arXiv:2301.01255v2 [math-ph] 2 Feb 2023

More insights into symmetries in multisymplectic field theories

[a] Arnoldo Guerra IV *, [b] Narciso Román-Roy †。[a]巴塞罗那大学量子物理与天体物理系，西班牙巴塞罗那。[b]加泰罗尼亚理工大学数学系，西班牙巴塞罗那。

2023年2月3日

摘要

本文概述了经典场论和（预）多辛几何中对称性的处理方法。阐明了理论物理学中对称性的理解方式与这些理论的几何表述之间关系的几何特征。最后，概述了奇异场论中出现约束时对称性的结构。通过构造相关的多重动量映射（根据诺特定理，它们是（预）多辛相空间上的守恒量），分析了理论物理学中若干典型理论的对称性。

关键词：拉格朗日量与哈密顿场论、射流丛、多辛形式、对称性、诺特对称性、规范对称性、守恒量、多动量映射。2020年数学主题分类代码：主要分类：53D42、70S05、83C05；次要分类：35Q75、35Q76、53Z05、70H50、83C99。

目录

1 引言 2 2 （预）多辛纤维丛上的对称性 4

2.1 （预）多辛丛.4 2.2 守恒量与对称性.5 2.3 诺特对称性.7 2.4 规范对称性.8 2.5 多重动量映射.9

3 来自 射流丛底空间的提升变换 1 **0**

3.1 一阶射流丛.10 3.2 从 M 到 E 的提升变换.10 3.3 从 E 到 $J^1\pi$ 的提升变换.12

4 拉格朗日与哈密顿场论的对称性 **13**

4.1 一阶拉格朗日场论.13 4.2 De Donder–Weyl 哈密顿形式.15 4.3 对称性、守恒量与多重动量映射.16 4.4 存在约束时的对称性.20

5 一些示例 22

5.1 玻色弦理论.22 5.2 杨–米尔斯理论.25 5.3 陈-西蒙斯理论.27 5.4 电 Carroll 标量场论.29 5.5 磁型卡罗尔标量场论.31

*aguerrgu54@alumnes.ub.edu（*ORCID*：0000-0001-8738-274X）。

†narciso.roman@upc.edu（*ORCID*：0000-0003-3663-9861）。

6 结论 A 流形与纤维丛上的多向量场 **33**
33

1 引言

数学物理中的主要研究主题之一，是研究动力学（力学）系统和场论中的对称性。从更数学的角度来看，对称性的此类研究涉及对常微分方程和偏微分方程的分析；这是因为对称性与守恒量或守恒律相关联，而它们为物理系统提供了基本信息。物理系统中对称性的奠基性工作由埃米·诺特完成， [37]。物理系统中对称性的一般基本概念，最初被表述为系统相空间上的变换下运动方程保持不变。在更现代的经典力学和经典场论几何表述中，对称性通常通过要求某种基础几何结构保持不变来刻画，而运动方程的保持则是由此推得的结果。

经典场论的多辛表述是在多速度和多重动量相空间上进行的，拉格朗日形式与 De Donder–Weyl 哈密顿表述正是在这些空间上建立的。这些相空间是纤维丛 $\varrho\colon \mathbf{M} \to M$，其底空间是一个可定向的$m$维流形 M （通常为时空），其中 $m > 1$。具体而言， $\mathscr{M}$ 在拉格朗日形式中是喷射丛，在哈密顿形式中则是形式丛（或其商）。经典场论的这种表述可视为对非自治系统经典力学的几何扩展，对于这类系统， $m = 1$。此外，场论的相空间带有一种特征性的几何结构：多辛形式或预多辛形式 $\mathbf{\Omega} \in \Omega^{m+1}(\mathscr{M})$ （取决于理论的正则性）。实际构造中，通常从所研究场论的拉格朗日函数 [2, 19, 24, 29, 35, 47]出发，构造（预）多辛结构。随后，使用相应的（预）多辛形式，以几何方式表述场方程（欧拉-拉格朗日方程或哈密顿-德唐德-韦尔方程）。

所有对称性及其相关的守恒量和守恒律，都已在几何框架中得到广泛研究，既包括拉格朗日框架 [2, 15, 18, 19,23, 24, 28, 29, 39, 47] ，也包括相应的 De Donder–Weyl 哈密顿框架 [18, 21, 35],。在该框架中，保持（预）多辛形式不变的对称性称为诺特对称性或嘉当对称性。场论中诺特对称性的几何表述，最终归结为几何版诺特定理的陈述 [18, 21, 24, 26, 27, 32, 45]。我们特别关注多重动量映射，它是与诺特对称性相关的基本守恒量。这些映射是将辛力学中的动量映射推广到场论多辛框架所得的结果。（多重）动量映射是进行对称性约化时相关的量。然而，目前场论的多辛约化通常仍是一个尚未解决的研究问题 [7, 22, 41, 48]。对于满足 $M = \mathbb{R}$ 的（时变）非自治力学系统，对称性的类似几何构造及其在拉格朗日形式和哈密顿形式中的相应结果，可见例如文献 [3, 40, 46]。

奇异场论在一族称为几何规范对称性的诺特对称性下保持不变。这些对称性与拉格朗日量的退化性相关，并由预多辛相空间上属于预多辛形式核的向量场生成。然而，文献中“规范对称性”一词的用法各不相同 [9]；这些用法将在第 2.4 节中讨论。所谓的几何规范对称性在预多辛相空间上形成规范轨道，从而定义等价类。属于同一规范轨道的物理态彼此之间相差一个几何

规范变换，因而称为规范等价。

本文有三个主要目标。首先，回顾并拓展关于一阶经典场论对称性研究中几何结构及其性质的讨论，主要以先前的论文[26, 27]为基础。其次，阐明并深化数学文献中经典场论的几何处理方法与理论物理中常用的等效方法之间的关系。我们认为，第二个目标尤为重要，因为理论物理学界与微分几何学界在这一方面的交流似乎存在若干空白。理论物理学文献通常在此处提及的某些纤维丛的截面空间上开展研究，而微分几何文献则直接在纤维丛本身上分析场论。例如，在理论物理中，通常在多速度相空间的截面空间上建立场论的拉格朗日表述，其中拉格朗日函数被视为场及其时空导数的泛函；而如前所述，在数学文献中，拉格朗日函数通常被视为多速度相空间本身上的函数。本文将明确说明这两种方法之间的等价性，其中第 3.2 节和第 3.3 节对此尤为重要。最后，本文的第三个目标是详细阐述分析 De Donder–Weyl 意义下奇异的场论之对称性时会出现的一些微妙问题。本文上述主要目标还将通过对理论物理中相关的特定场论进行几何分析来进一步推进。

本文结构安排如下。第 2 节回顾一般（预）多辛丛几何框架中各种类型对称性及其相应守恒量和多动量映射的主要定义与结果。此外，还提出了一些关于诺特对称性和规范对称性的新见解。第3节旨在说明如何将微分同胚和向量场从底空间提升到相应的喷射丛；这对于刻画物理学中最常见的对称性类型至关重要。第 4 节是本文的主要贡献所在，其中将第 2 节的定义和结果用于经典场论的拉格朗日量和哈密顿描述。此外，还讨论了拉格朗日场论中出现的所谓拉格朗日对称性，并详细阐述了所有这些思想与物理解释之间的联系。最后，第 5 节展示了理论物理中一些典型理论的对称性。附录 A 介绍了多向量场的基本概念。

本文讨论的经典场论展现了理论物理中常见的各种对称性。玻色弦的南部-后藤作用量在弦世界面的微分同胚（局域点变换）全群作用下保持不变，第 5.1 节将在多辛框架中对其进行研究。弦作用量可以视为一个与引力耦合的二维场论的物质作用量；众所周知，从这个意义上说，南部-后藤作用量仅在时空等距变换下保持不变，而不像广义相对论那样在时空微分同胚全群作用下保持不变。这是物质理论的典型特征，接下来介绍的杨-米尔斯理论也不例外。第 5.2 节讨论杨-米尔斯理论的时空等距变换对称性，以及 $SU(N)$ 规范对称性。陈-西蒙斯理论（其规范群为$SU(N)$）是本文讨论的唯一一个在时空微分同胚全群作用下保持不变的理论（第 5.3 节）。最后，在第 5.4 节和第 5.5 节中，我们讨论电型和磁型卡罗尔标量场论，它们仅在时空的卡罗尔变换下保持不变；关于卡罗尔场论的更多信息，请参见例如 [36] 及其中的参考文献。

关于记号的一些说明： $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 和 $\Omega^k(\mathscr{M})$ 分别表示流形 $\mathscr{M}$ 上的向量场与微分 k-形式的 $\mathrm{C}^\infty(\mathscr{M})$-模，$\mathrm{L}(X)\Omega$ 表示微分形式 Ω 关于向量场 X的李导数，而 $i(X)\Omega$ 表示 X 与 Ω 之间的内缩。

所有流形均取为实的、第二可数的且为 C^∞。所有映射也均为 C^∞。对重复指标求和（爱因斯坦求和约定）。

2 （预）多辛纤维丛上的对称性

本节旨在介绍（预）多辛流形上有关对称性与守恒量（即守恒律）的主要概念和性质。本文采用（预）多辛纤维丛这一通用几何框架进行阐述；经典场论正是建立在这些相关结构之上。本节讨论的结构将在后文具体应用于经典场论的拉格朗日量形式和哈密顿形式。本节的基本思想取自 [26]。有关结果的证明及其他细节，另请参阅 [21, 26, 27]。

2.1 （预）多辛丛

给定一个可微流形 $\mathscr{M}$，若微分形式 $\Omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$ 满足：对于每个 $p \in \mathscr{M}$ and $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，都有 $i(Y)\Omega|_p = 0 \iff Y|_p = 0$，则称其为 1-非退化。此时，若 $\Omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$ 是闭合且 1-非退化的，则称其为多辛形式，并称 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 为多辛流形。或者，若 Ω 是闭合且 1-退化的，则称其为预多辛形式，并称 $(\mathscr{M},\Omega)$ 为预多辛流形。若 Ω 是恰当形式，则称其为恰当（预）多辛形式，而有序对 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 则称为（预）多辛系统。

拉格朗日量和哈密顿场论的几何框架由纤维丛 $\varrho\colon M \to M$ over 可定向流形 M ($\dim M = m > 1$, $\dim \mathscr{M} = N + m$) 构成。M 上的体积形式记作 $\omega \in \Omega^m(M)$（其中 ω 也表示 $\varrho^*\omega$），而 $\mathscr{M}$ 配备了恰当的多辛形式或预多辛形式（取决于理论的正则性）$\Omega = -\mathrm{d}\Theta \in \Omega^{m+1}(\mathscr{M})$，其中 $\Theta \in \Omega^m(\mathscr{M})$。此外，（预）多辛形式满足变分条件 $i(Z_1)\, i(Z_2)\, i(Z_3)\Omega = 0$；对于所有 ϱ-垂直向量场 $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathfrak{X}^V{}_{(\varrho)}(\mathscr{M})$，由此可通过变分原理得到场方程。

在 $\mathscr{M}$ 上，变分问题的解是投影 ϱ 的截面 $\psi\colon M \to \mathscr{M}$，它们满足由下式给出的场方程

$$\psi^*\, i(X)\Omega = 0 \quad , \quad \text{for every } X \in \mathfrak{X}(\mathscr{M}) \ .$$

等价地，变分问题的解是某个 m-多向量场的积分截面（见附录 A），该多向量场属于一类可积的、ϱ-横截的（即 $\mathbf{X} \in \ker^m \Omega$）、$m$-多向量场 $\{\mathbf{X}\} \subset \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，并满足场方程；这些方程现在写作

$$i(\mathbf{X})\Omega = 0 \ , \tag{1}$$

其中，ϱ-横截条件可不失一般性地设为

$$i(\mathbf{X})\omega = 1 \ . \tag{2}$$

这一对 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 通常称为（预）多辛系统。

一般而言，可解的预多辛系统在某个子流形 $S \subseteq \mathscr{M}$ 上存在场方程的稳定解；该子流形通过应用约束算法得到（详见第 4.4 节和 [17]）；子流形 S 称为最终约束子流形，而所研究场论的物理态是投影 ϱ 的截面，且其像位于 S 上。

2.2 守恒量与对称性

在几何力学中，守恒量是相空间上的函数，在沿着由某些动力学向量场的积分曲线给出的动力学轨迹演化时保持不变。通过要求表示守恒量的函数相对于满足运动方程的动力学向量场的李导数为零，可以表述这一不变性条件。对于场论，也可以用一种类似的几何方式引入这一概念，即使用多向量场表示场方程的解。

