存在非可积扰动时 Ablowitz-Ladik 晶格的热化

MAHMOUD A. SELIM1、GEORGIOS G. PYRIALAKOS2、FAN O. WU2、ZIAD MUSSLIMANI3、KONSTANTINOS G. MAKRIS4,5、MERCEDEH KHAJAVIKHAN1 和 DEMETRIOS CHRISTODOULIDES[1,*]

[1] 明熙电气与计算机工程系，南加州大学，美国加利福尼亚州洛杉矶 *90089*[2] *CREOL*，光学与光子学院，中佛罗里达大学，美国佛罗里达州奥兰多 *32816-2700*[3] 数学系，佛罗里达州立大学，美国佛罗里达州塔拉哈西，*FL 32306-4510*[4] 电子结构与激光研究所，希腊研究与技术基金会（*FORTH*），邮政信箱 *1527*，*71110* 伊拉克利翁，希腊[5] *ITCP*，克里特大学物理系，*70013* 伊拉克利翁，希腊 *通讯作者：*demetri@creol.ucf.edu*

收到日期：XXXX年XX月；修订日期：X XXXX年X月X日；接受日期：XXXX年XX月；发布于XXXX年XX月（文档编号 XXXXX）；出版于XXXX年XX月

我们研究了光子阿布洛维茨-拉迪克晶格的统计力学。该晶格是离散非线性薛定谔方程的可积版本。对此，我们证明，在存在扰动的情况下，可以在光学热力学框架内准确描述该系统复杂的响应。沿着这一思路，我们阐明了混沌在阿布洛维茨-拉迪克系统热化过程中的真正作用。结果表明，加入线性和非线性扰动后，这种弱非线性晶格将热化为恰当的瑞利-金斯分布，并具有明确的温度和化学势。这一结果说明，在超模基下，非局域、非厄米的非线性实际上能够在两个准守恒量的作用下，使这一周期阵列实现适当的热化。

近年来，人们重新开始关注非线性光子晶格中的光波传播现象。一般而言，这类构型能够呈现丰富的光动力学现象，而这些现象在连续情形中并不存在。就此而言，光波导阵列为观察多种引人入胜的过程提供了肥沃的研究平台，涵盖离散孤子 [1–4] 和布洛赫振荡 [5,6]，，以及动态局域化过程 [7–9] 和拉比振荡 [10]。在紧束缚条件下，这些光学构型中的光演化可由离散非线性薛定谔方程（DNLS）[1-4]准确描述。与此相关的是 DNLS 的完全可积版本 [11]，，即所谓的阿布洛维茨-拉迪克（AL）模型，该模型以具有逆散射变换 [11,12]而著称。该系统的可积性使人们能够利用其若干标志性特征来研究非共振无反射势 [13]，、玻色-爱因斯坦凝聚体 [14]，、离散涡旋 [15]，、暗孤子碰撞 [16], 和光学怪波 [17]等现象。此外，研究者已通过采用阿布洛维茨-拉迪克势 [18]，证明了光子晶格中离散孤子的单向流。在高维情况下，艾利希-拉蒂格方程呈现出奇异解和复杂波形，例如线孤子和 X 形涡旋 [15]。然而，迄今人们对受扰动 AL 晶格的非线性响应几乎一无所知，尤其是在模式数目非常大的系统中。一般而言，这是一个颇具挑战性的问题，因为扰动会破坏 AL 模型的可积性；在这种情况下，晶格中的场演化会变得极其复杂并呈现混沌。

被提出，旨在以统计方式预测非线性多模光子系统的响应 [19–27]。这种方法具有普适性：只要系统呈现出两个以上的不变量 [19]，无论是在离散还是连续情形下，都可以在存在任意非线性的情况下应用。统计力学的一项基本原则是，所研究的系统具有遍历性，也就是说，它应能够以公平的方式充分遍历其相空间。在非线性多模系统中，这一性质自然源于混沌。此时自然会产生以下问题：AL 晶格能否热化？如果能，又需要满足哪些条件？值得强调的是，具有 M 个格点的周期性 Ablowitz-Ladik 晶格是完全可积的，因为它具有 M 个守恒定律。因此，它不会表现出混沌，相应的渐近李雅普诺夫指数为零 [28]。最后，在 AL 晶格的背景下，人们还可以探讨是否确实有可能找到一个合适的基底，以研究热化 [28]。

