 等人 [28]的报告。然而，在这种情况下，由于自旋波受到强烈的横向限域，我们所采用的理论色散关系可能已不再准确。

此外，我们发现某些情况下的偏差要大得多。例如，若考虑 Gieniusz等人 [43] 在 4.62 GHz、98 mT 感应磁场下，于厚度为 4.5 µm 的钇铁石榴石薄膜中激发类焦散波束，我们的模型预测在约化波数 13.2 处存在一个焦散点，其波束方向为 169°。然而，该实验中相关的约化波数仅为百分之几， [43], 测得的波束方向为 128°。观察本例中的导数 dθ_{V}/dk ，˜即可轻松理解这种显著偏差的根源。如图 8 所示，在偶极主导区深处，dθ_{V}/dk 存在一个局部最小值˜ ˜，其位置为 $k \simeq 0.0659$ 。此外，与之对应的群速度方向为 128°；越过下一个局部最大值后，只有在 $k \simeq 0.9$处，才会再次达到类似的 dθ_{V}/dk 值˜ ˜。这说明，仅凭测量无法区分近乎直线的慢度曲线与真正的焦散点。

差异也可能源于源的激发效率并非理想，例如其方向性过强。K¨orner 等人 [44]激发类焦散自旋波束的研究便说明了这一点。一项已报道的时间分辨磁光克尔效应测量研究了在外加磁感应强度为 160 mT 时，以 16.08 GHz 激发频率驱动的 60 nm 厚坡莫合金薄膜；作者观测到双光束，其波前角为 65°，波束方向为 114°，约化波数为 0.314。然而，在这些条件下，预期的焦散自旋波束应具有 1.7063 的约化波数、138.62° 的波束方向，更不用说 53.27° 的波前角了。在这种情况下，受激自旋波似乎仅对应于作者的渐缩共面波导段所能激发的慢度曲线上相当狭窄的一段 [45]。事实上，在作者的实验条件下，测得的波前角为 65° 时，预期的约化波数约为 0.28（与天线预期激发效率的零点相距颇远 ¨），而波束方向为 120.

表 I. 文献报道的焦散自旋波束与我们对波束方向的预测的比较 $\theta_{\mathrm{V,\,c}}$。

参考文献	激励方法	材料（厚度，单位 nm）	预测 $\theta_{\mathrm{V,\,c}}$	测量值 $\theta_{\mathrm{V,\,c}}$	h	ν	η
[28]	波导的边缘模及非线性效导引与非线性效应	$Co_2Mn_{0.6}Fe_{0.4}Si$（30）	113°	123°	$3.81\cdot10^{-2}$	0.287	0.15
[42]	槽线终端角部和散射一个缺陷	钇铁石榴石 (235)	123°	124°、122°	0.126	0.427	$7.36\cdot10^{-2}$
[35]	角部 of 槽线终端	钇铁石榴石 (245)	119°	118°	0.126	0.427	$7.06\cdot10^{-2}$
[43]	自旋波散射反点	钇铁石榴石 ($4.5\cdot10^3$)	169°	128°	0.557	0.939	$3.84\cdot10^{-3}$
[27]	塌缩项目符号 自旋波	钇铁石榴石（$5\cdot10^3$)	137°	137°	1.040	1.442	$3.46\cdot10^{-3}$
[22]	自旋波在缺陷上的散射一个缺陷	钇铁石榴石（$7\cdot10^3$)	139°	135°	$2.47\cdot10^{-3}$	1.616	$2.47\cdot10^{-3}$

在心理条件下，预期的约化波数约为 0.28（与天线预期激发效率 [46] 的零点相距较远），波束方向为 120.2°。不过，我们无法解释波束方向上剩余的偏差。

3. *Experimental results*

现在，我们展示为验证理论方法而开展的实验结果。我们的目标是测量焦散自旋波束，并将其特性与我们的预测进行比较。为了在实验中获取焦散自旋波束，其磁场的倒易空间傅里叶分量必须覆盖广泛的波矢范围。能够获取所有波矢的理想情形对应于不现实的点源，显然不可能由任何高频天线实现。因此，我们在易于制造和宽带激发效率之间寻求折中，采用了半环形带状线天线。这种设计能够在 $\varphi \in [0,\pi]$ 范围内激发慢度曲线上的自旋波，即此前研究范围的两倍象限。当然，由于微波天线尺寸约为一微米，这种激发并不均匀。

我们的实验采用时间分辨磁光克尔效应（TR-MOKE）显微镜进行。在微波激发频率与激光探测脉冲之间保持固定相位的条件下，对磁化强度的动态面外分量 δm_z 在 xy 平面内进行空间成像。这使我们能够直接观察自旋波在磁性薄膜中的传播。该装置的波数分辨率处于偶极主导区。事实上，我们的空间分辨率r 约为 0.29 µm（见补充材料），因此，对于厚度为 $t \sim$100nm 的薄膜，可获取的最大约化波数为 $2\pi/(2r)\cdot t \sim 1$。

需要注意的是，微波天线在最终克尔图像中的位置，是从同时采集的形貌图像中提取的，而形貌图像与样品的反射率成正比。关于时间分辨磁光克尔效应的更多信息，请参阅补充材料。这些实验在厚度为 200 nm、采用液相外延生长于钆镓石榴石（GGG）衬底上的 YIG薄膜上进行。考虑到该材料的参数 [40], 除非另有说明，$\eta = 0.087$对于所有测量均成立。在 YIG薄膜上，采用光刻制备了宽度为 2 µm 至 3 µm 的微波天线，随后进行 Ar 预溅射，并通过电子束蒸发沉积 Cr（5 nm）/Au（100 nm 至 220 nm）。测量期间，外加偏置磁场 $\overrightarrow{H_{\mathrm{a}}}$ 始终保持固定，使其沿着天线结构各支脚的方向 x。测量几何构型示意图见图 9。在此，我们指出这种设计带来的一个问题。用微波场驱动天线时，天线支脚本身会激发达蒙–埃什巴赫几何构型 [13]下的自旋波。这些模式与焦散自旋波束的产生无关，但由于 YIG 中的衰减长度相对较长 [35]，它们可能传播至天线尖端，并与半环激发的自旋波发生干涉。为抑制这一效应，我们采用了两种不同的方法：要么将天线长度设为 50 µm，并刻蚀掉支脚与尖端之间的 YIG；要么从一开始就将天线制成 1 mm 长。

图 10.a) 所示的第一张克尔图像是在恒定微波频率 f =1.44GHz 和外场 $\mu_0 H_{\mathrm{a}}$ =5mT 下获得的。这对应于 $h = 0.028$, $\nu = 0.292$。波导的宽度为 2 µm，波导支脚与尖端之间的距离为 1 mm。在空间分布图中，可以看到两束传播方向明确的自旋波束；此外，它们的相速度和群速度明显不共线。此处，波束 II 源自象限 $\varphi \in [\pi/2,\pi]$ 中的波导激励。波束角度