设 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 是一个（预）多辛系统。

定义 1 （预）多辛系统 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 的守恒量是一个形式 $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathscr{M})$，它满足：对于每个局部可分解且 ϱ-横截的多向量场 $\mathrm{X} \in \ker^m \Omega$（即满足方程 (1) 和 (2) 的多向量场），均有 $\mathrm{L}(\mathrm{X})\alpha = (-1)^{m+1}\, i(\mathrm{X})\mathrm{d}\alpha = 0$。

守恒量具有如下特征：若 $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathscr{M})$ 是一个守恒量，且 $\mathrm{X} \in \ker^m \Omega$ 是一个 ϱ-横截可积多向量场，则 α 在 X 的积分子流形上是闭的；也就是说，若 $j_S\colon S \hookrightarrow \mathscr{M}$ 是 X 的一个积分子流形，则 $\mathrm{d} j_S^* \alpha = 0$。

注 1 场论中的守恒量表现为守恒律或守恒流：对于每个 $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathscr{M})$ 和 $\mathrm{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，若 $\psi\colon M \to \mathscr{M}$ 是 X 的积分截面，且 $\psi^*\alpha \in \Omega^{m-1}(M)$，则存在唯一的向量场 $X_{\psi^*\alpha} \in \mathfrak{X}(M)$，使得 $i(X_{\psi^*\alpha})\eta = \psi^*\alpha$。由此可知，$X_{\psi^*\alpha}$ 的散度是函数 $\mathrm{div} X_{\psi^*\alpha} \in \mathrm{C}^\infty(M)$，定义为 $\mathrm{L}(X_{\psi^*\alpha})\omega = (\mathrm{div} X_{\psi^*\alpha})\,\omega$，它满足 $(\mathrm{div} X_{\psi^*\alpha})\,\eta = \mathrm{d}\psi^*\alpha$。因此，作为上述性质的推论，$\alpha$ 是守恒量，当且仅当 $\mathrm{div} X_{\psi^*\alpha} = 0$，所以斯托克斯定理保证，对于每个有界区域 $U \subset M$，

$$\int_{\partial U} \psi^*\alpha = \int_U (\mathrm{div} X_{\psi^*\alpha})\,\eta = \int_U \mathrm{d}\psi^*\alpha = 0\ .$$

形式 $\psi^*\alpha$ 称为与守恒量 α相关联的流。此结果将 M 上的每个守恒量都对应到一条守恒律。

场方程是偏微分方程（PDE），而对称性是将场方程的解变换为等价解的（局部）微分同胚。在几何力学中，这一性质通过生成对称性的向量场（借助其流）以及满足运动方程的动力学向量场来表述。对于场论，也可以采用类似的几何方法，使用满足场方程的多向量场，具体如下：

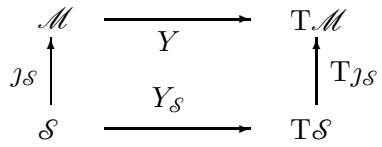
定义 2

1. （预）多辛系统 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 的对称性是指微分同胚 $\Phi\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$，满足 $\Phi_*(\ker^m \Omega) \subset \ker^m \Omega$。2. （预）多辛系统 $(\mathscr{M},\Omega)$ 的无穷小对称性是指向量场$Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，其局部流是局部对称性；等价地，$[Y, \ker^m \Omega] \subset \ker^m \Omega$。

注 2 若 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 是一个预多辛系统，其最终约束子流形为 $\jmath_{\mathcal{S}}\colon \mathrm{S} \hookrightarrow \mathscr{M}$，那么对称性必须是微分同胚 $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathscr{M})$，满足 $\Phi(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$；无穷小对称性则是与 S 相切的向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，且至少在 S 上满足定义 2 中的条件。这里将与 S 相切的 $\mathscr{M}$ 上的向量场集合记为

$$\underline{\mathfrak{X}(\mathcal{S})} := \{Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M}) \mid \exists Y_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{S}) \ \mid\ \jmath_{\mathcal{S}*} Y_{\mathcal{S}} = Y|_{\mathcal{S}}\}\ .$$

$\mathfrak{X}$(S) 的元素是向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，它们对于某个 $Y_{\mathcal{S}} \in \mathfrak{X}$(S) 使下图交换：



如我们所　说，对称性将场方程的解映射为解，因为　　e:

定理 1 若 $\Phi \in$Diff($\mathscr{M}$) 是一个对称性，且其限制为微分同胚 φ: $M \to M$；那么，对于每个 ϱ-横截可积多向量场 X，映射 Φ 会将 X 的积分截面变换为 Φ_*X 的积分截面，因此 Φ_*X $\in \ker^m \Omega$；后者也是一个 ϱ-横截可积多向量场。因此，若 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是一个 $\bar{\pi}^1$-可投影的无穷小对称性，且 F_t 是 Y 的局部流，那么 F_t 会将每个属于 ϱ-横截可积多向量场 X $\in \ker^m\Omega$ 的积分截面变换为 F_{t*}X 的积分截面。

若 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是无穷小对称性，则李括号 $[Y_1, Y_2]$ 也是无穷小对称性。此外，若 $\Phi \in$ Diff($\mathscr{M}$) 是对称性，且 $\alpha \in \Omega^{m-1}(\mathscr{M})$ 是守恒量，则 $\Phi^*\alpha$ 也是守恒量。因此，若 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是无穷小对称性，则 L(Y)α 也是守恒量。

注 3 底空间 M 的变换（在场论中通常是时空变换）若保持相空间的（预）多辛结构，则称为时空对称性。因此，在丛 ϱ: $\mathscr{M} \to M$ 中，相应的微分同胚 Φ: $\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 必须是保纤维的，因而限制为满足 $\Phi_M \circ \varrho = \varrho \circ \Phi$ 的微分同胚 Φ_M: $M \to M$。对于无穷小对称性，这意味着向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 必须是 ϱ-可投影的，因此存在 $Y_M \in \mathfrak{X}(M)$，使得 $\varrho_* Y = Y_M$。

对称性由李群 G 对 $\mathscr{M}$ 的作用生成：

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & G & \to & \mathrm{Diff}(\mathscr{M}) \\ & & g & \mapsto & \Phi_g \end{array}$$

其中 $\Phi_g : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ 是由群作用诱导的局部微分同胚。若 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，则每个 $\xi \in \mathfrak{g}$ 都会诱导一个向量场 $\mathrm{X}_\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，该向量场生成由 G 对 $\mathscr{M}$ 的群作用所产生的微分同胚。这可以通过为某个 $g \in G$ 构造指数映射来实现：

$$\begin{array}{rccc} exp & : & \mathfrak{g} & \to & G \\ & & \xi & \mapsto & g = exp(\lambda\xi) \end{array}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个参数。于是， $\mathscr{M}$ 上诱导的向量场 X_ξ 可用指数映射表示为

$$X_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \Phi^*_{exp(\lambda\xi)} \in \mathfrak{X}(\mathscr{M}) \ .$$

这些向量场是对称性的无穷小生成元，也就是说，它们就是无穷小对称性。

2.3 诺特对称性

为了获得与对称性相关的守恒量（或守恒律），必须施加一些额外条件。一般来说，这些条件与场方程所依托的几何结构有关（例如，参见 [44, 46] 及其中的参考文献，那里对拉格朗日力学和哈密顿力学进行了全面研究）。最相关的对称性类型如下：

定义 3

1. （预）多辛系统 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 的诺特对称性或嘉当对称性是一个微分同胚 $\Phi\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$，满足 $\Phi^*\Omega = \Omega$。特别地，当 $\Phi^*\Theta = \Theta$ 时，Φ 称为精确诺特对称性或精确嘉当对称性。

2. （预）多辛系统 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 的无穷小诺特对称性或嘉当对称性是一个向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，满足 $\mathrm{L}(Y)\Omega = 0$。特别地，当 $\mathrm{L}(Y)\Theta = 0$ 时，Y 称为无穷小精确诺特对称性或无穷小精确嘉当对称性。

如果 $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是无穷小诺特对称性，那么李括号 $[Y_1, Y_2]$ 也是无穷小诺特对称性。此外，若 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是无穷小诺特对称性，且 $\mathbf{X} \in \ker^m \Omega$，考虑到 (32)，我们有

$$i([Y, \mathbf{X}])\Omega = \mathrm{L}(Y)\, i(\mathbf{X})\Omega - i(\mathbf{X})\, \mathrm{L}(Y)\Omega = 0 \iff [Y, \mathbf{X}] \subset \ker^m \Omega \ ,$$

因此，无穷小诺特对称性也是无穷小对称性（诺特对称性也同样如此）。

注4 由于 $\mathrm{L}(Y)\Omega_{\mathscr{L}} = \mathrm{d}\, i(Y)\Omega_{\mathscr{L}}$，条件 $\mathrm{L}(Y)\Omega = 0$ 等价于要求 $i(Y)\Omega$ 是 $\mathscr{M}$ 上的闭 m-形式。因此，$i(Y)\Omega = -\mathrm{d}\alpha_Y$ 是一个开集 $U \subset \mathscr{M}$，其中某个 $\alpha_Y \in \Omega^{m-1}(U)$（负号源于物理学惯例）。因此，无穷小诺特对称性是多辛形式 Ω 的局部哈密顿向量场，而 α_Y 是相应的局部哈密顿形式。

因此，诺特定理表述如下：

定理 2（诺特）：设 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 是无穷小诺特对称性，且在开集 $U \subset \mathscr{M}$ 上满足 $i(Y)\Omega = -\mathrm{d}\alpha_Y$。那么，对于每个局部可分解且 ϱ-横截（可积）的多向量场 $\mathbf{X} \in \ker^m(\Omega$，都有

$$\mathrm{L}(\mathbf{X})\alpha_Y = 0 \ ;$$

也就是说，每个与 Y 相关联的哈密顿 $(m-1)$ 形式 α_Y 都是一个守恒量。对于 $\mathbf{X}$ 的每个积分截面 ψ，形式 $\psi^*\alpha_Y$ 通常称为诺特流。

注意，形式 $\mathrm{L}(Y)\Theta$ 是闭的，因为

$$\mathrm{L}(Y)\Theta = \mathrm{d}\, i(Y)\Theta + i(Y)\mathrm{d}\Theta = \mathrm{d}\, i(Y)\Theta - i(Y)\Omega = \mathrm{d}(i(Y)\Theta - \alpha_Y) \equiv \mathrm{d}\zeta_Y \quad (\text{in } U) \ . \tag{3}$$

特别地，如果 Y 是一个精确的无穷小诺特对称性，那么 ζ_Y 是闭的，且 $\alpha_Y = -i(Y)\Theta$.

注释 5 正如注 3 中所指出的，我们主要关注丛 $\varrho\colon \mathscr{M} \to M$ 的诺特对称性，即保纤维微分同胚，以及无穷小诺特对称性，即 ϱ-可投影向量场。

此外，若 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 是一个具有最终约束子流形 $\mathsf{S} \hookrightarrow \mathscr{M}$ 的预多辛系统，那么诺特对称性必须是微分同胚 $\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathscr{M})$，满足 $\Phi(\mathsf{S}) = \mathsf{S}$；无穷小诺特对称性则必须是与 S 相切的向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，且至少在 S 上满足定义 3 的条件。

2.4 规范对称性

文献中“规范”一词用于多种不同的语境。在物理学中，它通常指依赖于时空的场变换。本节将讨论“规范”一词在经典场论语境下的几种不同含义。具体而言，我们将介绍从几何和物理角度来看最为重要的一类规范对称性。另请参阅 [25, 27]，了解更多见解。

设 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 为一个（预）多辛系统，并回顾诺特对称性保持（预）多辛形式 Ω 不变。这里只研究保纤维对称性，同时考虑备注 3 和 5；这两条备注刻画了所研究的预多辛系统的最终约束子流形 $S \subset \mathscr{M}$ 上的对称性。此外，这类对称性在 M 上限制为恒等映射的特殊情形，将统称为规范对称性。因此，无穷小规范对称性是指向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，其局部流为局部规范对称性，因而是$\varrho$-垂直向量场。对此需要指出，$\varrho$-垂直向量场集合为 $\mathfrak{X}^{V(\varrho)}(\mathscr{M}) = \ker \omega$。

此外，无穷小诺特对称性是向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$，其特征是满足性质 $\mathrm{d}\, i(Y)\Omega = 0$。当 $\ker \Omega \neq \{0\}$ 时，$(\mathscr{M}, \Omega)$ 是一个预多辛系统。此时，任何非零的向量场 $Y \in \ker \Omega$（即 $i(Y)\Omega = 0$）都是一种特殊的无穷小对称性，与预多辛形式 Ω 的退化性有关。这种向量场称为几何（无穷小）规范对称性。