为回答这一问题，我们在可积形式以及存在不可积扰动的情况下，研究弱非线性 Ablowitz-Ladik 系统的热化动力学。对于后一种情况，我们表明，当在系统的线性超模基底中进行研究时，可以在光学热力学框架内描述该晶格的热化 [19] 。当引入线性位点扰动时，

Q最近　　y, 一种自洽的热化　　y动力学形式主义已

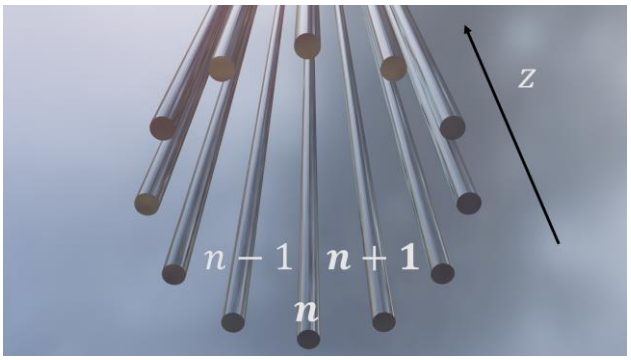


图 1。 由 M 个耦合波导通道组成的周期性阿布洛维茨-拉迪克晶格。

（类似于与安德森局域化 [29–31] 相关的扰动），我们表明，最终可在热平衡时实现完全热化，并达到适当的瑞利-金斯分布。这一结果说明，即使存在两个准守恒量，非局域、非厄米非线性实际上也能使光学晶格恰当地热化。涉及不可积非线性时，也得到了类似结果。

一般而言，由 M 个波导位点（图 1）组成的受扰周期性艾利希-拉蒂格系统中的非线性波传播由以下演化方程 [11] 描述：

$$i\frac{da_n}{dz} + (a_{n+1} + a_{n-1}) + |a_n|^2(a_{n+1} + a_{n-1}) + \gamma|a_n|^2 a_n + \delta f_n a_n = 0, \qquad \textbf{(1)}$$

其中，a_n 表示波导位点 n 处的局部光场振幅，而 γ 和 δ 分别是克尔非线性和折射率扰动的缩放参数。当 γ 和 δ 为零时，方程（1）退化为完全可积的艾利希-拉蒂格方程，该方程已知具有 M 个守恒定律。在方程（1）中，f_n 表示相应通道传播常数中的位点随机正态扰动，其取值服从均值为零、均方根宽度为 $\sigma = 1$ 的高斯分布。鉴于该方程中的扰动项破坏了晶格对称性，进而破坏了其可积性，因此预期某些不变量会消失。尽管如此，这些扰动保留了时间与相移对称性，表明至少有两个不变量仍将存在。正如我们将看到的，在这种情况下，光功率（范数）和内能仍将是“准不变量”。这两个量分别对应于可积艾利希-拉蒂格模型的两条守恒定律，其表达式为 [32]

$$K^{(1)} = \sum_{n=1}^{M} \ln(1 + |a_n|^2)\ , \qquad \textbf{(2a)}$$

$$K^{(2)} = -\sum_{n=1}^{M} (a_n a_{n+1}^* + a_n^* a_{n+1})\,. \qquad \textbf{(2b)}$$