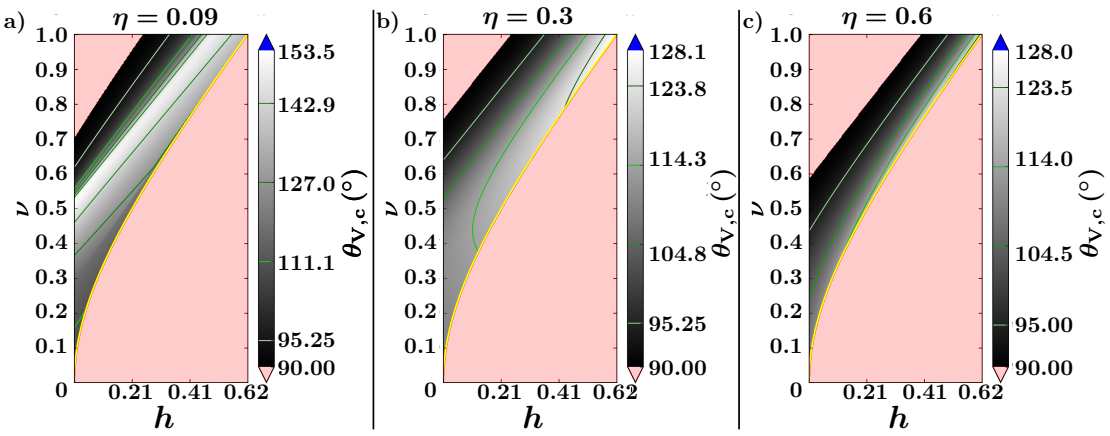

图6. 示例: CSWB方向$\theta_{V,\ c}$的场-频率图，分别对应 a) $\eta = 0.09$、b) $\eta = 0.3$ 和 c) $\eta = 0$ .6.

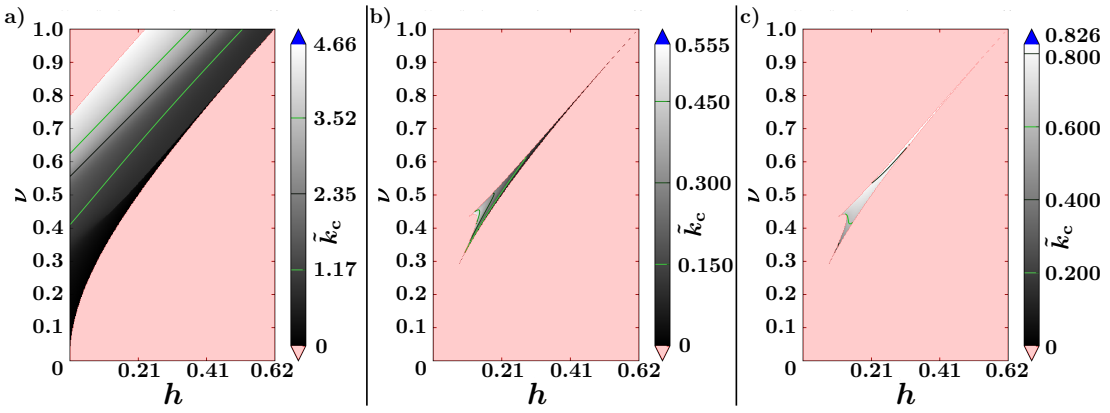

图7. $\eta = 0.12$的场-频率图，展示三个约化焦散波数。注意各图使用了不同的灰度范围。a) 存在多个焦散点时的最低 $\tilde{k}_c$，否则为 $\tilde{k}_c$ 的单一取值。b) 存在多个焦散点时 $\tilde{k}_c$ 的中间取值。c) 最大约化焦散波数。

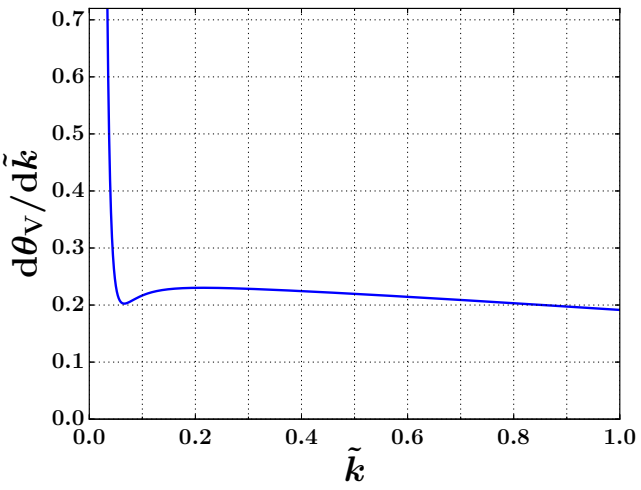

图 8. 在 Gieniusz 等人 *et al.* [43] 所述的 4.62GHz 自旋波激发中，计算得到的群速度方向相对于约化波数的导数。

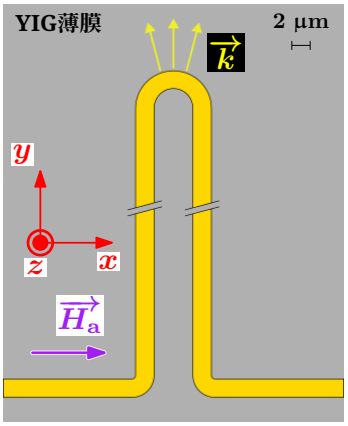

图 9. 测量几何构型示意图。半环形天线在宽广的角谱范围内激发自旋波传播。

相对于正 x 方向，波束 I 和 II 的角度分别为 $119.00°$（波束 I）和 $64.28°$（波束 II），由此得到的有效波束方向分别为 $\theta_I = 119.00°$ 和 $\theta_{II} = 180° - 64.28° = 115.72°$。$\theta_I$ 与 θ_{II} 之间的偏差仅仅源于外场与波导臂之间存在轻微未对准。由于 $\vec{H}_a$ 未与 x 轴完全平行，慢度曲线在我们的参考坐标系中旋转了一个小角度 $\alpha_H = (\theta_I - \theta_{II})/2 \approx 1.64°$。考虑到这一点，我们提取出平均波束方向 $\theta_{V,\,e} = 117.36°$、波前角 $\varphi_e = 50.66°$ 和约化波数 $k_e = 0.211$。这些实验结果与我们的理论方法吻合良好；事实上，在我们的实验条件下，理论预测 CSWB 的数值为 $\theta_{V,\,c} = 115.05°$、$\varphi_c = 51.29°$ 和 $k_c = 0.223$。

通过以下内容，我们可以进一步了解倒易空间中的情况：

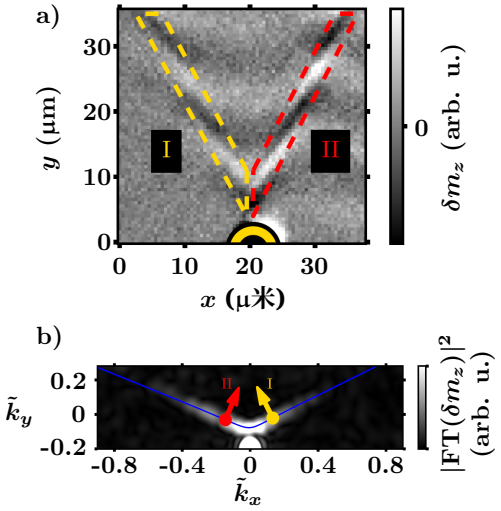

图 10. 在 $\eta = 0.087$、$h = 0.028$ 和 $\nu = 0.292$条件下获得的测量数据。a) 通过时间分辨磁光克尔效应获取的克尔图像。黄色和红色标出的两束自旋波束从天线尖端传播而出。b) 克尔图像的傅里叶变换（FT）模平方，以及预期的慢度曲线（蓝色）。黄色和红色的点与箭头分别表示预期的焦散点及其对应的群速度方向。焦散点 I 和 II 分别对应克尔图像中的自旋波束 I 和 II。

