arXiv:2301.01226v1 [math.CO] 3 Jan 2023

k-平面图中 Δ正则毛毛虫树的嵌入与打包

CarlaBinucci[1], Emilio Di Giacomo[1], Michael Kaufmann[2], Giuseppe Liotta[1],和 Alessandra Tappini[1]

[1]佩鲁贾大学工程系，意大利佩鲁贾市 G. Duranti 路 93 号，邮编 06125。 {carla.binucci,emilio.digiacomo, giuseppe.liotta, alessandra.tappini}@unipg.it[2]图宾根大学 Wilhelm-Schickard 信息学研究所，Sand 街 13 号，邮编 72076，德国图宾根。mk@informatik.uni-tuebingen.de

2023年1月4日

摘要

本文研究所谓超平面图情形中的一个 *packing* 问题，即宿主图在某种意义上“几乎是平面图”。具体而言，我们考虑宿主图为 k-平面图的情形，也就是说，它存在一种嵌入，使每条边的交叉数至多为 k；我们关注由Δ正则毛毛虫树构成的族，其中毛毛虫树的非叶节点具有相同的度 Δ。我们研究 k 对所打包毛毛虫树数量 h 的依赖关系，既考虑这些毛毛虫树彼此同构（此时称该打包为 *placement*）的情形，也考虑它们彼此不同的情形。我们给出了 h Δ正则毛毛虫树嵌入的充要条件，以及打包一组 Δ_1-、 Δ_2-、. . .、 Δ_h- 正则毛毛虫树的充分条件；其中，不同毛毛虫树的非叶节点度 Δ_i 和度 Δ_j 可以不同，适用于 $1 \leq i, j \leq h, i \neq j$。

1 引言

图的打包 是图论中的经典问题。其最初的表述要求将若干较小的图合并为一个较大的图，称为宿主图，且不产生重边。更准确地说，应通过单射映射 η_i：$V_i \to V$，将图 G_1，G_2，.....，G_h（$G_i =$（V_i，E_i））组合成一个新图 $G =$（V，E），使得 $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_h$ 与其像

边集 E_i 互不相交。人们通常假设，对于所有 $i = 1, 2, \ldots h$，都有 $|V_i| = n$ ，因此映射 η_i 是双射。许多组合问题都可以视为装填问题。例如，图 G 的哈密顿回路问题可以表述为：将一个含 n 个顶点的圈与 G的补图进行装填。

当宿主图不受任何限制时，我们称宿主图为 K_n。这一情形中的一些经典结果包括 Bollob´as 和 Eldridge [6], Teo 和 Yap [26], Sauer 和 Spencer [25], 的研究；相关的著名猜想则包括 Erd˝os 和 S´os 于 1963 [10]提出的猜想，以及 Gy´arf´as 于 1978 [16]提出的猜想。在这一研究方向中，Wang 和 Sauer [27], 以及 Mah´eo 等人 [22] 刻画了可嵌入 K_n的树三元组。Haler 和 Wang [17]将这一结果推广到了四个树的副本。关于图装填到 K_n 中的其他重要研究包括 Hedetniemi等人 [18], 、Wozniak 和 Wojda [28] 以及 Aich- holzer 等人 [2]的工作。使用同一图的多个副本进行装填的问题也称为放置问题（例如，参见 [17, 27, 29]）。

当研究者不再将 K_n 视为宿主图，而是要求宿主图为平面图时，图绘制与打包之间建立了更紧密的联系。这里的主要问题是如何将两棵大小为 n 的树打包到一个大小为 n的平面图中。经过一系列中间步骤 [11, 12, 13, 14, 24] ，可打包的树类逐渐得到推广，Geyer等人[15] 证明，任意两棵非星形树都可以嵌入一个平面图中。

放宽平面性条件，就能打包更多（超过两棵）树；而限制每条边的交叉数，即采用所谓的超平面图情形 [9, 19, 21], ，仍能使宿主图保持稀疏。De Luca等人 [8], 率先研究了超平面图情形下的装填问题，探讨如何将毛毛虫树、路径和圈嵌入1-平面图（关于1-平面性的综述和参考文献，参见例如 [21] ）。虽然两棵树总能打包到一个平面图中，但三棵树未必能打包到一个1-平面图中。

在这项工作中，我们进一步推广了该问题，允许宿主图对任意 $k \geq 1$ 都是 k-平面的，并研究 k 对待打包毛毛虫树的数量及其顶点度的依赖关系。我们考虑 Δ-正则毛毛虫树，即所有非叶节点度数都相同的毛毛虫树。我们的结果可简要概述如下。

- 我们考虑将 h 个相同的 Δ-正则毛毛虫树打包到一个 k-平面图中的装填问题。我们刻画了哪些 h Δ-正则毛毛虫树族可以嵌入 k-平面图，并证明 $k \in O(\Delta h + h^2)$。

- 我们将研究从放置问题拓展到装填问题，考虑一个由 Δ_1-、 Δ_2-、.....、 Δ_h-正则毛毛虫树构成的集合；这些毛毛虫树的非叶节点度数 Δ_i 和 Δ_j 可以各不相同，其中 $1 \leq i, j \leq h, i \neq j$。通过扩展上文要点中的技术，我们给出了这些毛毛虫树存在 k-平面打包的充分条件，并证明了 $k \in O(\Delta h^2)$。

- 最后，我们证明了 k 的一个一般下界，并表明当 h 取较小值时，以及对于非 Δ-正则的毛毛虫树，该下界可以提高。

本文其余部分安排如下。第2节介绍预备知识。第3节讨论将 h Δ-正则毛毛虫树嵌入 k-平面图。第4节专门讨论 k-平面 h-打包，第5节则给出 k 关于 h 的函数下界。总结与开放问题见第6节。

2 预备知识

我们假定读者熟悉基本的图绘图和图论术语（例如，参见 [5, 20, 23]），此处仅回顾本文将用到的概念和记号。

给定一个图 G，我们用 $\deg_G(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的度。设G_1、G_2、.....、G_h 为 h 个图，且它们均有 n 个顶点。若一个 n 阶图 G 包含 h个图 G_1、G_2、.....、G_h作为边不相交生成子图，则称其为这些图的 h-打包。我们也称 G_1、G_2、.....、G_h 可打包进 G，并称G 为 G_1、G_2、.....、G_h的宿主图。若将 h 个图打包进宿主图 G，且这些 h 个图均同构于图 H，则称其为将 H 嵌入 G的h-嵌入。我们也称 G_1、G_2、.....、G_h 可以嵌入G。以下性质给出了将 h-打包嵌入任意宿主图的一个必要条件。

性质1. 一组 h 连通的 n顶点图能够打包，当且仅当 $n \geq 2h$且对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ 和每个顶点 v，度$_{G_i}(v) \leq n - h$。

证明. 每个 G_i 至少有 $n-1$ 条边（因为它是连通的）；因此，若 $n < 2h$，这些图的边数总和就会多于任意一个具有 n 个顶点的图的边数。但由于图 G_i 必须是 G的边不相交子图， G 的边数必须至少等于这些图G_i的边数总和。由于对于每个 $i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ 和每个 v，$\deg_{G_i}(v) \geq 1$（因为每个 G_i 都是连通的）；并且由于$\sum_{i=1}^{h} \deg_{G_i}(v) \leq n - 1$（因为 G 的顶点度不可能大于 $n - 1$），因此对于每个$i \in \{1, 2, \ldots, h\}$ 和每个顶点 v，$\deg_{G_i}(v) \leq n - h$。

□

若图可以在平面上绘制，且每条边最多与其他边交叉 k 次，则称其为 k-平面图。如果 h-打包（h-嵌入）的宿主图是 k-平面图，我们就称之为 k-平面 h-打包（k-平面 h-嵌入）。有时，如果 h 的值可由上下文明确得知或无关紧要，我们也会直接称其为 k-平面打包或 k-平面嵌入。

毛毛虫树是一种树，移除所有叶子后剩下的部分是一条路径，称为脊柱。对于每个脊柱顶点，毛毛虫树 T 是 Δ-正则的，当 $\Delta \geq 2$时，$\deg_T(v) = \Delta$。Δ-正则毛毛虫树的顶点数为$n = \sigma(\Delta - 1) + 2$，其中 σ是正整数，表示脊柱的顶点数。

3 h嵌入到 k-平面图中的 Δ正则毛毛虫树

给定 h 个相同的 Δ-正则毛毛虫树副本，我们想研究在什么条件下它们可以嵌入到一个 k-平面图中。我们首先证明，性质1中陈述的必要条件一般而言并不足以保证嵌入，即使对于 Δ-正则毛毛虫树也是如此。

定理1。 对于每个 $h \geq 2$，令 Δ 为一个正整数，使得 $\frac{h-1}{\Delta-1}$ 不是整数。一个由 h Δ正则毛毛虫树组成、顶点数为 $n = 2h$ 的集合，无法嵌入到任何图中。

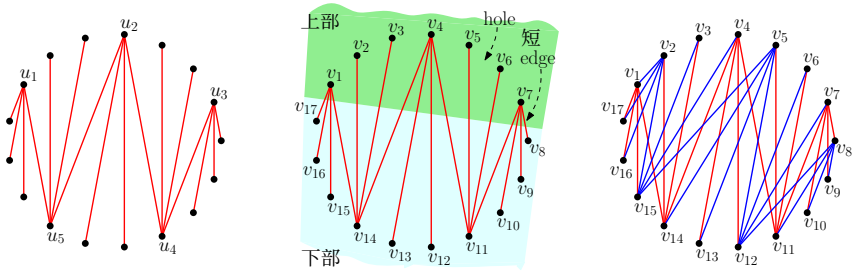
证明。由于每棵毛毛虫树都有 $n-1$ 条边，且毛毛虫树的数量为$h = \frac{n}{2}$，因此边的总数为 $^{n}(_{n-1})$ 2，所以若存在嵌入，一宿主图只能是 K_n。现在证明这是不可能的。将C_1、C_2、...、C_h记为这些 h 毛毛虫树，并假设存在到 K_n 的打包。令v为 K_n 的一个顶点，令 v_1、v_2、...、v_h 为映射到v的 h 个顶点，其中 v_i 是 C_i的一个顶点。每个顶点 v_i 在 C_i 中的度为 Δ或1（因为每棵 C_i 都是 Δ正则的）。令 c 表示v_1、v_2、...、v_h中度为 Δ的顶点数；在打包中，v的度为 $c\Delta + (h - c)$，而由于 v 在 K_n 中的度为 $n-1$，因此必有 $c\Delta + (h - c)$ $= n - 1$，即$c\Delta + (h - c) = 2h - 1$，可改写为 $c = \frac{h-1}{\Delta-1}$。但这是不可能的，因为 c 是整数，而$\frac{h-1}{\Delta-1}$ 不是。 □

在本节余下部分，我们将确立一组 h 同构的 Δ-正则毛毛虫树能够进行 k-平面 h-嵌入的充要条件。关于充分性，我们将在第3.1节中描述一种构造性方法，用以计算所谓的之字形绘图 集合，并研究这类绘图的性质。在第3.2节中，我们还将给出把 Δ-正则毛毛虫树嵌入 k-平面图的 h-嵌入所需的必要条件，从而完成刻画；在同一节中，我们还将给出 k 关于 h 和 Δ的一个上界。

我们回顾一下，Δ-正则毛毛虫树的顶点数 n 等于 $\sigma(\Delta - 1) + 2$，其中 σ 是自然数，表示脊柱顶点数。虽然对于任意 $\sigma \geq 1$，都可以定义 Δ- 正则毛毛虫树，但当我们要打包一组 $h \geq 2$ 毛毛虫树时，性质1要求每棵毛毛虫树至少有两个脊柱顶点，也就是说，对每棵毛毛虫树都有 $\sigma \geq 2$ 。否则，唯一的脊柱顶点的度将为 $n - 1$，性质1便不成立。

