arXiv:2301.01242v2 [math.PR] 9 Jan 2023

具有非局部拉普拉斯算子和相关白噪声的非平稳格点安德森模型

预印本

Xiaoyun Chen
数学系
北卡罗来纳大学夏洛特分校
美国北卡罗来纳州夏洛特市大学城大道9201号，邮编28223

Dan Han*
路易斯维尔大学数学系，美国肯塔基州路易斯维尔市南第三街2301号，邮编40292 dan.han@louisville.edu

Stanislav Molchanov北卡罗来纳大学夏洛特分校数学系，美国北卡罗来纳州夏洛特市University City大道9201号，邮编28223
smolchan@uncc.edu

2023年1月10日

摘要

我们研究格点 Z^d上的非定常安德森抛物型问题，即方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varkappa \mathcal{A} u(t,x) + \xi_t(x) u(t,x) \\ u(0,x) &\equiv 1,\ (t,x) \in [0,\infty) \times Z^d. \end{aligned} \tag{1}$$

这里， $\mathcal{A}$ 是非局部拉普拉斯算子， $\xi_t(x)$ $t \geq 0$， $x \in Z^d$ 是相关白噪声族， $\varkappa > 0$ 是扩散系数。 $\varkappa$ （大或小）的变化决定了模型中的定性相变。首先，模型分析归结为在加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\ \mu)$上，针对适当测度 μ求解随机微分方程（SDE）的标准伊藤形式。推导出解 $u(t,\ x)$的前两个矩的方程，并运用相应薛定谔算子的谱分析对其进行研究，这些算子具有一类特殊的正定势。分析揭示了若干分岔，其取决于 $\mathcal{A}$ 的核的性质以及势中的相关函数。

关键词 安德森模型 · 非平稳随机介质 · 间歇性 · 白噪声 MSC：60H25 · 82C44 · 60K37

1 引言

在本文中，我们将介绍几项受 R. Carmona 和 S. Molchanov 所著回忆录 [1] 启发的新成果。考虑非平稳抛物型方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varkappa \mathcal{A} u(t,x) + \xi_t(x) u(t,x) \\ u(0,x) &\equiv 1,\ (t,x) \in [0,\infty) \times Z^d. \end{aligned} \tag{2}$$

*通讯作者

这里，算子 $\mathcal{A}$ 是具有连续时间的随机游走 $x(t)$ 的生成元。它的形式为

$$\mathcal{A}f(t,x)=\sum_{z\neq 0,z\in Z^d} a(z)\big(f(t,x+z)-f(t,x)\big). \tag{3}$$

我们假设 $a(z)=a(-z)$（对称性），$a(z)\geq 0$，$a(0)=0$，$a(z)>0$，若 $|z|=1$（这意味着非周期性），$\sum_{z\in Z^d} a(z)=1$（归一化）。式 (1) 中的常数 $\varkappa$ 是扩散系数（扩散率）。随机游走具有以下结构。它在每个位置 $x\in Z^d$ 停留时间 τ_x，该时间服从参数为 $\varkappa$ 的指数分布，即 $P(\tau_x>t)=e^{-\varkappa t}$；在时刻 τ_x+0，它以概率 $a(z)$ 从位置 x 跳至位置 $x+z$。我们将讨论以下三种不同的情形。

I) **轻尾** 若 $a(z)$ 满足克拉美条件：

$$a(z)\leq ce^{-\eta|z|},\ c,\eta>0, \tag{4}$$

那么我们称该随机游走具有轻尾。对于转移概率 $p(t,0,z)$，可以运用克拉美型大偏差极限定理。这些定理完整地刻画了 $p(t,0,z)$ 在 $t\to\infty$ 时的行为。许多论文都包含这方面的结果；近期的文献中可参见 [8]。本文 [8] 给出了格林函数 $G_\lambda(0,z)=\int_0^\infty e^{\lambda t}p(t,0,z)$ 的重要渐近结果，其中 $\lambda>0$。

II) **中等尾**

$$a(z)\sim\frac{C(\dot z)}{|z|^{d+\alpha}},|z|\to\infty,\ \dot z=\frac{z}{|z|}(direction\ of\ z)\in S^{d-1},\ \alpha>2, \tag{5}$$

其中，C 是定义在 S^{d-1} 上的正连续函数，$C(\dot z)=C(-\dot z)$。特别地，如果 $\sum|z|^2a(z)<\infty$，则过程 $x(t)$ 满足中心极限定理，即在某些技术条件下，其渐近服从高斯分布，并具有余项的全局展开，参见 [7]。

III) **重尾**

$$a(z)\sim\frac{C_0(\dot z)}{|z|^{d+\alpha}},\ |z|\to\infty,\dot z=\frac{z}{|z|}(direction\ of\ z)\in S^{d-1},\ 0<\alpha<2 \tag{6}$$

其中，C_0 是定义在 S^{d-1} 上的正连续函数，$C_0(\dot z)=C_0(-\dot z)$。在这些条件下，随机变量 $x(t)$ 渐近地属于参数为 α 的 d 维对称稳定律类的吸引域。在更强的条件下（渐近展开：$a(z)=\frac{C_0(\dot z)}{|z|^{d+\alpha}}+\frac{C_1(\dot z)}{|z|^{d+\alpha+1}}+$.....），参见 [4],，可以证明全局局部极限定理，该定理给出了转移概率 $p(t,0,z)=p(t,x,x+z)=P\{x(t)=x+z\mid x(0)=x\}$ 的渐近行为，其中 $t\to\infty$ 在 $z\in Z^d$ 上一致作用，参见 [4]。

我们将从两种不同的角度研究算子 $\mathcal{A}$。在第 2、3、4 和 5 节研究随机微分方程时，算子 $\mathcal{A}$ 将被视为加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\ \mu)$ 上的有界算子，其点积为

$$(f,g)_\mu=\sum_{x\in Z^d} f(x)\,\bar g(x)\mu(x)$$

其中 $\mu(x)>0$，$\sum_{x\in Z^d}\mu(x)<\infty$，并满足一些额外的技术条件。

在对与场 $u(t,\ x)$ 的矩相关的薛定谔算子进行谱分析时，我们使用标准空间 $l^2(Z^d)$，其点积为 $(f,\ g)_\mu=\sum f(x)\ \bar g(x)$。算子 $\mathcal{A}$ 现在是 $l^2(Z^d)$ 及其扰动，例如由正定函数 B（势 $\xi_t(x)$ 的相关函数）给出的 $\mathcal{H}_2=2\varkappa\mathcal{A}+B(x)$，是第 6、7 和 8 节分析的核心对象。

现在我们来描述势 $\xi_t(x)$。形式上，$\xi_t(x)=\dot W(t,x)$，其中 $\{W(t,x)\ t\geq 0,x\in Z^d\}$ 是位置 $x\in Z^d$ 处、时刻 $t\geq 0$ 的维纳过程族。这些过程在时间 t 上具有独立增量，并表示 Z^d 上的平稳高斯场。我们用记号 $<\cdot>$ 表示对场 $W(\cdot,\cdot)$ 或白噪声 $\dot W(t,x)$ $x\in Z^d$ 的概率律取期望，用 $E[\cdot]$ 表示对与生成元 $\varkappa\mathcal{A}$ 相关的随机游走的概率律取期望。我们将假设期望 $<W(t,x)>=0,<W(t_1,x)W(t_2,y)>=(t_1\wedge t_2)B(x-y)$ 且 $W(t,\cdot)\in l^2(Z^d,\mu)$，即

$$\sum_{x\in Z^d} W^2(t,x)\mu(x)=\|W(t,\cdot)\|_\mu^2<\infty P-\text{a.s.} \tag{7}$$

我们将把 $W(t,x)$ 构造为场 $\{w(t,\cdot)$ 的线性变换， $t\geqslant 0\}$ 其中 $w(t,x)$, $x\in Z^d$ 是在时刻 $t\geq 0$ 、位置 $x\in Z^d$ 处独立同分布（i.i.d）的标准布朗运动。定义$W(t,x)=\sum_{z\in Z^d} b(x-z)w(t,z)$，其中 $b(x-z)$ 是 $w(t,x)$ 的权重函数，且 $\sum_{z\in Z^d}|b(z)|<\infty$。于是$<W(t_1,x)W(t_2,y)>=(t_1\wedge t_2)B(x-y)$，其中 $t_1\wedge t_2=min\{t_1,t_2\}$, $B(x-y)=\sum_{z\in Z^d} b(x-z)b(y-z)=\sum_{z\in Z^d} b(x-y-z)b(-z)$。所提出的条件 $\sum_{z\in Z^d}|b(z)|<\infty$ 导致 $\sum_{z\in Z^d} b^2(z)$ 收敛，因此，$W(t,x)$ 根据柯尔莫哥洛夫三列级数定理几乎必然收敛。

对于固定的 $x\in Z^d$，过程 $W(t,x)$ 作为时间 t 的函数，是具有独立增量的高斯过程，并且 $<W(t,x)W(s,x)>=(s\wedge t)B(0)$，其中 $B(0)=\sum_{z\in Z^d} b^2(z)$，也就是说，$W(t,\cdot)=\sqrt{B(0)}w(t,\cdot)$ 在分布上。

然而，我们也可以将场 $W(t,\cdot)=\{W(t,x)\ \ x\in Z^d\}$ 的实现视为加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\mu)$ 的元素。依赖于尾部 $a(z)$ $|z|\to\infty$ 的适当测度 μ 的构造，以及 $W(t,\cdot)$ 在 $l^2(Z^d,\mu)$ 中连续性的证明，均在第 3 节给出。第 3 节还包含了对 $\|\mathcal{A}\|_\mu$ 的估计，这对于第 4 节中势为 $W(t,x)$ 的抛物安德森模型的存在唯一性定理至关重要。

第 5 节与回忆录 [1] 有许多共同之处，并以经典的伊藤演算为基础，进一步给出了安德森抛物型问题 (1) 的解 $u(t,\ x)$ 的卡茨-费曼表示。第 6 节研究了

$$m_p(t,x_1,\cdots,x_p)=<u(t,x_1)\cdots u(t,x_p)>,\ (x_1,\cdots,x_p)\in Z^{dp},\ p=1,2,\cdots \tag{8}$$

这些方程是典型的多粒子薛定谔方程。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m_p}{\partial t}=\varkappa\left(\sum_{i=1}^{p}\mathcal{A}_{x_i}\right)m_p+V_p(x_1,\cdots,x_p)m_p\\&m_p(0,x_1,\cdots,x_p)=1.\end{aligned} \tag{9}$$

这里，$\mathcal{A}_{x_i}m_p=\sum_{z\neq 0,z\in Z^d}a(z)\big(m_p(t,x_1,\cdots,x_i+z,\cdots,x_p)-m_p(t,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_p)\big)$, $i=1,2,\cdots,p$. $V_p(x_1,\cdots,x_p)=\sum_{i<j}B(x_i-x_j)$ 是具有二体相互作用 $B(x_i-x_j)$ 的 $p-$ 粒子势 $=<W(1,x_i)W(1,x_j)>$。矩方程的推导基于伊藤公式。

一阶矩的方程 $m_1(t,x)=<u(t,x)>$很简单：

$$\frac{\partial m_1}{\partial t}=\varkappa\mathcal{A}m_1,\ m_1(0,x)=1 \tag{10}$$