图 10.b) 所示的傅里叶变换（FT）数据。一般而言，FT 数据可直接观测 k 空间中的慢度曲线。为减少频谱泄漏，我们采用了汉宁窗加窗；这在频率和振幅精度之间实现了良好的折衷。可以看到，所选天线结构确实激发了多个方向上的波矢。谱中的缺口源于天线尺寸有限，正如前文所述。由模型得出的慢度曲线（蓝线）与数据吻合良好，并已根据外场角度 α_H 进行修正。更重要的是，该图证实天线结构能够探测到预期的焦散点（黄色和红色点），因为该区域的傅里叶幅值仍然足够大。总之，焦散点 I 和 II 可分别对应于克尔图像中的波束 I 和 II。

现在我们可以转而讨论模型预测的其他焦散点。所选三元组（η，h，ν）属于 $\mathcal{D}_3$ 集合；我们预期还会出现另外两个焦散点 $\theta_{V,\,c,\,2} = 113.74°$，$\varphi_{c,\,2} = 33.00°$，$k_{c,\,2} = 0.662$ 和 $\theta_{V,\,c,\,3} = 114.02°$，$\varphi_{c,\,3} = 28.78°$，$k_{c,\,3} = 1.227$。在我们的实验装置中，这些约化波矢实际上可以被分辨，其中 $k_{res} \approx 2.2$。然而，图 10.b) 中的倒易空间图像显示，$k \gtrsim 0.55$ 的振幅非常低，这意味着微波天线无法有效激发其他焦散点。因此，只能访问低频口袋。

针对相同的 ν，还拍摄了更多克尔图像，但

采用了不同的 h 值。 h 值的选取使其低于预期的铁磁共振场 h_{FMR} ≈0.078778。图11上部展示了部分生成的克尔图像。每张图中都能清楚看到一对自旋波束。图11下部汇总了对应 h值下的所有波束特性。这里，通过图像处理和自助法最小二乘回归，从每个单独的波束中提取相关参数。关于如何获得一组实验数据点的示例，见补充材料。预测值与实验测量值$\theta_{\mathrm{V,c}}$ 和 k_{c} 之间合理、有时甚至非常好的一致性，强烈表明这些确为焦散自旋波束。波束方向的偏差大多处于外场角度的范围内。预测与测得的波前角 φ_{c} 之间较大的差异，归因于焦散自旋波束的窄度。

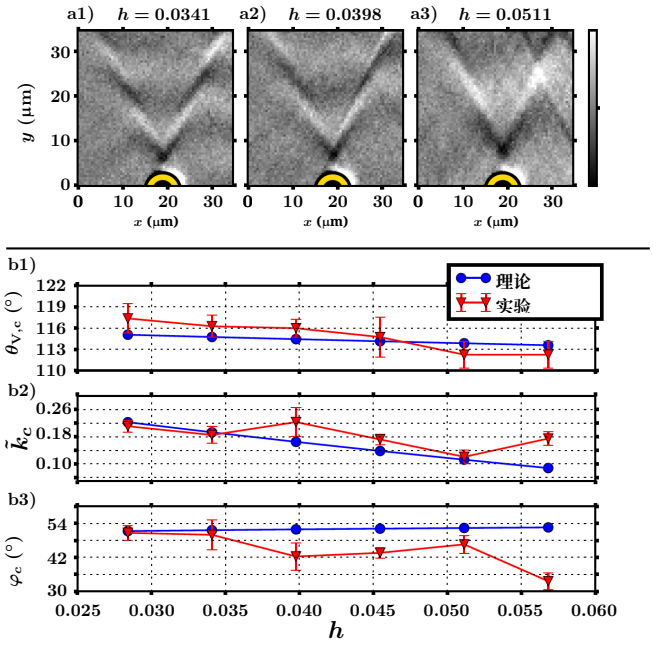

图11. $\eta = 0.087$ 和 $\nu =$ 0.292 的测量数据。上部：约化场分别为 a1) $h = 0.0341$、a2) $h = 0.0398$ 和 a3) $h = 0.0511$ 时采集的克尔图像。b1-3) 实验结果与焦散点性质的理论预测 $\theta_{\mathrm{V,\,c}}$, $\tilde{k}_{\mathrm{c}}$, φ_{c} 的比较。误差棒表示自助法拟合过程得到的标准差。

此外，还检测到了与焦散点不重合的类波束特征。这一次，测量采用 50 μm 天线结构和部分刻蚀薄膜进行。天线宽度为 3 μm。 f =1.84GHz (ν = 0.372) 和 $\mu_0 H_{\mathrm{a}}$ =5mT (h = 0.028) 下得到的克尔图如图 12 左上部分所示。在这种几何结构中，无法完全抑制从钇铁石榴石边缘传播的类 Damon-Eshbach 模式；它表现为平面波背景。我们用于分析自旋波束的过程得到 $\theta_{\mathrm{V,\,e}}$ = 136.33°, φ_{e} = 68.97° and k_{e} = 0.522，而我们的模型预测存在一个焦散点 with $\theta_{\mathrm{V,\,c}} = 121.39°$, $\varphi_{\mathrm{c}} = 35.84°$ and $k_{\mathrm{c}} = 1.564$。

实验中观测到的波束可能有两个来源。首先，预测在距离 k_{e} 相对较近处存在一条近乎笔直的慢度曲线，类似于 Gieniusz 等人 [43] 的情况。图12.b)中的 $\mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}k$图显示，在 $0.6 \lesssim k \lesssim 1.2$ 之间（以绿色虚线标出）几乎保持恒定。实验焦散点与近乎笔直的慢度曲线之间的接近程度也展示于

图12下部的傅里叶变换数据。这里，虚线绿色半圆表示 $k = 0.6$的下界，提取出的波束点以黄色突出显示。对于慢度曲线的这一部分，预测的群速度方向最多可达 121.39° 。然而，这一波束方向与测量结果仍然大相径庭。此外，计算得到的慢度曲线（蓝色曲线）与傅里叶变换数据有显著偏差。倒易空间图像与我们的模型之间的差异可能表明模型适用性的局限，因为厚度为 $\eta = 0.087$ 的薄膜或许已不能再视为薄膜。这会导致在较高 ν 值下的预测可靠性较低。波束出现的另一个可能原因是微波天线的激发效率，因为快速傅里叶变换频谱中存在许多间隙。波束似乎位于其中一些间隙附近，因此可能对应于该区域内仅有一小段慢度曲线被激发。