3.1 Δ-正则毛毛虫树的之字形绘图

设 C 是一棵有 n 个顶点的 Δ-正则毛毛虫树；我们按图1所示构造其绘图 Γ。C 的脊柱有$\sigma = \frac{n-2}{\Delta-1}$ 个顶点；考虑圆 γ 上的 σ 个点，并按照它们沿 γ出现的圆周顺时针顺序，将这些点记为 u_1，u_2，.....，u_σ。绘制脊柱



(a) (b) (c)

图1：（a）4-正则毛毛虫图的之字形绘图；（b）高亮显示的上部和下部；（c）将（b）的绘图复制一份并旋转一步后得到的 2-打包。

通过对 $i = 1, 2, \ldots\ldots, \lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor$，将点 u_i 和 u_{i+1} 与点 $u_{\sigma-i+1}$ 相连，来绘制 C；见图1(a)。如果 σ 是偶数且 $i = \frac{\sigma}{2}$，点 u_{i+1} 和 $u_{\sigma-i+1}$ 重合，因此点 $u_{\frac{\sigma}{2}}$ 仅与 $u_{\frac{\sigma}{2}+1}$ 相连。注意，所有点 u_i 都关联两条边，唯有 u_1 和 $u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+1}$ 只关联一条边。对于每个顶点 $u_i \notin \{u_1, u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+1}\}$，将其与 $u_{\sigma-i+1}$ 个位于 u_i 和 u_{i+1} 之间的点相连，从而添加与其相邻的叶子；然后将 u_1 与 $\Delta-1$ 个位于 u_σ 和 u_1 之间的点相连，从而添加与其相邻的叶子；最后，如果 σ 是偶数，则将 $u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+1}$ 与 $\Delta-1$ 个位于 $u_{\frac{\sigma}{2}}$ 和 $u_{\frac{\sigma}{2}+1}$ 之间的点相连；如果 σ 是奇数，则将其与 $\Delta-1$ 个位于 $u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+1}$ 和 $u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+2}$ 之间的点相连，从而添加与 $u_{\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor+1}$ 相邻的叶子。所得绘图称为 C 的之字形绘图。

从现在起，我们假设在之字形绘图中，表示顶点的点在圆 γ 上等距分布。令 χ 为 Γ 中表示 C 顶点的点的凸包。之字形绘图恰有两条边与 C 的两条边重合；我们称这两条边为 Γ 的短边；χ 的其他每条边称为空洞。按照它们沿 χ 出现的圆周顺时针顺序，将 Γ 的顶点记为 v_1、v_2、……、v_n，其中 $v_1 \equiv u_1$；见图1（b）。注意，(v_1、v_n) 是一条短边，而 v_n 是这条边的 1 度顶点。

考虑一条直线 s，它与 Γ的两条短边均相交；直线 s 与之字形绘图的所有边相交。不失一般性，假设 s 是水平的，并将位于 s 上方的顶点集合记为 U，将位于 s下方的顶点集合记为L。U 中的顶点构成Γ 的上部，而 L 中的顶点构成 Γ的下部。不失一般性，假设 v_1 位于上部（因此 v_n 位于下部）。由此可知，每条边中，索引较小的端点位于上部，索引较大的端点位于下部。因此，与 (v_1, v_n) 不同的那条短边，记作 (v_{r-1}, v_r)，满足 v_{r-1} 位于上部而 v_r 位于下部。上部的第一个顶点，即顶点v_1，称为 Γ的起始点；而下部的第一个顶点，即

顶点 v_r，称为 Γ的终点。我们注意到，如果脊柱 $\sigma = \frac{n-2}{\Delta-1}$ 的顶点数为偶数，则 $r = \frac{n}{2}+1$；而如果 σ 为奇数，则 $r = 1 + \frac{n-(\Delta-1)}{2}$。这可以用一个公式统一表示为 $r = 1 + \frac{n-(\Delta-1)(\sigma \bmod 2)}{2}$。两条短边将空洞分隔成两个连续集合，其中一个完全位于上部，另一个完全位于下部；若 σ 为偶数，这两个集合中的空洞数相同，均为 $\frac{n-2}{2}$；若 σ 为奇数，则其中一个集合有 $\frac{n-\Delta-1}{2}$ 个空洞，另一个有 $\frac{n+\Delta-3}{2}$ 个。注意，较小的集合位于上部。

令 ℓ 为正整数，令 Γ' 为将顶点 v_i 重新映射到点[1] 所得的绘图，其中该点在 Γ 中表示 $v_{i+\ell}$。我们称 Γ' 为将 Γ 旋转 ℓ 步所得的绘图。注意，Γ' 的起始点为 v_j，其中 $j = 1+\ell$；终点为 v_r，其中 $r = 1+\ell+\frac{n-(\Delta-1)(\sigma \bmod 2)}{2} = j + \frac{n-(\Delta-1)(\sigma \bmod 2)}{2}$。图1(c)中的绘图是两个之字形绘图 Γ_1 和 Γ_2 的并集，其中 Γ_2 是将 Γ_1 旋转一步所得；Γ_1 的起始点为 v_1，终点为 v_8；Γ_2 的起始点为 v_2，终点为 v_9。

引理 1. 设 Γ_1 是一棵 Δ-正则毛毛虫树 C 的之字形绘图，其起始点为 j_1，终点为 r_1；设 Γ_2 是 C 的之字形绘图，其起始点为 j_2。若 $0 < j_2 - j_1 < \frac{n-(\Delta-1)(\sigma \bmod 2)}{2}$，其中 σ 是 C 的脊顶点数，则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 不含重边。

证明。首先注意到，Γ_2 是将 Γ_1 旋转 ℓ 步得到的，其中 $\ell = j_2 - j_1$。假设 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 中存在一条重边 (v_i, v_g)，且 $i < g$。这意味着，在绘图 Γ_1 中必定有一条边 $(v_{i'}, v_{g'})$，旋转 ℓ 步后与 (v_i, v_g) 重合。换言之，两条边 (v_i, v_g) 和 $(v_{i'}, v_{g'})$ 必须满足：(i) $i' < i < r_1 \le g < g'$；(ii) $g = i' + \ell$；(iii) 从 v_i 顺时针到 v_g 时，v_i 与 v_g 之间经过的顶点数 α，等于从 $v_{g'}$ 顺时针到 $v_{i'}$ 时经过的顶点数（见图 2）。记从 $v_{i'}$ 顺时针到 v_i 时经过的顶点数为 β，从 v_g 顺时针到 $v_{g'}$ 时经过的顶点数为 ζ。于是 $2\alpha+\beta+\zeta+4 = n$。若 σ 为偶数，则 $\beta = \zeta$（见图 2(a)），这意味着 $\alpha+\beta+2 = \frac{n}{2}$。注意到，$g = i'+\ell$ 意味着 $\ell = \beta+\alpha+2$（ℓ 等于 $v_{i'}$ 与 v_g 之间顺时针经过的顶点数加一），因此，只有当 $\ell = \frac{n}{2}$ 时，$(v_{i'}, v_{g'})$ 才可能在旋转 ℓ 步后与 (v_i, v_g) 重合；但是，当 σ 为偶数时，有 $\ell = j_2 - j_1 < \frac{n}{2}$，因此重边不可能存在。

若 σ 为奇数，则 $\beta-(\Delta-1) \le \zeta \le \beta+(\Delta-1)$（见图2(b)和图2(c)），因此 $2\alpha+2\beta-(\Delta-1)+4 \le 2\alpha+\beta+\zeta+4 = n \le 2\alpha+2\beta+(\Delta-1)+4$，可改写为 $\frac{n-(\Delta-1)}{2} \le \alpha+\beta+2 \le \frac{n+(\Delta-1)}{2}$。由此可知，若要使 $(v_{i'}, v_{g'})$ 和 (v_i, v_g) 在旋转 ℓ 步后重合，ℓ 的值必须满足 $\frac{n-(\Delta-1)}{2} \le \ell \le \frac{n+(\Delta-1)}{2}$；然而，当 σ 为奇数时，$\ell = j_2 - j_1 < \frac{n-(\Delta-1)}{2}$，因此不可能存在重边。 □

[1] 在凸位置绘图中，顶点的编号 在凸位置下，顶点的指标取为 模 n。

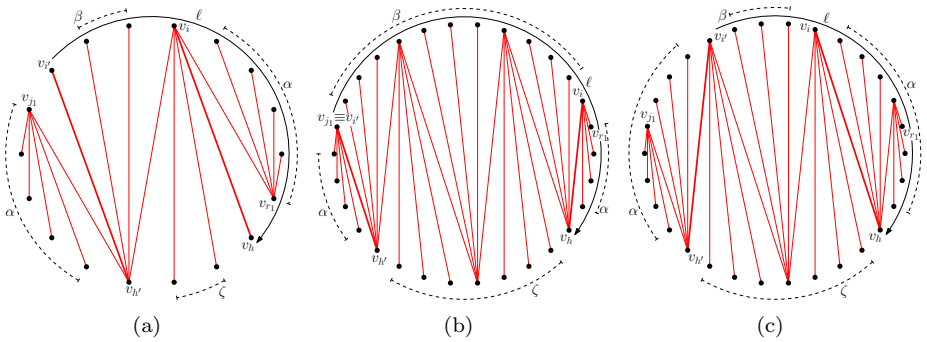


图2：引理 1 的证明示意图；(a) σ 偶数；(b)-(c) σ 奇数。

本节最后，我们计算两幅没有重叠边的之字形绘图并集中的每条边的最大交叉数。我们以一般形式陈述这一引理，并假设这两棵 Δ-正则毛毛虫树的顶点度可能不同，因为我们将利用该引理分别为 k-平面 h嵌入和 k-平面 h打包中的 k 建立上界（第4节）。

设 Γ 是一组之字形绘图的并集。为便于后续描述，我们将 Γ 视为 K_n 的一个直线绘图的子绘图，其顶点与 Γ 的顶点重合（因此沿圆周等距排列）。特别地，对于每个顶点 v_j，我们按照围绕 v_j 的圆周逆时针顺序（从 e_j 开始），将 $e_{j,\,0}$，$e_{j,\,1}$，…，$e_{j,\,n-2}$记作 v_j 在 K_n 中关联的边。构成 Γ 的每个之字形绘图都包含这些边的一个子集；若该集合的并集为 Γ，且不存在同时属于其中两个不同之字形绘图的边，则称 Γ 是有效打包。

我们将斜率 $s_i = i \cdot \frac{\pi}{n}$ 的（圆周）序列记作 $\mathcal{S}_n$，其中 $i = 0, 1, \ldots, n-1$；参见图3。注意，不失一般性，我们可以假设 Γ 的凸包有一条斜率为 s_0 的边，因此 Γ 的每条边的斜率都属于集合 $\mathcal{S}_n$。设 v_j 是一个顶点；若 e_j, 0 的斜率为 s_{i_j}，则 $e_{j,p}$ 的斜率为 s_{i_j+p}（下标模 n 计算）；换言之，每个顶点关联的边的斜率构成 $n-1$ 个 $\mathcal{S}_n$ 中连续元素的子序列；我们将这样的序列记作 $\psi(i_j)$，其中 i_j 表示 $\psi(i_j)$ 的第一个元素是 s_{i_j}。我们称 v_j 使用序列 $\psi(i_j)$。若考虑两个不同的顶点 v_j 和 v_{j+p}，且 v_j 使用序列 $\psi(i_j)$，那么 v_{j+p} 使用序列 $\psi(i_j - 2p)$（下标模 n 计算）；换言之，从一个顶点移动到下一个顶点时，该顶点使用的序列沿顺时针方向移动两个元素。

引理 2. 设 C_1 是一棵有 n 个顶点的 Δ_1-正则毛毛虫树，C_2 是一棵有 n 个顶点的 Δ_2-正则毛毛虫树，且 $\Delta_i \leq n-2$（对于 $i = 1, 2$）。设 Γ_1 是 C_1 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_1}；Γ_2 是 C_2 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_2}，且 $0 < j_2 - j_1 < \frac{n}{2}$。若 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 没有重边，则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 的任意一条边至多被交叉 $2(\Delta_1 + \Delta_2) + 4(j_2 - j_1)$ 次。