它给出 $m_1(t,x)\equiv 1$。

本文最重要的部分致力于研究矩 $m_p(t,\cdots)$ $p\geq 2$，首先研究二阶矩 $m_2(t,x_1-x_2)=<u(t,x_1)u(t,x_2)>$。标准的质心变换导出方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m_2(t,z)}{\partial t}=2\varkappa\mathcal{A}m_2+B(z)m_2=\mathcal{H}_2m_2\\&m_2(0,z)\equiv 1.\end{aligned} \tag{11}$$

回忆录 [1] 中包含一个形式如下的类似方程

$$\frac{\partial m_2(t,z)}{\partial t}=2\varkappa\Delta m_2+\delta_0(x)m_2=\tilde{\mathcal{H}}_2m_2. \tag{12}$$

然而，算子 Δ $f(x)=\sum_{|x-x'|=1}[f(x')-f(x)]$ 是局部拉普拉斯算子，而非非局部算子 $\mathcal{A}$。Th$_{x'}$: is

方程可利用傅里叶变换显式求解。关于方程 (12) 的核心结果表明：对于$d=1,2$，(12) 右侧的算子具有正特征值 $\lambda_0(\varkappa)>0$，对任意 $\varkappa>0$均成立。若 $d\geq 3$，则存在分岔： $\lambda_0(\varkappa)>0$ 在 $\varkappa<\varkappa_{cr}$时存在；若 $\varkappa\geq\varkappa_{cr}$，则 $\mathcal{H}_2$ 的谱为纯绝对连续谱（$\varkappa_{cr}$有显式公式）。换言之， $u(t,x)$的二阶矩在 $d=1,2,\ t\to\infty,\varkappa>0$时呈指数增长。若 $d\geq 3$, 则只有在较小的 $\varkappa(\varkappa<\varkappa_{cr})$ 下才有同样的结论。若 $d\geq 3$ 且 $\varkappa\geq\varkappa_{cr}$，则 $u(t,x)$的二阶矩随时间有界。

基态能量 λ_0 为正体现了间歇性：场 $u(t,x)$具有高度不规则性；而 $\lambda_0>0$ 的缺失则表明安德森抛物型问题具有规则性。

关于格点薛定谔型算子的谱理论已有大量研究，主要针对局部拉普拉斯算子的情形，即 $\Delta f(x)$ $= \sum_{x':\ |x-x'|=1} [f(x') - f(x)]$, 不过，该领域的研究并不像经典的$L^2(R^d)$量子力学哈密顿量那样深入。本文研究以相关函数（正定） B 为势的非局部薛定谔算子。第 7 节给出了与非局部算子 $2\varkappa\mathcal{A}$ 相关的随机游走 $x(t)$的转移概率 $p(t,\ x,\ y)$ 的估计。第 8 节分析了算子 $\mathcal{H}_2$的其他谱分岔。这些分岔与以下变化有关：从轻尾 $a(\cdot)$ 到重尾； $W(t,\ x)\ x\in Z^d$的相关性从强相关转为弱相关；以及从$\sum_{x\in Z^d} B(x) > 0$ 的情形转为 $\sum_{x\in Z^d} B(x) = 0$的情形（注意， $\sum_{x\in Z^d} B(x) < 0$ 的情形不可能出现），等等。

关于高阶矩 $m_p,\ p\geq 3$ 以及 P-几乎处处李雅普诺夫指数$\tilde{\gamma}(\varkappa) = \lim_{t\to\infty} \ln(u(t,x))\ t$ 的分析将是下一篇论文的主题。

2 Wei加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\mu)$ 与非局部拉普拉斯算子的性质 $\mathcal{A}$

2.1 加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\mu)$

以下所有分析都将在加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\mu) = \{f(\cdot):\ \|f\|_\mu^2 = \sum_{x\in Z^d} |f(x)|^2\mu(x)\}$.中展开。

权重的正则性条件 μ: 首先，我们将介绍权重 $\mu(x),\ x\in Z^d$的正则性条件。设$\mu(x) = \mu(|x|),\ |x| = |x|_\infty = \max_i |x_i|$ 并且 $\mu(n),\ n = 0,1,2,\cdots$是 n的单调向下凹函数。这意味着

$$1\leq \frac{\mu(0)}{\mu(1)} \leq \frac{\mu(1)}{\mu(2)} \leq \cdots \leq \frac{\mu(n)}{\mu(n+1)}. \tag{13}$$

Then

$$\frac{\mu(0)}{\mu(1)}\cdot\frac{\mu(1)}{\mu(2)}\cdots\frac{\mu(n-1)}{\mu(n)} = \frac{\mu(0)}{\mu(n)} \leqslant \frac{\mu(k)}{\mu(k+1)}\cdot\frac{\mu(k+1)}{\mu(k+2)}\cdots\frac{\mu(k+n-1)}{\mu(k+n)} = \frac{\mu(k)}{\mu(k+n)}. \tag{14}$$

对于固定的 $n\geq 1$, $\sup_{x,\ z:\ |x-z|=n} \frac{\mu(x)}{\mu(z)} = \mu(0)\ \mu(n)$。由此得到以下引理

引理 2.1. 对于任意 $a\in Z^d$,

$$\sup_{x\in Z^d} \frac{\mu(x+a)}{\mu(x)} \leq h(|a|) = \frac{\mu(0)}{\mu(|a|)}. \tag{15}$$

2.2 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$ 的条件

我们的下一个目标是估计 $\mathcal{A}$ 在 $l^2(Z^d,\ \mu)$ 中的范数。特别地，我们将描述所有满足约束条件（15）的测度 μ ，使得 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$ 属于 $l^2(Z^d,\ \mu)$。我们不考虑 $\mathcal{A}f = \sum_{z\neq 0,\ z\in Z^d} a(z)(f(t,\ x+z) - f(t,\ x))$, 而是考虑$\bar{\mathcal{A}}f = \sum_{z\in Z^d} a(x-y)f(t,\ y) = \sum_{z\in Z^d} a(z)f(t,\ x-z)$。可以注意到 $\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \|\mathcal{A}\|_\mu + 1$, 因此若 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$, 则$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu < \infty$。

引理 2.2。 在条件（*14*）下,

$$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \sum_{z\neq 0, z\in Z^d} a(z)\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}}$$

.

证明。令 $f(x) \in l^2(Z^d,\ \mu)$，则 $\|\bar{\mathcal{A}}f(t,\ x)\|_\mu \leq \sum_{z\neq 0,\ z\in Z^d} a(z)\|f(t,\ x-z)\|_{\mu^\circ}$

$$\|f(t,x-z)\|_\mu^2 \leq \sum_{z\in Z^d} f^2(x-z)\mu(x)\cdot\frac{\mu(x-z)}{\mu(x-z)} \leq \frac{\mu(0)}{\mu(z)}\|f\|_\mu^2$$

$$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \sum_{z\neq 0, z\in Z^d} a(z)\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}}.$$

□

可以得到比引理 2.2 中更好的估计。

引理 2.3。在条件（*14*）下，

$$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \sqrt{\sum_{z\neq 0, z\in Z^d}\frac{a^2(z)\mu(0)}{\mu(z)}}.$$

证明。

$$\|\bar{\mathcal{A}}f(x)\|_\mu^2 \leq \Big(\sum_{y\in Z^d} a(x-y)f(t,y)\Big)^2 = \Big(\sum_y \frac{a(x-y)}{\sqrt{\mu(y)}}f(t,y)\sqrt{\mu(y)}\Big)^2 \leq \sum_y \frac{a^2(x-y)}{\mu(y)}\|f\|_\mu^2.$$

两边同乘以 $\mu(x)$，可得

$$\frac{\|\mathcal{A}f\|_\mu^2}{\|f\|_\mu^2} \leq \sum_{x,y}\frac{\mu(x)a^2(x-y)}{\mu(y)} = \sum_{x,\nu}\frac{\mu(y+z)a^2(z)}{\mu(y)} \leq \sum_z \frac{\mu(0)a^2(z)}{\mu(z)}.$$

这证明了不等式 (2.3)。

□

定理 引理 2.4. 以下条件足以保证拉普拉斯算子 $\mathcal{A}$ 在 $l^2(Z^d,\mu)$中的有界性。

1. 轻尾如果 $a(z)$ 满足克拉美条件：

$$a(z) \leq ce^{-\eta|z|},\ c,\eta>0, \tag{16}$$

then

$$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \sqrt{\sum_{z\in Z^d} c^2 e^{-2\eta|z|}\frac{\mu(0)}{\mu(z)}}. \tag{17}$$

因此，如果 $\mu(z) < e^{-\gamma|z|}$ 且 $\gamma - 2\eta < 0$，则 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$。

2. 中等尾 或重尾 如果 $a(z)$ 具有中等尾或重尾，则

$$a(z) \leq \frac{C(\dot{z})}{|z|^{d+\alpha}}, |z|\to\infty,\ \dot{z} = \frac{z}{|z|}(direction\ of\ z) \in S^{d-1} \tag{18}$$

其中，C 是在 S^{d-1}上的正连续函数；对于中等尾，$\alpha > 2$；对于重尾，$\alpha \in (0,\ 2)$。如果 $\mu(z)$满足：

$$\mu(z) \sim \frac{C(\delta_2)}{1+|z|^{d+\delta_2}},\ \delta_2 > 0. \tag{19}$$

$$\|\bar{\mathcal{A}}\|_\mu \leq \sqrt{\sum_{z\in Z^d}(a(z))^2\frac{\mu(0)}{\mu(z)}} \sim \sqrt{\sum_{z\in Z^d}\frac{1+|z|^{d+\delta_2}}{|z|^{2d+2\alpha}}} = \sqrt{C_0 + \sum_{z\in Z^d}\frac{1}{|z|^{d+2\alpha-\delta_2}}}$$

其中，C_0 为有限常数。那么，当 $\delta_2 < 2\alpha$时，$\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$，即对于任意充分小的正数 δ_2。

这类估计在重尾 $a(z)$中尤为重要。我们希望将生成元为 $\mathcal{A}$、维数 $d = 1, 2$ 的暂态随机游走纳入理论。

3 加权希尔伯特空间 $l^2(Z^d,\mu)$中过程 $W(t,x)$ 的连续性

维纳过程 $W(t,x)$ 是独立同分布（i.i.d.）的标准布朗运动 $w(t,x)$、 $x\in Z^d$、 $t\geq 0$ 的加权求和： $W(t,x)=\sum_{z\in Z^d} b(x-z)w(t,z)$。该级数 P-几乎必然收敛，当且仅当如果 $\sum_{z\in Z^d} b^2(z)<\infty$，即 $b(\cdot)\in l^2(Z^d)$。然而，我们将假设核 $b(\cdot)$ 不仅来自 $l^2(Z^d)$，而且满足更强的条件 $b(\cdot)\in l^1(Z^d)$， $\sum_{z\in Z^d}|b(z)|\leq\|b(\cdot)\|_1<\infty$。那么

$$B(0)=<W^2(1,0)>=\sum_{z\in Z^d} b^2(z).$$
$$B(x)=<W^2(1,x)>=\sum_{z\in Z^d} b(x-z)b(-z).$$

也就是说，

$$\sum_{x\in Z^d}|B(x)|\leq\sum_{x\in Z^d}|b(x-z)||b(z)|\leq\sum_{z\in Z^d}|b(z)|^2.$$

由于 $b(\cdot)\in l^1$，我们有 $b(x)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\hat{b}(k)e^{-ikx}dk$ 其中 $\hat{b}(k)=\sum_{x\in Z^d} b(x)e^{ikx}$。根据帕塞瓦尔恒等式，$B(x)=\sum_{z\in Z^d} b(x-z)b(-z)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} e^{-ikx}|\hat{b}(k)|^2dk$。根据博赫纳-欣钦定理， $B(x)$ 是具有连续谱密度 $\rho(k)=|\hat{b}(k)|^2$ $(2\pi)^d$ 的正定函数。在条件 $b\in l^1(Z^d)$ 下，

$$\sum_{x\in Z^d} B(x)=\sum_{x\in Z^d}\sum_{z\in Z^d} b(x-z)b(-z)=(\sum_{z\in Z^d} b(z))^2.$$