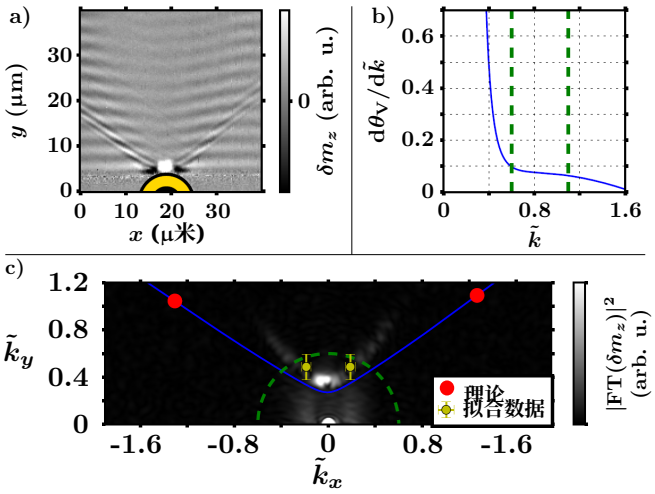

图 12. a) 使用 $\eta = 0.087$ $h = 0.028$ 和 $\nu = 0.372$获得的双光束克尔图像。b) 群速度方向对约化波数的导数计算值。绿色虚线标出接近直线的慢度曲线。c) 克尔图像的傅里叶变换。实验观测到的光束参数以黄色表示，计算得到的慢度曲线以蓝色表示，计算得到的焦散点以红色表示。绿色虚线半圆表示慢度曲线近直线部分的下限。

D. 高阶焦散点

根据III B节的结论，我们知道，在$\partial\mathcal{D}_{3,l}$与$\partial\mathcal{D}_{3,u}$的交点处，慢度曲线上存在一个焦散点；在上述基于近似式$\tilde{\mathcal{P}}(k;a,b)$的示意性讨论中，它对应于 $a=0$和 $b=0$，这意味着该点附近的$\mathrm{d}\theta_{\mathrm{V}}/\mathrm{d}\tilde{k}\sim(\tilde{k}-\tilde{k}_{\mathrm{c}})^3$。换言之，在这一交点处，也就是图7所示的尖点处，焦散点并非慢度曲线上 θ_{V} 的简单极值点，而是一个波动点，其附近$\theta_{\mathrm{V}}-\theta_{\mathrm{V},\mathrm{c}}\sim(\tilde{k}-\tilde{k}_{\mathrm{c}})^4$。

这种波动点的存在尤其值得关注，因为对 k 的依赖关系中 θ_{V} 的阶数较高，意味着群速度方向上的极值点更为平坦，因此慢度曲线中可能有更大部分对 CSWB 有贡献。此外，正如 II.II B节所讨论的，这并不一定意味着 CSWB 的谱宽会增加，因为谱宽取决于表观波长。为说明这一点，我们在图13中展示了群速度方向以及自然波长和表观波长在一个非常接近高阶焦散点的焦散点附近的变化；这里，该高阶焦散点对应的临界场 h_{c} 为零。所考虑的慢度曲线对应于 $h=h_1=1.15\cdot10^{-21}$、$\nu=\nu_1=0.315279504$、 $\eta=\eta_1=0.10253664614147$。

下面简要说明坐标$\nu_{\mathrm{c},0}=\nu_{\mathrm{c}}(h_{\mathrm{c}}=0)$和$\eta_{\mathrm{c},0}=\eta_{\mathrm{c}}(h_{\mathrm{c}}=0)$是如何以较高精度求得的。更多详情请参阅补充材料。首先，我们手动粗略搜索一个 η 值，使场强—频率图中的 $\mathcal{D}_3$ 尖点位于纵轴上。由此得到初始值$\eta^{(0)}_{\mathrm{c}\,0}=0.10$和$\nu^{(0)}_{\mathrm{c}\,0}=0.31$。在此条件下，找到了一个$\tilde{k}^{(0)}_{\mathrm{c}\,0}\simeq0.73$焦散点。随后，我们开始迭代计算，使用色散关系的适当泰勒展开，以及$\theta_{\mathrm{V}}(h=0,\ \eta,\ \nu,\ k,\ \varphi)$的精确表达式。每一步都根据寻找波动点得到的新解更新这些量，从而收敛到数值解；我们将其视为$\partial\mathcal{D}_{3,l}$与$\partial\mathcal{D}_{3,u}$的交点。

经过三次迭代，估计值的相对变化量绝对值稳步减小，从第一步的至多 5% 降至最后一步的至多 $5\cdot10^{-6}$，由此得到以下估计值：$\tilde{k}^{(g)}_{\mathrm{c}\,0}=0.731717$、$\eta^{(g)}_{\mathrm{c}\,0}=0.1025366$、$\nu^{(g)}_{\mathrm{c}\,0}=0.3152796$。后者可以与例如 图13所用的手工精修值相比：$\nu=\nu_1=0.315279504$, $\eta=\eta_1=0.10253664614147$, 对应于 $k_{\mathrm{c}}=0.725904$。必须指出，就$k_{\mathrm{c},0}$而言，相对差异略大，这是由于$k_{\mathrm{c}}(\nu,\eta,h\to0)$对$\eta$的依赖极其陡峭。我们确实强调，$(\nu_{\mathrm{c},0},\eta_{\mathrm{c},0})$的确切位置必然不同于$(\nu_1,\eta_1)$，但足够接近，能够凸显慢度曲线若干特征在定性行为上的差异。最后，我们指出，对于

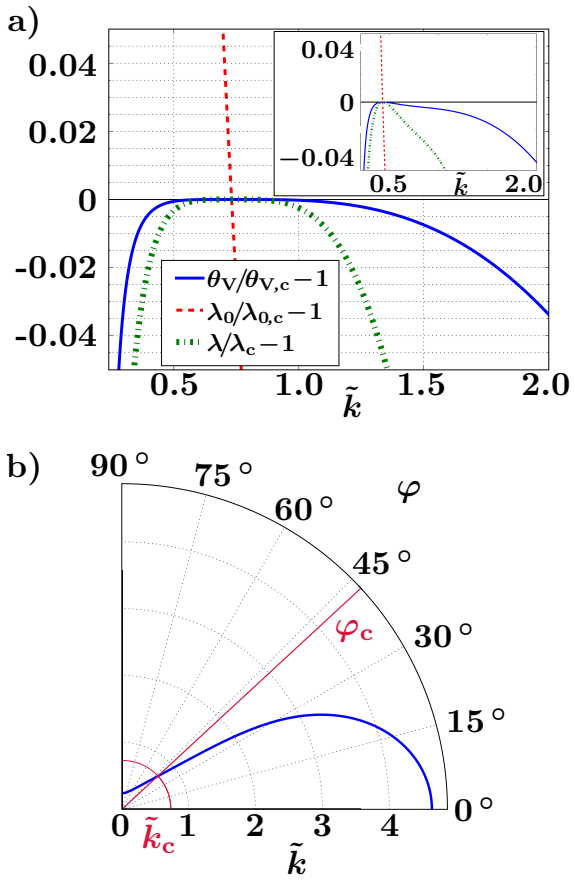

图13。a）以下焦散点性质相对偏差随 k 变化的曲线：群速度方向 θ_{V}、自然波长 $\lambda_0=2\pi/k$ 和表观波长 $\lambda=2\pi/[\tilde{k}\cos(\theta_{\mathrm{V}}-\varphi)]$。主图：$h=h_1=1.15\cdot10^{-21}$、$\nu=\nu_1=0.315279504$、$\eta=\eta_1=0.10253664614147$，它们与 ν_{c} 和 η 的值极为接近，此时 $h_{\mathrm{c}}=0$。插图：相同的 h 和 $\eta=\eta_1$，$\nu=0.95\cdot\nu_1=0.2995155288$。b）$\nu_1$、$\eta_1$ 和 h_1 的慢度曲线；$\tilde{k}_{\mathrm{c}}\simeq0.7259$。为清晰起见，未显示 ν_2 处的慢度曲线，因为它与另一条曲线非常相似。