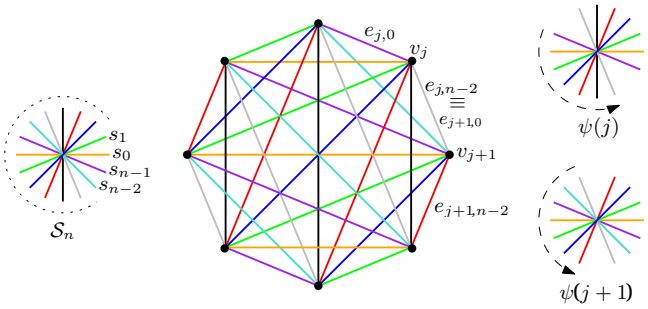


图 3：斜率定义示意图。

证明。 我们首先注意到， Δ-正则毛毛虫树的之字形绘图中的边都绘制为线段，其斜率属于一个由 Δ 个斜率组成的集合。特别地，对于每个脊柱顶点 v，与 v 相 incident 的边都使用这些 Δ 个斜率绘制。

考虑 Γ_1 的起始顶点 v_{j_1}；与 v_{j_1} 相 incident 的边使用 $\psi(i_{j_1})$ 的前 Δ_1 个斜率绘制。类似地，与 Γ_2 的起始顶点 v_{j_2} 相 incident 的边使用 $\psi(i_{j_2})$ 的前 Δ_2 个斜率绘制。序列 $\psi(i_{j_2})$ 相对于 $\psi(i_{j_1})$ 顺时针偏移 $2(j_2-j_1)$ 个单位。另一方面，由于 $j_2-j_1<\frac{n}{2}$， $\psi(i_{j_2})$ 的第一个斜率不同于 $\psi(i_{j_1})$ 的第一个斜率。

$e=(v_i,\ v_g)$ 是 Γ_1 的一条边。现在我们证明，沿 e 的交叉数至多为陈述中给出的数值。设 $e_1=(v_i,\ v_a)$ 为与 v_i 相 incident 的 Γ_2 的边，该边与 e 形成的角最小；类似地，设 $e_2=(v_g,\ v_b)$ 为与 v_g 相 incident 的 Γ_2 的边，该边与e形成的角最小。注意，原则上 v_i、 v_a、v_g 和 v_b 有四种可能的顺时针次序（图 4 的 (a)–(d) 给出了示例）。然而，情况 (b) 不可能发生。也就是说，在情况 (b) 中，用于绘制 Γ_2 的边的斜率相对于用于表示 Γ_1 的边的斜率会向逆时针方向偏移；但如上所述， Γ_2 所用的斜率相对于 Γ_1 所用的斜率向顺时针方向偏移。

设 α_1 为 e 与 e_1 之间的角， α_2 为 e 与e_2之间的角。设 V_1 为角 α_1 所看到的顶点集合，其中包含 v_a，不包含v_g；类似地，设 V_2 为角 α_2 所看到的顶点集合，其中包含 v_b，不包含 v_i。在 (a)、(c) 和 (d) 这三种情况中， α_1 和 α_2 中至少有一个满足以下条件： e 顺时针扫过该角。设满足此条件的角为 α_l，其中 $l\in\{1,2\}$。特别地，在情况 (a) 中， α_l 可以是 α_1 或 α_2；在情况 (c) 中， α_l 是 α_2；在情况 (d) 中， α_l 是 α_1（见图 4）。每条与 e 相交的边，其一个端点位于 V_1 中，另一个端点位于 V_2 中。为计算这类边的数量（也就是沿 e 的交叉数），我们求 $|V_l|$。 $|V_l|$ 的值至多为 $\mathcal{S}_n$ 的斜率中按逆时针次序位于 e_l 的斜率 $s\in\mathcal{S}_n$ 与 e 的斜率 $s'\in\mathcal{S}_n$ 之间的斜率数量。特别地，在情况 (a) 中， $|V_l|$ 恰好等于这个数量；而在情况 (c) 和 (d) 中， $|V_l|$ 小于这个数量。斜率 s' 至多为最后一个

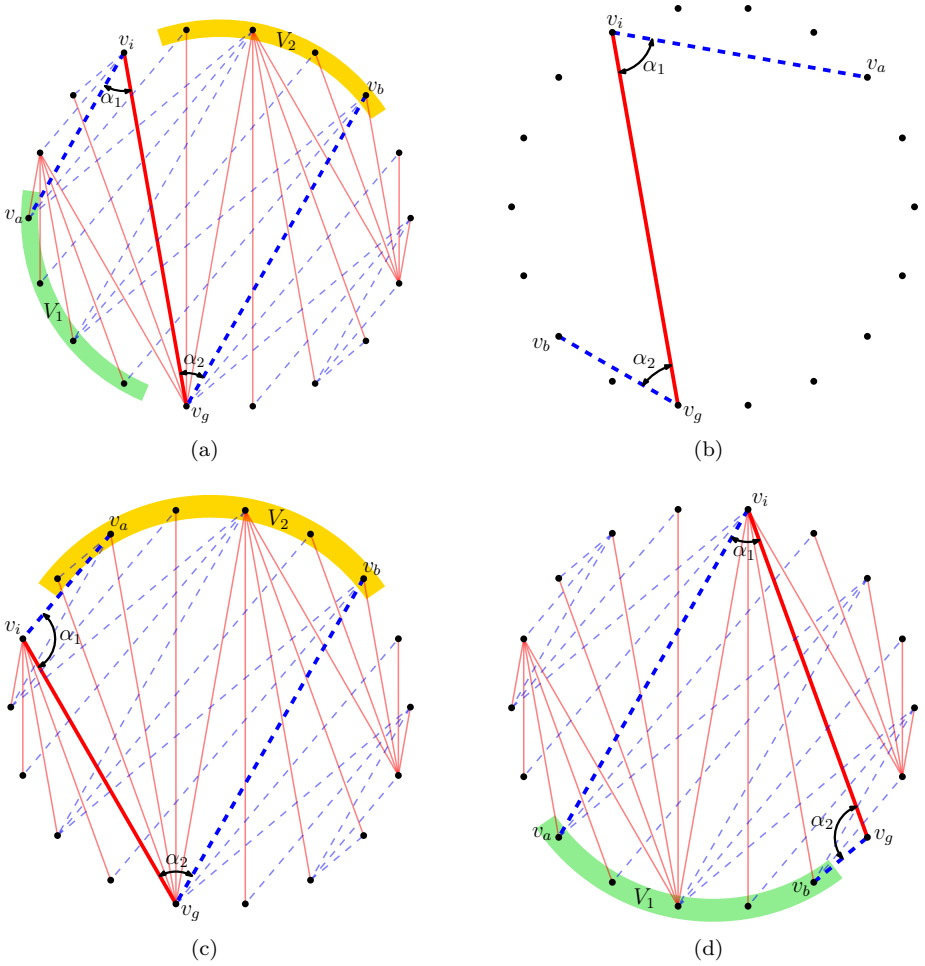


图4：引理 2 证明的示意图。 Γ_2 的边以虚线表示。

Γ_1所使用的斜率为 s_p，其中 $p = j_1 + \Delta_1$，而 s 斜率至少是 Γ_2所使用的第一个斜率，即 s_q，其中 $q = j_1 - 2$（$j_2 - j_1$）。因此， s'（包括）与 s（不包括）之间的斜率数量至多为 $p - q = \Delta_1 + 2$（$j_2 - j_1$）。因此， $|V_l| \leq \Delta_1 + 2$（$j_2 - j_1$）。

我们将块称为 V_l 的一个连续顶点子集，该子集以一个脊柱顶点开始，并包含紧随该脊柱顶点之后的所有叶子。 Γ_2 中与一个块的顶点关联的边数为 2（$\Delta_2 - 1$）（因为有 Δ_2 条边与该脊柱顶点关联，而 $\Delta_2 - 2$ 是叶子的数量）。V_l 中的块数为 $\left\lceil \frac{|V_l|}{\Delta_2 - 1}() \right\rceil$。由此可知， χ_e沿 e的交叉数至多为 $\left\lceil \frac{|V_l|}{\Delta_2 - 1}() \right\rceil 2$（$\Delta_2 - 1$），这小于 2（$|V_l| + \Delta_2$）。由于$|V_l| \leq \Delta_1 + 2$（$j_2 - j_1$），我们有 $\chi_e \leq 2$（$\Delta_1 + \Delta_2$） $+ 4$（$j_2 - j_1$），这就完成了 e 属于 Γ_1时的证明。当边 e 属于 Γ_2 时，情形类似。特别地，当 e 属于 Γ_2时，情形（b）、（c）和（d）适用，而情形（a）不会发生。

□

3.2 刻画

现在我们可以刻画能够进行 h-嵌入的 Δ-正则毛毛虫树。

定理 2. 设 C 是一棵有 n 个顶点的 Δ-正则毛毛虫树。当且仅当以下条件成立时， C 存在一种 h-嵌入：*(i)* $\Delta \leq n - h$；以及 *(ii)* $n \geq 2h + (\Delta - 1) \cdot (\sigma$模 2)，其中 σ 是 C 的脊顶点数。此外，若存在一种 h-嵌入，则还存在一种对 $k \in O(\Delta h + h^2)$而言为 k-平面的嵌入。

证明。我们先证明充分条件。设 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 为 h 毛毛虫树，并假设 $n \geq 2h + (\Delta - 1)$ (σ 模 2)。我们从 C_1 的之字形绘图 Γ_1 出发，通过将 Γ_1 旋转 $i - 1$ 步（其中 $i = 2, 3, \ldots, h$），计算出 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 的一种 h-嵌入，从而得到 C_i 的绘图 Γ_i。

注意，当每棵毛毛虫树的脊顶点数 σ 为偶数时， $h \leq \frac{n}{2}$，因此每个 Γ_i 旋转的步数少于 $\frac{n}{2}$；当 σ 为奇数 $h \leq {}^{n-}{}_{(\Delta-1)\ 2}$时，每个 Γ_i 旋转的步数少于 $n - (\Delta - 1)\ 2$ 步。在这两种情况下，每对绘图 Γ_i 和 Γ_j 都满足引理 1 的条件，因此不存在重边；也就是说，所有 Γ_i 的并集是$C_1, C_2, \ldots, C_h$的有效 h-嵌入。

现在我们证明必要条件。如果 σ 为偶数，则由性质1可知，条件 (i) 和 (ii) 是必要的。因此，考虑 σ 为奇数的情形。由性质1可知，条件 (i) 是必要的。反设条件 (ii) 并非必要，即存在一个 h-嵌入，将 h 棵毛毛虫树 $C_1, C_2, \ldots, C_h$嵌入其中，使得 $n < 2h + (\Delta - 1)$。由于 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 允许进行 h-嵌入，根据性质 1 n，其值至少为 $2h$。因此，便有 $2h \leq n < 2h + (\Delta - 1)$；换言之， $n = 2h + \alpha$ 满足 $0 \leq \alpha \leq \Delta - 2$。

令 G 为 h-嵌入的宿主图，令 v 为 G 中被 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 的脊顶点映射次数最多的顶点。令 β 为映射到 v 的脊顶点数。还有其他 $h - \beta$