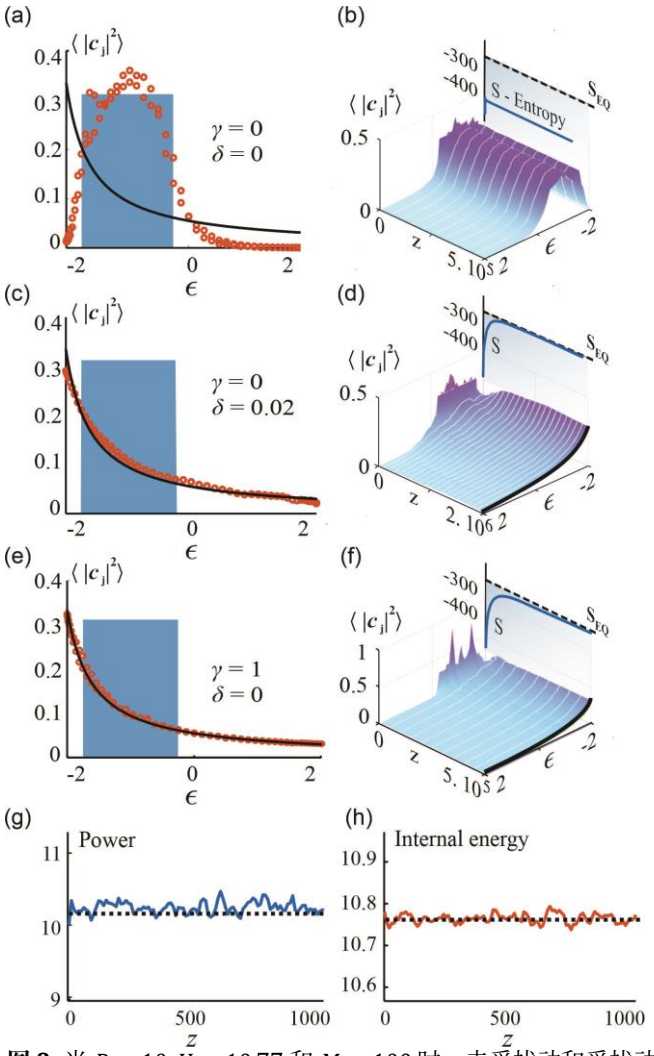


图 2. 当 $P = 10, U = 10.77$ 和 $M = 100$ 时，未受扰动和受扰动 AL 晶格中的非线性动力学。在所有情况下，输入端的初始功率分布以蓝色阴影表示，输出模态占据数则以红点表示。黑色曲线表示预期的 Rayleigh–Jeans 分布（若出现）。右侧面板中的图展示了模态占据数随传播距离的演化。(a) 和 (b) 中，未受扰动的 AL 系统未能发生热化；而在 (c)–(f) 中，分别引入少量无序（(c)–(d)）或克尔非线性（(e)–(f)）后，系统趋于 Rayleigh–Jeans 分布。图 (g) 和 (h) 表明，传播过程中 U 和 P 保持为准不变量。

接下来，我们将研究弱非线性条件下受扰动 AL 构型的热化动力学。需要注意的是，在弱非线性区，$K^{(1)}$ 不变量近似等于晶格中流动的总功率 P，因为当 $|a_n|^2 \ll 1$ 时，$ln(1 + x) \approx x$。因此，

$$P = \sum_{n=1}^{M} |a_n|^2 \approx K^{(1)}\,. \qquad \textbf{(3)}$$

重要的是，要在该周期阵列的超模基中表示这两个运动常数。值得

强调，方程 (2,3) 中的不变量适用于 $\gamma =$ $\delta = 0$ a_n 的情况。

一般而言，局域场可由态矢量 $|\Psi$ 得到，而态矢量又可通过系统的超模 $|j$ 表示为 $|\Psi = \sum_{j=1}^{M} c_j |j \exp(i\epsilon_j z)$，其中 c_j 表示复超模振幅，ϵ_j 2 M $\cos(2\pi j/)$ 表示 $|j$ 的特征值。因此，在超模基中，方程 (2,3) 的不变量现在可表示为

$$P = \sum_{j=1}^{M} |c_j|^2 . \qquad \textbf{(4a)}$$

$$U = -\sum_{n=1}^{M} (a_n a_{n+1}^* + a_n^* a_{n+1}) = -\sum_{j=1}^{M} \epsilon_j |c_j|^2 . \qquad \textbf{(4b)}$$

其中，在推导式 (4a) 时假设了弱非线性条件。式 (4b) 中的线性哈密顿量 U 现在将承担系统内能的角色 [19,33]。然而，如上所述，这些额外的 $M-2$ 量往往会“蒸发”，也就是说，一旦 AL 系统受到扰动，它们便不再是运动常数，因此对热化过程无关紧要。换言之，由于只有两种对称性得以保留，系统将仅具有式 (4) 中的两个准不变量。如 [19–21], 所示，在这两个不变量存在的情况下，一旦达到热平衡，模态占据数的期望值 $|c_j|^2$ 预计将趋于瑞利-金斯分布 [19,34–37]，即，

$$\langle |c_j|^2 \rangle = -\frac{T}{\epsilon_j + \mu}. \qquad \textbf{(5)}$$

在式 (5) 中，T 表示光子晶格系统的光学温度，μ 表示相应的化学势。通常，可以根据初始条件 [20]唯一确定这两个广延变量。作为示例，我们考虑一个具有 100 个格点的 AL 阵列，$M =$ 即 100 。