图13中的参数， $\theta_{\mathrm{V,c}}=118.36°$、 $\varphi_{\mathrm{c}}\simeq 42.75°$、$\lambda_{0,\mathrm{c}}=84.41l_{\mathrm{ex}}=8.655d$和 $\lambda_{\mathrm{c}}\simeq 339.7l_{\mathrm{ex}}=34.83d$。

现在我们更详细地考察高阶焦散点的性质。从图13可以清楚看出， $\theta_{\mathrm{V,c}}$ 与表观波长 λ 对 k 的依赖关系（分别以蓝色和绿色表示）在焦散点附近呈四次而非二次变化；焦散点处，自然波长的偏差（红色）经过 0。观察对应的慢度曲线即可轻易理解其变化为何陡峭得多：在图13.b) 中， k_{c} 附近的曲线不仅几乎是直线，而且 k 与 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}s$ 之间的夹角 γ 很小，为 $\gamma\simeq 14.38°$。因此，由于 $\mathrm{d}(\tilde{k}^2)/\mathrm{d}s$ 很大， $\lambda_0\propto 1/\tilde{k}$ 变化很快。

相比之下，可以证明，在 λ 关于 $(s-s_{\mathrm{c}})/k_{\mathrm{c}}$ 在 λ_{c} 附近的泰勒展开中，焦散点处的第一项系数总是恰好为零。我们再次强调，这是由于 $\vec{k}$ 在焦散点两侧的投影保持不变所致。若焦散点为高阶焦散点，则可以证明（见补充材料），在这一项中， φ 的二阶和三阶变化所产生的贡献，与 k 的相应贡献相互抵消。换言之，投影 $k\cdot\cos(\theta_{\mathrm{V}}-\varphi)$ 在 $(s-s_{\mathrm{c}})/k_{\mathrm{c}}$ 中直到四阶都保持恒定。另一方面，如果所考虑的焦散点是 θ_{V} 的常规极值点，那么项 $\propto(s-s_{\mathrm{c}})^2$ 将不为零。

总结上述段落：出于几何原因，高阶焦散点抑制了 λ_{c}附近表观波长的二次和三次变化。因此， λ 在高阶焦散点处呈现出显著的四次行为。此外，我们指出，即使频率只有微小偏移，也会使其呈现出明显的二次行为。图13的插图展示了这一点，其中显示了慢度曲线在 $h=h_1=1.15\cdot 10^{-21}$,$\eta=\eta_1=0.10253664614147$处相同的相对变化，但 $\nu=0.95\cdot\nu_1$ =0。2995155288。

因此，我们已经证明，在高阶焦散点足够近的邻域内，波数范围宽广的激发能够产生方向定义非常明确的窄带CSWB。因此，预计这一现象在实验中极为有利，因为任何实际的天线都不可能使激发效率随波数变化的范围任意狭窄。只要天线设计能够在关注的（宽广）范围内产生具有傅里叶分量、且相位处于宽度为$<\pi$的给定区间内的交流磁场，所有相应的自旋波就会相干叠加成一个谱宽极小的波束。换句话说，在这种情况下，虽然有悖直觉，但激发波数不同 的额外波矢不会使载波振幅彼此抵消，反而会使其增大。这自然引出了一个问题：高阶焦散点的辐射会比普通焦散点强多少？更一般地说，焦散会带来自旋波振幅多大的增强？然而，这超出了本文的讨论范围。

最后，本节指出，与高阶焦散点对应的约化场 $h_{\mathrm{c}}(\eta)$ 会随约化偶极交换长度的增加而减小。因此，预计这一特征仅在$\eta<\eta_{\mathrm{c},0}\simeq 0.1025366$时存在。

E. 合并的焦散自旋波束

现在我们转而讨论阈值频率 $\nu_{\mathrm{m}}(h,\eta)$，它对应于 $\mathcal{D}$ 的上边界；即 超过该频率后便不再存在焦散点。如图6所示，随着 $\nu\to\nu_{\mathrm{m}}(h,\eta)$，CSWB方向$\theta_{\mathrm{V,c}}$ 趋向于 $\pi/2$ 。图14对此作了说明，其中展示了 η_1, h_1和 $\nu_2=0.71836419052$对应的慢度曲线。我们再次强调，严格来说， $\nu_{\mathrm{m}}(h,\eta)$是一个无限窄的边界，因此 $\nu_2\neq\nu_{\mathrm{m}}(h_1,\eta_1)$；但在这些条件下，我们在慢度曲线上发现了一个唯一的焦散点，其$\pi/2-\varphi_{\mathrm{c}}\simeq 0.32\mu\mathrm{rad}$，并且 $\theta_{\mathrm{V,c}}$ 等于 $\pi/2$ （在数值精度范围内）。此外，在 $\nu_2'=\nu_2+\delta\nu$处，因$\delta\nu=1\cdot 10^{-11}$，我们在慢度曲线上找不到任何焦散点。

因此，我们认为 (ν_2,h_1,η_1) 处的慢度曲线可视为与 $(\nu_{\mathrm{m}}(h_1,\eta_1)\ h_1,\eta_1)$ 处的慢度曲线相似。它在 $\varphi=\pi/2$ 附近非常平直，这在某种程度上令人想起高阶焦散点讨论中所见的情形。为更详细地说明这一点，图14.b)展示了 φ_{c} 处焦散点附近群速度方向 θ_{V}、自然波长和表观波长的相对偏差。需要指出的是，在本例中，偏差是相对于归一化后的曲线坐标 s 绘制的，其中归一化因子为慢度曲线的长度 s_{M} ，而图13中采用的是 k 。这一选择的依据是：(i) 在本例中，最低阶项为 $\tilde{k}-\tilde{k}_{\mathrm{c}}=\mathcal{O}(s^2)$，而非前文中的 $\mathcal{O}(s-s_{\mathrm{c}})$；(ii) 最小和最大归一化波数 k_{m} 的相对差异小得多，分别为 k_{M}： $k_{\mathrm{m}}\simeq 5.17$ 和 $k_{\mathrm{M}}\simeq 7.91$，相比之下，前文中的差异为 $k_{\mathrm{m}}\simeq 0.240$ 和 $k_{\mathrm{M}}\simeq 5.66$ 。(i)意味着，对于 (ν_2,h_1,η_1)， k 不能作为沿曲线的有意义的横坐标，因为 $\mathrm{d}k/\mathrm{d}s=0$；而对于 (ν_1,h_1,η_1)，情况并非如此。(ii)则表明，(ν_2,h_1,η_1) 的慢度曲线比 (ν_1,h_1,η_1) 的慢度曲线更接近四分之一圆；事实上，对于 (ν_2,h_1,η_1)，我们发现 $1-[\pi/2\cdot(k_{\mathrm{m}}+k_{\mathrm{M}})/2]/s_{\mathrm{M}}=3.7\%$。因此，$s/s_{\mathrm{M}}$ 能更直观地体现慢度曲线中有多少部分对 CSWB 有贡献。