叶顶点映射到 v（因为每棵毛毛虫树都必须有一个顶点映射到 G 的每个顶点）。v 在 G 中的度至多为 $n-1$，而映射到 v 的每个脊顶点的度为 Δ。因此，映射到 v 的 β 个脊顶点的度数总和为 $\beta\Delta$。顶点 v 至多还可以有 $n-1-\beta\Delta$ 条边，因此它必定是 $n-1-\beta\Delta \geq h-\beta$，也就是说，$\beta \leq \frac{n-1-h}{\Delta-1}$。另一方面，脊顶点总数为 σh，并且由于 G 有 n 个顶点，至少有 $\lceil \frac{\sigma h}{n} \rceil$ 个脊顶点映射到 v，也就是说，$\beta \geq \lceil \frac{\sigma h}{n} \rceil$。综合关于 β 的两个条件，我们得到：

$$\left\lceil \frac{\sigma h}{n} \right\rceil \leq \beta \leq \frac{n-1-h}{\Delta-1}.$$

由于 $n = 2h+\alpha$，我们有 $h = \frac{n-\alpha}{2}$；在第3.2节中替换 h 后，我们得到：

$$\left\lceil \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma\alpha}{2n} \right\rceil \leq \beta \leq \frac{n+\alpha-2}{2(\Delta-1)}.$$

由于 $n = \sigma(\Delta-1)+2$，我们有：

$$\left\lceil \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma\alpha}{2(\sigma(\Delta-1)+2)} \right\rceil \leq \beta \leq \frac{\sigma(\Delta-1)+\alpha}{2(\Delta-1)}. \tag{1}$$

公式（1）意味着：

$$\left\lceil \frac{\sigma}{2} - \frac{\alpha}{2(\Delta-1)+\frac{4}{\sigma}} \right\rceil \leq \frac{\sigma}{2} + \frac{\alpha}{2(\Delta-1)}. \tag{2}$$

现在我们证明公式（2）不可能成立。由于 σ 是奇数，因此对于某个 $i \in \mathbb{N}$，它是 $\sigma = 2i+1$，从而：

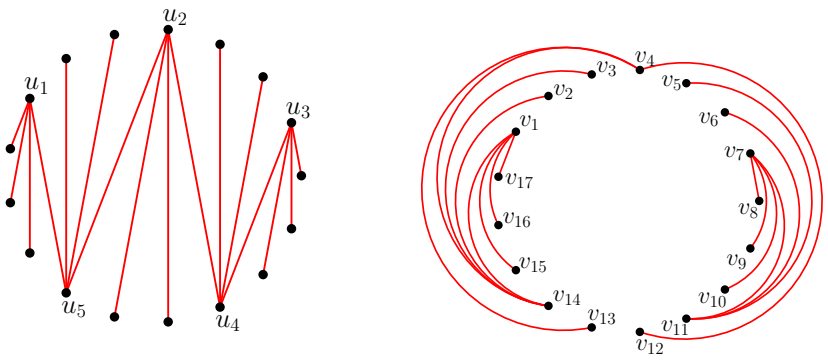
$$\left\lceil i + \frac{1}{2} - \zeta \right\rceil \leq k + \frac{1}{2} + \zeta', \tag{3}$$

其中 $\zeta = \frac{\alpha}{2\Delta-1+\frac{4}{\sigma}}$ 且 $\zeta' = \frac{\alpha}{2(\Delta-1)}$。我们有 $\zeta < \zeta'$，并证明 $\zeta' < \frac{1}{2}$：

$$\zeta' = \frac{\alpha}{2(\Delta-1)} \leq \frac{\Delta-2}{2(\Delta-1)} < \frac{\Delta-1}{2(\Delta-1)} = \frac{1}{2}.$$

公式（3）的第一项为 $i+1$，因为 $0 < \frac{1}{2} - \zeta < 1$；第二项小于 $i+1$，因为 $0 < \frac{1}{2} + \zeta' < 1$。由此可知，公式（3）不成立，因此公式（2）也不成立。

现在证明一条边上交叉数量的上界。我们考虑 Γ_1 的一条边；另一棵毛毛虫树的绘图中，一条边上的交叉数量也受同一上界约束。设 e 是绘图 Γ_1 中的一条边。根据引理 2，另一幅绘图 Γ_l 的边（其中 $2 \leq l \leq h$）在 e 上造成的交叉数量 χ_e 至多为 $2(\Delta_1+\Delta_l)+4(j_l-j_1)$。对



(a) (b)

图5：（a）一棵4-正则毛毛虫图的内侧之字形绘图，以及（d）外侧之字形绘图。

所有不同于 Γ_1 的绘图求和，可得 $\chi_e \leq \sum_{l=2}^{h}(2(\Delta_1+\Delta_l)+4(j_l-j_1))$。考虑到对于每个 l， $\Delta_l = \Delta$，且 $j_l - j_1 = l-1$，我们有

$$\chi_e \leq \sum_{l=2}^{h}(4\Delta + 4(l-1)) \leq (4\Delta-2)h + 2h^2 - 4\Delta. \tag{4}$$

□

最后，我们指出，尽管不能降低渐近增长率，公式（4）给出的交叉数量仍可减少。之字形绘图可以嵌入圆内（见图5(a)），也可以嵌入圆外（见图5(b)）。因此，将一半毛毛虫树嵌入圆内、另一半嵌入圆外，就可以将公式（4）给出的数量减半。

4 h-平面图中 k-正则毛毛虫树的4 h-打包

本节研究 h-打包，其中涉及 h Δ_1-、 Δ_2-、…、 Δ_h-正则毛毛虫树；对于 $1 \leq i, j \leq h$, $i \neq j$，不同毛毛虫树的脊顶点的度 Δ_i 和度 Δ_j 可以不同。

引理 3. 设 C_1 是一个 n 顶点的 Δ_1 正则毛毛虫树， C_2 是一个 n 顶点的 Δ_2 正则毛毛虫树，且满足 $\Delta_1 > \Delta_2$ 和 $\Delta_1 \leq n-2$。设 Γ_1 是 C_1 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_1}，终点为 v_{r_1}；设 Γ_2 是 C_2 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_2}，终点为 v_{r_2}。若 $\frac{\Delta_2}{2} \leq j_2 - j_1 < {}^{n-(\Delta_1-1)}\,{}_2$，则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 没有重边。

证明。 如引理 2 的证明中所述， Δ 正则毛毛虫树的之字形绘图中的边都绘制为线段，其斜率属于一个由 Δ 个斜率组成的集合。特别地，对于每个脊柱顶点 v，与 v 相 incident 的边都使用这些 Δ 个斜率绘制。基于这一观察，我们证明，用于表示 Γ_1 的 Δ_1 个斜率与用于表示 Γ_2 的 Δ_2 个斜率彼此不同。我们沿用定理 2 中的记号。

考虑 Γ_1的起始顶点 v_{j_1}；与 v_{j_1} 关联的边使用 $\psi(i_{j_1})$的前 Δ_1 个斜率绘制。类似地，与 Γ_2 的起始顶点 v_{j_2} 关联的边使用 $\psi(i_{j_2})$的前 Δ_2 个斜率绘制。由于 $j_2 - j_1 \geq \frac{\Delta_2}{2}$，序列 $\psi(i_{j_2})$ 相对于 $\psi(i_{j_1})$ 顺时针偏移了 Δ_2 个单位。另一方面，由于 $j_2 - j_1 \leq n - (\Delta_1 - 1)/2$，$\psi(i_{j_2})$的前 Δ_2 个斜率序列与 $\psi(i_{j_1})$的前 Δ_1 个斜率不重叠，由此得证。

□

定理 3. 设 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 为 h 个毛毛虫树，使得 C_i 是 Δ_i-正则的，其中 $1 \leq i \leq h$，且 $\Delta_h \leq \Delta_{h-1} \leq \cdots \leq \Delta_1 \leq n - h$。若 $\sum_{i=1}^{h} \Delta_i \leq n - 1$ 且 $\sum_{i=2}^{h} \left\lceil \frac{\Delta_i}{2} \right\rceil < n - (\Delta_1 - 1)/2$，则存在一个 k-平面打包，使得 $k \in O(\Delta_1 h^2)$。

证明。我们计算一幅以 v_{j_1}为起始点的 C_1 之字形绘图，其中 $j_1 = 1$；对于每个 C_i，若 $2 \leq i \leq h$，我们计算一幅 Γ_i 之字形绘图，其起始顶点为v_{j_i}，且 $j_i = j_{i-1} + \left\lceil \frac{\Delta_i}{2} \right\rceil$。注意， $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_h$中的每个顶点 v的度至多为 $n - 1$；也就是说，$\sum_{i=1}^{h} \deg_{C_i}(v) \leq \sum_{i=1}^{h} \Delta_i \leq n - 1$。此外，给定两个 $1 \leq i < i' \leq h$的毛毛虫树 C_i 和 $C_{i'}$，有：(i)$j_{i'} - j_i \geq j_{i'} - j_{i'-1} = \left\lceil \frac{\Delta_{i'}}{2} \right\rceil$；以及(ii) $j_{i'} - j_i \leq j_h - j_1 = \sum_{i=2}^{h} \left\lceil \frac{\Delta_i}{2} \right\rceil$，由此得到 $j_{i'} - j_i < n - (\Delta_1 - 1)/2 < n - (\Delta_i - 1)/2$。结合(i)和(ii)，可得$\frac{\Delta_{i'}}{2} < j_{i'} - j_i < n - (\Delta_i - 1)/2$。因此，引理 3 对每一对毛毛虫树均成立，而所有之字形绘图 Γ_1、Γ_2、.....、Γ_h 的并集是C_1、C_2、.....、C_h的有效打包。

现在我们证明一条边上的交叉数上界。考虑 Γ_1中的一条边；另一幅绘图中的一条边上的交叉数也有相同的上界。设 e是绘图 Γ_1的一条边。根据引理 2，由另一幅绘图 Γ_l 中的边（其中 $2 \leq l \leq h$）造成的沿 e 的交叉数 χ_e 至多为 $2(\Delta_1 + \Delta_l) + 4(j_l - j_1)$。对所有不同于 Γ_1的绘图求和，可得$\chi_e \leq \sum_{l=2}^{h} (2(\Delta_1 + \Delta_l) + 4(j_l - j_1))$。考虑到$j_l \geq j_{l-1} + \left\lceil \frac{\Delta_i}{2} \right\rceil$，可得 $j_l - j_1 = \sum_{i=2}^{l} \left\lceil \frac{\Delta_i}{2} \right\rceil$。由于对于每个 $2 \leq l \leq h$都有$\Delta_l \leq \Delta_1$，因此 $j_l - j_1 \leq (l-1)(\frac{\Delta_1}{2} + 1)$。所以，我们得到 $\chi_e \leq \sum_{l=2}^{h} (4\Delta_1 + 4(l-1)(\frac{\Delta_1}{2} + 1)) \leq (\Delta_1 + 2)h^2 + 4\Delta_1(h-1)$。

—

□

现在我们考虑一种特殊情况：将一组 h Δ_1-、 Δ_2-、…、 Δ_h-正则毛毛虫树进行打包，其中对每个 Δ_i $(1 \leq i \leq h)$， $\Delta_i - 1$ 都是 $\Delta_{i+1} - 1$ 的倍数。在这种情况下，我们证明定理 3 的充分条件可以放宽。例如，考虑将一棵 17-正则毛毛虫树和两棵 9-正则毛毛虫树打包，每棵树都有 34 个顶点。这三棵毛毛虫树不满足定理 3 的充分条件。然而，正如定理 4 所证明的，可以对这些毛毛虫树进行 a k-平面打包。我们先从