此外，当 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 是一个预多辛系统时，场方程通常在最终约束子流形 $S \hookrightarrow \mathscr{M}$（如第 2.1 节末尾所述）上有相容解；该流形是表示物理态的截面取值所在之处。与前文一样，物理上相关的规范变换是那些将物理态变为等价物理态的变换，因此它们是子流形 S 的自同构，并将投影 ϱ 的截面映射为自身。因此，这些沿投影 ϱ 的纤维作用的规范变换必然由 ϱ-垂直向量场生成。

上述概念总结如下：

定义 4 （预）多辛系统 $(\mathscr{M}, \Omega)$ 的几何无穷小规范对称性，或简称规范向量场，是满足以下条件的向量场 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$：

1. $Y \in \ker \Omega$。2. 它是一个 ϱ-垂直向量场，
$Y \in \mathfrak{X}^{V(\varrho)}(\mathscr{M})$。3. 它与 S 相切，$Y \in \mathfrak{X}(S)$。

规范向量场的集合记为 G。

由规范向量场的流生成的局部微分同胚称为几何规范变换。通过几何规范变换彼此关联的物理态（即满足场方程且稳定的解截面）称为几何规范等价态，并且它们在物理上等价（也就是说，在物理上无法区分）。

注 6 若 $\jmath_S\colon S \hookrightarrow \mathscr{M}$ 严格来说是 $\mathscr{M}$ 的子流形，那么除了 $\ker \Omega$ 中的向量场外，还有更多与预多辛形式 Ω 的非正则性相关的向量场。这些向量场属于集合

$$\underline{\ker \Omega_S} := \{ Z \in \underline{\mathfrak{X}(S)} \mid \exists Z_S \in \ker \Omega_S \ \mid \ \jmath_{S*} Z_S = Z|_S \} \ ,$$

其中 $\Omega_{\mathcal{S}} = j_S^*\Omega$ 通常也是一个预多辛形式。$\ker\,\Omega_{\mathcal{S}}$ 中的向量场与 S 相切，并且在 S 上的各点处可与 $\ker\,\Omega_{\mathcal{S}}$ 的元素对应。由于 $\ker\,\Omega\,\cap\,\mathfrak{X}(S)\,\subseteq\ker\,\Omega_{\mathcal{S}}$，因此对于每个 $Z\in\ker\,\Omega\,\cap\,\mathfrak{X}(S)$，均可推出

$$i(Z)\Omega=0\implies 0=j_S^*\,i(Z)\Omega=i(Z_S)\Omega_S\iff Z_S\in\ker\,\Omega_S\ ,$$

因此，

$$\mathscr{G}\equiv\ker\,\Omega\cap\underline{\mathfrak{X}(\mathcal{S})}\cap\mathfrak{X}^{V(\varrho)}(\mathscr{M})\subseteq\underline{\ker\Omega_{\mathcal{S}}}\cap\mathfrak{X}^{V(\varrho)}(\mathscr{M})\equiv\widehat{\mathscr{G}}\ .$$

对于力学中的奇异（自治）动力系统，已证明 [6, 33] G 是规范向量场的完备集合。因此，G 中的元素称为初级规范向量场，而 G –G 中的元素称为次级规范向量场。经典场论中的类似概念，即将 G–G 分类为规范向量场（也就是说，它们是否通过其流关联几何规范等价态），仍是一个悬而未决的问题。

通常，若 $Z_1,Z_2\in$ G，则 $[Z_1,Z_2]\in$ G，因此 G 在 $\mathscr{M}$ 上生成一个对合分布，而商集 $\tilde{\mathcal{S}}$ =S/G（假定其为可微流形）在所谓的几何规范约化过程中发挥着重要作用。该过程将这个约化流形作为“真实物理”态的集合，从而消除几何规范等价态所代表的非物理冗余。引入典范投影 $\tilde{\tau}_{\mathcal{S}}$: S $\to$ S，规范等价态是这一投影的截面。消除“几何规范冗余”的另一种方法是执行规范固定过程，即固定这一投影的截面。关于这两种过程的概述可见 [27]。场论中最一般的规范固定方法涉及 BRST-BV方法（例如参见[4, 31]）。

最后需要指出的是，物理学中有时会采用更广义的（无穷小）规范对称性定义，它涉及满足 $\mathrm{d}\,i(Y)\Omega\,=0$ 的向量场 $Y\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$；按本文使用的术语，这些向量场称为无穷小诺特对称性。

2.5 多重动量映射

设 G 是（预）多辛系统 $(\mathscr{M},\Omega)$ 的一组诺特对称性；也就是说，对于每个 $g\in G$，都有 $\Phi_g^*\Omega\,=\Omega$；对于每个 $\xi\in\mathfrak{g}$，都有 $\mathrm{L}(X_\xi)\Omega\,=0$。因此，由于 $\mathrm{d}\,i(X_\xi)\Omega\,=0$，在 $\mathscr{M}$ 中每个点的开邻域 $U\subset\mathscr{M}$ 上都存在一个形式 $\mathrm{J}_\xi\in\Omega^{m-1}(U)$，使得

$$i(X_\xi)\Omega=-\mathrm{d}\mathrm{J}_\xi\ . \tag{4}$$

形式 J_ξ 由某个恰当形式 $\mathrm{d}\beta_\xi$（其中 $\beta_\xi\in\Omega^{m-2}(U)$）确定到相差一个恰当形式，并且与注4和诺特定理2中引入的守恒量 α_Y 一致。此外，

$$\mathrm{d}\mathrm{J}_\xi=-\,i(X_\xi)\Omega_{\mathscr{L}}=i(X_\xi)\mathrm{d}\Theta=\mathrm{L}(X_\xi)\Theta-\mathrm{d}\,i(X_\xi)\Theta\ , \tag{5}$$

并且，由于 X_ξ 是无穷小诺特对称性，因此式 (3) 对 X_ξ 和 $\mathrm{L}(X_\xi)\Theta\,=\,\mathrm{d}\zeta_\xi$ 成立，其中 $\zeta_\xi\in\Omega^{m-1}(F)$ 是某个函数。现在，由式 (5) 可得

$$\mathrm{J}_\xi=-\,i(X_\xi)\Theta+\zeta_\xi+\mathrm{d}\beta_\xi\ .$$

通过令生成元 $\xi\in\mathfrak{g}$ 为无穷小变换，可将 $(m-1)$-形式 J_ξ 取为关于 ξ 的线性形式。因此，对于每个点 $\mathrm{p}\in\mathscr{M}$，定义线性映射

$$\begin{array}{rccl}\mathrm{J}|_{\mathrm{p}} & : & \mathfrak{g}^* & \to & \Omega^{m-1}(\mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathscr{M})\\ & & \xi & \mapsto & \mathrm{J}|_{\mathrm{p}}(\xi):=\mathrm{j}_\xi(\mathrm{p})\ .\end{array}$$

于是:

定义 5 映射

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{J} & : & \mathscr{M} & \to & \mathfrak{g}^* \otimes \Omega^{m-1}(F) \\ & & \mathrm{p} & \mapsto & \mathrm{J}(\mathrm{p}) := \mathrm{J}|_{\mathrm{p}} \end{array}$$

称为与对称群 G 相关联的多动量映射。

“多动量映射”这一术语也用于指代式 (4) 中出现的 $(m-1)$-形式 $\mathrm{J}\xi$。此外，通常利用 $\mathfrak{g}^*$ 与 $\mathfrak{g}$ 之间的自然配对，将多动量映射表示为 $\mathrm{J}\xi(\mathrm{p}) = \langle \mathrm{J}(\mathrm{p}),\ \xi \rangle$。

因此， $\mathscr{M}$ 上的诺特对称性在 $\mathscr{M}$ 上产生多动量映射，而对称性的所谓诺特流 $\mathrm{j} = j^{\mu}\mathrm{d}^{m-1}x_{\mu} \in \Omega^{m-1}(\mathscr{M})$ 可表示为 $\mathrm{j} = \boldsymbol{\psi}^*\mathrm{J}\xi$ （另见注 1）。

3 提升 喷射丛底空间上的变换

在经典场论中，一些对称性与底流形 M 上的微分同胚相关（在大多数情况下即为时空变换）；而对于一阶拉格朗日场论，其中 $\mathscr{M}$ 是一阶喷射丛 $J^1\pi \to E \to M$ （见第 4.1 节），通常可以从 M 上的那些微分同胚中得到 $J^1\pi$ 中的变换律。

本节讨论如何由底空间上的微分同胚诱导出喷射丛变换。其他细节请参见 [19, 47] 。

3.1 一阶喷射丛

首先令 $\pi\colon\ E \longrightarrow M$ 是一个定义在可定向 m 维流形 M 上的纤维丛，其中 $\dim E = m+n$ 且 $m > 1$。投影 π 的一阶喷射丛 $J^1\pi$ 是 π 的局部截面的一阶射流（等价类）所构成的流形，记为 $\phi \in \Gamma(\pi)$。给定一点 $x \in M$， $J^1\pi$ 中的点记为 $\bar{y} \equiv j^1_x\phi$ ，其中 $\phi \in \Gamma(\pi)$ 是该等价类的一个代表元。由此得到的自然投影为

$$\begin{array}{rccl} \pi^1\colon J^1\pi & \longrightarrow & E \\ j^1_x\phi & \longmapsto & \phi(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccl} \bar{\pi}^1\colon J^1\pi & \longrightarrow & M \\ j^1_x\phi & \longmapsto & x \end{array}$$

其中 $\bar{\pi}^1 = \pi \circ \pi^1$。 M 上的体积形式及其拉回形式 $\bar{\pi}^{1*}\omega$ 均记为 ω。 $J^1\pi$ 上的局部坐标记为（x^{μ}， y^i， y^i_{μ}），其中 $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$， $1 \leqslant i \leqslant n$；而（$x^{\mu}$， y^i）是 E 上与丛结构相适配的局部坐标，因此 $\omega = \mathrm{d}x^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{m-1} \equiv \mathrm{d}^m x$。

截面 $\phi \in \Gamma$（π）到 $J^1\pi$ 的典范提升记为 $j^1\phi \in \Gamma$（$\bar{\pi}^1$）。若截面 $\psi \in \Gamma$（$\bar{\pi}^1$）满足 ψ 是截面 $\phi = \pi^1 \circ \psi \in \Gamma$（$\pi$）的典范提升，则称其为全纯约束的，因此，$\psi = j^1$（$\pi^1 \circ \psi$）。

3.2 从 M 到 E 的提升变换

考虑由坐标变换$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$产生的无穷小微分同胚 $\Phi_M\colon\ M \to M$。这些变换由向量场 $Z = -\xi^{\mu}(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(M)$以及在构型流形 E上生成相应变换的 π-可投影向量场所生成；后者的一般形式写作$(x^{\mu}, y^A) \ \to (x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)\ y^i + \xi^i(x,y))$，其中$\xi^i(x,y) \in \mathrm{C}^{\infty}(E)$，具体如下：

$$Y \equiv Z_E = -\xi^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \in \mathfrak{X}(E)\ . \tag{6}$$

场 $y^i(x)$ 作为截面 $\phi(x) = (x^\mu, y^i(x))$ 的分量给出，它们相对于 M 上的向量场 Z （记为 $\delta y^i(x)$）按照场的李导数变换为

$$\delta y^i(x) \equiv \mathrm{L}(Z)y^i(x) = y'^i(x) - y^i(x) = -\xi^\mu(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}(x) + \widetilde{\xi}^i(x) \ . \tag{7}$$

这些场变换有时被称为场的局部变分。函数 $\widetilde{\xi}^i(x)$ 与式（6）中的分量 $\xi^i(x,y)$ 原则上并无关联。式（7）中的项 $-\xi^\mu(x)\,\dfrac{\partial y^i}{\partial x^\mu}$ 被称为输运项，而 $\widetilde{\xi}^i(x)$ 被称为场的整体变分，其定义为

$$\widetilde{\xi}^i(x) = y'^i(x') - y^i(x) \ .$$

几何的　　关于局部场变分的解释如下 [32, 34, 38, 42]:

定义 6 设截面 $\phi\colon\ M \to E$，并设 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$ 是一个投影到 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 的 π-可投影向量场（因此具有式（6）的局部表达式）。截面 ϕ 沿 Z 的广义李导数是映射 $\mathbb{L}(Z)\phi\colon\ M \to \mathrm{T}E$，定义为

$$\mathbb{L}(Z)\phi = T\phi \circ Z - Z_E \circ \phi \ , \tag{8}$$

这是沿着 ϕ 的向量场。广义李导数的形式为 $\mathbb{L}(Z)\phi = (\phi, \mathrm{L}(Z)\phi)$，而截面 $\mathrm{L}(Z)\phi\colon\ M \to V(\mathrm{T}\pi)$ 称为截面 ϕ 在 Z 作用下的李导数；当 Z_E 的局部表达式为 (6) 时，该导数由 $\mathrm{L}(Z)\phi = \left(x^\mu, \xi^\nu\,\dfrac{\partial \phi^i}{\partial x^\nu} - \xi^i \circ \phi\right)$ 给出。