从图中可以看出，焦散点附近的表观波长似乎再次呈现四次行为。我们在补充材料中证明，事实确实如此：在 $\nu=\nu_{\mathrm{m}}(h,\eta)$ 的条件下，在最低非零阶， $\theta_{\mathrm{V}}(s\to 0)-\pi/2$ 在 $s=0$ 附近随 s^3 变化，而 k 和 φ 在最低阶的变化（分别在 k_{m} 和 $\pi/2$ 附近）会在投影 $k\cdot\cos(\theta_{\mathrm{V}}-\varphi)$ 中相互抵消。

因此，位于 $\nu_{\mathrm{m}}(h,\eta)$ 的焦散点满足

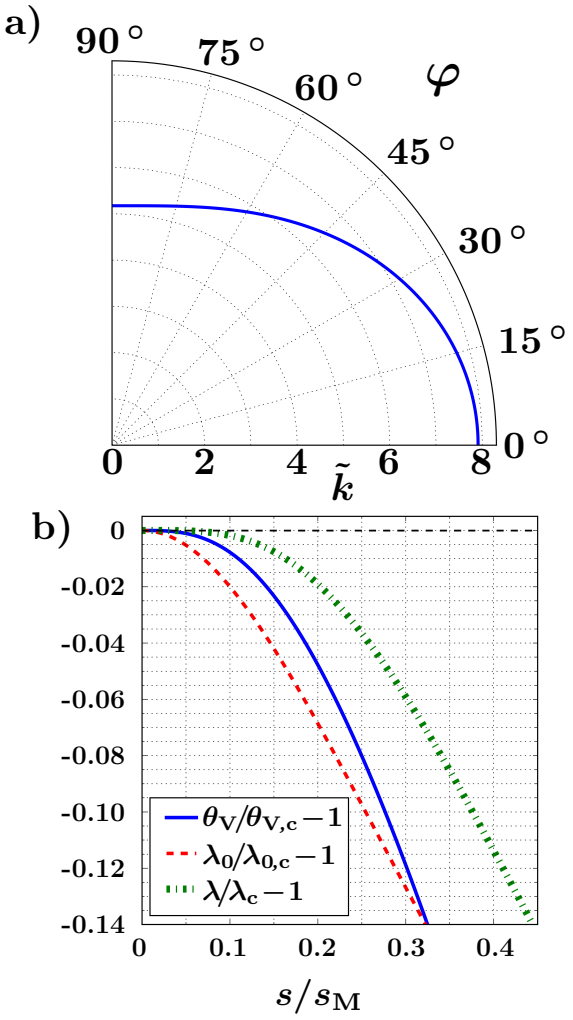

图 14. a）在（$\nu_2 = 0.71836419052, h_1, \eta_1$）处的慢度曲线。b）群速度方向 θ_{V} （蓝色）、自然波长 λ_0 （红色）和表观波长 λ（绿色）的相对偏差，随慢度曲线上的曲线坐标变化；曲线坐标按其总长度 s_{M}归一化。

来自合适且具有中等方向性的天线的激发，将有效地呈现窄带特性，并且在群速度方向 $\theta_{\mathrm{V},\ \mathrm{c}} = \pi/2$ 附近发散较弱。这种取向在实际应用中也有优势：只要所用天线能够激发足够高的波数，CSWB方向在这种情况下就简单地垂直于外加磁场。此外，由于色散关系的对称性，CSWB还会利用慢度曲线在 $\varphi \gtrsim \pi/2$ 处的部分，该部分也具有 $\theta_{\mathrm{V}} \simeq \pi/2$。因此，在这一特定频率下，两个 CSWB 实际上发生了合并，预计会产生较大的自旋波振幅。我们注意到，Kim等人 [29]在垂直磁化的超薄薄膜中，以及 Gallardo等人 [41]在合成反铁磁体中，已经通过模拟观察到了这种合并现象。为求完整，下面我们从解析角度讨论一下会发生什么

当正好位于$\varphi = \pi/2$ 下方和上方的两个焦散点重合时的视图。必须注意，它们分别对应于 θ_{V}的最大值和最小值，暂时针对 $\varphi \in [0, \pi]$进行考察。因此，当它们在 $\varphi_{\mathrm{c}} = \pi/2$ 处重合时，严格来说便不再存在焦散点。换言之：在 ν_{m}（h, η）以下， $\varphi \in [0, \pi]$之上， θ_{V} 不断增大，直到第一个焦散点，在此达到$\theta_{\mathrm{V,c}} > \pi/2$；随后减小，直至第二个焦散点（对应于 $\varphi > \pi/2$），在那里达到$\pi - \theta_{\mathrm{V,c}}$；之后再次增大，并在 $\varphi = \pi$时达到 π 。恰在 ν_{m}（h, η）处，它单调递增并存在一个拐点；而在 ν_{m}（h, η）以上，它严格单调递增。

为了超越此处展示的特例，我们现在研究 ν_{m}($h \to 0,\ \eta$) $= \nu_{\mathrm{m},\ 0}(\eta)$ 随约化偶极交换长度η的变化。与高阶焦散点类似，研究其随约化场的变化很快就会变得复杂。因此，我们聚焦于 $\nu_{\mathrm{m},\ 0}(\eta)$：它既是焦散自旋波束合并时的最低频率，也是一个更容易在实验中达到的阈值频率，因为外加磁场趋于零，前提是所研究的薄膜足够软。

我们确实注意到，当约化偶极交换长度低于某个限值时，我们所用的模型将不再有效。不过，已有研究表明，在足够高的频率下，Kalinikos 和 Slavin 推导的解析色散关系能够再次以较高精度描述自旋波。

图15展示了数值确定的 $\nu_{\mathrm{m}0}$ 对 η 的依赖关系，以及相应焦散自旋波束的波长 $\lambda_{\mathrm{m}}/l_{\mathrm{ex}}$ （以偶极交换长度归一化）与之的关系。补充材料中介绍了如何先粗略估算这条曲线，再利用实际场-频率图对其进行细化。在焦散自旋波束合并的情况下，表观波长与自然波长相等，因为 $\theta_{\mathrm{V},\ \mathrm{c}} = \varphi_{\mathrm{c}} = \pi/2$。这些图中的 η 最小值对应于我们所用的最小值；在该值下，慢度曲线（外加磁场趋于零时）只有一个连通分支。尽管我们预计研究结果在最低的 η 下未必成立，但其准确性应会随着 η 增大而提高；至少对于 $\eta > 1$ ，准确性应已足够，因为在这种情况下，所研究的铁磁薄膜确实可视为薄膜。

如果考虑寻找合并的焦散自旋波束，图15.b)表明，对于 $\eta = l_{\mathrm{ex}}/d$ 的实际取值，焦散自旋波束的表观波长 λ 仅比材料的偶极交换长度大一个数量级左右，通常为 $\lambda \lesssim 25 l_{\mathrm{ex}}$。这与零磁场下高阶焦散点的情况形成鲜明对比：其自然波长为 $\lambda_{0,\ \mathrm{HO}} \simeq 84 l_{\mathrm{ex}}$，表观波长则为 $\lambda_{\mathrm{HO}} \simeq 334 l_{\mathrm{ex}}$。因此，尽管采用常规电子束光刻制成的天线或许就能轻易激发高阶焦散点，但对于合并的 CSWB，要在适当的波矢下实现足够高的激发效率，似乎会颇具挑战性