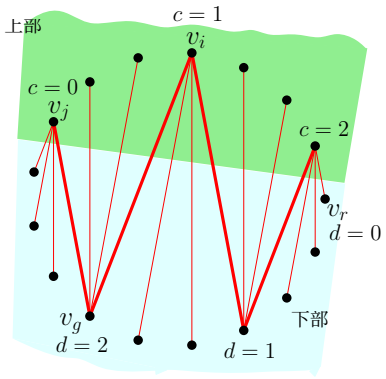


图 6：性质 2 的示意图； $\sigma = 5$。对于每个脊柱顶点， c 和 d 均已标出。对于相邻的脊柱顶点， c 和 d 之和为 2 或 3。

以下性质开始，该性质可直接由之字形绘图的构造得出（示意见图 6）。

性质 2。 设 Γ 是一个具有起始顶点 v_j 和终止顶点 v_r的 Δ-正则毛毛虫树的之字形绘图。若 v_i 是 Γ上部的脊柱顶点，则对于某个 $c \in \mathbb{N}$，有 $i = j + c(\Delta - 1)$；若 v_g是Γ下部的脊柱顶点，则对于某个 $d \in \mathbb{N}$，有 $g = r + d(\Delta - 1)$。此外，若 v_i 和 v_g 相邻，则$c \pm d = \lceil \frac{\sigma}{2} \rceil - 1$或 $c \pm d = \lceil \frac{\sigma}{2} \rceil$，其中 σ是 Γ的脊顶点数。

性质 2 在以下引理的证明中被广泛使用。

引理 4. 设 C_1 是一个 n-顶点 Δ_1-正则毛毛虫树， C_2 是一个 n-顶点 Δ_2-正则毛毛虫树，且满足 $\Delta_1 - 1 = q(\Delta_2 - 1)$，其中 $q \in \mathbb{N}^+$ 和 $\Delta_i \leq n - 2$ 为某些值（对于 $i = 1, 2$）。设 Γ_1 是 C_1 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_1}，终点为 v_{r_1}； Γ_2 是 C_2 的一个之字形绘图，其起始点为 v_{j_2}，终点为 v_{r_2}。若 $0 < j_2 - j_1 < {}^{n-}_{(\Delta_1 - 1)\,2}$，则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 没有重边。

证明。 设 (v_{i_1}, v_{g_1}) 是 Γ_1 的一条边，(v_{i_2}, v_{g_2}) 是 Γ_2 的一条边。假设 v_{i_1} 属于 Γ_1 的上部，且 v_{i_2} 属于 Γ_2 的上部。注意，这意味着 v_{g_1} 属于 Γ_1 的下部，且 v_{g_2} 属于 Γ_2 的下部。我们证明 (v_{i_1}, v_{g_1}) 和 (v_{i_2}, v_{g_2}) 并不重合。

我们首先证明， v_{i_1} 与 v_{i_2} 重合且 v_{g_1}与 v_{g_2}重合的情况不会发生。接着证明， v_{i_1} 与 v_{g_2} 重合且 v_{g_1} 与 v_{i_2}重合的情况不会发生。在证明的其余部分中，我们将根据性质 2，用 j_1、 j_2、 r_1 和 r_2的值表示这四个指标 i_1、 i_2、 g_1 和 g_2。不失一般性，我们可以假设 $r_2 \leq n$ 和 $j_1 \geq 1$，也就是说，顶点 v_{r_2}、 v_n、 v_1 和 v_{j_1} 按此顺时针顺序出现，其中v_{r_2} 与 v_n 可能重合，且 v_1 与 v_{j_1} 可能重合。在这些假设下， $j_1 < j_2 < r_1 < r_2$ 和 v_{i_1} 只有在 v_{g_2}时才可能重合

仅当 $i_1 = g_2 - n$时，也就是说，仅当 g_2 的值大于 n 且模 n与 i_1 同余时。因此，假设 v_{i_1} 与 v_{i_2} 重合可推出$i_1 = i_2$，而假设 v_{i_1} 与 v_{g_2} 重合则可推出 $i_1 = g_2 - n$。

情况 1： v_{i_1} **与** v_{i_2} **重合且** v_{g_1} **与** v_{g_2}**重合的情况不会发生**。

每条边至少有一个端点是脊柱顶点。根据每条边中哪个顶点是脊柱顶点，我们区分四种子情况。由于这些情况非常相似，这里只给出第一种，其余情况见附录。

情况 1.a： v_{i_1} **和** v_{i_2} **是脊柱顶点**。根据性质 2，对于某个c_1，$c_2 \in \mathbb{N}$:

$$i_1 = j_1 + c_1(\Delta_1 - 1) = j_1 + qc_1(\Delta_2 - 1). \tag{5}$$

and

$$i_2 = j_2 + c_2(\Delta_2 - 1). \tag{6}$$

若 v_{i_1} 与 v_{i_2}重合，则有 $i_1 = i_2$；由方程（5）和公式（6）可得:

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1). \tag{7}$$

关于 v_{g_1} 和 v_{g_2}，有:

$$g_1^m \le g_1 \le g_1^M;$$
$$g_2^m \le g_2 \le g_2^M.$$

其中 $g_l^m = r_l + d_l$（$\Delta_l - 1$）、$g_l^M = r_l +$（$d_l + 1$）（$\Delta_l - 1$），对某个满足 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$的 $d_l \in \mathbb{N}$成立，其中 σ_l是 C_l的脊顶点数，且对于 $l = 1$，2。我们证明 $g_1^M < g_2^m$，这意味着 $g_1 \neq g_2$。要使 $g_1^M < g_2^m$成立，必须有:

$$\begin{aligned} &r_1 + (d_1 + 1)(\Delta_1 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_1 + q(d_1 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_2 - r_1 > (qd_1 + q - d_2)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n - (\Delta_l - 1)(\sigma_l \bmod 2) - 2}{}$，对于 $l = 1$,2，方程 (8) 可改写为:

$$j_2 - j_1 > \left((qd_1 + q - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \right) (\Delta_2 - 1). \tag{9}$$

结合方程 (7) 和方程 (9)，可得:

$$qc_1 - c_2 > (qd_1 + q - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1 \ (\sigma_l \text{ 模 } 2)}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1$，2；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，得到:

$$qc_1 - c_2 > \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q + q - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{1(\sigma_2 \mod 2)}{2} + c_2 +$$
$$+ 1 + \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2-1} = \frac{q(n-2)\Delta_1-1}{} = q\sigma_1$，可得:

$$qc_1 - c_2 > \frac{1}{2} \tag{10}$$

总之，要使 $g_1^M < g_2^m$，方程 (10) 必须成立。另一方面，根据方程 (7) 以及假设 $j_2 - j_1 > 0$，我们得到 $(qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) > 0$；由于 $(\Delta_2 - 1) > 0$，这意味着 $qc_1 - c_2 > 0$；又由于 $qc_1 - c_2$ 是整数，可将其改写为 $qc_1 - c_2 \geq 1$。这意味着方程 (10) 成立，因此 $g_1^M < g_2^m$ 且 $g_1 \neq g_2$。

情况 2：不会出现 v_{i_1} 与 v_{g_2} 重合且 v_{g_1} 与 v_{i_2} 重合的情况。

在这种情况下，我们同样根据每条边上哪个顶点是脊柱顶点，将其分为四个子情况。与**情况 1**一样，这里只给出第一个子情况，其余情况可见附录。

情况 2.a： v_{i_1} **和** v_{i_2} 是脊顶点。</style>由于 v_{g_2} 是 Γ_2下部中的一个顶点，因此它必须是 $g_2 = r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) + \alpha_2$，其中 α_2 满足$0 \leq \alpha_2 < \Delta_2 - 1$。如果 v_{g_2} 与 v_{i_1} 重合，如上所述，它必定是$i_1 = g_2 - n$。将 g_2 的表达式与方程 (5) 结合，可得:

$$r_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1) - \alpha_2 + n. \tag{11}$$

关于 v_{g_1}，我们有:

$$g_1^m \leq g_1 \leq g_1^M;$$

其中 $g_1^m = r_1 + d_1(\Delta_1 - 1)$、 $g_1^M = r_1 + (d_1 + 1)(\Delta_1 - 1)$，对于某个满足 $c_1 + d_1 = \lceil \frac{\sigma_1}{2} \rceil - 1$的 $d_1 \in \mathbb{N}$，其中 σ_1是 C_1的脊顶点数。我们证明 $i_2 < g_1^m$，这意味着 $i_2 \neq g_1$。要使 $i_2 < g_1^m$成立，必须满足:

$$\begin{aligned} &j_2 + c_2(\Delta_2 - 1) < r_1 + d_1(\Delta_1 - 1) \\ &j_2 + c_2(\Delta_2 - 1) < r_1 + qd_1(\Delta_2 - 1) \\ &j_2 - r_1 < (qd_1 - c_2)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{12}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n-(\Delta_l-1)(\sigma_l \bmod 2)}{2}$，对于 $l = 1,2$，方程 (11) 可改写为:

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1) - \alpha_2 + \frac{n}{2} + \frac{(\Delta_2 - 1)(\sigma_2 \mod 2)}{2}, \tag{13}$$

而方程 (12) 可改写为:

$$j_2 - j_1 < \left((qd_1 - c_2) - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}\right)(\Delta_2 - 1) + \frac{n}{2}. \tag{14}$$

结合方程 (13) 和方程 (14)，我们得到:

$$qc_1 - d_2 < (qd_1 - c_2) - \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1_{(\sigma_l \bmod 2)}}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1,\ 2$；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，我们得到:

$$qc_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} + c_2 + 1 < \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q - c_2 - \\ - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2 - 1} = \frac{q_{(n-2)\ \Delta_1 - 1}}{} = q\sigma_1$，可得:

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 < -\frac{q+1}{2} + \frac{\alpha_2}{2(\Delta_2 - 1)} \tag{15}$$

总之，要使 $i_2^M < g_1^m$ 成立，方程 (15) 必须成立。另一方面，由方程 (13) 以及假设 $j_2 - j_1 < \frac{n-}{(\Delta_1 - 1)\ 2} = \frac{n-q}{(\Delta_2 - 1)\ 2}$，我们得到:

$$qc_1 - d_2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 \mod 2) < -\frac{q}{2} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1}.$$

再次将 d_2 替换为 $\frac{\sigma_2 + 1_{(\sigma_2 \bmod 2)}}{2} - c_2 - 1$，可得:

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 < -\frac{q+2}{2} + \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1}. \tag{16}$$

由于 $_2\ \frac{\alpha_2}{(\Delta_2 - 1)} - \leq \frac{1}{2}$，因此有 $-\frac{q}{2} - 1 + \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1} \leq -\frac{q}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha_2}{2\ (\Delta_2 - 1)}$。

换言之，方程 (16) 表明方程 (15) 成立，因此 $i_2 < g_1^m$ 和 $i_2 \neq g_1$。

□

定理 4. 设 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 是 h 个毛毛虫树，其中 C_i 是 Δ_i-正则的，$\Delta_i - 1$ 是 $\Delta_{i+1} - 1$ 的倍数，且满足 $1 \leq i < h$，以及 $\Delta_i \leq n - h$ （对于 i =1、2、$\ldots, h$）。若 $n \geq 2h + (\Delta_1 - 1)$，则存在一个 k-平面打包，其满足 $k \in O(\Delta_1 h + h^2)$。

证明。对于每个 C_i，满足 $1 \leq i \leq h$，我们构造一个以 v_i 为起始顶点的之字形绘图 Γ_i。注意，给定两个满足 $1 \leq j_1 < j_2 \leq h$ 的毛毛虫树 C_{j_1} 和 C_{j_2}，我们有 $\Delta_{j_1} - 1$ 是 $\Delta_{j_2} - 1$ 的倍数，并且之字形绘图 Γ_{j_1} 和 Γ_{j_2} 的起始顶点分别为 v_{j_1} 和 v_{j_2}。因此，$0 < j_2 - j_1 < h$，且根据假设，$h \leq \frac{n-}{(\Delta_1 - 1)\ 2}$。因此，引理 4 对每一对毛毛虫树都成立，而所有之字形绘图 $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_h$ 的并集是 $C_1, C_2, \ldots, C_h$ 的有效打包。

关于一条边上交叉数量界的证明与定理 2 的证明相同，只需考虑 $\Delta_l \leq \Delta_1$ 以及对于每个 $2 \leq l \leq h$ 都有 $j_l - j_1 = l - 1$。