这个李导数的定义必须与由 (7) 中的场变换 $\delta y^i(x)$ 所定义的 $y^i(x)$ 的李导数一致。为此，将 (8) 中分量 ϕ^i 的李导数定义为 $\mathrm{L}(Z)\phi^i = \mathrm{L}(Z)y^i(x)$；于是，(7) 中的函数 $\widetilde{\xi}^i(x)$ 可由 Z_E 的分量函数 $\xi^i(x,y)$ 以及任意局部截面 ϕ 表示为

$$\widetilde{\xi}^i(x) = \xi^i(x,y) \circ \phi \ . \tag{9}$$

对于 $y^i(x)$ 为标量场的理论，基底 M 上的微分同胚会产生场变分 $\delta y^i(x)$，满足 $\widetilde{\xi}^i(x) = 0 \implies \xi^i(x,y) = 0$。

另一方面，如果场通常是 M 上类型为 $(k,l) \neq (0,0)$（即 $T \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(\mathrm{T}M)$）的张量场，那么函数 $\widetilde{\xi}^i(x)$ 通常由坐标变换 $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x)$ 相关的雅可比矩阵（及其逆矩阵）得到。也就是说，如果场 $y^i(x)$ 是张量场 $T \equiv (T^{\mu_1}{}_{\dots}{}^{\mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}, \ldots, \ldots, (x))$ 的分量，那么

$$(T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x') = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\alpha_r}}\right)\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'^{\nu_s}}\right)T^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{\beta_1,\dots,\beta_s}(x) \ . \tag{10}$$

将上述表达式的左侧在 x 处进行泰勒展开，可得到输运项：

$$(T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x') = (T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x+\xi) = (T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x) + \xi^\alpha\,\frac{\partial (T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x)}{\partial x^\alpha} \ ,$$

而对每个雅可比矩阵（以及每个逆雅可比矩阵），对式 (10) 右侧进行相同的泰勒展开，得到场 $\Delta T^{\mu_1}{}_{\dots}{}^{\mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}{}_{,,}(x)$ 的整体变分，其形式为

$$\Delta T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s} = \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_r}\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda}\right)T^{\mu_1,\dots,(\mu\to\lambda),\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s} - \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_s}\left(\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}\right)T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,(\nu\to\lambda),\dots,\nu_s} \ . \tag{11}$$

因此，关于 $Z = -\xi^{\mu}(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} \in \mathfrak{X}(M)$ 的李导数给出的局部场变分为

$$\begin{aligned}\delta T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x) &= (T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x) - T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x) = \mathrm{L}(Z)T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x)\\ &= -\xi^{\lambda}\,\frac{\partial (T')^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x)}{\partial x^{\lambda}} + \Delta T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x)\ .\end{aligned}$$

现在回顾关系式 (9)，可得

$$Z_E = -\xi^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \Delta^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x,T)\,\frac{\partial}{\partial T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}}\ , \tag{12}$$

其中现在,

$$\Delta T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x) = \Delta^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x,T)\circ\phi\ . \tag{13}$$

需要注意的是，当构型流形 E是 M上的张量丛，其坐标为 $(x^{\mu}, T^{\mu_1,\dots,\nu_1\dots}{}^{\mu_r}_{\nu_s,,})$ 时，(12) 恰好是 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 到 E的典范提升，其定义如下:

定义 7 1. 设 Φ_M: $M \to M$ 是一个微分同胚。 Φ_M 到 E 的典范提升是微分同胚 Φ_E: $E \to E$，定义如下：对每个 $(x, T_x) \in E$，其中 $T_x \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(\mathrm{T}_xM)$，定义 $\Phi_E(x, T_x) := (\Phi_M(x), \mathrm{T}\Phi_M(T_x))$，其中 $\mathrm{T}\Phi_M$表示由 Φ_M诱导的 M上张量的典范变换。因此， $\pi \circ \Phi_E = \Phi_M \circ \pi$。

2. 令 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 为由 M 上的局部单参数微分同胚群诱导的向量场，记作 ϕ_t。 Z 到 E 的典范提升是由局部单参数微分同胚群 $(\phi_E)_t$ 诱导的向量场 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$，其中该群是 ϕ_t 到构型丛 E 的典范提升。

总之，局部截面 ϕ 的李导数 (8) 的定义旨在使其始终与场的李导数 (7) 一致，其中 (6) 中的 Z_E 是 Z 到E 的典范提升，因此关系式 (9) 始终成立。

3.3 从 E 到 $J^1\pi$的提升变换

设 Φ: $E \to E$ 是一个微分同胚，它在底空间 M 上诱导出微分同胚 Φ_M: $M \to M$，使得 $\Phi_M \circ \pi = \pi \circ \Phi$。那么， Φ 到 $J^1\pi$ 的典范提升是微分同胚$j^1\Phi$: $J^1\pi \longrightarrow J^1\pi$，其定义如下:

$$(j^1\Phi)(\bar{y}) := j^1(\Phi \circ \phi \circ \Phi_M^{-1})(\Phi_M(x)) \quad ; \quad \text{for } \bar{y} \in J^1\pi\ .$$

现在可以定义 $Y \in \mathfrak{X}(E)$ 的 π-可投影向量场到 $J^1\pi$ 的典范提升；为此，存在 $Z \in \mathfrak{X}(M)$, 使得 Z 和 Y 的局部流是 π^1-相关的。 π-可投影向量场 $Y \in \mathfrak{X}(E)$ 到 $J^1\pi$ 的典范提升，是向量场 $j^1Y \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$；其局部单参数微分同胚群是 Y 的局部单参数微分同胚群的典范提升。若 $Y \in \mathfrak{X}(E)$ 是 $Z \in \mathfrak{X}(M)$ 到 E 的典范提升，且其局部坐标表达式由 (6) 给出，即 $Y = Z_E = -\xi^{\mu}(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \xi^{i}(x,y)\,\dfrac{\partial}{\partial y^{i}}$，那么.....的典范提升

$Y \in \mathfrak{X}(E)$ to $J^1\pi$ is

$$j^1Z_E = -\xi^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \xi^{i}\frac{\partial}{\partial y^{i}} - \left(\frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{\mu}} - y^{i}_{\nu}\frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + y^{j}_{\mu}\frac{\partial \xi^{i}}{\partial y^{j}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{i}_{\mu}} \in \mathfrak{X}(J^1\pi)\ . \tag{14}$$

这些典范提升的特征是，它们使喷射丛 $J^1\pi$ 的典范结构保持不变。特别是，接触模以及由此得到的典范自同态在这类典范提升下保持不变。这种典范提升可以推广到 E 上非 π-可投影的向量场。若 Y 不是 π-可投影向量场，则其典范提升 $j^1Y \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 是唯一一个可投影到 Y 的 π^1-可投影向量场，且使 $J^1\pi$ 的典范结构保持不变（详情参见 [19, 47] ）。在局部坐标中，若向量场 $Y = Z_E \in \mathfrak{X}(E)$ 满足 $\xi^i \equiv \xi^i(x,y)$，则它不是 π-可投影的。于是，

$$j^1 Z_E = -\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} - y^i_\nu \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} + y^j_\mu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial y^j} \right) + y^j_\mu \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i_\mu} \ .$$

同理，可以定义任意微分同胚 $\Phi\colon E \to E$ 到 $J^1\pi$ 的典范提升。

场的时空导数的变分，$\delta y^i_\mu(x) = \delta\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}(x)\right) = \mathrm{L}(Z)\partial y^i(x)\,\partial x^\mu$，也可以用一阶射流延拓 $j^1\phi\colon M \to J^1\pi\colon x^\mu \mapsto \left(x^\mu, y^i(x)\,\partial y^i(\partial x^\mu)\right)$ 关于向量场 $Z = -\xi^\mu(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ 的广义李导数 $\mathrm{L}(Z)j^1\phi$ 来刻画，其中

$$\mathbb{L}(Z)j^1\phi = Tj^1\phi \circ Z - j^1 Z \circ j^1\phi \ , \tag{15}$$

以及 $\mathbb{L}(Z)j^1\phi = (\phi, \mathrm{L}(Z)\phi)$。由此可得

$$\mathrm{L}(Z)(j^1\phi)^i_\mu = \delta y^i_\mu(x) = -\xi^\nu \frac{\partial y^i_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^i}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \widetilde{\xi}^i}{\partial x^\mu} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\mu}\frac{\partial \widetilde{\xi}^i}{\partial y^j} \ , \tag{16}$$

其中现在 $\widetilde{\xi}^i(x) = \xi^i(x,y) \circ j^1\phi$ 与之前相同。此外，$\xi^i = 0$ 对于在时空微分同胚下变换的标量场，上述方程相应地简化。

对于场为张量场 $T^{\mu_1,\dots,\nu_1\dots}_{\nu_s,,}{}^{\mu_r}(x)$ 的情况，式 (12) 中的 Z_E 在式 (14) 中到 $J^1\pi$ 的典范提升 $j^1 Z_E$ 为

$$j^1 Z_E = -\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Delta^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}(x,T)\,\frac{\partial}{\partial T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}} - \Gamma^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\alpha\nu_1,\dots,\nu_s}\,\frac{\partial}{\partial T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\alpha\nu_1,\dots,\nu_s}} \ ,$$

其中 $\Delta^{\mu_1,\dots,\nu_1\dots}_{\nu_s,,}{}^{\mu_r}(x,T) \in C^\infty(E)$ 仍由式 (11) 和 (13) 给出，而

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\alpha\nu_1,\dots,\nu_s} = &\sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_r} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial T^{\mu_1,\dots,(\mu\to\lambda),\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,\nu_s}}{\partial x^\alpha} - \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_s} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\nu_1,\dots,(\nu\to\lambda),\dots,\nu_s}}{\partial x^\alpha} \\ &+ \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_r} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\lambda}\,T^{\nu_1,\dots,\nu_s} - \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_s} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}\,T^{\mu_1,\dots,\mu_r}_{\alpha\nu_1,\dots,(\nu\to\lambda),\dots,\nu_s} - T_{\beta\nu_1,\dots,\nu_s}^{\ \ \mu_1,\dots,\mu_r}\,\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \ .\end{aligned}$$

4 拉格朗日量与哈密顿场论的对称性

本节将在一阶场论的拉格朗日量形式和 De Donder–Weyl 哈密顿形式中，进一步阐述前几节介绍的概念。其他细节和相关讨论见 [18, 21, 24, 26, 27, 45]。

4.1 一阶拉格朗日量场论

本节全面回顾一阶拉格朗日场论的几何框架。更多详情请参见 [2, 19, 20, 24, 26, 29, 47]。

一阶场论的拉格朗日表述所对应的相空间，称为（一阶）多速度相空间，它是一丛 π的一阶喷射丛 $J^1\pi$： $E \to M$，该丛称为理论的构型丛，而场状态 y^i（x）由局部截面ϕ： $M \to E$：$x^\mu \mapsto$ （x^μ， y^i（x））给出，如第3节所述。

每个具体的场论通常由一个拉格朗日量来指定。然而，物理学界与微分几何界对拉格朗日量的定义有所不同。在微分几何文献中，拉格朗日量被定义为 C^∞ 上的一个函数；而在物理学文献中，拉格朗日量被定义为从 M到 $J^1\pi$的射流延拓空间 $j^1\phi$ 上的一个泛函。两种定义都可以等效地用于表述变分原理，该原理给出所研究理论的场方程。然而，与在射流延拓空间上进行研究相比，在 $J^1\pi$ 上进行研究具有若干几何方面的优势。其中一个优势是， $J^1\pi$ 是一个有限维流形，而射流延拓空间是一个由从 M 到 $J^1\pi$的局部截面构成的空间，属于无限维流形。