这意味着 $\sum B(x)\geq 0$ 当且仅当 $\sum B(x)=0$，且当且仅当 $\sum b(x)=0$。这些事实对于第 8 节的谱分析至关重要。还需注意， $\rho(0)=|\hat{b}(0)|^2$ $(2\pi)_d=0$ 当且仅当 $\sum_{x\in Z^d} b(x)=0$ 或 $\sum_{x\in Z^d} B(x)=0$。这一事实有如下概率解释。

考虑高斯场 $\xi(x)=W(1,x)$，并定义 $S_L=\sum_{|x|_\infty\leq L}\xi(x)$，其中 $|x|_\infty=\max_i|x_i|$ 且 $S_L^*=1$ $(2L)^{d/2}S_L$，则

$$\begin{aligned}VarS_L^*=\frac{1}{(2L)^d}<S_L^2>&=\frac{1}{(2L)^d}\sum_{\substack{x,y:|x|_\infty<L\\|y|_\infty<L}}B(x-y)\\&=\frac{1}{(2L)^d}\int_{T^d}|\sum_{|x|_\infty<L}e^{ikx}|^2\rho(k)dk\\&=\frac{1}{(2L)^d}\int_{T^d}\prod_{j=1}^d\frac{\sin^2((L+\frac{1}{2})k_j)}{\sin^2(\frac{k_j}{2})}\rho(k)dk.\end{aligned}$$

费耶核 1 $(2L)^d\prod_{j=1}^d\sin(L+\frac{1}{2})k_j\sin(\frac{k_j}{2})$ 在 $C(T^d)$ 中弱收敛到 $(2\pi)^d\delta(k)$，条件是 $L\to\infty$。该密度 $\rho(k)$ 在点 $k=0$（长波）处的取值尤为重要。具体而言，若 $\rho(0)=0$，则 $\lim_{L\to\infty}<\frac{S_L^2}{2L}(\,)_d>=0$；但若 $\rho(0)>0$，则 $\lim_{L\to\infty}<\frac{S_L^2}{2L}(\,)_d>=(2\pi)^d\rho(0)=|\hat{b}(0)|^2$。例如，若 $b(x)=\delta_0(x)$，$\hat{b}(k)=1$，则 $\lim_{L\to\infty}<\frac{S_L^2}{2L}(\,)^d>=1=|\hat{b}(0)|^2$。

定理 3.1。若 $\sum_{x\in Z^d} b^2(x) = B(0) < \infty$ 且 $\sum_{z\in Z^d} \mu(x) < \infty$，则高斯场 $W(t,x) = \sum_{z\in Z^d z} b(x-z)w(t,z)\ t\geq 0, x\in Z^d$ 作为 $l^2(Z^d,\mu)$ 中的元素，是时间的连续函数。

证明。由柯尔莫哥洛夫连续性判据，只需证明存在某个 $\alpha>0,\ \delta> 0,$

$$< \|\Delta W(\cdot,\cdot)\|_\mu^\alpha >\leq C|t_2-t_1|^{1+\delta},\ \alpha>0,\ \delta>0$$

其中 $\|\Delta W(\cdot,\cdot)\|_\mu^\alpha = (\sum_{x\in Z^d}\mu(x)((W(t_2,x)-W(t_1,x))^2)^{\alpha/2}$.

$$\begin{aligned} < \|\Delta W\|_\mu^4 > &=< (\sum_{x\in Z^d}\mu(x)((W(t_2,x)-W(t_1,x))^2)^2 > \\ &=< \sum_{x_1,x_2\in Z^d}\mu(x_1)\mu(x_2)\Delta^2 W(\cdot,x_1)\Delta^2 W(\cdot,x_2) > \end{aligned}$$

其中 $\Delta W(\cdot,x_i) = \sum_{z\in Z^d} b(x_i-z)(w(t_2,z)-w(t_1,z))\ i=1,2.$

随机变量 $\Delta W(\cdot,x_1)$ 和 $\Delta W(\cdot,x_2)$ 具有参数为以下数值的联合高斯分布

$$\begin{aligned} < \Delta W(\cdot,x_1) > =< \Delta W(\cdot,x_2) >= 0,\\ < \Delta^2 W(\cdot,x_1) >=< \Delta^2 W(\cdot,x_2) > = \sum_{z\in Z^d} b^2(-z)|t_2-t_1| = B(0)|t_2-t_1|,\\ < \Delta W(\cdot,x_1)\Delta W(\cdot,x_2) > = \sum_{z\in Z^d} b(x_1-z)b(x_2-z)|t_2-t_1| = B(x_1-x_2)|t_2-t_1|. \end{aligned}$$

Then

$$< e^{is_1\Delta W(\cdot,x_1)+is_2\Delta W(\cdot,x_2)} >= e^{-\frac{(s_1^2B(0)+2s_1s_2B(x_2-x_1)+s_2^2B(0))(t_2-t_1)}{2}}.$$

对 s_1,s_2 求导，其中 $s_1=s_2=0$，可得四阶矩:

$$\begin{aligned} < \Delta^4 W(\cdot,x) > = 3B^2(0)|t_2-t_1|^2,\\ < \Delta^2 W(\cdot,x_1)\Delta^2 W(\cdot,x_2) > = (B^2(0)+2B(0)B(x_2-x_1))|t_2-t_1|^2. \end{aligned}$$

上述结果表明 $< \|\Delta W(\cdot,\cdot)\|_\mu^4 >\leq c|t_2-t_1|^2$，即函数值过程$W(t,x)\ x\in Z^d, t\in[0,T]$ 在 $l^2(Z^d,\mu)$ 中的连续性。

可以研究 $\Delta W(t,\cdot)$ 的高阶矩，并发现 $W(t,\cdot)$ 属于任意赫尔德类 $\mathbb{H}^\beta$，其中 $\beta<1/2$ 属于 $l^2(Z^d,\mu)$。

□

4 解 $u(t,x)$ 的存在性与唯一性

现在我们研究模型 (20) 的解的存在性与唯一性问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varkappa\mathcal{A}f(t,x)+\dot{W}(t,x)u(t,x)\\ u(0,x)&\equiv 1,\ (t,x)\in[0,\infty)\times Z^d \end{aligned} \tag{20}$$

其中，势 $\xi_t(x)$ 为 $\dot{W}(t,x)$，且 $W(t,x) = \sum_{z\in Z^d} b(x-z)w(t,z)$，其中 $w(t,z)\ z\in Z^d$ 是相互独立的$_{z\in Z^d}$标准布朗运动。该方程可以采用通常的伊藤形式，也可以采用物理文献中常用的斯特拉托诺维奇形式。在物理文献中，白噪声 $\dot{w}_t$ 必然需要作动力学理解，即将其视为高斯过程 $\xi_\varepsilon(t)$ 的序列，其相关函数 $B_\varepsilon(t)$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时收敛到 $\delta_0(t)$，参见 [1] 中的讨论。我们将采用随机偏微分方程（ SPDE ）的伊藤形式，也就是说，可以将方程 (20) 理解为

$$u(t,x) = 1+\int_0^t \mathcal{A}u(s,x)ds+\int_0^t u(s,x)dW(s,x). \tag{21}$$

定理 4.1。 假设白噪声和测度 μ 满足条件 $\sum_{z\in Z^d} b^2(z) < \infty$, $\sum_{z\in Z^d} \mu(x) < \infty$,以及定理 *2.4* 中提到的条件，使得 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$ 处于相应的轻尾、中等尾或重尾情形，则随机偏微分方程 *(20)* 的解存在于 $l^2(Z^d,\mu)$中，且唯一并随时间连续。

证明。 考虑经典皮卡迭代法。

若以 $u_t^{(0)} = u(0,\ x) = 1 \in l^2(Z^d,\ \mu)$ 为初始值，并为简便起见采用记号 $u_t^{(n)} = u^{(n)}(t,\ x) \in l^2(Z^d,\ \mu)$,

$$u_t^{(n+1)} = 1 + \int_0^t \mathcal{A}u^{(n)}(s,x)ds + \int_0^t u_t^{(n)}(s,x)dW(s,x). \tag{22}$$

我们可以得到一个随机函数序列，其取值属于空间 $l^2(Z^d,\ \mu)$。于是

$$< |u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}|^2 > \leq (2T\|\mathcal{A}\|_\mu^2 + 2\sum_{z\in Z^d} b^2(x-z)) \int_0^t < |u_t^{(k)} - u_t^{(k-1)}|^2 > ds \tag{23}$$

对于 $k \geq 1, t \leq T$和

$$< |u_t^{(1)} - u_t^{(0)}|^2 > = < (\int_0^t dW(s,x))^2 > = \sum_{z\in Z^d} b^2(x-z)t = A_1 t$$

其中 $A_1 = \sum_{z\in Z^d} b^2(x-z) = B(0) < \infty$.

$$< \|u_t^{(1)} - u_t^{(0)}\|_\mu > = \sum_{x\in Z^d} \mu(x) < |u_t^{(1)} - u_t^{(0)}|^2 > = A_1 t \sum_{x\in Z^d} \mu(x) < \infty.$$

根据归纳法，假设 $< |u_t^{(k)} - u_t^{(k-1)}|^2 > \leq \frac{A_1 A_2^{k-1} t^k}{k}!,\ \ k \geq 2$，则可得

$$\begin{aligned} < |u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}|^2 > &\leq (2T\|\mathcal{A}\|_\mu^2 + 2\sum_{z\in Z^d} b^2(x-z)) \int_0^t < |u_t^{(k)} - u_t^{(k-1)}|^2 > ds \\ &\leq A_2 \int_0^t \frac{A_1 A_2^{k-1} t^k}{k!} dt \leq \frac{A_1 A_2^k t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

其中 $A_2 = 2T\|\mathcal{A}\|_\mu^2 + 2\sum_{z\in Z^d} b^2(x-z) < \infty$。于是

$$< \|u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}\|_\mu > \leq \sum_{x\in Z^d} \mu(x) < |u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}|^2 > \leq \sum_{x\in Z^d} \mu(x) \frac{A_1 A_2^k t^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Then

$$\begin{aligned} < \|u_t^{(m)} - u_t^{(n)}\|_\mu > &= < \|\sum_{k=n}^{m-1} u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}\|_\mu > \leq \sum_{k=n}^{m-1} < \|u_t^{(k+1)} - u_t^{(k)}\|_\mu > \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sum_{x\in Z^d} \mu(x) \frac{A_1 A_2^k t^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{x\in Z^d} \mu(x) \sum_{k=n}^{m-1} \frac{A_1 A_2^k t^{k+1}}{(k+1)!} \to 0 \end{aligned}$$

当 $m,\ n \to \infty$。因此， $u_t^{(n)}$是 $l^2(Z^d,\ \mu)$ 中的柯西序列。定义 $u_t = \lim_{n\to\infty} u_t^{(n)}$，则对所有 $t \geq 0,\ u_t$都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，因为这对每个 $u_t^{(n)}$ 都成立。现在我们证明 u_t 满足方程 (21)。对所有 n 和所有 $t \in [0,T]$，有

$$u_t^{(n+1)} = 1 + \int_0^t \mathcal{A}u^{(n)}(s,x)ds + \int_0^t u^{(n)}(s,x)dW(s,x).$$