□

5 下界

本节首先给出 k-平面h-打包中 k 取值的一般下界；然后针对 h 的某些较小取值提高该下界。

定理 5. 每个由 h 个含有 n 个顶点和 m 条边的图构成的 k-平面 h-打包都满足 $k \geq \frac{h^2m^2}{14.6n^2}$。

证明。含有 n 个顶点的 k-平面图至多有 $3.81\sqrt{k \cdot n}$ 条边，其中 $k \geq 2$ [1]。由于这些 h 个图总共有 $h \cdot m$ 条边，因此只有当 $h \leq 3.81\sqrt{k}\frac{n}{m}$，即 $k \geq \frac{h^2m^2}{14.6n^2}$ 时，这些图才可能存在 k-平面打包。 □

由于对于一棵树 $m = n - 1$，我们有以下结论。

推论 1. 每个由 h 棵树构成的 k-平面 h-打包都满足 $k \geq \frac{h^2}{58.4}$。

现在，我们针对毛毛虫树的 h-嵌入中 h 取较小值的情形，进一步细化上述下界。具体而言，我们证明，当 h 分别等于 3、4 和 5 时，相应的下界分别为 2、3 和 5。请注意，在所有这些情形下，推论 1 所给出的下界均为 1。

定理 6。 对于 $h = 3, 4$存在一棵毛毛虫树 C，其顶点数至少为 $h+7$，并且它的每一种 k-平面 h-嵌入都满足 $k \geq h - 1$。对于 $h = 5$，存在一棵毛毛虫树 C，其顶点数至少为 24，并且它的每一种 k-平面5-嵌入都满足 $k \geq h$。

证明。情形 $h = 3$，4。令 n 为满足 $n \geq h + 7$的整数，并令 $C_{n,h}$ 为图 7 所示的 n 顶点毛毛虫树。注意，图 7 中标记为 v 的 $C_{n,h}$ 的顶点度为 $n - h$；我们称它为 $C_{n,h}$ 的中心。考虑将 $C_{n,h}$ 嵌入图 G 的任意h-嵌入，并将 G 中映射到 C_i 的中心的顶点记为 v_i（$i = 1$，2，.....，h）。顶点 $v_1, v_2, ..., v_h$ 必须互不相同，因为如果两个中心映射到 G 的同一顶点，那么该顶点的度将大于 $n - 1$。具体而言，如果两个中心映射到同一顶点，该顶点的度为 $2n - 2h$，当 $n > 2h - 1$ 时此度大于 $n - 1$，也就是说，当 $h + 7 > 2h - 1$ 时如此；而对于 $h < 6$，这确实成立。由于每个 v_i（$1 \leq i \leq h$）在 C_i 中的度为 $n - h$，并且在其余 $h - 1$ 棵毛毛虫树中度均为 1，因此它在 G 中的度为 $n - 1$。因此， G 包含 $K_{h,n-h}$。于是，对于 $h = 3$，G 包含 $K_{3,7}$（本例中为 $n \geq 10$），这不是 1-平面 [7]；对于 $h = 4$，G 包含 $K_{4,7}$（本例中为 $n \geq 11$），这不是 2-平面 [4]。情形 $h = 5$ 的论证类似，其中 $K_{5,19}$ 不是 4-平面 [3]。 □

6 总结与开放问题

本文研究了毛毛虫树在 k-平面图中的嵌入与打包问题。本文证明了在平面图中嵌入 Δ-正则毛毛虫树的充要条件，并给出了打包一组 Δ_1、 Δ_2、.....、 Δ_h-正则毛毛虫树的充分条件，其中 $k \in O(\Delta_1 h^2)$（Δ_1 是该集合中的最大顶点度）

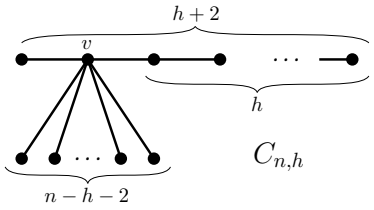


图7：证明定理 6 时所描述的毛毛虫树。

本文的研究丰富了关于平面宿主图和非平面宿主图中的嵌入与打包问题的文献，并与近期在超平面背景下对这些问题的重新探讨直接相关。

本文的研究自然引出了许多开放问题。本文最后列出其中一些在我们看来最有趣的问题。

- 将定理 2 的刻画推广到非 Δ-正则毛毛虫树的嵌入。
- 定理4和定理3给出了一些毛毛虫树族能够进行 k-平面打包的充分条件。若能对这些树族嵌入 k-平面图的可打包性给出完整刻画，将会很有意义。
- 定理 6 改进了定理 5 对非 Δ-正则毛毛虫树所得的下界。若能为 Δ-正则毛毛虫树找到类似结果，将会很有意义。

最后，我们指出，对于给定的 k，可以研究哪些图能够嵌入／放入 k-平面图中，而不是研究所嵌入／放入的毛毛虫树的数量 h 和顶点度如何影响 k。感兴趣的读者可参阅 [3]，了解关于 $k=1$ 的结果；以下定理则给出了关于 $k=2$ 的初步结果（证明见附录）。请注意，定理 2 证明中的公式（4）可为以下定理所考虑的毛毛虫树给出范围为 $[86,137]$ 的上界。

定理 7. 一个具有 $4 \leq \Delta \leq 7$ 的 Δ-正则毛毛虫树存在一个2-平面3-嵌入。

参考文献

[1] Eyal Ackerman. 关于每条边至多有四个交叉的拓扑图。《计算几何》，85:101574, 2019.

[2]Oswin Aichholzer、Thomas Hackl、Matias Korman、Marc van Kreveld、Maarten L¨offler、Alexander Pilz、Bettina Speckmann 和 Emo Welzl。

在完全几何图中打包平面生成树和路径。信息处理快报，124：35–41，2017年。[3] Patrizio Angelini、Michael A. Bekos、Michael Kaufmann、Philipp Kinder- mann 和 Thomas Schneck。图的1-扇束平面绘图。理论计算机科学，723：23–50，2018年。[4]Patrizio Angelini、Michael A. Bekos、Michael Kaufmann 和 Thomas Schneck。高效生成超越平面性的图的不同拓扑表示。《图算法与应用杂志》，24(4)：573–601，2020年。[5] Giuseppe Di Battista、Peter Eades、Roberto Tamassia 和 Ioannis G. Tol- lis。《图绘制：图可视化算法》。Prentice- Hall，1999年。[6] B´ela Bollob´as 和 Stephen E. Eldridge。图的打包及其在计算复杂性中的应用。《组合理论杂志*B*辑》，25(2)：105–124，1978年。[7] J´ulius Czap 和 D´avid Hud´ak。完全多部图的1-平面性。《离散应用数学》，160(4)：505–512，2012年。[8] Felice De Luca、Emilio Di Giacomo、Seok-Hee Hong、Stephen G. Kobourov、William Lenhart、Giuseppe Liotta、Henk Meijer、Alessandra Tappini 和 Stephen K. Wismath。将树打包到1-平面图中。《图算法与应用杂志》，25(2)：605–624，2021年。[9] Walter Didimo、Giuseppe Liotta 和 Fabrizio Montecchiani。关于超越平面性的图绘制综述。《*ACM*计算调查》，52(1)：4:1–4:37，2019年。[10] P. Erd˝os。图论中的极值问题。载于《图论及其应用，*Smolenice*专题讨论会论文集》，第29–36页，1964年。[11] Fabrizio Frati。直径为四的树的平面打包。载于第*21*届加拿大计算几何会议论文集，第95–98页，2009年。[12] Fabrizio Frati、Markus Geyer 和 Michael Kaufmann。树和蜘蛛树的平面打包。《信息处理快报》，109(6)：301–307，2009年。[13] Alfredo Garc´ıa Olaverri、M. Carmen Hernando、Ferran Hurtado、Marc Noy 和 Javier Tejel。将树打包到平面图中。《图论杂志》，40(3)：172–181，2002年。[14] Markus Geyer、Michael Hoffmann、Michael Kaufmann、Vincent Kusters 和 Csaba D. T´oth。二叉树的平面打包。载于*WADS 2013*，《计算机科学讲义》第8037卷，第353–364页。Springer，2013年。

[15] Markus Geyer、Michael Hoffmann、Michael Kaufmann、Vincent Kusters 和 Csaba D. T´oth。《平面树装填定理》。JoCG，8(2)：109–177，2017年。[16] Andr´as Gy´arf´as 和 Jen˝o Lehel。将不同阶的树装入 K_n。载于《组合学》（第五届匈牙利组合学讨论会论文集，凯斯特海伊，1976年），第1卷，第463–469页。North-Holland，纽约，1978年。[17] Sean P. Haler 和 Hong Wang。将四个树的副本装入完全图。《Australas. J Comb.》，59：323–332，2014年。网址：http://ajc.maths. uq.edu.au/pdf/59/ajc_v59_p323.pdf。[18] S.M. Hedetniemi、Stephen Hedetniemi 和 P.J. Slater。关于将两棵树装入 K_n的一则注记。Ars Combinatoria，11，1981年1月。[19] Seok-Hee Hong 和 Takeshi Tokuyama，编。《超越平面图》。Springer，2020年。doi:10.1007/978-981-15-6533-5。[20] Michael Kaufmann 和 Dorothea Wagner，编。《图绘制：方法与模型》，计算机科学讲义第2025卷。Springer，2001年。doi:10.1007/3-540-44969-8。[21] Stephen G. Kobourov、Giuseppe Liotta 和 Fabrizio Montecchiani。关于1-平面性的注释书目。计算机科学评论，25：49–67，2017年。[22]Maryvonne Mah´eo、Jean-Fran¸cois Sacl´e 和 Mariusz Wozniak。三个树的副本的边不相交嵌入。《欧洲组合学杂志》，17(6)：543–563，1996年。[23] Takao Nishizeki 和 Md. Saidur Rahman。《平面图绘制》，计算系列讲义第12卷。World Scientific，2004年。doi:10.1142/5648。[24] Yoshiaki Oda 和 Katsuhiro Ota。两棵树的紧平面装填。载于《第22届欧洲计算几何研讨会》，2006年。[25] Norbert Sauer 和 Joel Spencer。图的边不相交嵌入。《组合理论杂志B辑》，25(3)：295–302，1978年。[26] S. K. Teo 和 H. P. Yap。将两个阶为 n 且总边数至多为 $2n-2$的图装填。《Graphs Comb.》，6(2)：197–205，1990年。[27] Hong Wang 和 Norbert Sauer。将三个树的副本装入完全图。《欧洲组合学杂志》，14(2)：137–142，1993年。[28] Mariusz Wozniak 和 A. Pawel Wojda。图的三重放置。《图与组合》，9(1)：85–91，1993年。[29] Andrzej Zak。关于 k-可放置图的一则注记。《Discret. Math.》，311(22)：2634–2636，2011年。doi:10.1016/j.disc.2011.08.002。

引理 4 证明中遗漏的情况

情形 1.b： v_{g_1} **和** v_{g_2} **是脊顶点**。根据性质 2，对于某个d_1，$d_2 \in \mathbb{N}$:

$$g_1 = r_1 + d_1(\Delta_1 - 1) = r_1 + qd_1(\Delta_2 - 1). \tag{17}$$

and

$$g_2 = r_2 + d_2(\Delta_2 - 1). \tag{18}$$

若 v_{g_1} 与 v_{g_2}重合，则有 $g_1 = g_2$；由公式（17）和公式（18）可得:

$$r_2 - r_1 = (qd_1 - d_2)(\Delta_2 - 1). \tag{19}$$

关于 v_{i_1} 和 v_{i_2}，我们有:

$$i_1^m \le i_1 \le i_1^M;$$

$$i_2^m \le i_2 \le i_2^M.$$

其中 $i_l^m = i_l + c_l(\Delta_l - 1)$、$i_l^M = i_l + (c_l + 1)(\Delta_l - 1)$，对于某个满足$c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$的 $c_l \in \mathbb{N}$，σ_l是 C_l的脊顶点数，其中 $l = 1,\ 2$。我们证明 $i_1^M < i_2^m$，这意味着 $i_1 \neq i_2$。若要使 $i_1^M < i_2^m$成立，必须满足:

$$\begin{aligned} &j_1 + (c_1 + 1)(\Delta_1 - 1) < j_2 + c_2(\Delta_2 - 1) \\ &j_1 + q(c_1 + 1)(\Delta_2 - 1) < j_2 + c_2(\Delta_2 - 1) \\ &j_2 - j_1 > (qc_1 + q - c_2)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{20}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n - (\Delta_l - 1)(\sigma_l \bmod 2)}{2}$，对于 $l = 1,\ 2$，公式（19）可改写为:

$$j_2 - j_1 = \left((qd_1 - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \right) (\Delta_2 - 1). \tag{21}$$