首先，我们研究完全可积的（$\gamma = \delta = 0$）AL 晶格在输入功率 $P = 10$激发下的情形。所用的初始模态分布在特征值范围 $-1.75 \le \epsilon \le -0.25$ 内均匀延展，如图 2(a) 所示。经过时间平均后，在超模基中得到的模态占据数相应演化情况见图 2(b)。显然，在此情形下，可积AL系统无法热化，因此模态占据数的期望值不遵循瑞利-金斯（RJ）定律。在某种程度上，这是可以预料到的，因为 M 不变量的存在使系统无法遍历整个相空间。

此时，我们可以提出以下问题：尽管没有涉及多波混频过程 [38] 且输出为部分相干态[39,40]，AL非线性本身——这种非局域且非厄米的非线性——能否驱动受扰动的AL系统达到统计瑞利–金斯平衡？有趣的是，即使在这种情况下（$\gamma = 0$），只要在晶格中随机施加位点安德森型势（δf_n）[29,30]，受扰动的AL晶格就会热化为瑞利-金斯分布。图2(c)和图2(d)展示了这一情形：AL构型在与图2(a)和图2(b)相同的初始条件下受到激发。在这两幅图中，

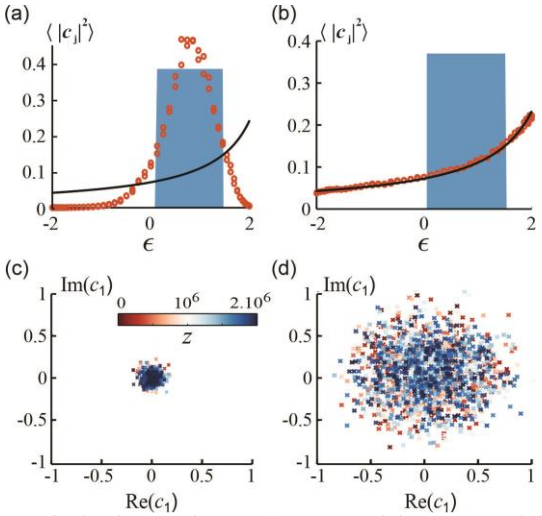


图 3. 单个格点（$n = 50$）受到扰动时，（a）可积AL系统和（b）AL 晶格输出端的模态功率分布。（c）、（d）分别对应（a）和（b）的一次实现中基模复振幅 c_1 的相空间。

线性无序设为$\delta = 0.02$。一般而言，可以发现，在弱非线性区，这种非厄米非线性完全能够使AL晶格热化为具有确定光学温度和化学势的瑞利-金斯分布。如果施加的扰动相对较弱，那么平衡态光学温度T 可通过初始条件（U, P），经由$T = (U^2 - 4P^2)/(2UM)$ [19,22]直接求得。温度确定后，可由状态方程$\mu = (U - MT)/P$ [19,20]推导出化学势。这些理论结果与图2(c)和图2(d)所示数值模拟得到的结果高度吻合，其中 $\mu =$ 2 4 $T = -0$ 13 。

和。。我们注意到，这与未受扰动时的情况不同，后者无法达到这样的平衡态。由这些结果可以得出结论：模态占据数以混沌方式演化，这表明与图2(a)和图2(b)所示的未受扰动情形相比，各模态之间的相互作用更加自由。更重要的是，图2(c)和图2(d)中的模拟彻底驳斥了人们普遍持有的观点，即瑞利-金斯分布只是波混频相互作用的副产物。相反，观察到的行为符合瑞利-金斯分布的统计解释，其中涉及两个准守恒量（U，P）[19,21]。接下来，我们研究在相同激发条件下，当克尔非线性（$\gamma = 1$）引入AL周期晶格（$P = 10, M = 100, \delta = 0$）时该系统的表现。即使在这种情况下，AL系统也会相对快速地再次热化为瑞利-金斯分布，其参数为$\mu = 2.4$、$T = -0.13$，如图2(e)和图2(f)所示。正如图2(d)和图2(f)所清楚显示的，光学熵 S [19]

$$S = \sum_{j=1}^{M} ln |c_j|^2, \qquad \textbf{(6)}$$

始终单调增加，直至达到最大值，这完全符合热力学第二定律。另一方面，如果系统完全可积（图2(b)），那么在给定初始条件下，熵不会达到最大值。

热化速率随归一化耦合长度的变化也可以从图2(d)和图2(f)中推断得出。最后，图2(g)和图2(h)展示了U 和P 在图2(c)和图2(d)所对应情形下的演化。事实上，这两个量保持准不变，这正是热化所要求的。