因此，一阶场论由一阶拉格朗日密度 $\mathscr{L} \in \Omega^m(J^1\pi)$ 描述，它是一个 $\overline{\pi}^1$-半基本 m-形式，记作 $\mathscr{L} = L\omega \in \Omega^m(J^1\pi)$；而 $L \in \mathrm{C}^\infty(J^1\pi)$ 称为拉格朗日函数。拉格朗日相空间 $J^1\pi$ 具有一种称为典范自同态 V 的典范结构。V 是一个 (1, 2) 阶张量场，其局部表达式为 $\mathrm{V} = (\mathrm{d}y^i - y^i_\mu \mathrm{d}x^\mu) \otimes \dfrac{\partial}{\partial y^i_\nu} \otimes \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$。利用这一结构，与 $\mathscr{L}$ 相关的庞加莱–嘉当 m 形式和 $(m+1)$-形式分别定义为 $\Theta_{\mathscr{L}} := i(\mathrm{V})\mathrm{d}\mathscr{L} + \mathscr{L} \in \Omega^m(J^1\pi)$ 和 $\Omega_{\mathscr{L}} := -\mathrm{d}\Theta_{\mathscr{L}} \in \Omega^{m+1}(J^1\pi)$，它们的坐标表达式如下：

$$
\begin{aligned}
\Theta_{\mathscr{L}} &= \frac{\partial L}{\partial y^i_\mu} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu - \left(\frac{\partial L}{\partial y^i_\mu} y^i_\mu - L \right) \mathrm{d}^m x \equiv \frac{\partial L}{\partial y^i_\mu} \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu - E_{\mathscr{L}}\, \mathrm{d}^m x \ , \\
\Omega_{\mathscr{L}} &= -\frac{\partial^2 L}{\partial y^j_\nu \partial y^i_\mu} \, \mathrm{d}y^j_\nu \wedge \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu - \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i_\mu} \, \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial y^j_\nu \partial y^i_\mu} \, y^i_\mu \, \mathrm{d}y^j_\nu \wedge \mathrm{d}^m x + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial y^i_\mu} y^i_\mu - \frac{\partial L}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^\mu \partial y^j_\mu} \right) \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}^m x \ .
\end{aligned}
$$

这一对 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 称为一阶拉格朗日系统；若 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 是 1-非退化的（即多辛形式），则称其为正则系统，否则称为奇异系统（即 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 是预多辛的）。按照多辛几何的术语， $\Theta_{\mathscr{L}}$ 称为 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 的（预）多辛势。正则性条件在局部等价于要求广义海森矩阵 $H^{\mu\nu}_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^i_\mu \partial y^j_\nu}$ 在 $J^1\pi$ 上处处非奇异。

针对拉格朗日量 $\mathscr{L}$ 所提出的拉格朗日变分问题，其解是满足以下条件的完整截面 $j^1\phi$：$M \to J^1\pi$

$$
(j^1\phi)^*\, i(X)\Omega_{\mathscr{L}} = 0 \, , \quad \text{for every } X \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ . \tag{17}
$$

等价地， $j^1\phi$ 是一类局部可分解且全纯约束的多向量场 $\{\mathrm{X}_{\mathscr{L}}\} \subset \mathfrak{X}^m(J^1\pi)$ 的积分截面，它们满足

$$
i(\mathbf{X}_{\mathscr{L}})\Omega_{\mathscr{L}} = 0 \ . \tag{18}
$$

此外，全纯约束的完整多向量场必须是 π^1-横截的，

$$
i(\mathbf{X}_{\mathscr{L}})\omega \neq 0 \ . \tag{19}
$$

可以通过在等价类 $\{\mathrm{X}_{\mathscr{L}}\}$ 中选取一个代表元来满足这一条件，使得 $i(\mathrm{X}_{\mathscr{L}})\omega = 1$。满足场方程 (18) 的全纯约束截面代表了该理论的物理态

理论。在局部坐标中，截面的场方程可表示为

$$\frac{\partial L}{\partial y^i}\circ j^1\phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_\mu}\circ j^1\phi\right) = 0\ ,$$

这就是该系统的欧拉–拉格朗日方程。

注 7 方程 (18) 有多个解（即使在正则情形下） [20, 21]。这意味着，不存在唯一一类可解场方程 (18) 的可积多向量场（即唯一的分布），使其作用于 $J^1\pi$。相反，经过 $J^1\pi$ 中每一点且满足场方程的积分截面有多个。如果拉格朗日量是奇异的，则还存在另一种任意性，它源于形式 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 的退化性，并且与几何规范对称性的存在有关。一般而言，当 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 是一个可解的奇异拉格朗日系统时，场方程存在稳定解，这些解由在某个 $\bar\pi^1$-横截子流形 $S_f \subseteq J^1\pi$ 上局部可分解且 $\bar\pi^1$-横截的多向量场给出。此外，这些多向量场并不总是可积的（即使对于正则场论也是如此）。此外，多向量场解不一定在整个 S_f 上都是全纯约束的，而可能只在另一个 $\bar\pi^1$-横截子流形 $\mathsf{S}_f \subseteq S_f$ 上满足全纯约束；这些满足全纯约束且解场方程的多向量场必须与该子流形相切。这意味着，满足场方程 (17) 的完整截面的像位于 $\mathsf{S}f$ 上，该子流形称为最终约束子流形，场方程在其上被认为具有“相容解”。用于求出 $\mathsf{S}f$ 的约束算法将在第 4.4 节中概述。关于这些特征的深入分析，见 [17, 30] 。

4.2 De Donder–Weyl 哈密顿形式

本节回顾经典场论中的（预）多辛 De Donder–Weyl 形式。更多详情请参阅 [12, 16, 35, 43] 及其中的参考文献。

正则拉格朗日量（多辛）场论的 De Donder–Weyl 哈密顿形式是在所谓的多重动量丛 $J^{1*}\pi$ 上建立的，其构造如下：考虑扩展多重动量丛 $\Lambda^m_2\mathrm{T}^*E$ ，它是由 m- 形式构成的丛，这些形式与两个 π-垂直向量场缩并后为零；然后 $J^{1*}\pi \equiv \Lambda^m_2\mathrm{T}^*E/\Lambda^m_1\mathrm{T}^*E$ （其中$\Lambda^m_1\mathrm{T}^*E$ 是 π-半基本 m-形式在 E 上构成的丛）。适配于丛 π 的 $\Lambda^m_2\mathrm{T}^*E$ 上的自然坐标为 (x^ν, y^i, p^ν_i, p)（因此 dim $\Lambda^m_2\mathrm{T}^*E = nm+n+m+1$），而 $J^{1*}\pi$ 上的自然坐标为 (x^μ, y^i, p^μ_i)（因此 dim $J^{1*}\pi = nm+n+m$）。这些丛的自然投影为

$$\bar\tau\colon J^{1*}\pi \to M\,,\quad \tau\colon J^{1*}\pi \to E\,,\quad \mathfrak{p}\colon \Lambda^m_2\mathrm{T}^*E \to J^{1*}\pi\,.$$

与拉格朗日函数 $L \in \mathrm{C}^\infty(J^1\pi)$ 相关联的勒让德映射 $\mathscr{FL}$： $J^1\pi \to J^{1*}\pi$，局部表示为

$$\mathscr{FL}^*x^\nu = x^\nu \quad,\quad \mathscr{FL}^*y^i = y^i \quad,\quad \mathscr{FL}^*p^\nu_i = \frac{\partial L}{\partial y^i_\nu}\ .$$

拉格朗日量 L 是正则的，当且仅当 $\mathscr{FL}$ 是局部微分同胚；当 $\mathscr{FL}$ 是整体微分同胚时， $\mathscr{FL}$ 是超正则的。于是，存在 $\Theta_{\mathrm{h}} \in \Omega^m(J^{1*}\pi)$ 和 $\Omega_{\mathrm{h}} := -\mathrm{d}\,\widetilde{\Theta}_{\mathrm{h}} \in \Omega^{m+1}(J^{1*}\pi)$，使得 $\mathscr{FL}^*\Theta_{\mathrm{h}} = \Theta_{\mathscr{L}}$ 和 $\mathscr{FL}^*\Omega_{\mathrm{h}} = \Omega_{\mathscr{L}}$，它们分别称为哈密顿 – 嘉当 m 和 $(m+1)$- 形式；Ω_{h} 是 $J^{1*}\pi$ 上的多辛形式，二元组 $(J^{1*}\pi, \Omega_{\mathrm{h}})$ 是与（超）正则拉格朗日系统 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 相关联的哈密顿系统。 Θ_{h} 和 Ω_{h} 的局部表达式为

$$\Theta_{\mathrm{h}} = p^\mu_i\mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}^{m-1}x_\mu - H\,\mathrm{d}^m x \quad,\quad \Omega_{\mathrm{h}} = -\mathrm{d}p^\mu_i\wedge\mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}^{m-1}x_\mu + \mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}^m x\ ,$$

其中，

$$H = (\mathscr{FL}^{-1})^*E_{\mathscr{L}} = p^\mu_i(\mathscr{FL}^{-1})^*y^i_\mu - (\mathscr{FL}^{-1})^*L \in \mathrm{C}^\infty(J^{1*}\pi)\ ,$$

是德·唐德–韦尔哈密顿函数。场方程可由所谓的哈密顿–雅可比变分原理导出，其解是满足以下条件的截面 $\psi\colon M \to J^{1*}\pi$

$$\psi^* \, i(X)\Omega_{\mathrm{h}} = 0 \quad , \quad \text{for every } X \in \mathfrak{X}(J^{1*}\pi) \ .$$

等价地，这类截面是满足以下条件的一类可积且 $\bar{\tau}$-横截多向量场 $\{\mathbf{X}_{\mathrm{h}}\} \subset \mathfrak{X}^m(J^{1*}\pi)$ 的积分截面

$$i(\mathbf{X}_{\mathrm{h}})\Omega_{\mathrm{h}} = 0 \quad , \quad \text{for every } \mathbf{X}_{\mathrm{h}} \in \{\mathbf{X}_{\mathrm{h}}\} \ .$$

$\bar{\tau}$-横截条件（如拉格朗日框架中一样）通过在等价类 $\{\mathbf{X}_{\mathrm{h}}\}$ 中选取一个满足 $i(\mathbf{X}_{\mathrm{h}})\omega = 1$ 的代表元来确定。在 $J^{1*}\pi$ 上采用自然局部坐标时，局部截面写作 $\psi = (x^\mu, y^i(x^\nu)\ p_i^\mu(x^\nu))$，并满足

$$\frac{\partial(y^i \circ \psi)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial H}{\partial p_i^\mu} \circ \psi \quad , \quad \frac{\partial(p_i^\mu \circ \psi)}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial H}{\partial y^i} \circ \psi \ .$$

这些就是该系统的哈密顿–德唐德–韦尔方程。

对于奇异拉格朗日量，必须施加一些最低限度的条件，以确保德唐德–韦尔哈密顿描述的存在。特别地，考虑所谓的几乎正则拉格朗日量 $L \in \mathrm{C}^\infty(J^1\pi)$，它们满足以下条件：(i) $P_0 := \mathscr{FL}(J^1\pi)$ 是一个闭子流形，称为初级约束子流形；(ii) $\mathscr{FL}$ 是到其像上的沉浸；(iii) 对于每个 $\bar{y} \in J^1\pi$，纤维 $\mathscr{FL}^{-1}(\mathscr{FL}(\bar{y}))$ 是 $J^1\pi$ 中的连通子流形。注意，由于 $P_0 := \mathscr{FL}(J^1\pi)$，可得 $P_0 \to E \to M$。于是，记 $\jmath_0\colon P_0 \hookrightarrow J^{1*}\pi$ 为初级约束子流形的自然嵌入，限制映射 $\mathscr{FL}_0\colon J^1\pi \to P_0$ 是由 $\mathscr{FL} = \jmath_0 \circ \mathscr{FL}_0$ 定义的映射。此外，存在哈密顿–嘉当形式 $\Theta_{\mathrm{h}}^0 \in \Omega^m(P_0)$ 和 $\Omega_{\mathrm{h}}^0 = -\mathrm{d}\Theta_{\mathrm{h}}^0 \in \Omega^{m+1}(P)$，使得 $\Theta_{\mathscr{L}} = \mathscr{FL}_0{}^* \, \Theta_{\mathrm{h}}^0$ 且 $\Omega_{\mathscr{L}} = \mathscr{FL}_0{}^* \Omega_{\mathrm{h}}^0$；还存在德·唐德–韦尔哈密顿函数 $H_0 \in \mathrm{C}^\infty(P_0)$，使得$E_{\mathscr{L}} = \mathscr{FL}_0{}^* \, H_0$。因此，哈密顿–嘉当形式的坐标表达式为

$$\Theta_{\mathrm{h}}^0 = \jmath_0^*(p_i^\mu \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu) - H_0 \, \mathrm{d}^m x \quad , \quad \Omega_{\mathrm{h}}^0 = \jmath_0^*(-\mathrm{d}p_i^\mu \wedge \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu) + \mathrm{d}H_0 \wedge \mathrm{d}^m x \ .$$