现在，令 令 $n \to \infty$，则根据赫尔德不等式以及 $\|A\|_\mu$ 的有界性，我们得到在 $l^2(Z^d,\ \mu)$ 中，

$$\int_0^t \mathcal{A}u^{(n)}(s,x)ds \to \int_0^t \mathcal{A}u(s,x)ds$$

and

$$\int_0^t u^{(n)}(s,x)dW(s,x) \to \int_0^t u(s,x)dW(s,x).$$

我们得出结论，对于所有 $t \in [0,T]$，都有 $u(t,x) = 1 + \int_0^t \mathcal{A}u(s,x)ds + \int_0^t u(s,x)dW(s,x)$。并且它存在于$l^2(Z^d,\mu)$中。相同的论证可得解的唯一性。也就是说，若方程 (20) 有两个解 $u_1(t,x)$、 $u_2(t,x)$，那么如上所述

$$< |u_1(t,x) - u_2(t,x)|^2 > \leq |2t\|\mathcal{A}\|_\mu^2 + 2B(0)| \int_0^t \langle |u_1 - u_2|^2 \rangle ds$$

由格朗沃尔不等式可得 $u_1 = u_2\ P-as.$

为了证明解 $u(t,\cdot)$ 作为 $l^2(Z^d,\mu)$ 中的随机过程的连续性，我们对四阶矩进行类似的计算，并证明

$$< |u(t_1,x) - u(t_2,x)|^4 > \leq C|t_1 - t_2|^2$$

与维纳过程 $W(t,\ x)$ 的情形一样，连续性现在可由众所周知的柯尔莫哥洛夫判据推出。

□

5 解 $u\ (t,\ x)$ 的卡茨-费曼表示

本节将证明伊藤解 $u(t,\ x)$ 的卡茨-费曼表示，其形式为对与生成元 $\varkappa\mathcal{A}$ 相关的随机游走 $x(t)$ 的轨迹进行积分。该表示目前不会被使用，但对于本文第二部分至关重要，第二部分涉及 P-几乎处处的 $u(t,\ x)$ $t \to \infty$ 的渐近行为，以及下一节中 P-几乎处处的李雅普诺夫指数 $\tilde{\gamma} = \lim_{t\to\infty} \ln u\ (t,\ x)\ t$ 的计算。

定理 5.1。假设 $\sum_{z\in Z^d} b^2\ (z)\ < \infty$、 $\sum_{z\in Z^d} \mu\ (x)\ < \infty$，并且定理 *2.4* 中保证 $\|\mathcal{A}\|_\mu < \infty$ 的条件均得到满足，则微分方程 *(20)* 的伊藤解存在，且具有如下表示

$$u(t,x) = E_x[e^{\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{tB(0)}{2}}] \tag{24}$$

其中 $x(s)\ s \geq 0$ 是与生成元 $\kappa\mathcal{A}$ 对应的随机游走， $E_x[\cdot]$ 是固定随机环境 $W(\cdot,\cdot)$下，以初始位置 x 为条件的$x(s)\ s \geq 0$ 之律的期望。

证明。 假设 $u(t,x) = e^{\varkappa\mathcal{A}t}C(t,x)$，将其代入方程（20），得到

$$C'(t,x) = e^{-\varkappa\mathcal{A}t}\dot{W}(t,x)u(t,x)$$

$$C(t,x) = 1 + \int_0^t e^{-\varkappa\mathcal{A}s}u(s,y)dW(s,y).$$

Thus

$$u(t,x) = 1 + \int_0^t e^{\varkappa\mathcal{A}(t-s)}u(s,y)dW(s,y) = 1 + \int_0^t \sum_{y\in Z^d} p(t-s,x,y)u(s,y)dW(s,y).$$

其中 $p(t,x,y) = P(x(t) = y|x(0) = x)$ 是从初始状态 x 到时刻 t状态 y的转移概率。因此，在随机游走 $x(t)$ 的轨迹概率空间中，

$$u(t,x) = 1 + E_x\left[\int_0^t u(s,x(t-s))dW(s,x(t-s))\right]. \tag{25}$$

下面来考虑 Kac-Feynmann 型表示:

$$u(t,x) = E_x\left[e^{\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{B(0)t}{2}}\right].$$

对于固定轨迹 $x(t)$：$x(0) = x,\ x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \cdots$，积分 $\int_0^t dW(s, x(t-s))$ 是均值为 0、方差为 $B(0)t$ 的维纳过程。定义 $V(t,x) = \int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{B(0)t}{2}$，由伊藤公式，$de^{V(t,x)} = e^{V(t,x)}dW(t,x)$，因此 $e^{V(t,x)}$ 是一个鞅，并且

$$e^{V(t,x)} = 1 + E_x[\int_0^t e^{V(s,x(t-s))}dW(s,x(t-s))].$$

将此结果与方程 (25) 比较，可得 $u(t,x) = E_x\left[e^{\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{B(0)t}{2}}\right]$。

□

可以证明，解 $u(t,x)$ 是相对于 Wiener 过程概率律的指数鞅 $sW(\cdot,\cdot)$。特别地，$u(t,\ x) >= m_1(t,\ x) = 1$。现在我们将研究解 $u(t,\ x)$ 的高阶矩。

6 矩方程

本节旨在证明，对于具有相关白噪声 $W(t,x)$ 的抛物型安德森模型 (20)，其解 $u(t,x)$ 的所有阶矩均存在。首先，我们推导矩方程。对于正整数 $p \geq 1, t \geq 0$，令 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 为 Z^d 中的固定点，并将 p^{th} 阶矩记为 $m_p(t, x_1, x_2, \cdots, x_p) =< u(t,x_1)u(t,x_2)\cdots u(t,x_p) >$。由费曼-卡茨公式 (24) 以及场 $u(t,x)$ 的空间齐次性，

$$m_p(t,x_1,x_2,\cdots,x_p) \leq \frac{< u^p(t,x_1) + \cdots + u^p(t,x_p) >}{p} =< u^p(t,x) > .$$

由李雅普诺夫不等式，对于 $p \geq 1$,

$$< u(t,x) >= E_x\left[e^{\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{B(0)t}{2}}\right] \leq \left(E_x\left[e^{p\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{B(0)t}{2}}\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Thus

$$< u^p(t,x) >= E_x\left[< e^{p\int_0^t dW(s,x(t-s)) - \frac{pB(0)t}{2}} >\right] = e^{\frac{p(p-1)B(0)t}{2}} < \infty.$$

这一结果意味着 $m_p(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p) < \infty$。

现在，我们可以利用伊藤公式推导 $m_p(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$ 的方程。令 $f_p(t,\ w) = u(t,\ x_1)\cdots u(t,\ x_p)$，则

$$df_p(t,w) = d(u(t,x_1))u(t,x_2)\cdots u(t,x_p) + u(t,x_1)\cdots u(t,x_{n-1})du(t,x_p) + \sum_{i<j} du(t,x_i)du(t,x_j)$$

其中 $du(t,\ x_i) = \varkappa\mathcal{A}u(t,\ x_i)dt + u(t,\ x_i)dW(t,\ x_i)$。由于 $dW(t,\ x_i)dW(t,\ x_j) = B(x_i - x_j)dt$，可得以下随机微分方程:

$$dm_p(t,x_1,\cdots,x_p) = \sum_{i=1}^p \varkappa\mathcal{A}_{x_i}m_p(t,x_1,\cdots,x_p)dt + m_p(t,x_1,\cdots,x_p)B_p(x_1,\cdots,x_p)dt$$

其中 $\mathcal{A}_{x_i}m_p = \sum_{z\in Z^d} a(z)\big(m_p(t,x_1,\cdots,x_i+z,\cdots,x_p) - m_p(t,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_p)\big),\ i = 1,2,\cdots,p$ 和 $B_p(x_1,\cdots,x_p) = \sum_{i<j} B(x_i - x_j)$。最后，

$$\frac{dm_p(t,x_1,\cdots,x_p)}{dt} = \varkappa\left(\sum_{i=1}^p \mathcal{A}_{x_i}m_p(t,x_1,\cdots,x_p)\right) + \left(\sum_{i<j} B(x_i - x_j)\right)m_p(t,x_1,\cdots,x_p) \tag{26}$$

初始条件为 $m_p(0,x_1,\cdots,x_p) = 1$。

更具体地说，一阶矩的方程 $m_1(t,\ x) = \langle u(t,\ x)\rangle$ 为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_1(t,x)}{\partial t} = \varkappa\mathcal{A}m_1(t,x),\ (t,x) \in [0,\infty)\times Z^d \\ &m_1(0,x) = 1. \end{aligned} \tag{27}$$

于是 $m_1(t,\ x)\equiv 1$。

对于二阶矩 $m_2(t,\ x_1,\ x_2)=\langle u(t,\ x_1)u(t,\ x_2)\rangle$，我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m_2(t,x_1,x_2)}{\partial t}=\varkappa(\mathcal{A}_{x_1}+\mathcal{A}_{x_2})m_2(t,x_1,x_2)+B(x_1-x_2)m_2(t,x_1,x_2)\\&m_2(0,x_1,x_2)=\langle u(0,x_1)u(0,x_2)\rangle=1.\end{aligned}\tag{28}$$

由于对于固定的 t，场 $u(t,\ x)$ 在空间上是齐次的，$m_2(t,\ x_1,\ x_2)=m_2(t,\ x_1-x_2)=m_2(t,\ x_1-x_2)=m_2(t,\ v)$，因此前面的方程等价于

$$\frac{\partial m_2(t,v)}{\partial t}=\mathcal{H}_2m_2(t,v),\mathcal{H}_2=2\varkappa\mathcal{A}_v+B(v)\tag{29}$$

$$m_2(0,v)=1\tag{30}$$

定义 $m_2(t,\ v)=m_{21}(t,\ v)+1$，则

$$\frac{\partial m_{21}(t,v)}{\partial t}=2\varkappa\mathcal{A}_vm_{21}(t,v)+B(v)m_{21}(t,v)+B(v)\tag{31}$$

$$m_{21}(0,v)=0.\tag{32}$$

总之，我们得到以下定理，其结果可与 [1] 中的结果相比较：

定理 6.1。对每个整数 $p\geq 1$、每个 $t\geq 0$ 和 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_p)\in Z^{pd}$，令

$$m_p(t,\vec{x})=m_p(t,x_1,\cdots,x_p)=\langle u(t,x_1)\cdots u(t,x_p)\rangle\,.$$

那么，这些矩（相关函数）满足以下“p 粒子”抛物型方程

$$\frac{\partial m_p}{\partial t}=\varkappa(\mathcal{A}_{x_1}+\cdots+\mathcal{A}_{x_p})m_p+\left(\sum_{i<j}B(x_i-x_j)\right)m_p\tag{33}$$

$$m_p(0,x)\equiv 1$$

其中 $\mathcal{A}_{x_i}m_p=\sum_{z\neq 0,z\in Z^d}a(z)\big(m_p(t,x_1,\cdots,x_i+z,\cdots,x_p)-m_p(t,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_p)\big)$，$i=1$、$2$、$\cdots,p$。方程（*33*）也可以写成

$$\begin{aligned}&\frac{\partial m_p}{\partial t}=\mathcal{H}_pm_p,\ \mathcal{H}_p=\varkappa(\mathcal{A}_{x_1}+\cdots+\mathcal{A}_{x_p})+V_p(x)\\&V_p(x)=\sum_{i<j}B(x_i-x_j),\ p>1\end{aligned}\tag{34}$$