接下来，我们通过监测复模态振幅的相空间，更详细地考察系统在可积与不可积这两个极限下的演化。在不可积区域，我们在某个特定位置（ $n = 50$ $M =$）引入弱无序（$\delta = 0.1$）。两种情况下，图（a）和（b）均采用$P = 10$ and相同的激发条件。再次可见，理想的 AL 系统无法热化（图 3（a）），而受扰动的系统则趋于 Rayleigh–Jeans分布，其中 $\mu = -2\,8\ T =$。 , . . 与此同时，图（c）和（d）展示了基态c_1对应的复模态振幅的相空间演化。显然，当 AL 晶格受到扰动、因而变为不可积时，相空间显著扩大。这直接表明混沌正在发挥作用，而混沌是热化的必要条件。

总之，我们研究了理想及改性 Ablowitz–Ladik 弱非线性光学晶格的热化动力学。我们证明，只需引入极弱的扰动或局域非线性，原本可积的 AL 晶格便完全能够热化为具有明确温度和化学势的瑞利-金斯分布。我们的结果清楚地表明，即使涉及非局域且非厄米的非线性，AL 系统在存在两个准守恒量的情况下最终也会热化。

资助。 本研究部分得到了美国海军研究办公室（ONR）（多学科大学研究计划：N00014-20-1-2789、N00014-18-1-2347、N00014-19-1-2052、N00014-20-1- 2522）、美国空军科学研究办公室（AFOSR）（多学科大学研究计划：FA9550-20-1-0322、多学科大学研究计划：FA9550-21-1-0202）、美国国家科学基金会（NSF）（EECS-1711230、DMR-1420620、ECCS CBET 1805200、ECCS 2000538、ECCS 2011171）、美国空军研究实验室（AFRL）（FA86511820019）、美国国防高级研究计划局（DARPA）（D18AP00058）、美国陆军研究办公室（W911NF-17-1-0481）、卡塔尔国家研究基金（QNRF）（NPRP13S0121-200126）、MPS-Simons合作项目（Simons资助项目编号733682）、W. M. Keck基金会以及美以双边科学基金会（BSF：2016381）的资助。G. G. Pyrialakos 感谢Bodossaki基金会提供的支持。