一般而言，Ω_{h}^0 是一个预多辛形式，而（P_0，Ω_{h}^0）是与近正则拉格朗日系统（$J^1\pi$，$\Omega_{\mathscr{L}}$）相关联的哈密顿系统。哈密顿–德唐德–韦尔方程的表述与正则情形相同。当非正则哈密顿系统存在稳定解时，哈密顿场方程的此类解仅存在于子流形 $P_f \subseteq P_0$ 上；该子流形通过实施第 4.4 节稍后所述的相应约束算法得到。子流形 P_f 是 De Donder–Weyl 哈密顿形式中的最终约束子流形，并满足 $\mathscr{FL}(S_f) = \mathscr{FL}(S_f) = P_f \subset J^{1*}\pi$，因为 $\mathrm{S}_f \hookrightarrow S_f$在 S_f上由不可投影的约束定义（参见第 4.4 节）。

4.3 对称性、守恒量与多重动量映射

请回想，拉格朗日形式无论在正则情形还是奇异情形下，都是定义在丛 $J^1\pi \to E \to M$ 上的。因此，第 2 节中有关守恒量和对称性的所有定义与结果都可直接应用。拉格朗日系统 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 的拉格朗日守恒量（或守恒律）、拉格朗日（无穷小）对称性、拉格朗日（无穷小）诺特对称性、拉格朗日规范对称性以及拉格朗日多重动量映射等概念也都有明确的定义。

然而，在这种情况下还需考虑一些新的见解，因为现在 $J^1\pi$ 中的截面、微分同胚和向量场分别可以是 E 中截面、微分同胚和向量场的典范提升。因此，我们定义：

定义 8

1. 若拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的（诺特）对称性 Φ：$J^1\pi \to J^1\pi$ 是自然的，则称其为自然对称性；也就是说，$\Phi = j^1\varphi$ 是微分同胚 φ：$E \to E$ 的典范提升。

2. 若拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的无穷小（诺特）对称性 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 是自然的，则称其为自然对称性；也就是说，$X = j^1 Z_E$ 是某个 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$ 的典范提升。

若 $j^1\phi$：$M \to J^1\pi$ 是场方程 (17) 的一个全纯约束的解，且 $\Phi = j^1\varphi \in$Diff($J^1\pi$) 是一个自然的诺特对称性，则

$$\begin{aligned}(j^1(\varphi\circ\phi))^*\, i(X)\Omega_{\mathscr{L}} &= (j^k\phi)^*(j^k\varphi)^*\, i(X)\Omega_{\mathscr{L}} \\ &= (j^1\phi)^*\, i((j^1\varphi)_*^{-1}X)((j^1\varphi)^*\Omega_{\mathscr{L}}) = (j^1\phi)^*\, i(X')\Omega_{\mathscr{L}} = 0\ , \qquad (20)\end{aligned}$$

由于 $X' = \Phi_*^{-1}X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$、$\Phi^*\Omega_{\mathscr{L}} = \Omega_{\mathscr{L}}$，且 $\Phi^*\Omega_{\mathscr{L}} = 0$。因此，$j^1(\varphi\circ\phi)$ 也是 (17) 的一个全纯约束的解，由此我们证明了：

命题 1 每个自然的（无穷小）诺特对称性，都会将拉格朗日场方程的完整解变换为等价的完整解。

如一般情形所述，当 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 是一个最终约束子流形为 $\mathsf{S}_f \hookrightarrow J^1\pi$ 的奇异拉格朗日系统时，（诺特）对称性必须是保持 $\mathsf{S}f$ 不变的微分同胚，而无穷小（诺特）对称性则是与 $\mathsf{S}f$ 相切的向量场，并且至少在 $\mathsf{S}f$ 上满足定义 3 的条件。

此外，如备注 3 和 5 所述，我们将特别关注这样的情形：其中（诺特）对称性是丛 $\bar{\pi}^1$：$J^1\pi \to M$ 的保纤维微分同胚，而无穷小（诺特）对称性是 $\bar{\pi}^1$-可投影向量场。

类似地，对于拉格朗日规范对称性，我们可以定义：

定义 9 若拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的几何无穷小拉格朗日规范对称性（即拉格朗日规范向量场）$X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 对某个向量场 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$ 满足 $X = j^1 Z_E$，则称其为自然的。

根据命题 1，若 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 是自然的拉格朗日规范向量场，那么它会将投影 $\bar{\pi}^1$ 下满足拉格朗日场方程的完整截面变换为其他满足方程的完整截面；这些截面均表示规范等价物理态。不过，应当注意，如果一个完整截面与一个非完整截面通过非自然规范向量场生成的规范变换相关联，那么二者也可能规范等价（且都满足场方程）。

在局部坐标中，若 X 是自然的几何规范向量场，则相应的向量场 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$ 仅含分量 $Z_E = -\xi^i(x,y)\,\dfrac{\partial}{\partial y^i} \in \mathfrak{X}(E)$，由此可得规范向量场 $X = j^1 Z$ 为

$$X = -\xi^i\frac{\partial}{\partial y^i} - \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\mu} + y^j_\mu\frac{\partial \xi^i}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^i_\mu} \in \mathfrak{X}(J^1\pi)\ .$$

拉格朗日形式中的一种特殊对称性如下：

定义10

1. 拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的拉格朗日对称性是指微分同胚 Φ：$J^1\pi \to J^1\pi$，它使 $\mathscr{L}$ 保持不变：$\Phi^*\mathscr{L} = \mathscr{L}$。如果对于某个保纤维微分同胚 φ：$E \to E$，有 $\Phi = j^1\varphi$，则称该拉格朗日对称性为自然的。2. 拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的无穷小拉格朗日对称性是指向量场 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$，它使 $\mathscr{L}$ 保持不变。如果对于某个 π-可投影向量场 $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$，有 $X = j^1 Z_E$，则称该无穷小拉格朗日对称性为自然的。

注意，给定一个微分同胚 φ：$E \to E$ and $Z_E \in \mathfrak{X}(E)$，则

$$(j^1\varphi)^*\mathscr{L} = \mathscr{L} \iff (j^1\varphi)^*\Theta_{\mathscr{L}} = \Theta_{\mathscr{L}} \,,$$
$$\mathrm{L}(j^1 Z_E)\mathscr{L} = 0 \iff \mathrm{L}(j^1 Z_E)\Theta_{\mathscr{L}} = 0 \,,$$

因此，（无穷小）拉格朗日对称性是（无穷小）精确诺特对称性。

然而，一般的（无穷小）拉格朗日对称性未必使庞加莱–卡当形式 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 保持不变，除非它是自然拉格朗日对称性。同样，由于 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 不是典范的（因为它取决于拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 的选择），它在纤维保持微分同胚的典范提升以及 π-可投影向量场下也不保持不变，除非假设某些附加条件，例如拉格朗日密度的不变性。基于这一讨论，考虑以下类型的对称性：

定义11

1. 拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的几何拉格朗日对称性是一个微分同胚 Φ：$J^1\pi \to J^1\pi$，满足：

(a) $\Phi^*\mathscr{L} = \mathscr{L}$。(b) $J^1\pi$ 的典范几何结构在 Φ 下不变。

2. 拉格朗日系统（$J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}}$）的无穷小几何拉格朗日对称性是一个向量场 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$，满足：

(a) $\mathrm{L}(X)\mathscr{L} = 0$。(b) $J^1\pi$ 的典范几何结构在 X 的作用下不变。

由此可知，（无穷小）自然拉格朗日对称性是（无穷小）几何拉格朗日对称性，而（无穷小）几何拉格朗日对称性是（无穷小）精确诺特对称性。

还值得注意的是，要求 $\mathscr{L}$ 在 $J^1\pi$ 上的某个李群作用下保持不变，是一个极其严格的条件；要通过变分原理得到相同的场方程，并不需要满足这一条件。在 $J^1\pi$ 上存在一些李群作用，它们会产生所谓的规范等价拉格朗日量，并导出相同的欧拉–拉格朗日方程（例如，参见 [13, 39]）。规范等价的拉格朗日密度相差一个恰当微分形式：$\Phi^*\mathscr{L} = \mathscr{L} + \mathrm{d}\beta$。回想一下，在物理学文献中，场论的分析是在

射流延拓 $j^1\phi$： $M \to J^1\pi$ 上进行的，因此 $\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{L}\omega = (j^1\phi)^*\mathscr{L} \in C^\infty(M)$。在这种情况下，规范等价的拉格朗日量相差一个全导数 $\delta\widetilde{L} = \partial_\mu \widetilde{K}^\mu$，其中 $\widetilde{K}^\mu = (j^1\phi)^* K^\mu$，且 K^μ 为某个对象。此外，回想一下，当场变分由 M 的微分同胚产生，且这些微分同胚由某个向量场 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ 生成时， $j^1\phi$ 上拉格朗日函数 $\widetilde{L}$ 的变分可以写成局部截面 $j^1\phi$ 关于 ξ 的李导数，因此

$$\delta\widetilde{L} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i(x)}\delta y^i(x) + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i_\mu(x)}\delta y^i_\mu(x) \in C^\infty(M) \ ,$$

利用方程 (8) 和 (16)。于是，相应的李群作用 Φ 在 $J^1\pi$ 上由 $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ 到 $J^1\pi$的典范提升 $X_\xi \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 生成，该提升由 (14) 给出。由此可得，对于 $\Phi^*\mathscr{L} = \mathscr{L} + \mathrm{d}\beta$,

$$\mathrm{d}\beta = L(X_\xi)\mathscr{L} = -\mathrm{d}(K^\mu + L\xi^\mu) \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu \in \Omega^m(J^1\pi) \ .$$

~同样，当场变分为规范变换 $\delta y^i(x) = \xi^i(x) = \phi^*\xi^i(x, y)$ 时，可得

$$\mathrm{d}\beta = L(X_\xi)\mathscr{L} = -\mathrm{d}K^\mu \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_\mu \in \Omega^m(J^1\pi) \ ,$$

其中，现由 (14) 给出 X_ξ ，且 $\xi^\mu = 0$。

最后，设 G 是拉格朗日系统 $(J^1\pi, \Omega_{\mathscr{L}})$ 的诺特对称性群，并设 $\mathrm{J}_\xi \in \Omega^{m-1}(U)$（ $U \subset J^1\pi$），为相应的拉格朗日多重动量映射。现在，考虑诺特对称性是恰当的，且如第 3.2 节所述，它们与底空间 M 上的微分同胚相关联的情形。于是，记 $X_\xi \equiv j^1 Z_E$，我们有 $\mathrm{L}(j^1 Z_E)\Theta_{\mathscr{L}} = 0$，并且（模恰当微分形式）拉格朗日多重动量映射为

$$\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\xi) = -\, i(X_\xi)\Theta_{\mathscr{L}} = \frac{\partial L}{\partial y^i_\mu}\left(\xi^i \mathrm{d}^{m-1}x_\mu - \xi^\nu y^i_\mu \mathrm{d}^{m-1}x_\nu - \xi^\nu \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{\mu\nu}\right) + L\,\xi^\nu \mathrm{d}^{m-1}x_\nu \ .$$

相应的诺特流为

$$\mathrm{j}^\mu_\xi \mathrm{d}^{m-1}x_\mu = (j^1\phi)^*\left[-i\left(X_\xi\right)\Theta_{\mathscr{L}}\right] = \left[\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_\mu} \circ j^1\phi\right)\left(\widetilde{\xi^i} - \xi^\nu \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\nu}\right) + \xi^\mu \left(L \circ j^1\phi\right)\eta^\mu{}_\nu\right] \mathrm{d}^{m-1}x_\mu.$$

上文所示诺特流中对应无穷小时空变换的部分关于 ξ 是线性的，而典范能量-动量张量通常记作 $T^\mu{}_\nu$，它由上文与 ξ^ν 收缩的项定义：

$$-\xi^\nu \left[\left(\frac{\partial L}{\partial y^i_\mu} \circ j^1\phi\right)\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^\nu} - \left(L \circ j^1\phi\right)\eta^\mu{}_\nu\right] \mathrm{d}^{m-1}x_\mu \equiv -\xi^\nu T^\mu{}_\nu \mathrm{d}^{m-1}x_\mu \ .$$

与拉格朗日形式类似，第 2 节中引入的所有定义和结果，只需在正则场论中取 $\mathscr{M} \equiv J^{1*}\pi \to E \to M$，或在近正则场论中取 $\mathscr{M} \equiv P_0 \to E \to M$ ，即可直接应用于德唐德–韦尔哈密顿框架，具体如上一节所述。对于正则和近正则哈密顿系统（$J^{1*}\pi, \Omega_{\mathrm{h}}$）和（$P_0, \Omega^0_{\mathrm{h}}$） ，哈密顿守恒量（或守恒律）、哈密顿（无穷小）对称性、哈密顿（无穷小）诺特对称性、哈密顿规范对称性以及哈密顿多重动量映射等概念均有明确定义。