而哈密顿量 H_p 是格点 Z^{pd} 上的经典“p粒子”薛定谔算子，其具有二体相互作用$B(x-y)$。

方程（34）将在 $l^2(Z^d)$ 中研究。在 $l^2(Z^d)$ 或 $L^2(R^d)$ 中，“p粒子”薛定谔算子的谱分析在现代数理物理中发挥着关键作用。矩方程（34）的解在 $t\to\infty$ 时呈指数行为。本文的主要目的是研究这种渐近行为。第一步是得到以下结果：

定理 6.2。对于每个整数 $p\geq 1$，极限

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln m_p(t,x)$$

与 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 无关。该极限称为解 $u(t,x)$ 的第 p 个（矩）李雅普诺夫指数，记为 $\gamma_p(\varkappa)$。它等于矩方程中出现的多粒子薛定谔算子 $\mathcal{H}_p$ 的谱的上确界。

该结果的证明是标准的，而局部拉普拉斯算子 Δ 的类似证明已在 [1] 中给出了完整细节。我们将重点讨论二阶矩 $m_2(t,\ v)$，$v=x_1-x_2$ 它对应于哈密顿量 $\mathcal{H}_2=2\varkappa\mathcal{A}+B$ 和李雅普诺夫指数 $\gamma_2(\varkappa)=\max\{\lambda\in Sp(\mathcal{H}_2)\}$，其中 $Sp(\mathcal{H}_2)$ 表示 $\mathcal{H}_2$ 的谱。p 阶矩李雅普诺夫指数的存在性显著取决于半群 $T_+=\exp\{2\varkappa t\mathcal{A}\}$ 及其核 $p(t,\ x,\ y)$ 的谱分析。

7 转移概率 $p(t,x,y)$

让我们求出与 $2\varkappa\mathcal{A}$ 相关的随机游走 $x(t)$ 的转移概率 $p(t,\ x,\ y)\ =P(x(t)\ =y|x(0)\ =x)$。众所周知，$p(t,\ x,\ y)$ 是下列抛物型问题的基本解

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt}&=2\varkappa\mathcal{A}p,t>0\\ p(0,x,y)&=\delta_y(x).\end{aligned}\tag{35}$$

在方程(35)两边应用傅里叶变换技巧，其中 p 的傅里叶变换定义为 $\hat{}p(t,x,k)\ =\ \sum_{y\in Z^d} p(t,x,y)e^{iky}$，我们将得到方程(35)的解:

$$p(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}e^{2\varkappa\hat{A}(k)t}e^{ik(x-y)}dk,\ \ k\in T^d=[-\pi,\pi]^d\tag{36}$$

其中 $\hat{}\mathcal{A}(k)\ =\ \sum(cos(k,z)\ -1)a(z)\ =\hat{a}(k)\ -1$ 是算子 $\mathcal{A}.$$_{z\neq 0}$ 的傅里叶符号

Thus

$$p(t,x,x)=p(t,0,0)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}e^{2\varkappa\hat{A}(k)t}dk,\ \ k\in T^d.\tag{37}$$

今后，我们将研究哈密顿量 $(\ )(\ )$, 的最大特征值相对于 $\varkappa$ $\mathcal{H}_2=$ 的相变。在这种情况下，引入标准扩散率 很 $2\varkappa\mathcal{A}+B\ x\ \ B\ x\ \geq 0\ \ x\in Z^d$ $\varkappa_0=\frac{1}{2}$ 方便，即，$2\varkappa_0=1$。在此情形下，记作

$$p_0(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}e^{t\hat{A}(k)+ik(x-y)}dk.$$

那么（对任意 $\varkappa$）

根据有限二阶矩情形下的中心极限定理 $\sigma^2=\sum_{z\in Z^d}|z|^2a(z),$ $p(t,x,y)=p_0(2\varkappa t,x,y).$

$$p_0(t,x,y)\sim\frac{exp\left[-\frac{\Pi^{-1}\{x-y,x-y\}}{2}\right]}{(2\pi t)^{d/2}\sqrt{det\Pi}}$$

若 $t\to\infty,|x\ -y|=\underline{O}(\sqrt{t})$。这里，$\Pi$ 是随机游走 $x(t)$在 $2\varkappa_0=1$情形下的相关矩阵 :

$$\Pi=-\left[-\frac{\partial^2\hat{A}(0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right].$$

由于一般假设 Π 是正定的，$det(\Pi)\ >0$。这意味着，对于仅依赖于 $\hat{a}(k)$的适当常数 C^+，以及所有 $t\geq 1$，我们有如下估计

$$p_0(t,x,x)\leq\frac{C^+}{t^{d/2}},\ t\geq 1.\tag{38}$$

下面这个著名结果可根据事实 (38) 证明。

定理 7.1. 若 $a(z)$ 满足轻尾条件 *(4)* 或中等尾条件 *(5)*，则 $\sigma^2=\sum|z|^2a(z)\ <\infty$，且$_{z\neq 0}$与 $2\kappa\mathcal{A}$ 相关联的随机游走 $x(t)$ 的转移概率为 $p(t,x,x)\ \sim\ \frac{C}{t^{d/2}}$，则当$d\geq 3$ 时，$x(t)$ 是暂态的；当 $d=1$ 时，$x(t)$ 是常返的，2。

定理 7.2. 假设 $\sigma^2=\sum|z|^2a(z)\ <\infty$，但 $a(z)$ 满足重尾条件 *(6)*，则$_{z\neq 0}$

$$p_0(t,x,x)=p_0(t,0,0)\sim\frac{C^+}{t^{d/\alpha}},\ 0<\alpha<2.$$

以下定理总结了这些结果:

定理 7.3。 将由算子 $2\varkappa\mathcal{A}$ 在 Z^d 上生成的随机游走记为 $x(t)$。

1. 若 $d \geq 3$，则随机游走 $x(t)$ 为暂态，无需任何额外技术条件。*2.* 若 $d = 2$，则在正则性条件 *(6)* 下，随机游走 $x(t)$ 在 $0 < \alpha < 2$ 时为暂态。若 $\sigma^2 = \sum_{z\neq 0} |z|^2 a(z) < \infty, \alpha = 2$，则随机游走 $x(t)$ 为常返。

3. 若 $d = 1$且 $\alpha \leq 1$，则随机游走 $x(t)$ 为暂态；否则 $x(t)$ 为常返。

8 算子 $\mathcal{H}_2 = 2\varkappa\mathcal{A} + B(x)$ 的谱分析与间歇性问题

场 $u(t,x)$ 的一阶矩恒等于 1。该场在 $t \to \infty$ 时的涨落取决于高阶矩，首先取决于二阶矩 $m_2(t,x,y) = m_2(t,0,y-x) = m_2(t,v)$。回顾一下， $m_2(t,v)$ 满足方程 (29) 和初始条件 (30)：

$$\frac{\partial m_2(t,v)}{\partial t} = \mathcal{H}_2 m_2(t,v) \tag{39}$$

$$m_2(0,v) = 1 \tag{40}$$

其中 $\mathcal{H}_2 = 2\varkappa\mathcal{A}_v + B(v)$。算子 $\mathcal{H}_2$ 有界，且当 $x \to \infty$时， $B(x) \to 0$ 。 $\mathcal{H}_2$ 的谱由两部分组成。第一部分是 $\mathcal{H}_2$ 的本质谱，记为 $Sp_{ess}\mathcal{H}_2 = [2\varkappa c, 0]$，其中 $c = \min_{k\in T^d}(\hat{a}(k) - 1)$，
且 $Sp_{ess}\mathcal{H}_2$ 等于 $\mathcal{H}_2 = 2\varkappa\mathcal{A}$的谱。第二部分是至多可数的离散谱，记为 $Sp_d(\mathcal{H}_2)$，其可能的聚点为 $2\varkappa c$ 和 0。将 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)$记为 $Sp(\mathcal{H}_2)$的最大点。若$\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$，则正离散谱非空，且 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)$是 $\mathcal{H}_2$的最大特征值。它必为单重的，其对应的特征函数 $\psi_0(x)$严格为正。

若 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) = 0$，则二阶矩有界，且 $u(t, x)$的涨落有界，这就是正则情形。若 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$， $m_2(t, v)$， $v = x_1 - x_2$呈指数趋于 ∞，则会出现间歇性现象。Zeldovich 等人 [9], Gärtner 和 Molchanov [3] 发展了间歇性的数学理论，并将其应用于湍流中的流体力学、磁场和温度场等。例如，太阳磁场具有间歇结构，因为超过 99% 的磁能集中在不到 1% 的表面积上。在这种情况下，磁场的主要贡献来自极高且极其稀疏的峰值（黑子）。

本节将讨论场 $u(t, x)$ 从正则情形到间歇结构这一基本相变，以及其他取决于跳跃速率 $\{a(z)\ z \in Z^d\}$ 和相关函数 $B(x)\ x \in Z^d$ 的谱分岔；该相关函数是二阶矩方程（39）中的一个正定势。本文的部分结果也适用于具有一般势 $V(x)\ V(x) \to 0, \ x \to \infty$ 的情形。

8.1 由 $\hat{a}(k)$ 引起的谱分岔

现在我们将介绍取决于跳跃分布 $\{a(z)\ z \neq 0\}$ 的谱分岔。回顾一下，非局部拉普拉斯算子 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的傅里叶变换表示为 $2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k) = 2\varkappa(\hat{a}(k) - 1)$，其中 $L^2(T^d, dk)$。

定理 8.1。 若 $\hat{a}(k)$ 是解析的，即 $a(z) \leq ce^{-\eta|z|}$ （轻尾）， $c, \eta > 0$，则 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的谱测度是绝对连续的（*a.c.*）。

证明。 令 $\Gamma_\lambda = \{k \in Z^d : 2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k) < \lambda\}$。则 $E_\lambda f(k) = I_{\Gamma_\lambda}(k) f(k)$ 是与自伴算子 $2\varkappa\mathcal{A}$ 相关的谱投影族。要证明谱测度绝对连续，只需证明

$$m(k \in \Gamma_{\lambda+d\lambda} - \Gamma_\lambda) = \rho(\lambda)d\lambda, \ \rho(\lambda) \in L^1(Sp(2\varkappa\mathcal{A}))$$

其中 $m(k \in \Gamma_{\lambda+d\lambda} - \Gamma_\lambda)$ 是 $2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k)$ 的分布。然而，由于 $\hat{\mathcal{A}}(k)$ 的解析性 ，

$$m(k \in \Gamma_{\lambda+d\lambda} - \Gamma_\lambda) = d\lambda \int_{k:2\varkappa\hat{A}(k)=\lambda} \frac{dk}{2\varkappa|\nabla\hat{A}(k)|} = d\lambda\rho(\lambda)$$

并且，对于除有限个点之外的所有 λ， $\rho(\lambda)$ 的积分都有定义（ $2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k)$ 在临界点处的取值 where $\nabla\mathcal{A}(k) = 0$）。 □

通过类似的证明，我们可以得到以下定理：

定理 *8.2.* 若 $\hat{\mathcal{A}}(k) \in C^2(T^d)$，且 $\nabla \hat{\mathcal{A}}(k) = 0$ 仅在有限点集 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, $\|Hess(\hat{\mathcal{A}}(k_j))\| < \infty, j = 1, 2, \cdots n$ 和 $det(Hess(\hat{\mathcal{A}}(k_j)) \neq 0$ 中成立，即 $\hat{\mathcal{A}}(k)$ 是 *Morse* 型函数，则 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的谱测度是绝对连续的。