参考文献

1. D. N. Christodoulides 和 R. I. Joseph，《光学快报》**13**，第9期，第794-796页；13，794（1988）。2. H. S. Eisenberg、Y. Silberberg、R. Morandotti、A. R. Boyd 和 J. S. Aitchison，《物理评论快报》**81**，3383（1998）。3. F. Lederer、G. I. Stegeman、D. N. Christodoulides、G. Assanto、M. Segev 和 Y. Silberberg，《物理报告》**463**，1（2008）。4. J. Fleischer、M. Segev、N. Efremidis 和 D. N. Christodoulides，《自然》**422**，147（2003）。5. R. Morandotti、U. Peschel、J. S. Aitchison、H. S. Eisenberg 和 Y. Silberberg，《物理评论快报》**83**，4756（1999）。6. T. Pertsch、F. Lederer 和 U. Peschel，《光学快报》**23**，第21期，第1701-1703页；23，1701（1998）。7. I. L. Garanovich、A. Szameit、A. A. Sukhorukov、T. Pertsch、W. Krolikowski、S. Nolte、D. Neshev、A. Tünnermann 和 Y. S. Kivshar，《光学快报》**15**，9737（2007）。8. H. S. Eisenberg、Y. Silberberg、R. Morandotti 和 J. S. Aitchison，《物理评论快报》**85**，1863（2000）。9. D. H. Dunlap 和 V. M. Kenkre，《物理评论B辑》**34**，3625（1986）。10. K. Shandarova、C. E. Rüter、D. Kip、K. G. Makris、D. N. Christodoulides、O. Peleg 和 M. Segev，《物理评论快报》**102**，123905（2009）。11. M. J. Ablowitz 和 J. F. Ladik，《数学物理学杂志》**17**，1011（1976）。12. M. J. Ablowitz、M. A. Ablowitz 和 P. A. Clarkson，《孤子、非线性演化方程与逆散射》（剑桥大学出版社，1991）。13. A. Szameit、F. Dreisow、M. Heinrich、S. Nolte 和 A. A. Sukhorukov，《物理评论快报》**106**，1（2011）。14. X. Y. Wu、B. Tian、L. Liu 和 Y. Sun，《非线性科学与数值模拟通讯》**50**，201（2017）。15. P. G. Kevrekidis、G. J. Herring、S. Lafortune 和 Q. E. Hoq，《物理快报A辑》**376**，982（2012）。16. X. Y. Xie、B. Tian、X. Y. Wu 和 Y. Jiang，《光学工程》**55**，106122（2016）。17. H. N. Chan 和 K. W. Chow，《非线性科学与数值模拟通讯》**65**，185（2018）。18. U. Al Khawaja 和 A. A. Sukhorukov，《光学快报》**40**，2719（2015）。19. F. O. Wu、A. U. Hassan 和 D. N. Christodoulides，《自然·光子学》**13**，776（2019）。20. M. Parto、F. O. Wu、P. S. Jung、K. Makris 和 D. N. Christodoulides，《光学快报》**44**，3936（2019）。21. K. G. Makris、Fan. O. Wu、P. S. Jung 和 D. N. Christodoulides，《光学快报》**45**，1651（2020）。22. F. O. Wu、P. S. Jung、M. Parto、M. Khajavikhan 和 D. N. Christodoulides，《自然·通讯物理》**3**，（2020）。23. C. Shi、T. Kottos 和 B. Shapiro，《物理评论研究》**3**，033219（2021）。24. A. Ramos、L. Fernández-Alcázar、T. Kottos 和 B. Shapiro，《物理评论X》**10**，031024（2020）。25**103**，043517 2021。N. K. Efremidis 和 D. N. Christodoulides，《物理评论A辑》（科利奇帕克）（）。26. G. G. Pyrialakos、H. Ren、P. S. Jung、M. Khajavikhan 和 D. N. Christodoulides，《物理评论快报》128，213901（2022）。27. P. S. Jung、G. G. Pyrialakos、F. O. Wu、M. Parto、M. Khajavikhan、W. Krolikowski 和 D. N. Christodoulides，《自然·通讯》13，4393（2022）。28. M. Baldovin、A. Vulpiani 和 G. Gradenigo，《统计物理学杂志》**183**，（2021）。29**7**，197 2013。M. Segev、Y. Silberberg 和 D. N. Christodoulides，《自然·光子学》（）。30. Y. Lahini、A. Avidan、F. Pozzi、M. Sorel、R. Morandotti、D. N. Christodoulides 和 Y. Silberberg，《物理评论快报》**100**，013906（2008）。31. T. Schwartz、G. Bartal、S. Fishman 和 M. Segev，《自然》**446**，52-55（2007）。32. M. J. Ablowitz、B. Prinari 和 A. D. Trubatch，《离散与连续非线性薛定谔系统》（剑桥大学出版社，2004）。33. M. A. Selim、F. O. Wu、H. Ren、M. Khajavikhan 和 D. Christodoulides，《物理评论A辑》**105**，（2022）。34. H. Pourbeyram、P. Sidorenko、F. O. Wu、N. Bender、L. Wright、D. N. Christodoulides 和 F. Wise，《自然·物理》**18,** 1-6，（2022）。35. E. V. Podivilov、F. Mangini、O. S. Sidelnikov、M. Ferraro、M. Gervaziev、D. S. Kharenko、M. Zitelli、M. P. Fedoruk、S. A. Babin 和 S. Wabnitz，《物理评论快报》**128**，243901（2022）。36. F. Mangini、M. Gervaziev、M. Ferraro、D. S. Kharenko、M. Zitelli、Y. Sun、V. Couderc、E. v. Podivilov、S. A. Babin 和 S. Wabnitz，《光学快报》，第**30**卷，第7期，第10850-10865页；30，10850（2022）。37. F. Mangini、M. Ferraro、M. Gervaziev、D. S. Kharenko、M. Zitelli、Y. Sun、V. Couderc、E. V. Podivilov、S. A. Babin 和 S. Wabnitz，Optica先进光子学大会，（2022）。38. S. Dyachenko、A. C. Newell、A. Pushkarev 和 V. E. Zakharov，《物理学D辑》**57**，96（1992）。39. M. A. Selim、F. O. Wu、G. G. Pyrialakos、M. Khajavikhan、D. Christodoulides，arXiv预印本 arXiv:2212.10063（2022）。40. M. A. Selim、F. O. Wu、G. G. Pyrialakos、M. Khajavikhan、D. Christodoulides，CLEO：QELS_基础科学。Optica出版集团，2022。