特别是，哈密顿多重动量映射可以通过将勒让德映射 $\mathscr{FL}_*$的推前应用到 $\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\xi)$ 来获得；或者，等价地，使用 X_ξ的 $\mathscr{FL}$-投影，并将其与勒让德映射像上的相应（预）多辛形式进行缩并

映射。当所研究的场论是正则的，计算过程很直接，哈密顿多重动量映射可表示为

$$\mathscr{FL}_*\Big(\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\xi)\Big) = \mathrm{J}_h(\mathscr{FL}_*X_\xi) = -i(\mathscr{FL}_*X_\xi)\Omega_h = p_i^\mu(\xi^i \mathrm{d}^{m-1}x_\mu - \xi^\nu \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{\mu\nu}) - H\xi^\mu \mathrm{d}^{m-1}x_\mu,$$

其中 H 是德·唐德–韦尔哈密顿函数。然而，当场论是奇异的时，通过 $\mathscr{FL}$投影向量场会出现一些重要的微妙问题（下文将详细说明）。

4.4 存在约束时的对称性

当拉格朗日量是正则的，即勒让德映射 $\mathscr{FL}$是一个（局部）微分同胚时，将拉格朗日对称性投影到哈密顿框架中是直接的。给定一个向量场 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$，它在 $J^1\pi$上生成拉格朗日诺特对称性；也就是说，$\mathrm{L}(X)\Omega_{\mathscr{L}} = 0$，则 $J^{1*}\pi$ 上的相应哈密顿对称性由勒让德映射的推前所得到的向量场 $Y = \mathscr{FL}_*X \in \mathfrak{X}(J^{1*}\pi)$生成；事实上，

$$0 = \mathrm{L}(X)\Omega_{\mathscr{L}} = \mathrm{L}(X)(\mathscr{FL}^*\Omega_{\mathrm{h}}) = \mathscr{FL}^*[\mathrm{L}(Y)\Omega_{\mathrm{h}}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{L}(Y)\Omega_{\mathrm{h}} = 0\ ,$$

其中，勒让德映射 $\mathscr{FL}_*$的推前由矩阵给出

$$\mathrm{T}\mathscr{FL} \equiv \begin{pmatrix} (\mathrm{Id})_{m\times m} & (0)_{m\times n} & (0)_{m\times nm} \\ (0)_{n\times m} & (\mathrm{Id})_{n\times n} & (0)_{n\times nm} \\ (0)_{nm\times m} & \left(\dfrac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y^B \partial y^A_\mu}\right) & \left(\dfrac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial y^B_\nu \partial y^A_\mu}\right) \end{pmatrix}\ .$$

当拉格朗日量是奇异的（特别是几乎正则的）时，主约束子流形 $P_0 = \mathrm{Im}\mathscr{FL} \subset J^{1*}\pi$由某些独立函数 $\varphi_I \in C^\infty(J^{1*}\pi)$定义。由此可得，海森矩阵的零向量为 [30]:

$$\left(\gamma^i_\mu\right)_I = \mathscr{FL}^*\frac{\partial\varphi_I}{\partial p^i_\mu}\ ,$$

并且由于 $\ker\mathscr{FL}_* \subset \mathfrak{X}^{V\ (\pi)}(J^1\pi)$，向量场 $\Gamma_I \in \ker\mathscr{FL}_*$可利用 $\ker\mathscr{FL}_*$在 $J^1\pi$上的自然坐标中的局部基写为

$$\Gamma_I = \left(\gamma^i_\mu\right)_I \frac{\partial}{\partial y^i_\mu}\ .$$

此外，由于

$$\ker\mathscr{FL}_* = \ker\Omega_{\mathscr{L}} \cap \mathfrak{X}^{\mathrm{V}(\pi_1)}(J^1E) \subset \ker\Omega_{\mathscr{L}} \cap \mathfrak{X}^{\mathrm{V}(\bar{\pi}_1)}(J^1E) = \ker\Omega_{\mathscr{L}} \cap \ker\omega,$$

因此 $\Gamma_I \in \ker\Omega_{\mathscr{L}} \cap \ker\omega$，从而生成几何规范对称性。

一般而言，拉格朗日量和哈密顿场方程分别在最终约束子流形 $\mathrm{S}_f \subseteq J^1\pi$和 $P_f \subseteq P_o \subset J^{1*}\pi$ 上有相容解，其中 $\mathscr{FL}(\mathrm{S}f) = P_f$。此外，在 $J^1\pi$上生成诺特对称性的向量场 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$必须与 $\mathrm{S}f$ 相切，以保持所研究场论的完整约束结构；通过确保 $\mathrm{L}(X)\Omega_{\mathscr{L}} = 0$ （至少在 $\mathrm{S}f$上），即可保证 X 与 S_f 相切。

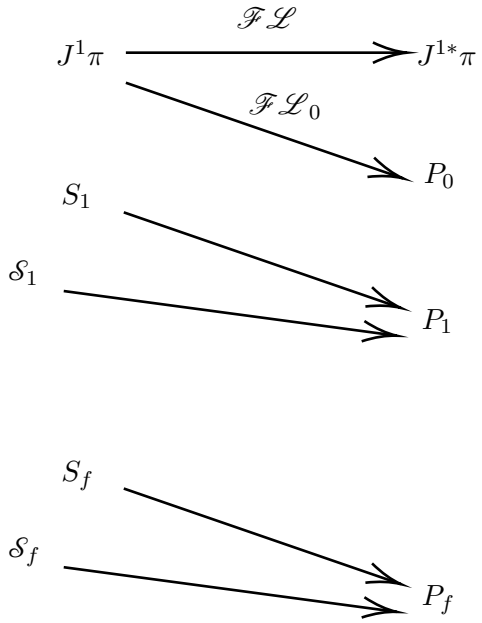
如果 X可从 $J^1\pi$投影到 $\mathscr{FL}$，那么，按照正则情形的类似推导，在 P_0上生成哈密顿诺特对称性的向量场由 $Y_0 = (\mathscr{FL}_0)_*X \in \mathfrak{X}(P_0)$ 给出，因此，

$$0 = \mathrm{L}(X)\Omega_{\mathscr{L}} = \mathrm{L}(X)(\mathscr{FL}_0^*\Omega_{\mathrm{h}}^0) = \mathscr{FL}_0^*[\mathrm{L}(Y_0)\Omega_{\mathrm{h}}^0] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{L}(Y_0)\Omega_{\mathrm{h}} = 0\ ,$$

因为 $\mathscr{FL}$是沉浸。此外，由于 $\mathscr{FL}(\mathsf{S}f) = P_f$， X与拉格朗日最终约束子流形 Sf 相切，保证了 Y_0 与哈密顿最终约束子流形 P_f相切，正如所需。

然而，流形 $J^1\pi$ 上的向量场并非总是能够经由 $\mathscr{FL}_0$ 投影到 P_0 上。众所周知，充要条件是对每个 $Y \in \in \ker \mathscr{FL}_*$，都有 $[X,Y] \subset \in \ker \mathscr{FL}_*$。回顾一下，函数 $f \in C^\infty(J^1\pi)$ 是 $\mathscr{FL}$-可投影的，当且仅当 $\mathbf{L}(\Gamma_I)f = 0$。由此可知，局部而言，向量场 $X \in J^1\pi$ 可以分解为 $X = X^o + Y$，其中 $Y \in \in \ker \mathscr{FL}_*$；于是， X 是 $\mathscr{FL}$-可投影的，当且仅当 X^o 的分量函数是定义在 $J^1\pi$ 上的 $\mathscr{FL}$-可投影函数。此外，有时由于 X^o 的某些分量依赖于定义 $J^1\pi$ 上拉格朗日约束的函数，流形 $J^1\pi$ 上的向量场并非 $\mathscr{FL}$-可投影的。此时，自然可以将这样的向量场从由上述不可投影约束函数定义的约束子流形投影到 $J^{1*}\pi$ 。还需注意， SOPDE 拉格朗日约束并非 $\mathscr{FL}$-可投影的（例如参见 [1]）。

下面的（交换）图展示了从 $J^1\pi$ 的拉格朗日约束子流形到 $J^{1*}\pi$ 的哈密顿约束子流形的投影：



在图的左侧，拉格朗日约束算法从相容性约束（如果存在）开始，这些约束定义了约束子流形 S_1。算法的下一步是施加 SOPDE 条件，这可能会产生额外的约束，从而定义约束子流形 S_1。算法的其余步骤是，对满足场方程的多向量场施加相切性要求，使其与每个出现的约束子流形相切；这可能会产生额外的约束子流形，直到施加相切性要求不再产生新的约束（此时约束算法终止）。如果算法的第二阶段没有出现 SOPDE 约束，那么相切性约束子流形为 S_2，.....，S_f；如果算法的第二阶段确实出现了 SOPDE 约束，那么相切性约束子流形为 S_2, ...，Sf。

在图的右侧， P_0 是由勒让德映射 $\mathscr{FL}$ 产生的初级约束子流形，而 P_1 由相容约束（若存在）定义，P_2，...， P_f 则是由相切条件产生的约束子流形。由于 SOPDE约束不可 $\mathscr{FL}$投影，拉格朗日约束子流形 S_i 和 S_i 落在

经勒让德映射作用后得到相同的哈密顿约束子流形 P_i 。

如前所述，在 $J^1\pi$ 上产生诺特对称性的向量场，可能仅从某些拉格朗日约束子流形 S_i （或 S_i） $\mathscr{FL}$-可投影。如果是这种情况，勒让德映射的推前所产生的向量场就是相应哈密顿约束子流形 P_i 上的向量场。此外，诺特对称性可能仅存在于某一个拉格朗日约束子流形 S_i （或 S_i）上。如果是这种情况，那么在哈密顿侧，诺特对称性仅存在于相应的约束子流形 P_i 上。预多辛约束存在时对称性的各种表现情形列举如下：

1. 存在某个 $X \in \mathfrak{X}$（$J^1\pi$），使得 $L(X)\Omega_{\mathscr{L}} = 0$，且仅从约束子流形 $\mathsf{S}_f \hookrightarrow J^1\pi$ $\mathscr{FL}$-可投影。那么，在相应的哈密顿约束子流形 $P_f \subset P_0$ 上，存在向量场 $Y = \mathscr{FL}_* X|_{\mathcal{S}_f} \in \mathfrak{X}(P_f)$，使得 $L(Y)\Omega_h^0|_{P_f} = 0$。此外，向量场 $X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 可能是某个 $Z|_{\mathcal{S}_f}$ 到 $J^1\pi$ 的局部延拓，也可能不是；其中 $Z \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 。

2. 存在某个 $X \in \mathfrak{X}(\mathsf{S}f)$，使得 $L(X)\Omega_{\mathscr{L}}|_{\mathcal{S}_f} = 0$，且 X 仅从 $\mathsf{S}f$ 是 $\mathscr{FL}$-可投影的。于是，在相应的哈密顿约束子流形 $\overline{P_f \subset P_0}$ 上，存在向量场 $Y|_{P_f} = \mathscr{FL}_* X|_{\mathcal{S}_f} \in \mathfrak{X}(P_f)|_{P_f}$，使得 $L(Y)\Omega_{\mathrm{h}}^0|_{P_f} = 0$。此外，可以将 Y 局部延拓至 P_0，记作 $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(P_0)$；但是，对于某个 $Z \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$，$X \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 未必是某个 $Z|_{\mathcal{S}_f}$ 到 $J^1\pi$ 的局部延拓。

在以下各节中，我们将通过若干场论实例进行阐述。这些场论在存在约束时所呈现的对称结构，体现了上述情形中的一些特殊情况。

5 若干实例

在接下来的各节中，我们将概述理论物理中若干不同且已知的经典场论的规范对称性和诺特对称性，以及它们相应的守恒量（由对应的多重动量映射给出）的主要结果。关于第 5.1、5.4 和 5.5 节所研究系统的细节和计算，参见 [30]。

5.1 玻色弦理论

现在，时空 M 是一个光滑的（$d+1$）维流形，配备了时空度规 $G_{\mu\nu}$，其符号为（$-+\cdots+$）。弦世界面 Σ 是一个光滑的二维流形，具有局部坐标 σ^a ，其中 $a = 0, 1$。场 $x^\mu(\sigma)$ 是 Σ 上的标量场，由嵌入映射 $X:\ \Sigma \to M:\ \sigma^a \mapsto x^\mu(\sigma)$ 给出（关于弦理论的全面介绍与讨论，见 [5] ）；因此， Σ 上的构型丛 E 是 $E = \Sigma \times M$，其自然投影为 $\pi:\ E \to \Sigma$，其截面为 $\phi:\ \Sigma \to \Sigma \times M:\ \sigma^a \mapsto (\sigma^a, x^\mu(\sigma))$。拉格朗日量相丛和哈密顿相丛 $J^1\pi$ 和 $J^1\pi^*$ 分别具有局部坐标（σ^a, x^μ, x^μ_a）和（σ^a, x^μ, p^a_μ），而射流延拓为 $j^1\phi:\ \Sigma \times M \to J^1\pi:\ \sigma^a \mapsto \left(\sigma^a, x^\mu(\sigma), \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^a}(\sigma)\right)$。