如果 $\hat{\mathcal{A}}(k)$ 不是解析的，但仍是 C^∞ 函数，情况则有所不同。

定理 8.3. 如果 $\hat{\mathcal{A}}(k)$ 不是解析的，而仅属于 C^∞ 类，那么可以找到满足对称性和非周期性假设的跳跃律 $\{a(z)$ $z \in Z^d\}$，使得 $2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k) = c_0, c_0 \in S_0 \subset T^d$，其中 S_0 是环面 T^d上的一个开球。在这种情况下， $\mathcal{H}_2$ 有一个嵌入于 $Sp_{ess}\mathcal{H}_2$中的正特征值 $\lambda_0 \in Sp(2\varkappa\mathcal{A})$，其重数为无限重数。也就是说，谱测度不是纯绝对连续的。

证明。 我们可以通过以下具体例子证明该定理。假设 $d = 1, k \in [-\pi, \pi] = T^1$，存在$\hat{a}(k) = \sum \cos(kx)a(x)$, 使得当 $k \in [\alpha, \beta]$时（见 [5]），$\hat{a}(k)$ 为常数。那么算子 $2\varkappa\mathcal{A}$ 在 $Sp_{ess}\mathcal{H}_2$ 中嵌入了无限$_{x\in Z^1}$维特征子空间。具体而言，若 $\hat{f}(k)$ 支撑于 $[\alpha, \beta]$，则 $\varkappa\left(\widehat{\mathcal{A}f}\right)(k) = \hat{} \hat{\varkappa}(\hat{a}(k) - 1)f(k) = \varkappa hf(k)$，其中 $h = \hat{a}(k) - 1$。

□

函数 $\hat{a}(k)$ 可能不光滑，但如果考虑卷积 $\hat{a}(k) * b_0(k)$，就可以改善这种情况，其中 $b_0(k) \in C^\infty$ 在 $[-\varepsilon, \varepsilon]$ 和 $\varepsilon < \frac{|\beta - \alpha|}{3}$ 上是正定且紧支撑的。为了构造这样的 $b_0(k)$，只需取任意一个支撑于 $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ 上的实对称函数 $\phi(k)$, 并令 $b_0(k) = \phi(k) * \phi(-k) = \phi(k) * \phi(k)$，于是 $B_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} \phi(k) * \phi(-k)e^{-ikx}dk = \Phi^2(x) \geq 0$，其中 $\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \phi(k)e^{-ikx}dk$。也就是说，归一化后，我们保证新的概率跳跃核具有正定性，且 $\{a(x)B_0(x)$ $x \in Z^d\}$。与此同时，$\hat{a}(k) * b_0(k)$ 在某个子区间 $[\alpha, \beta]$上为常数。

9 常返情形与暂态情形中的谱分岔

本节探讨正离散谱，即 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$ 是否存在的问题。令$N_0(B) = \sharp\{\lambda_j : \lambda_j(\mathcal{H}_2) > 0\}$ 表示具有势 B的算子 $\mathcal{H}_2$ 的正特征值个数。我们的目标是估计 $N_0(B)$。我们将讨论暂态情形和常返情形下的 $N_0(B)$。注意, $\|\mathcal{H}_2\| \leq 2\varkappa \max_{k\in T^d} |\hat{a}(k) - 1| \leq 4\varkappa$。

9.1 常返情形

下述定理推广了（[1]）中的类似结果。

定理 9.1。 假设 $B(x) = \delta_0(x)$，即 $W(t, x) = w(t, x)$ $x \in Z^d$ 是独立同分布的维纳过程，则对任意 $\varkappa > 0$，$\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$ 当且仅当 $\int_{T^d} \frac{dk}{1 - a\hat{(k)} = \infty}$。也就是说，与 $2\varkappa\mathcal{A}$ 相关联的随机游走 $x(t)$ 是常返的。

证明。 为求解方程 $2\varkappa A\psi + \delta(x)\psi = \lambda\psi$，其中 ψ 是对应于特征值 λ的特征函数，我们可以应用傅里叶变换：

$$2\varkappa\hat{\mathcal{A}}(k)\hat{\psi} + \psi(0) = \lambda\hat{\psi} \tag{41}$$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{\psi(0)}{\lambda + 2\varkappa(1 - \hat{a}(k))} \tag{42}$$

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d} \frac{dk}{\lambda + 2\varkappa(1 - \hat{a}(k))} = I(\lambda). \tag{43}$$

上述方程右侧的 $I(\lambda)$ 是关于 λ 的单调递减函数，并且 $I(\lambda) \to 1$ $(2\pi)^d \int_{T^d} \frac{dk}{2\varkappa\ 1 - (\hat{a}(k))} = I(0)$。

众所周知，随机游走的分类取决于 $p(t,x,y)$ 的格林函数 $G_\lambda(t,x,y)$，其定义如下：

$$G_\lambda(t,x,y)=\int_0^t e^{-\lambda u}p(u,x,y)du,\quad \lambda\geq 0.$$

回忆一下，如果 $G_0(0,\ 0)=\infty$，则称随机游走为常返。对于生成元为 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的过程 $x(t)$,

$$G_0(0,0)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\frac{dk}{2\varkappa(1-\hat{a}(k))}=I(0).$$

当过程 $x(t)$ 常返，且 $G_0(0,\ 0)=I(0)=\infty$ 时，存在唯一解 $\lambda_0=\lambda(\varkappa)>0$。 □

如果 $\varkappa=\varkappa_{cr}$，答案取决于维数。

定理 9.2。若与 $2\varkappa\mathcal{A}$ 相关的过程 $x(t)$ 是常返的，则对于非负势 $B(x)\geq 0$，有 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)>0$，且 $B(0)=$最大值$_{x\in Z^d}B(x)>0$。

证明。根据变分原理，要找到 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)=\max_{\psi\in l^2(Z^d):\|\psi\|=1}(\mathcal{H}_2\psi,\psi)=(\mathcal{H}_2\psi_0,\psi_0)$，其中 ψ_0 是对应于最大特征值的特征函数。由于 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)\geq\lambda_0(H)$，只需用满足以下方程的$H=2\varkappa\mathcal{A}+B(x)\delta_0(x)$的特征值来估计 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)$

$$\frac{1}{B(0)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{T^d}\frac{dk}{\lambda+2\varkappa(1-\hat{a}(k))}=I(\lambda).\tag{44}$$

在常返情形下，由于 $G_0(0,\ 0)=\infty, I(\lambda)\to\infty$ 当 $\lambda\downarrow 0$ 时，方程 (44) 有唯一解，因此˜总是存在 $\lambda_0(H)>0$。

□

由定理 9.2 可得以下推论：

推论 9.2.1. 假设 $B(x)\geq 0, x\in Z^d, B(0)>0$，且 $x(t)$ 是常返的，则 $u(t,x)$的二阶矩将呈指数增长。

9.2 暂态情形

S. Molchanov 和 B. Vainberg 的论文 [6] 给出了以下 Zwickel-Lieb-Rozenblum（ZLR）型估计，用于估算算子 $\mathcal{H}_0$ 的正特征值个数，记为 $N_0(V)=\sharp\{\lambda_i:\lambda_i(\mathcal{H}_0)>0\}$ 其中$\mathcal{H}_0=2\varkappa\mathcal{A}+V(x)$，势为任意一般势 V，对于任意常数 $\sigma>0$，且在暂态情形下，

$$N_0(V)\leq\sharp\{x_j:|V(x_j)|\geq 4\varkappa\geq\|2\varkappa\mathcal{A}\|\}+\frac{1}{C(\sigma)}\sum_{x:0<|V(x)|<4\varkappa}V(x)\int_{\frac{\sigma}{|V(x)|}}p(t,x,x)dt\tag{45}$$

其中 $p(t,\ x,\ x)$ 是生成元为 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的随机游走的转移概率，且 $C(\sigma)=e^{-\sigma}\int_0^\infty\frac{ze^{-z}}{z+\sigma}dz$。那么对于 $\underline{\sigma=2}$, 其转移概率 $p_0(\ t,\ x,\ y)$ 与生成元 $\mathcal{A}$ 相关，

$$N_0(V)\leq\sharp\{x_j:|V(x_j)|\geq 4\varkappa\geq\|2\varkappa\mathcal{A}\|\}+\frac{1}{2\varkappa C(2)}\sum_{x:|V(x)|\leq 4\varkappa}V(x)\int_{\frac{4\varkappa}{|V(x)|}}p_0(s,0,0)ds.\tag{46}$$

这一估计在今后会很有用。

我们的目标是证明，在暂态情形下，会出现重要的相变（谱分岔）。可以找到仅取决于跳跃分布（或相应特征函数$\hat{a}$）的常数 $\varkappa_0(\hat{a})$，使得对于 $\varkappa<\varkappa_0$，至少存在一个正特征值，即 $N_0(B)\geq 1$，但对于 $\varkappa>\varkappa_0$, $N_0(B)=0$。这会导致安德森抛物型问题的解 $u(t,\ x)$ 的渐近行为发生相变。当 $\varkappa$ 足够小时，解的二阶矩 m_2 呈指数增长，即 $\varkappa<\varkappa_0$)；而当 $\varkappa$ 足够大时，二阶矩有界，即 $\varkappa>\varkappa_0$)。对于较简单的情形——随机游走对应的生成元是局部格点拉普拉斯算子，且势 $\xi_t(x)$ 是相互独立的白噪声——相关分析已在 [1] 中完成。然而，在我们的情形中，随机游走的生成元是非局部拉普拉斯算子，势也更为复杂。

定理 *9.3.* 假设 $B(x) = \delta_0(x)$，即 $W(t,x) = w(t,x)$ $x \in Z^d$ 是独立同分布的维纳过程，那么如果 $\int_{T^d} \frac{dk}{1-a\hat{}(k)} < \infty$，也就是说，随机游走 $x(t)$ 是暂态的，则存在一个临界值 $\varkappa_{cr}$，使得当 $\varkappa < \varkappa_{cr}$ 时，$\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$；而当 $\varkappa > \varkappa_{cr}$ 时，$\lambda_0(\mathcal{H}_2) = 0$。

证明。证明与定理 9.1 类似。回顾一下，对于生成元为 $2\varkappa\mathcal{A}$ 的过程 $x(t)$，若 $G_0(0,0) < \infty$，则称其为暂态，

$$G_0(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{dk}{2\varkappa(1-\hat{a}(k))} = I(0).$$

当过程 $x(t)$ 为暂态时，由于 $G_0(0,0) < \infty$，$I(\lambda) < \infty$ 当 $\lambda \downarrow 0$，且方程 (43) 在 $\varkappa \le \varkappa_{cr}$ 时有唯一解，其中 $\varkappa_{cr} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{T^d} \frac{dk}{1-a\hat{}(k)}$。因此，当 $\varkappa < \varkappa_{cr}$ 时，存在唯一的简单正特征值 $\lambda_0 > 0$，其对应的正特征函数为 $\psi_0(x) > 0$。而当 $\varkappa > \varkappa_{cr}$ 时，方程 (43) 无解，这表明当 $\varkappa > \varkappa_{cr}$ 时不存在正特征值 $\lambda_0 > 0$。

□

定理 9.4。若过程 $x(t)$ 为暂态，势 $B(x) \ge 0$ 且 $B(0) = \max_{x \in Z^d} B(x) > 0$，则当 $\varkappa$ 足够小时，$\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$ 存在。