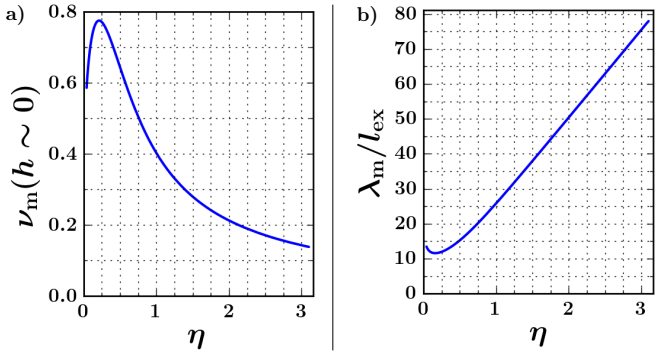

图15. a) $\nu_{m,\ 0}(\eta)$ 随约化偶极交换长度 η 的变化。b) 对应的约化波长 $\tilde{\lambda}_m = (2\pi/\tilde{k})/\eta = \lambda/l_{ex} = \lambda_0/l_{ex}$。此处，由于相位速度与群速度共线，自然波长与表观波长一致。

这将相当困难。例如，即便是低磁化强度、低阻尼且相当软的亚铁磁体钇铁石榴石，其特征也为 l_{ex} =17.3 nm [40]，；这意味着，即使在最容易的情况下，也需要特征周期短至约 200nm 的高端天线。

IV. 结论

我们重点研究了软薄铁磁薄膜中自旋波焦散的一些特性。在理论方面，我们的方法基于 Kalinikos 和 Slavin 建立的解析色散关系。我们表明，文献中关于 CSWB 的许多报道都可以在这一框架下得到解释，尽管缺少真正 CSWB 的特征标志仍可能造成一些歧义。遵循大多数研究的做法，我们对专为研究 CSWB 而设计的样品进行了时间分辨磁光克尔效应显微术测量。尽管铁磁材料的厚度较大，我们的测量结果仍与预测高度吻合，从而验证了这一方法。此外，我们特别指出了此情况下相位速度与群速度之间的显著偏离，并成功观测到了窄焦散自旋波束。

恰好在我们的实验所能达到的偶极相互作用主导区间边界处，我们预测了这种特殊焦散点的存在。我们将其称为高阶焦散点，因为它对应的是群速度方向的拐点，而非二次极值点。研究表明，这种构型尤为有趣，因为表观波长也呈现四次行为，这意味着即使采用宽带激励，CSWB 的谱宽仍然很窄。尽管我们重点研究了约化偶极交换长度的特殊值 η_c，此时高阶焦散点出现在外加磁场为零的情况下，但我们强调，只要所用的色散关系仍然有效，对于 $\eta < \eta_c$，这一现象也会在非零外加磁场下出现。

最后，我们研究了焦散自旋波束合并现象。我们再次详细研究了外加磁场趋于零的情况，但只要激发频率足够高，任意磁场值下都可能发生合并。关于模型的有效性，需要指出，虽然 η 趋于零会使所选色散关系存在问题，但合并总是发生在接近交换作用主导区的频率下。在这一频率范围内，实际自旋波色散关系与 Kalinikos 和 Slavin 模型之间的差异会减小 [39]。因此，我们认为，对于较低的 η，得到的合并频率 ν_{m0} 可能略有偏差，但其现象学特征应与较大的 η 时相同；在后者情况下，我们预计预测结果会更加可靠。随着焦散自旋波束合并，慢度曲线中有相当大的一部分会对 $\theta_V = \varphi = \pi/2$ 附近的自旋波发射产生贡献。因此，这种构型有望用于引导强自旋波束，其波长可短至 $\sim 15 l_{ex}$。

迄今仍未解决的最重要问题之一，是如何量化并预测与焦散自旋波束相关的振幅增强。更确切地说，构建焦散自旋波束时，自然波长与表观波长之间的关键区别，以及通常的惠更斯-菲涅耳方法因相速度与群速度之间强烈不共线而存在的不足，都要求我们采用其他方法评估其振幅。我们旨在阐明这些问题，并超越通常所描述的振幅发散现象，从而调和理论上（慢度曲线上）曲率趋于零与实验中振幅有限这两者之间的差异。

[1] H. Yu、J. Xiao 和 H. Schultheiss，基于磁织构的磁振子学，Physics Reports **905**，1（2021）。[2] B. Divinskiy、H. Merbouche、V. E. Demidov、K. O. Nikolaev、L. Soumah、D. Gou´er´e、R. Lebrun、V. Cros、J. Ben Youssef、P. Bortolotti、A. Anane 和 S. O. Demokritov，自旋流驱动磁振子玻色-爱因斯坦凝聚的证据，Nature Communica-tions**12**，10.1038/s41467-021-26790-y（2021）。[3] D. Bouzidi 和 H. S uhl，布洛赫畴壁的运动，《物理评论快报》**65**，2587（1990）。[4] D. D. Stancil 和 A.Prabhakar，*Spin waves - Theory and applications* 2009（Springer New York，NY，）。[5] A. V. Chumak，磁振子计算基础，ArXiv 预印本（2019），arXiv:http://arxiv.org/abs/1901.08934v1。[6] D. Petti、S. Tacchi 和 E. Albisetti，工程化自旋织构磁振子学综述，Journal of Physics D: Applied Physics **55**，293003（2022）。