结合公式（21）和公式（20），我们得到:

$$c_2 - qc_1 - q > -\frac{1}{2}. \tag{22}$$

总之，要使 $i_1^M < i_2^m$成立，公式（22）必须成立。另一方面，由公式（21）以及 $j_2 - j_1 > 0$ 这一假设，我们得到 $c_2 - qc_1 - q > -1$；由于 $c_2 - qc_1 - q$ 是整数，可以将其改写为 $c_2 - qc_1 - q \ge 0$。这意味着公式（22）成立，因此 $i_1^M < i_2^m$且 $i_1 \neq i_2$。

情形 1.c： v_{i_1} **和** v_{g_2} **是脊顶点**。根据性质 2，对于某个$c_1 \in \mathbb{N}$:

$$i_1 = j_1 + c_1(\Delta_1 - 1) = j_1 + qc_1(\Delta_2 - 1). \tag{23}$$

对于某些 $c_2 \in \mathbb{N}$ 和 $0 \le \alpha_2 < \Delta_2 - 1$，我们还有:

$$i_2 = j_2 + c_2(\Delta_2 - 1) + \alpha_2. \tag{24}$$

如果 v_{i_1} 与 v_{i_2}重合，则有 $i_1 = i_2$；由公式（23）和公式（24）可得：

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) - \alpha_2. \tag{25}$$

关于 v_{g_1}，我们有：

$$g_1^m \le g_1 \le g_1^M;$$

其中 $g_1^m = r_1 + d_1(\Delta_1 - 1)$，$g_1^M = r_1 + (d_1 + 1)(\Delta_1 - 1)$，对于某个 $d_1 \in \mathbb{N}$ suc h 即 $c_1 + d_1 = \lceil \frac{\sigma_1}{2} \rceil - 1$，其中 σ_1 是 C_1的脊顶点数。由于 v_{g_2} 是 Γ_2下部的一个顶点，因此必有 $g_2 = r_2 + d_2(\Delta_2 - 1)$。我们证明 $g_1^M < g_2$，这意味着 $g_1 \neq g_2$。要使 $g_1^M < g_2$，必须有：

$$\begin{aligned} &r_1 + (d_1 + 1)(\Delta_1 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_1 + q(d_1 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_2 - r_1 > (qd_1 + q - d_2)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{26}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n - (\Delta_l - 1)\ (\sigma_l \bmod 2)}{2}$，对于 $l = 1,\ 2$，公式（26）可改写为：

$$j_2 - j_1 > \left((qd_1 + q - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \right) (\Delta_2 - 1). \tag{27}$$

结合方程（25）和方程（27），我们得到：

$$qc_1 - c_2 - \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1} > (qd_1 + q - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1 (\sigma_l \bmod 2)}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1,\ 2$；将 d_1和 d_2 代入前面的方程，可得：

$$qc_1 - c_2 - \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1} > \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q + q - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{1(\sigma_2 \mod 2)}{2} + c_2 + \\ + 1 + \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2 - 1} = \frac{q(n-2)\ \Delta_1 - 1}{} = q\sigma_1$，由此可得：

$$qc_1 - c_2 > \frac{1}{2} + \frac{\alpha_2}{2(\Delta_2 - 1)} \tag{28}$$

总之，要使 $g_1^M < g_2$，公式（28）必须成立。另一方面，根据公式（25）以及假设 $j_2 - j_1 > 0$，我们得到 $(qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) - \alpha_2 > 0$。由于 $(\Delta_2 - 1) > 0$，这意味着 $qc_1 - c_2 > \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1}$。由于 $0 \le \frac{\alpha_2}{\Delta_2 - 1} < 1$ 且 $\overline{qc_1 - c_2}$ 是整数，我们有 $qc_1 - c_2 \ge 1$。这意味着公式（28）成立，因此 $g_1^M < g_2$ 且 $g_1 \neq g_2$。

情形 1.d： v_{g_1} **和** v_{i_2} **是脊顶点**。根据性质 2，对于某个$c_2 \in \mathbb{N}$：

$$i_2 = j_2 + c_2(\Delta_2 - 1). \tag{29}$$

对于某些 $c_1 \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq \alpha_1 < \Delta_2 - 1$，我们也有：

$$i_1 = j_1 + c_1(\Delta_1 - 1) + \alpha_1 = j_1 + qc_1(\Delta_2 - 1) + \alpha_1. \tag{30}$$

若 v_{i_1} 与 v_{i_2}重合，则有 $i_1 = i_2$；由方程（30）和方程（29）可得：

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) + \alpha_1. \tag{31}$$

关于 v_{g_2}，我们有：

$$g_2^m \leq g_2 \leq g_2^M.$$

其中 $g_2^m = r_2 + d_2(\Delta_2 - 1)$，$g_2^M = r_2 + (d_2 + 1)(\Delta_2 - 1)$，对于某个 $d_2 \in \mathbb{N}$ suc h 即 $c_2 + d_2 = \lceil \frac{\sigma_2}{2} \rceil - 1$，其中 σ_2 是 C_2的脊顶点数。由于 v_{g_1} 是 Γ_1下部的一个顶点，因此必有 $g_1 = r_1 + d_1(\Delta_1 - 1)$。我们证明 $g_1 < g_2^m$，这意味着 $g_1 \neq g_2$。要使 $g_1 < g_2^m$成立，必须有：

$$\begin{aligned} &r_1 + d_1(\Delta_1 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_1 + qd_1(\Delta_2 - 1) < r_2 + d_2(\Delta_2 - 1) \\ &r_2 - r_1 > (qd_1 - d_2)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{32}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n - (\Delta_l - 1)(\sigma_l \bmod 2)}{2}$，对于 $l = 1, 2$，方程（32）可改写为：

$$j_2 - j_1 > \left((qd_1 - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \right) (\Delta_2 - 1). \tag{33}$$

结合方程 (31) 和方程 (33)，我们得到：

$$qc_1 - c_2 + \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1} > (qd_1 - d_2) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1_{(\sigma_l \bmod 2)}}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1, 2$；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，得到：

$$\begin{aligned} &qc_1 - c_2 + \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1} > \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{1(\sigma_2 \mod 2)}{2} + c_2 + \\ &+ 1 + \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \end{aligned}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2 - 1} = \frac{q_{(n-2)\ \Delta_1 - 1}}{} = q\sigma_1$，这意味着：

$$qc_1 - c_2 > \frac{1 - q}{2} - \frac{\alpha_1}{2(\Delta_2 - 1)} \tag{34}$$

总之，要有 $g_1 < g_2^m$公式（34）必须成立。另一方面，根据公式（31）以及 $j_2 - j_1 > 0$这一假设，我们得到 $(qc_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) + \alpha_1 > 0$；由于 $(\Delta_2 - 1) > 0$，这意味着 $qc_1 - c_2 > -\frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1}$。由于 $0 \leq \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1} < 1$且 $qc_1 - c_2$ 为整数，我们有 $qc_1 - c_2 > 0$。由于 q 是正整数，这意味着公式（34）成立，因此 $g_1 < g_2^m$和 $g_1 \neq g_2$。

情形 2.b： v_{g_1} **和** v_{g_2} **是脊顶点**。由于 v_{g_2} 是 Γ_2下部中的一个顶点，因此它必须是 $g_2 = r_2 + d_2(\Delta_2 - 1)$。如果 v_{g_2}与 v_{i_1}重合，如上文所述，它必须是 $i_1 = g_2 - n$。将 g_2的表达式与公式（30）结合，我们得到：

$$r_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1) + \alpha_1 + n. \tag{35}$$

关于 v_{i_2}，我们有：

$$i_2^m \leq i_2 \leq i_2^M;$$

其中，对于某个满足 $c_2 + d_2 = \left\lceil \frac{\sigma_2}{2} \right\rceil - 1$的 $c_2 \in \mathbb{N}$，有 $i_2^M = j_2 + (c_2 + 1)(\Delta_2 - 1)$，其中 σ_2 是 C_2的脊顶点数。

我们证明 $i_2^M < g_1$，这意味着 $i_2 \neq g_1$。要使 $i_2^M < g_1$ 成立，必须满足：

$$\begin{aligned} &j_2 + (c_2 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_1 + d_1(\Delta_1 - 1) \\ &j_2 + (c_2 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_1 + qd_1(\Delta_2 - 1) \\ &j_2 - r_1 < (qd_1 - c_2 - 1)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{36}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n - (\Delta_l - 1)(\sigma_l \bmod 2) - 2}{2}$，对于 $l = 1,2$，公式（35）可以改写为：

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1)/\alpha_1 + \frac{n}{2} + \frac{(\Delta_2 - 1)(\sigma_2 \mod 2)}{2}, \tag{37}$$

而公式（36）可以改写为：

$$j_2 - j_1 < \left((qd_1 - c_2 - 1) - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} \right) (\Delta_2 - 1) + \frac{n}{2}. \tag{38}$$

结合公式（37）和公式（38），我们得到：

$$qc_1 - d_2 < (qd_1 - c_2 - 1) - \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1}.$$

由于 $c_l + d_l = \left\lceil \frac{\sigma_l}{2} \right\rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1_{(\sigma_l \bmod 2)}}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1,\ 2$；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，得到：

$$qc_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} + c_2 + 1 + \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} + \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1} < \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} -$$

$$- qc_1 - q - c_2 - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - 1$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2 - 1} = \frac{q(n-2)\ \Delta_1 - 1}{} = q\sigma_1$，这意味着：

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 + 1 < -\frac{q}{2} - \frac{\alpha_1}{2(\Delta_2 - 1)} \tag{39}$$

综上，必须满足 $i_2^M < g_1^m$公式（39）。另一方面，根据公式（37）以及 $j_2 - j_1 < \frac{n - (\Delta_1 - 1)\ 2}{} = \frac{n-q}{(\Delta_2 - 1)\ 2}$这一假设，我们得到：

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 + 1 < -\frac{q}{2} - \frac{\alpha_1}{\Delta_2 - 1}. \tag{40}$$

我们有$-\frac{q}{2}-\frac{\alpha_1}{\Delta_2-1}<-\frac{q}{2}-\frac{\alpha_1}{2(\Delta_2-1)}$，因为$\frac{\alpha_1}{(\Delta_2-1)}<\frac{1}{2}$。换句话说，式（40）意味着公式（39）成立，因此$i_2^M < g_1$ 和$i_2 \neq g_1$。

情况 2.c： v_{i_1} **和** v_{g_2} **是脊顶点**。由于 v_{g_2} 是 Γ_2下部的一个顶点，因此它必定是 $g_2 = r_2+d_2$（Δ_2-1）。如果 v_{g_2}与 v_{i_1}重合，如上所述，它必定是 $i_1 = g_2 - n$。将 g_2 的表达式与公式（23）结合，可得：

$$r_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1) + n. \tag{41}$$

关于 v_{g_1}，我们有：

$$g_1^m \leq g_1 \leq g_1^M;$$

其中 $g_1^m = r_1 + d_1$（$\Delta_1 - 1$），$g_1^M = r_1 +$（$d_1 + 1$）（$\Delta_1 - 1$），对某个满足 $c_1 + d_1 = \lceil \frac{\sigma_1}{2} \rceil - 1$的 $d_1 \in \mathbb{N}$ 成立，其中 σ_1 是 C_1的脊顶点数。我们证明 $i_2^M < g_1^m$，这意味着 $i_2 \neq g_1$。要使 $i_2^M < g_1^m$成立，必须有：

$$\begin{aligned} &j_2 + (c_2 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_1 + d_1(\Delta_1 - 1) \\ &j_2 + (c_2 + 1)(\Delta_2 - 1) < r_1 + qd_1(\Delta_2 - 1) \\ &j_2 - r_1 < (qd_1 - c_2 - 1)(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{42}$$