证明。根据变分原理，要找到 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) = \max_{\psi \in l^2(Z^d):\|\psi\|=1} (\mathcal{H}_2\psi, \psi) = (\mathcal{H}_2\psi_0, \psi_0)$，其中 ψ_0 是对应于最大特征值的特征函数。由于 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) \ge \lambda_0(H)$，只需用满足下列方程的 $H = 2\varkappa\mathcal{A} + B(x)\delta_0(x)$ 的特征值来估计 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)$:

$$\frac{1}{B(0)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{dk}{\lambda + 2\varkappa(1-\hat{a}(k))} = I(\lambda). \tag{47}$$

在暂态情形下，由于 $G_0(0,0) < \infty$，当 $\lambda \downarrow 0$ 时 $I(\lambda) < \infty$，且若 $I(0) > B^{-1}(0)$，方程 (47) 有唯一解；否则不存在正特征值，其中 $I(0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{T^d} \frac{dk}{2\varkappa\,(1-a\hat{}(k))}$。条件 $I(0) > B^{-1}(0)$ 等价于 $\varkappa \le \frac{B(0)}{2(2\pi)^d \int_{T^d} \frac{dk}{1-a\hat{}(k)}}$。因此，当随机游走为暂态时，若 $\varkappa \le \frac{B(0)}{2(2\pi)^d \int_{T^d} \frac{dk}{1-a\hat{}(k)}}$，则 $\tilde{H}$ 存在唯一的简单正特征值，其对应的正特征函数为 $\psi_0(x) > 0$。

□

定理 9.5。若 $d \ge 3$，$\sum_{z \in Z^d} |z|^2 a(z) < \infty$，$\sum_{x \in Z^d} |B(x)|^{d/2} < \infty$，$B \ge 0$，则存在 $\varkappa_{cr}$；若 $\varkappa > \varkappa_{cr}$，$N_0(B) = 0$，则 $\varkappa < \varkappa_{cr}$，$N_0(B) \ge 1$。

证明。由于 $B(x) \in l^1(Z^d)$，$B(x) \to 0$ 如 $|x| \to \infty$。因此存在常数 $q > 0$，使得对于所有 $x \in Z^d$，$\frac{2\varkappa q}{B(x)}\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge 1$。于是 $\sharp\{x_j : |B(x_j)| \ge 4\varkappa \ge \|2\varkappa\mathcal{A}\|_\mu\} < \infty$。当 $d \ge 3$ 且 $\sum_{z \in Z^d} |z|^2 a(z) < \infty$ 时，随机游走是暂态的，并且 $p(t,x,y)$ 满足（38），应用（46）中的 ZLR 估计，我们得到

$$N_0(B) \le \sharp\{x_j : |B(x_j)| \ge 4\varkappa \ge \|2\varkappa\mathcal{A}\|_\mu\} + \frac{1}{2\varkappa C(q)} \sum_{x \in Z^d} |B(x)| \int_{\frac{2\varkappa q}{B(x)}} \frac{C_+}{s^{d/2}} ds \tag{48}$$

$$= \sharp\{x_j : |B(x_j)| \ge 4\varkappa \ge \|2\varkappa\mathcal{A}\|_\mu\} + C_1 \frac{1}{\varkappa^{d/2}} \sum_{x \in Z^d} |B(x)|^{d/2} < \infty. \tag{49}$$

需要强调的是，Zwickel-Lieb-Rozenblum（ZLR）型估计（49）中的常数 C_1 仅取决于维数 d 和函数 $\mathcal{A}(k)$（即跳跃分布 $a(\cdot)$ 和 $B(0)$）。

这个估计 (49) 证明了相变（谱分岔）的存在性：存在一个临界值 $(\varkappa_{cr})$，使得 $N_0(B) = 0$对于 $\varkappa > \varkappa_{cr}$ 成立，而 $N_0(B) \ge 1$ 对于 $\varkappa < \varkappa_{cr}$ 成立。

□

备注。 经典的 ZLR 结果涉及连续薛定谔算子 $\mathcal{H} = -\Delta + \sigma V(x)$ 在$L^2(R^d, dx)$ $d \geq 3$上的 $N_0(V)$。与拉普拉斯算子 Δ 相关联的布朗运动恰好在 $d \geq 3$时处于暂态。经典的 ZLR 估计给出了算子 $\mathcal{H}$ 的负特征值个数的上界： $N_0(V) = \sharp\{\lambda_i(\mathcal{H}) < 0\}$，即

$$N_0(\sigma V) \leq C_0(d)\sigma^{d/2} \int_{R^d} |V(x)|^{d/2} dx \tag{50}$$

对于较大的 σ，它给出了 $N_0(\sigma V)$ 的正确阶，这就是所谓的准经典估计。在格点情形中，我们可以令 $\sigma = \frac{1}{\varkappa}$，但这并不成立。例如，若 $V(x) = \mathbb{I}_\Gamma(x)$，且 Γ 是有限集，那么对于较小的 $\varkappa$， $N_0(V) = card(\Gamma)$ 保持有界。

需要强调的是，对于 $d \geq 3$， Z^d 上的任何随机游走都是暂态的，这与二阶矩是否存在无关。若 $\sum z^2 a(z) = \infty$，则随机游走也可能在任意维数下都是暂态的，并且属于 $z \in Z^d$ 的吸引域
在满足某些正则性条件时，参数为 α 的稳定对称律，参见 [2][3]。若 $d = 1$，则 $\alpha < 1$。若 $d \geq 2$，则 $\alpha < 2$。

在这种情况下，ZLR 估计具有如下形式:

$$N_0(B) \leq \sharp\{x_j : |B(x_j)| \geq 4\varkappa\} + C_1 \sum_{x \in Z^d} \frac{|B(x)|^{d/\alpha}}{\varkappa^{d/2}}. \tag{51}$$

定理 9.6. 若随机游走 $x(t)$ 具有参数为 $0 < \alpha < 1$ （对应 $d = 1$ ）和参数为 $0 < \alpha < 2$ （对应 $d \geq 2$）的极限稳定律，即 $x(t)\ t^{d/\alpha}$ 依分布弱收敛于参数为 α 的稳定分布，且 $\sum |B(x)|^{d/\alpha} < \infty$，则存在 $\varkappa_{cr} > 0$ ，使得当 $\varkappa < \varkappa_{cr}$ 足够小时， $N_0(B) \geq 1$ ；而当 $\varkappa > \varkappa_{cr}$ 时，$_{x \in Z^d} N_0(B) = 0$。

定理 9.5、9.6 表明，在暂态情形下，场 $u(t, x)$ 的常规行为会分岔为间歇行为。

推论 9.6.1. 在定理 *9.5* 和 *9.6* 的情形下，对于所有充分大的 $\varkappa$，不存在正离散谱，也就是说 $N_0(B) = 0$。

我们已经讨论了 $\sum |B(x)|^{d/2} < \infty$ 时以及 $\sum |B(x)|^{d/\alpha} < \infty$ 且 $d = 1, \alpha < 1$ 或 $d \geq 2$,
$x \in Z^d$ $x \in Z^d 0 < \alpha < 2$时的情形。问题在于，如果上述级数发散，会怎样? 下面的定理 9.7 针对一种特殊情形，给出了当任意大的 β 下， $\sum |B(x)|^\beta = \infty$ 时的答案。$_{x \in Z^d}$

定理 *9.7*。设 $\mathcal{A}f(x) = \Delta f(x) = \sum (f(x') - f(x))$，也就是说，与生成元$_{x' : |x' - x| = 1}$$\mathcal{A}$ 相关的过程 $x(t)$ 是经典随机游走，其跳跃发生在最近邻点之间。 $d \geq 3$ 并且 $B(x) = \sum \sigma_n \delta(x - x_n)$，其中$_{n=1} \sigma_n \to 0$ 极其缓慢（例如 $\sigma_n = {}^{\delta} \ln(n+1)$），且点 $\{x_n, n \geq 1\}$ 非常稀疏，例如 $x_n = (2^n, 0, 0, \cdots, 0)$， $n \geq 1$。那么，当 $\delta > 0$ 足够小时， $N_0(B) = 0$。

证明。 我们将证明上面给出的特定情形，但显然该结果具有很强的普遍性。由于$B(x) \geq 0$ 且 $B(x) \to 0$， $\mathcal{H}_2$ 在 $\varkappa > 0$ 下的谱是离散的。假设其非空，且 $\lambda_0(\mathcal{H}_2)$是最大的正特征值，其对应的正特征函数为 $\psi_0(x)$，那么 $\psi_0(x_n)$ $n \geq 1$ 的傅里叶变换为

$$-\hat{\Delta}(k)\hat{\psi}(k) + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \psi_0(x_m) e^{i(k,m)} = \lambda_0 \hat{\psi}_0(k).$$

即,

$$\hat{\psi}_0(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \psi_0(x_m) \frac{e^{i(k,m)}}{\lambda_0 + \hat{\Delta}(k)}, \quad \hat{\Delta}(k) = \sum_{j=1}^{d} (\cos k_j - 1)$$

以及（对于傅里叶逆变换）

$$\psi_0(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m \psi_0(x_m) G_{\lambda_0}(x_n, x_m),\ G_{\lambda_0}(0, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \frac{e^{i(k,z)} dk}{\lambda_0 + \hat{\Delta}(k)}.$$

最后，

$$\psi_0(x_n) = \sum_{m:m\neq n} \frac{\sigma_m \psi_0(x_m) G_{\lambda_0}(x_n, x_m)}{1 - \sigma_n G_{\lambda_0}(x_n, x_n)} \tag{52}$$

但是对于 $d \geq 3$

$$G_{\lambda_0}(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} p(t,x,y)dt \leq G_0(x,y) \leq \frac{C(d)}{1+|x-y|^{d-2}}.$$

现在考虑巴拿赫空间 $L^\infty(Z^d)$中的齐次系统（52），其范数为

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{x\in Z^d} |f(x)|.$$

Let

$$\tau_{m,n} = \begin{cases} \frac{\sigma_m \psi_0(x_m) G_{\lambda_0}(x_n,x_m)}{1-\sigma_n G_{\lambda_0}(x_0,x_0)}, \ m \neq n \\ 0, \ m = n \end{cases}$$

构成（52）的矩阵。假设对于 $m \neq n$， $|x_n - x_m| \geq |2^n - 2^m|$，则

$$\|\tau\|_\infty \leq \max_n \sum_{m:m\neq n} |\tau_{m,n}| \leq C_1(d) \max_m \sigma_m$$

并且当 max σ_m 充分小时，我们将得到 $\|\tau\|_\infty < 1$，即系统（52）无解。$_m$ □

在定理 (9.7) 中，我们利用了势 $B(x)$ 的稀疏性。如果 $\sum |B(x)|^{d/2} = \infty$ 或$_{x\in Z^d}\sum |B(x)|^{d/\alpha} = \infty$，但 $B(x)$ 有良好的下界估计，会发生什么？这个问题的答案取决于相关函数$_{x\in Z^d}$的构造 $B(x)$ $x \in Z$。下面的定理将给出一个特殊情形。

定理 9.8。 如果我们有局部 拉普拉斯算子 $\Delta f(t,x) = \sum_{z\in Z^d} (f(x+z) - f(x))$ 并定义 $\mathcal{H}f(t,v) =_{z:\ |z-x|=1}$ $\varkappa\Delta f(t,v) + B(v)f(t,v)$。若 $d \geq 3, B(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|^2}$ 且 C_0 固定并且足够大，并且 $\sum |B(x)|^{d/2} = \infty$，那么$N_0(B) = \infty$。若 $B(x) \geq \frac{C_1}{1+|x|^\alpha}, \alpha < 2$，且 $\sum |B(x)|^{d/\alpha} = \infty$，那么对于任意小的 C_1， $N_0(B) = \infty$。