[7] D. Seo、S. Hwang、B. Kim、Y. Yang、S. Yoon 和 B. K. Cho，《具有两个矩形块的磁性系统中可调谐的非对称自旋波激发与传播》，《科学报告》11，10.1038/s41598-021-02967- 9（2021）。[8] Y. Au、M. Dvornik、T. Davison、E. Ahmad、P. S. Keat- ley、A. Vansteenkiste、B. V. Waeyenberge 和 V. V. Kruglyak，《聚焦超短光脉冲直接激发传播自旋波》，《物理评论快报》110，097201（2013）。[9] St¨ohr, J. 和 Siegmann, H. C., *Magnetism: From Fun-damentals to Nanoscale Dynamics*（施普林格，柏林-海德堡，2006）。[10] V. Sluka、T. Schneider、R. A. Gallardo、A. K´akay、M. Weigand、T. Warnatz、R. Mattheis、A. Rold´an- Molina、P. La nderos、V. Tiberkevich、A. Slavin、G. Sch¨utz、A. Erbe、A. Deac、J. Lindner、J. Fassbender 和 S. Wintz，《各向异性自旋纹理中纳米尺度波长一维和二维自旋波的发射与传播》，《自然·纳米技术》14，328 2019( )。[11] F. G. Aliev、A. A. Awad、D. Dieleman、A. Lara、V. Metlushko 和 K. Y. Guslienko，《通过宽带铁磁共振探测图案化磁点中的局域畴壁激发》，《物理评论B》84，144406（2011）。[12] M. Golebiewski、P. Gruszecki、M. Krawczyk 和 A. E. Serebryannikov，《薄铁磁膜中的自旋波塔尔博特效应》，《物理评论B》102（2020）。[13] R. W. Damon 和 J. R. Eshbach，《铁磁体板的磁静力模》，《固体物理与化学杂志》19，308（1961）。[14] Y. A. Kravtsov 和 Y. I. Orlov, *Geometrical Optics ofInhomogeneous Media*，施普林格波现象系列，第6卷（施普林格出版社，柏林-海德堡，1990）。[15] Y. A. Kravtsov 和 Y. I. Orlov， *Caustics, Catastrophes and Wave Fields*，施普林格波现象系列，第15卷（施普林格，柏林、海德堡，1993）。[16] T. Poston 和 I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Ap-plications*，数学调查与参考著作，第2卷（多佛出版社，1996）。[17] G. A. Northrop 和 J. P. Wolfe，《锗中的弹道声子成像》，《物理评论B》22，6196（1980）。[18] B. Taylor、H. J. Maris 和 C. Elbaum，《固体中的声子聚焦》，《物理评论快报》23，416（1969）。[19] H. J. Maris，《弹性各向异性导致晶体中热脉冲增强》，《美国声学学会杂志》50，812（1971）。[20] A. G. Every，《一阶空间色散对声子聚焦的影响：在石英中的应用》，《物理评论B》36，1448（1987）。[21] H. J. Maris，《声子聚焦》，载于 *Nonequilibrium phononsin nonmetallic crystals*，凝聚态科学中的现代问题，第16卷，W. Eisenmenger 和 A. A. Kaplyanskii 编（North Holland，1986），第51–90页。[22] O. B¨uttner、M. Bauer、S. O. Demokritov、B. Hillebrands、Y. S. Kivshar、V. Grimalsky、Y. Rapoport 和 A. N. Slavin，《通过时空分辨布里渊光散射观测钇铁石榴石薄膜中偶极自旋波的线性与非线性衍射》，《物理评论B》61，11576（2000）。[23] V. Veerakumar 和 R. E. Camley，《薄铁磁膜中的磁振子聚焦》，《物理评论B》74，214401（2006）。[24] R. Khomeriki，薄磁性薄膜中的自聚焦磁静力波束，《欧洲物理学杂志B》41，219（2004）。[25] V. E. Demidov、S. O. Demokritov、D. Birt、B. O'Gorman、M. Tsoi 和 X. Li，来自微型磁性薄膜波导开放端的自旋波辐射，《物理评论B》80，10.1103/physrevb.80.014429（2009）。[26] T. Schneider、A. A. Serga、A. V. Chumak、C. W. Sandweg、S. Trudel、S. Wolff、M. P. Kostylev、V. S. Tiberkevich、A. N. Slavin 和 B. Hillebrands，具有外部可控各向异性的介质中的无衍射亚波长波束，《物理评论快报》104，10.1103/physrevlett.104.197203（2010）。[27] M. P. Kostylev、A. A. Serga 和 B. Hillebrands，塌缩子弹波辐射出的焦散束，《物理评论快报》106，10.1103/physrevlett.106.134101（2011）。[28] T. Sebastian、T. Br¨acher、P. Pirro、A. A. Serga、B. Hillebrands、T. Kubota、H. Naganuma、M. Oogane 和 Y. Ando，微结构化$Co_2Mn_{0.6}Fe_{0.4}Si$波导边缘模的焦散自旋波非线性发射，《物理评论快报》110，10.1103/phys-revlett.110.067201（2013）。[29] J.-V. Kim、R. L. Stamps 和 R. E. Camley，具有Dzyaloshinskii-Moriya相互作用的超薄铁磁体中的自旋波功率流与焦散，《物理评论快报》117，10.1103/physrevlett.117.197204（2016）。[30] F. Heussner、A. A. Serga、T. Br¨acher、B. Hillebrands 和 P. Pirro，一种用于磁振子网络的可切换自旋波信号分束器，《应用物理快报》111，122401（2017）。[31] S. Muralidhar、R. Khymyn、A. A. Awad、A. Alem´an、D. Hanstorp 和 J. ¨Akerman，飞秒激光脉冲驱动的焦散自旋波束，《物理评论快报》126，037204（2021）。[32] B. A. Kalinikos 和 A. N. Slavin，具有混合交换边界条件的铁磁薄膜中偶极-交换自旋波谱的理论，物理学杂志C：固体物理19，7013（1986）。[33] M. Lax 和 V. Narayanamurti，各向异性介质中的声子放大与慢度面的高斯曲率：探测器形状效应及其在砷化镓中的应用，《物理评论B》22，4876（1980）。[34] 即使对于各向异性显著的电介质，折射率的差异也会使相速度与群速度之间的最大夹角低于10° [?]。[35] I. Bertelli、J. J. Carmiggelt、T. Yu、B. G. Simon、C. C. Pothoven、G. E. W. Bauer、Y. M. Blanter、J. Aarts 和 T. van der Sar，磁性绝缘体中自旋波输运与干涉的磁共振成像，Science Advances 6，eabd3556（2020）。[36] L. B. Felsen 和 N. Marcuvitz， *Radiation and Scatteringof Waves*，IEEE电磁波理论丛书（Wiley-IEEE出版社，1994）。[37] 我们将具有明确传播方向且发散可忽略的非单色波束的谱宽定义为 $\Delta\lambda/\lambda_{\mathrm{car.}}$，其中 $\lambda_{\mathrm{car.}}$ 是载波的平均表观波长， $\Delta\lambda$ 是波束表观波长的标准差。[38] A. Kreisel、F. Sauli、L. Bartosch 和 P. Kopietz，钇铁石榴石薄膜的微观自旋波理论，《欧洲物理学杂志B》71，59（2009）。[39] J. S. Harms 和 R. A. Duine，面内磁化铁磁薄膜中偶极-交换自旋波谱的理论再探，

《磁学与磁性材料杂志》**557**，169426（2022）。[40] S. Klingler、A. V. Chumak、T. Mewes、B. Khodadadi、C. Mewes、C. Dubs、O. Surzhenko、B. Hillebrands 和 A. Conca，利用宽带铁磁共振技术测量YIG薄膜的交换刚度，Journal of Physics D: Applied Physics **48**，015001（2014）。[41] R. A. Gallardo、P. Alvarado-Seguel、A. K´akay、J. Lind{ner} 和 P. Landeros，偶极-偶极相互作用诱导的合成人工反铁磁体自旋波聚焦，《物理评论B》**104**，174417（2021）。[42] I. Bertelli、B. G. Simon、T. Yu、J. Aarts、G. E. W. Bauer、Y. M. Blanter 和 T. van der Sar，利用金刚石中的电子自旋对金属下方的自旋波阻尼进行成像，《先进量子技术》**4**，2100094（2021）。[43] R. Gieniusz、H. Ulrichs、V. D. Bessonov、U. Guzowska、A. I. Stognii 和 A. Maziewski，《在钇铁石榴石薄膜中利用单个反点以被动方式产生焦散自旋波束》，《应用物理快报》**102**，102409（2013）。[44] H. S. K¨orner、J. Stigloher 和 C. H. Back，《利用非均匀微波天线在镍铁合金中激发并调控衍射自旋波束》，《物理评论B》**96**，10 1103 96 100401 2017。/physrevb.。（）。[45] 我们指出，在这些实验中，与外加磁场成约 60° 角的是垂直于渐缩波导段的那一段 [46]。[46] H. S. K¨orner，，博士论文，雷根斯堡大学（2019）。*Time-resolved Kerr microscopy of spin waves propagating in magnetic nanostructures*