由于 $r_l = j_l + \frac{n-(\Delta_l-1)(\sigma_l \bmod 2)}{2}$，对于 $l = 1, 2$，方程（41）可改写为：

$$j_2 - j_1 = (qc_1 - d_2)(\Delta_2 - 1) + \frac{n}{2} + \frac{(\Delta_2 - 1)(\sigma_2 \mod 2)}{2}, \tag{43}$$

而方程（42）可改写为：

$$j_2 - j_1 < \left((qd_1 - c_2 - 1) - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}\right)(\Delta_2 - 1) + \frac{n}{2}. \tag{44}$$

结合公式（43）和式（44），可得：

$$qc_1 - d_2 < (qd_1 - c_2 - 1) - \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，对于 $l = 1, 2$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l+1-(\sigma_l \bmod 2)}{2} - c_l - 1$；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，可得：

$$qc_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} + c_2 + 1 < \frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q - c_2 - 1 - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2-1} = \frac{q(n-2)\,\Delta_1-1}{} = q\sigma_1$，这意味着：

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 + 1 < -\frac{q}{2} \tag{45}$$

总之，必须满足 $i_2^M < g_1^m$公式（45）。另一方面，根据公式（43）以及假设 $j_2 - j_1 < {}^{n-}{}_{(\Delta_1-1)\ 2} = {}^{n-q}{}_{(\Delta_2-1)\ 2}$，我们得到:

$$qc_1 - d_2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 \mod 2) < -\frac{q}{2}.$$

再次将 d_2 替换为 ${}^{\sigma_2+1}{}_{(\sigma_2 \text{ 模 } 2)\ 2} - c_2 - 1$，得到:

$$qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2 + 1 < -\frac{q}{2}. \tag{46}$$

由于方程（45）等价于方程（46），我们可以得出方程（45）成立，因此 $i_2^M < g_1^m$和 $i_2 \neq g_1$。

情况 2.d: v_{g_1} **和** v_{i_2} **是脊顶点**。由于 v_{g_1} 是 Γ_1下部的一个顶点，因此它必定是 $g_1 = r_1 + d_1(\Delta_1 - 1)$。如果 v_{g_1} 与 v_{i_2}重合，将 g_1 的表达式与公式（6）结合，可得:

$$j_2 - r_1 = (qd_1 - c_2)(\Delta_2 - 1). \tag{47}$$

关于 v_{i_1} v_{g_2}，我们有:

$$i_1^m \leq i_1 \leq i_1^M;$$

and

$$g_2^m \leq g_2 \leq g_2^M.$$

其中 $i_1^m = j_1 + c_1(\Delta_1 - 1) = j_1 + qc_1(\Delta_2 - 1)$， $g_2^M = r_2 + (d_2 + 1)(\Delta_2 - 1) - n$，对于某个满足 $c_2 + d_2 = \lceil \frac{\sigma_2}{2} \rceil - 1$ 的 $d_2 \in \mathbb{N}$，其中 σ_2 是 C_2的脊顶点数。

我们证明 $g_2^M < i_1^m$，这意味着 $g_2 \neq i_1$。要使 $g_2^M < i_1^m$，必须满足:

$$\begin{aligned} &r_2 + (d_2 + 1)(\Delta_2 - 1) - n < j_1 + c_1(\Delta_1 - 1) \\ &r_2 + (d_2 + 1)(\Delta_2 - 1) - n < j_1 + qc_1(\Delta_2 - 1) \\ &r_2 - j_1 < (qc_1 - d_2 - 1)(\Delta_2 - 1) + n(\Delta_2 - 1). \end{aligned} \tag{48}$$

由于 $r_l = j_l + {}^{n-}{}_{(\Delta_l-1)\ (\sigma_l \text{ 模 } 2)\ 2}$，对于 $l = 1,\ 2$，公式（47）可改写为:

$$j_2 - j_1 = (qd_1 - c_2)(\Delta_2 - 1) - \frac{q(\Delta_2 - 1)(\sigma_1 \mod 2)}{2} + \frac{n}{2}, \tag{49}$$

而公式（48）可改写为:

$$j_2 - j_1 < (qc_1 - d_2 - 1)(\Delta_2 - 1) + \frac{(\Delta_2 - 1)(\sigma_2 \mod 2)}{2} + \frac{n}{2}. \tag{50}$$

结合公式（49）和公式（50），我们得到:

$$qd_1 - c_2 - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} < (qc_1 - d_2 - 1) + \frac{(\sigma_2 \mod 2)}{2}.$$

由于 $c_l + d_l = \lceil \frac{\sigma_l}{2} \rceil - 1$，我们有 $d_l = \frac{\sigma_l + 1 \ (\sigma_l \text{模 } 2)}{2} - c_l - 1$，对于 $l = 1, 2$；将 d_1 和 d_2 代入前一个方程，我们得到：

$$\frac{q\sigma_1}{2} + \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} - qc_1 - q - c_2 - \frac{q(\sigma_1 \mod 2)}{2} < qc_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2 \mod 2}{2} + \\ + c_2 + 1 - 1 + \frac{\sigma_2 \mod 2}{2}$$

考虑到 $\sigma_2 = \frac{n-2}{\Delta_2 - 1} = \frac{q}{(n-2)\ \Delta_1 - 1} = q\sigma_1$，这意味着：

$$2\left(qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2\right) > -q \tag{51}$$

总之，要使 $g_2^M < i_1^m$，公式（51）必须成立。另一方面，由公式（49）以及假设 $j_2 - j_1 < \frac{n-}{(\Delta_1 - 1)\ 2} = \frac{n-q}{(\Delta_2 - 1)\ 2}$，我们得到：

$$qd_1 - c_2 - \frac{q}{2}(\sigma_1 \mod 2) < -\frac{q}{2}.$$

再次将 d_1 替换为 $\frac{\sigma_1 + 1}{(\sigma_1 \mod 2)\ 2} - c_1 - 1$，我们得到：

$$2\left(qc_1 - \frac{q\sigma_1}{2} + c_2\right) > -q. \tag{52}$$

由于公式（51）等价于公式（52），我们可以得出公式（51）成立，因此 $g_2^M < i_1^m$ 和 $g_2 \neq i_1$。

B 定理 7 的证明

定理 7。一个 Δ-正则毛毛虫树，且满足 $4 \leq \Delta \leq 7$，存在一个 2-平面 3-嵌入。

证明。设 C_1、C_2 和 C_3 是三个副本（如图 8 所示，分别以红色、蓝色和绿色表示），它们都是具有 $4 \leq \Delta \leq 7$ 的 Δ-正则毛毛虫树 C。对于 $j = 1, 2, 3$，我们将毛毛虫树 C_j 的顶点记号如下：沿脊柱依次出现的脊顶点记为 $v_0^j, v_1^j, \ldots, v_{c-1}^j$；与顶点 v_i^j 相邻的叶子（对于 $i = 1, 2, \ldots, c-1$）记为 $u_{i,l}^j$，其中 $l = 0, 1, \ldots, d$，其中 $d = \Delta - 2$ 当 $i = 0$ 或 $i = c - 1$ 时，且 $d = \Delta - 3$ 当 $0 < i < c - 1$ 时。

令 p_0、p_1、……、p_{n-1} 为圆上的点，按顺时针顺序排列（下标按模 n 计算）。为构造打包，我们为每棵毛毛虫树计算一种绘图，使其顶点映射到点 p_1、p_2、……、p_n，且三种绘图的并集构成一个 2-平面绘图。我们描述 $\Delta = 4$、5、6 时的构造方法（另见图 8(a) 至图 8(c)）；$\Delta = 7$ 情形下的构造略有不同，见图 8(d)。

毛毛虫树 C_1 绘制在圆外，使顶点 v_0^1 映射到点 p_0，每个顶点 v_i^1（其中 $i = 1$、2、…… $c - 1$）映射到 $p_{i(\Delta-1)+1}$，每个叶子 $u_{0,l}^1$ 映射到点 p_{l+1}，每个叶子 $u_{i,l}^1$ 映射到点 $p_{i(\Delta-1)+2+l}$。换句话说，脊柱上的每个顶点之后，沿顺时针方向依次排列着

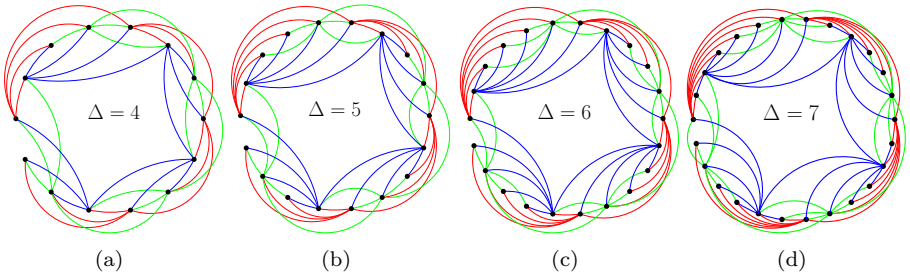


图 8： Δ-正则毛毛虫树的 2-平面 3-放置。

它的叶子，而最后一个叶子之后是脊柱上的下一个顶点。毛毛虫树 C_2 绘制在圆内，使顶点 v_i^2 映射到沿顺时针方向紧接着承载 v_i^1 的点的下一个点，并使每个叶子 $u_{i,l}^2$ 映射到沿顺时针方向紧接着 $u_{i,l}^1$的点。显然，前两棵毛毛虫树的绘图不会彼此交叉，因为它们位于圆的不同侧；此外，它们的并集没有重边。对于 C_3，顶点 v_i^3（其中 $i = 0$、1、.....、$c-2$）映射到承载$u_{i,d}^1$和$u_{i,d-1}^2$的点，也就是 v_i^1 的最后一个叶子和 v_i^2的倒数第二个叶子；顶点 v_{c-1}^3 映射到承载$u_{i,d-1}^1$ 和$u_{i,d-2}^2$的点，也就是 v_{c-1}^1 的倒数第二个叶子和 v_i^2的倒数第三个叶子。关于这种映射，注意，如果将 C_3 的脊柱边绘制在圆外，那么 C_3 的每条脊柱边都会与 C_1 的两条相邻脊柱边相交，而 C_1 的每条脊柱边至多与 C_3的两条相邻脊柱边相交。要完成绘图，我们需要绘制 C_3的叶子。考虑两个相邻的脊顶点 v_i^3 和 v_{i+1}^3，其中 $0 \le i \le c-2$；这两个顶点之间有 $\Delta - 2$ 个尚未被 C_3 使用的点，我们按顺时针顺序将其中最先的两个点连接到v_i。根据 Δ的取值， v_i 和v_{i+1} 之间还剩下0、1或2个尚未被 C_3使用的点；我们将这些点连接到 v_{i+1}。注意， v_0^3 相邻的 $\Delta - 3$ 个叶子和 v_{c-1}^3相邻的3个叶子尚待映射。另一方面，v_{c-1}^3和 v_0^3 之间沿顺时针方向有 Δ 个尚未被 C_3 使用的点；我们将沿顺时针方向紧接着 v_{c-1}^3 的三个顶点连接到 v_{c-1}^3，其余顶点连接到 v_0^3。 C_3 所有与叶节点相连的边都绘制在圆内。对 C_3 的这种映射不会产生重边，并且在 C_2 和 C_3的边上至多产生两处交叉。

□