证明。 这里我们将证明该定理的第一个结论，第二个结论可用类似的方法证明。考虑立方体 $Q_m = \{x = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_d)$: $2^m < x_1 < 2^{m+1}, 0 < x_i < 2^m, \ i = 2, \ 3, \ \cdots, \ d\}$。立方体 Q_m 的体积为 2^{md}。于是对于 $x \in Q_m$，势 $B(x)$ 有如下界

$$B(x) \geq \frac{C_0}{1+|x|^2} \geq \frac{C_0}{1+2^{2(m+1)}+2^{2m}+\cdots+2^{2m}} \geq \frac{C_0}{1+(d+3)2^{2m}} \geq \frac{C_0}{(d+3)2^{2m}}.$$

接下来考虑关于 $x = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_d) \in Q_m$ 的如下函数，

$$\psi_m(x_1, x_2, \cdots, x_d) = sin(k(x_1 - 2^m))sin(kx_2)\cdots sin(kx_d).$$

假设 $\psi_m = 0$ 位于 Q_m (∂Q_m) 的边界上，即 $sin(k2^m) = 0$ 且 $k = \frac{\pi}{2^m}$。

$$\begin{aligned} \varkappa\Delta\psi_m(x) = {} & \varkappa\Delta_{x_1} \sin(k(x_1 - 2^m)) \sin(kx_2)\cdots\sin(kx_d) \\ & + \varkappa\Delta_{x_2} \sin(k(x_1 - 2^m)) \sin(kx_2)\cdots\sin(kx_d) + \cdots \\ & + \varkappa\Delta_{x_d} \sin(k(x_1 - 2^m) \sin(kx_2)\cdots\sin(kx_d). \end{aligned}$$

由于对于任意 α， $\varkappa\Delta\sin(\alpha x) = 2\varkappa(\cos(\alpha) - 1))\sin(\alpha x)$

$$\lambda_m = 2\varkappa(cos(k) - 1) \sim -\frac{\varkappa\pi^2}{2^{2m}}.$$

Then

$$\mathcal{L}\psi_m(x) \geq \lambda_m\psi_m + \frac{C_0}{(d+3)2^{2m}}\psi_m \sim [-\frac{\varkappa\pi^2}{2^{2m}} + \frac{C_0}{(d+3)2^{2m}}]\psi_m.$$

Let 前一个方程的左边为正，设为 $C_0 > 2\varkappa(d+3)\pi^2$，那么我们有

$$(\mathcal{L}\psi_m(x), \psi_m) \geq 0$$

并且我们有无穷多个这样的立方体 Q_m 以及定义在 Q_m上的紧支撑测试函数 ψ_m，这意味着存在无穷多个正特征值。换言之，如果势 $B(x)$按二次速度衰减，就存在无穷多个正特征值。 □

那么，当我们有无穷多个正特征值时，二阶矩 $m_2(t,\ v)$将随 $t \to \infty$发散。方程 (32) 中的 m_2 不存在稳态。

现在，如果 B非负，我们就回答了关于小 $\varkappa$ 时离散正谱的问题。我们知道，在维数 $d = 1,\ 2$时，对于任意 $\varkappa > 0$，若 $B(x)$为 ≥ 0，则 $\lambda_0(\mathcal{H}_2) > 0$。在暂态情形下，当 $\varkappa$较大时，不存在正特征值； $\sum |z|^2 a(z) < \infty$ 且 $\sum |B(x)|^{d/2} < \infty$，或者在参数为 α的极限稳定律情形下， $\sum |B(x)|^{d/\alpha} < \infty$ （见定理 9.5、9.6）。我们从第 3 节知道， $B(x) = \int_{T^d} e^{-ikx}\rho(k)dk$。它$x\in Z^d$
给出 $B(0) = \int_{T^d} \rho(k)dk > 0$. $B(x)$ 是一个正定函数，在某些点上可以取负值，甚至可能有 $B(x) < 0, x \neq 0$。

例 1 令 $d = 1$，且 $\rho(k) = 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \underline{\cos(Nk)\ 2^N}$，即 $B(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \underline{\quad\quad} & x \neq 0 \end{cases}$。但是 $\rho(k) \geq 0$，也就是说，$B(x)$ 是正定的。注意， $\rho(0) = 0$。

如果势 B 既有负值也有正值，那么正特征值 $\lambda_0(\mathcal{H})$ 可能会因所谓的屏蔽效应而消失。势的负部可能会抵消正部的吸引作用。考虑以下重要例子。

例 2 设 $H\psi = \Delta\psi + \sigma V_0(x)\psi, \Delta\psi(x) = \psi(x+1) + \psi(x-1) - 2\psi(x),\ \sigma > 0$ 以及 $V_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b}{2} & x = \pm 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

我们尝试求出算子 H 在 σ 较小时的正特征值 $\lambda_0(H) > 0$ 及其对应的正特征函数 $\psi_0(x) > 0$。我们设 $\psi_0(x)$ 具有含两个未知参数 $\mu, h > 0$的形式。

$$\psi_0(0) = h, \psi_0(\pm 1) = 1, \psi_0(x) = \begin{cases} e^{-\mu(x-1)}, & x \geq 1 \\ e^{\mu(x+1)}, & x \leq -1 \end{cases}.$$

求解方程 $H\psi_0 = \lambda_0\psi_0$后，我们得到以下结果：

a). 若 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$，则

$$\lambda_0 = 2\cosh\mu - 2. \tag{53}$$

若 $\sigma << 1$，则 $\lambda_0 << 1, \mu << 1$ 且 $\lambda_0 \sim \mu^2$。

b). 若 $x = 0$，则

$$h = \frac{2}{\lambda_0 - \sigma + 2}. \tag{54}$$

c). 如果 $x = 1$ 或 $x = -1$，则

$$\lambda_0 = h + e^{-\mu} - 2 - \frac{\sigma b}{2}. \tag{55}$$

由（53）、（54）和（55）可得 $h = e^{\mu} + \frac{\sigma b}{2} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0 - \sigma}{2}}$。也就是说，当 $b = 1$时，

$$1 + (\sigma - \lambda_0/2) + (\sigma - \lambda_0/2)^2 + \cdots = e^{\mu} + \frac{\sigma b}{2}$$

$$\frac{\sigma^2}{4} + \underline{o}(\lambda_0\sigma) = \mu + \underline{o}(\mu^2).$$

那么 $\mu = \frac{\sigma^2}{4} + \underline{o}(\sigma^2)$ $\lambda_0 = \mu^2 + \underline{o}(\mu^2) = \frac{\sigma^4}{16} + \underline{o}(\sigma^4)$。

我们的分析表明，只有在 $b>1$ 时才会出现屏蔽效应。在最后一种情况下， $B(x)$ 不是正定函数。但如果 $b\le 1$，也就是说 $\sum_{x\in Z^1} B(x)\ge 0$，那么 $\lambda_0(H)\sim C_1\sigma^2$ 对于 $b>1$，而 $\lambda_0(H)\sim C_2\sigma^4$ 对于 $b=1$，其中 C_1， C_2 是一些常数，且 $B(x)$ 是正定的，满足 $\rho(k)\ge 0$。

需要强调的是，在例 2 中的临界情形 $\sum_{x\in Z^d} B(x)=0$ 下，关于 $\lambda_0(H)$ 的假设不同于当 $\sum_{x\in Z^d} B(x)>0$ 的情形。当 $\sum_{x\in Z^d} B(x)>0$ 时，一般势具有正特征值。

命题 9.8.1. 考虑谱问题

$$\mathcal{H}_2\psi(x)=2\varkappa\Delta\psi+B(x)\psi=\lambda\psi(x), x\in Z^1, B(x)\in L^1(Z^1), \sum_{z\in Z^1} B(x)=\delta>0,$$

那么 $\forall(\varkappa>0)\ \exists(\lambda_0(\mathcal{H}_2))>0$。

证明。 定义如下偶函数 $\psi_1(x)=\psi_1(-x)$

$$\psi_1(x)=\begin{cases}1,\ x\in[-L,L]\\ \frac{L_1-x}{L_1-L},\ x\in[L,L_1]\\ 0,\ \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里 $0<L<L_1$ 是两个较大的参数： $L\gg 1,\quad L_1-L\gg 1$。

让我们计算一下得到了狄利克雷二次泛函：$(\mathcal{H}_2\psi_1,\ \psi_1)=2\varkappa(\Delta\psi_1,\ \psi_1)+(B(x)\psi_1,\ \psi_1)$ 注意到

$$(B(x)\psi_1,\psi_1)=\sum_{x\in[-L,L]} B(x)+R_{L,L_1}, |R_{L,L_1}|\le\sum_{|x|>L}|V(x)|.$$

对于任意 $0<\delta_1<\delta$，比如说 $\delta_1=\frac{1}{2}\delta$，都可以找到足够大的 L，使得$(B(x)\psi_1,\ \psi_1)\ge\delta_1$。但是，如果 $x\ne\pm L,\ \Delta\psi_1(x)=0$。并且 $|\Delta\psi_1(L)|=|\Delta\psi_1(L_1)|=\frac{1}{L_1-L}$。最后，

$$(\mathcal{H}\psi_1,\psi_1)\ge 1\frac{4\varkappa}{L_1-L}+\frac{1}{2}\sum_{x\in Z^d}V(x)=\frac{4\varkappa}{L_1-L}+\frac{1}{2}\delta\ge\frac{1}{3}\delta$$

只要对于给定的 $\varkappa$ 和 L，第二个参数 L_1 足够大即可。 □

这个初等命题可以从多个方向推广，但相关内容将另行发表。

致谢

DanHan 获得了路易斯维尔大学 EVPRI 资助项目“疾病空间种群动力学”以及 AMS 研究社区“隔离接触过程的生存动力学”的支持。

声明

所有作者均声明，他们与任何在本稿件讨论的主题或材料方面具有经济或非经济利益的组织或实体均无关联，也未参与其中。

参考文献

[1] René A Carmona 和 Stanislav A Molchanov，安德森抛物型问题与间歇性，第 518 卷，美国数学学会，1994 年。[2] A Agbor、S Molchanov 和 B Vainberg，多维随机游走收敛到稳定过程的全局极限定理，《随机性与动力学》**15**（2015），第 03 期，1550024。[3] Jürgen Gärtner 和 Stanislav A Molchanov，安德森模型的抛物型问题，《数学物理通讯》**132**（1990），第 3 期，613–655。

[4] A Getan、S Molchanov 和 B Vainberg，重尾分枝行走的间歇性，《随机性与动力学》**17**（2017），第 06 期，1750044。[5] S.A. Molchanov、A.I. Petrov 和 N. Squartini，柯西极限律情形下的准累积量与极限定理，《马尔可夫过程及相关领域》**13**（2007），第 3 期，597–624。[6] Stanislav Molchanov 和 Boris Vainberg，关于一般 *Cwikel–Lieb–Rozenblum* 不等式和 *Lieb–Thirring* 不等式，施普林格，2010 年。[7] Stanislav Molchanov 和 Boris Vainberg，基础随机游走具有中等尾时的种群动力学，《SIAM 数学分析杂志》**51**（2019），第 3 期，1824–1835。[8] Stanislav Alekseevich Molchanov 和 Elena Borisovna Yarovaya，多维格点上对称分枝随机行走的大偏差，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》**282**（2013），第 1 期，186–201。[9] Ya. B. Zel'Dovich、S.A. Molchanov、A. A. Ruzmaikin 和 D. D. Sokolov，随机介质中的间歇性，剑桥科学出版社有限公司，2014 年。