玻色弦理论由标准的南部-后藤拉格朗日密度描述

$$\mathscr{L} = L(\sigma^a, x^\mu, x^\mu_a)\mathrm{d}^2\sigma = -T\sqrt{-\det g}\ \mathrm{d}^2\sigma = -T\sqrt{-\det(G_{\mu\nu}x^\mu_a x^\nu_b)}\ \mathrm{d}^2\sigma\ ,$$

其中 T 称为弦张力。由多重海森矩阵的正则性可直接看出，该拉格朗日量是正则的

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_a^\mu \partial x_b^\nu} = -T\sqrt{-\mathrm{det}g}\left[G_{\mu\nu}g^{ba} - G_{\mu\alpha}G_{\rho\nu}x_c^\alpha x_i^\rho\left(g^{ba}g^{ci}+g^{cb}g^{ai}-g^{ca}g^{bi}\right)\right] \ , \tag{21}$$

其中 $g^{ba} \equiv (g^{-1})^{ba} = \underline{1}\ \underline{\mathrm{det}}g^{\epsilon^{bc}\epsilon^{ad}g_{dc}}$。在 $J^1\pi$ 上，拉格朗日能量函数和庞加莱–嘉当形式为

$$\begin{aligned}
E_{\mathscr{L}} &= \frac{\partial L}{\partial x_a^\mu}x_a^\mu - L = -T\sqrt{-\mathrm{det}g}\ (g^{ba}g_{ab}-1) = -T\sqrt{-\mathrm{det}g}\ , \\
\Theta_{\mathscr{L}} &= \frac{\partial L}{\partial x_a^\mu}\ \mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a - E_{\mathscr{L}}\wedge\mathrm{d}^2\sigma = -T\sqrt{-\mathrm{det}g}\left[G_{\mu\nu}g^{ba}x_b^\nu\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a - \mathrm{d}^2\sigma\right]\ , \\
\Omega_{\mathscr{L}} &= T\Bigg\{\sqrt{-\mathrm{det}g}\left[G_{\mu\nu}g^{ba}-G_{\mu\alpha}G_{\beta\nu}x_c^\alpha x_i^\beta\left(g^{ba}g^{ci}+g^{cb}g^{ai}-g^{ca}g^{bi}\right)\right]\mathrm{d}x_\nu^b\wedge\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\sqrt{-\mathrm{det}g}\,G_{\mu\nu}g^{ba}x_b^\nu\right)\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a \\
&\quad -\sqrt{-\mathrm{det}g}\left[G_{\mu\nu}g^{ba}-G_{\mu\alpha}G_{\beta\nu}x_c^\alpha x_i^\beta\left(g^{ba}g^{ci}+g^{cb}g^{ai}-g^{ca}g^{bi}\right)\right]x_a^\mu\mathrm{d}x_b^\nu\wedge\mathrm{d}^2\sigma \\
&\quad -\left[\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\left(\sqrt{-\mathrm{det}g}\,G_{\mu\nu}g^{ba}x_b^\nu\right)+\frac{1}{2}\sqrt{-\mathrm{det}g}\,g^{ba}x_a^\alpha x_b^\beta\partial_\mu G_{\alpha\beta}\right]\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^2\sigma\Bigg\} \ .
\end{aligned}$$

记 $h_{ab} = (j^1\phi)^* g_{ab}$，则相应的欧拉–拉格朗日方程为

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{-\mathrm{det}h}\,h^{ba}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma^a}\frac{\partial x^\beta}{\partial\sigma^b}\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\left(\sqrt{-\mathrm{det}h}\,G_{\mu\nu}h^{ba}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^b}\right)+\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\sqrt{-\mathrm{det}h}\,G_{\mu\nu}h^{ba}\frac{\partial x^\nu}{\partial\sigma^b}\right)\frac{\partial x^\rho}{\partial\sigma^a} \\
&+\sqrt{-\mathrm{det}h}\left[G_{\mu\nu}h^{ba}-G_{\mu\alpha}G_{\beta\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\sigma^c}\frac{\partial x^\beta}{\partial\sigma^i}\left(h^{ba}h^{ci}+h^{cb}h^{ai}-h^{ca}h^{bi}\right)\right]\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial\sigma^a\partial\sigma^b} = 0 \ .
\end{aligned}$$

勒让德映射 $\mathscr{FL}$: $J^1\pi\to J^1\pi^*$给出

$$\mathscr{FL}^*\sigma^a = \sigma^a \quad , \quad \mathscr{FL}^* x^\mu = x^\mu \quad , \quad \mathscr{FL}^* p_\mu^a = -T\sqrt{-\mathrm{det}g}\ G_{\mu\nu}g^{ba}x_b^\nu \ ,$$

由于广义赫森矩阵 (21) 的正则性，该映射可逆。利用

$$\Pi^{ab} \equiv G^{\mu\nu}p_\mu^a p_\nu^b \ \Rightarrow\ \mathscr{FL}^*\Pi^{ab} = -T^2\mathrm{det}g\ g^{ba} \iff \mathscr{FL}^*\mathrm{det}\Pi = (-T^2\mathrm{det}g)^2\mathrm{det}(g^{-1}) = T^4\mathrm{det}g \ ,$$

并且 $\Pi_{ab} = \underline{1}\ \underline{\mathrm{det}\Pi}^{\epsilon_{cb}\epsilon_{da}\Pi^{cd}}$，可得

$$(\mathscr{FL}^{-1})^* x_b^\nu = -\frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}\ G^{\mu\nu}\Pi_{ab}p_\mu^a \ ,$$

因此，德·唐德–韦尔哈密顿函数为

$$H(\sigma^a, x^\mu, p_\mu^a) \equiv p_\mu^a(\mathscr{FL}^{-1})^* x_a^\mu - (\mathscr{FL}^{-1})^* L = -\frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi} \in C^\infty(J^1\pi^*) \ .$$

那么， $J^{1*}\pi$ 上的哈密顿–嘉当形式为

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{h}} &= p_\mu^a\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a - H\wedge\mathrm{d}^2\sigma = p_\mu^a\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a + \frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}\ \mathrm{d}^2\sigma \ , \\
\Omega_{\mathrm{h}} &= -\mathrm{d}p_\mu^a\wedge\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a + \mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}^2\sigma \\
&= -\mathrm{d}p_\mu^a\wedge\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}^1\sigma_a - \frac{\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}}{T}\Pi_{ba}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu G^{\rho\sigma}p_\rho^a p_\sigma^b\mathrm{d}x^\mu + G^{\mu\nu}p_\nu^b\mathrm{d}p_\mu^a\right)\wedge\mathrm{d}^2\sigma \ .
\end{aligned}$$

场方程即哈密顿–德唐德–韦尔方程，其形式为

$$\frac{\partial p^a_\mu}{\partial\sigma^a}-\frac{\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}}{2T}\Pi_{ba}\partial_\mu G^{\rho\sigma}p^a_\rho p^b_\sigma=0\quad,\quad\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma^a}+\frac{\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}}{T}\Pi_{ba}G^{\mu\nu}p^b_\nu=0\ .$$

世界面微分同胚由变换 $\sigma^a+\xi^a(\sigma)$ 产生；因此，生成世界面微分同胚的向量场 $\xi\in\mathfrak{X}(\Sigma)$ 为

$$\xi=-\xi^a\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\in\mathfrak{X}(\Sigma)\ .$$

于是， $\xi\in\mathfrak{X}(\Sigma)$ 可以从 Σ 提升到平凡丛 $E=\Sigma\times M$，并从 E 提升到 $J^1\pi$，形式为

$$\xi_E=-\xi^a\frac{\partial}{\partial\sigma^a}\in\mathfrak{X}(E)\quad,\quad X_\xi=-\xi^a\frac{\partial}{\partial\sigma^a}+x^\mu_b\frac{\partial\xi^b}{\partial\sigma^a}\frac{\partial}{\partial x^\mu_a}\ \in\mathfrak{X}(J^1\pi)\ .$$

由此可知，关于 ξ 对局部截面 $\phi\colon\Sigma\to E$ 取广义李导数 (8) 得到的场变分为 $\delta X^\mu(\sigma)=-\xi^a\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^a}$。

此外，

$$\mathrm{L}(X_\xi)\mathscr{L}=0\ \Rightarrow\ \mathrm{L}(X_\xi)\Theta_{\mathscr{L}}=0\ ,$$

因此， $J^1\pi$ 上的多重动量映射为

$$\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\xi)=-i(X_\xi)\Theta_{\mathscr{L}}=-T\sqrt{-\mathrm{det}g}\left(\epsilon_{ac}\xi^cG_{\mu\nu}g^{ba}x^\nu_b\mathrm{d}x^\mu+\xi^a\mathrm{d}^1\sigma_a\right)\ \in\Omega^1(J^1\pi)\ .$$

在 $J^{1*}\pi$ 上生成世界面微分同胚的向量场 $Y_\xi=\mathscr{FL}_*X_\xi\in\mathfrak{X}(J^1\pi^*)$ 具有如下形式

$$Y_\xi=-\xi^a\frac{\partial}{\partial\sigma^a}-\frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}\ G^{\mu\nu}\Pi_{bc}p^b_\nu\frac{\partial\xi^c}{\partial\sigma_a}\frac{\partial}{\partial p^\mu_a}\ ,$$

相应的多重动量映射为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{h}}(Y_\xi)=-i(Y_\xi)\Theta_{\mathrm{h}}=\epsilon_{ac}\xi^cp^a_\mu\mathrm{d}x^\mu-\frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}\ \xi^a\mathrm{d}^1\sigma_a\in\Omega^1(J^{1*}\pi)\ .$$

O另一方面，时空微分同胚由向量场生成

$$\zeta=-\zeta^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in(M)\ .$$

其从 M 到 E 以及从 E 到 $J^1\pi$ 的典范提升为

$$\zeta_E=-\zeta^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in\mathfrak{X}(E)\quad,\quad X_\zeta=-\zeta^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-x^\nu_a\partial_\nu\zeta^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu_a}\in\mathfrak{X}(J^1\pi)\ .$$

那么，当 ζ 是 M上的Killing向量场时，可得

$$\mathrm{L}(X_\zeta)\mathscr{L}=\frac{T}{2}\sqrt{-\mathrm{det}g}\ g^{ba}x^\nu_bx^\mu_a\,\mathrm{L}(\zeta)G_{\mu\nu}\mathrm{d}^2\sigma\zeta_E=-\zeta^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\in E=0\ \Rightarrow\ \mathrm{L}(X_\zeta)\Theta_{\mathscr{L}}=0\ ,$$

这意味着时空等距变换会产生正合多辛同胚。因此， $J^1\pi$ 上的多重动量映射为

$$\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\zeta)=-i(X_\zeta)\Theta_{\mathscr{L}}=T\sqrt{-\mathrm{det}g}\ G_{\mu\nu}G^{ba}x^\nu_b\xi^\mu\mathrm{d}^1\sigma_a\in\Omega^1(J^1\pi)\ .$$

此外， $J^{1*}\pi$ 上的正合多辛同胚由以下对象生成

$$Y_\zeta=\mathscr{FL}_*X_\zeta=-\xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{1}{T}\sqrt{-\mathrm{det}\Pi}\,G^{\mu\nu}\Pi_{ba}\,p^b_\mu\,\frac{\partial\xi_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial p^a_\mu}\in\mathfrak{X}(J^{1*}\pi)\ ,$$

相应的多重动量映射为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{h}}(Y_\zeta)=-i(Y_\zeta)\Theta_{\mathrm{h}}=-p^a_\mu\,\zeta^\mu\,\mathrm{d}^1\sigma_a\in\Omega^1(J^{1*}\pi)\ .$$

5.2 杨–米尔斯理论

规范群为非阿贝尔群 $SU(N)$ 的杨–米尔斯理论定义在一个 4 维闵可夫斯基时空流形 M 上，该流形配备了签名为 $(-+++)$ 的闵可夫斯基度量 $\eta_{\mu\nu}$。规范联络记为 $A_\mu = A^a_\mu t_a$，其中 t_a 是相应李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(N)$ 的生成元（取某种矩阵表示）。这些生成元满足 $[t_b, t_c] = f^a_{bc} t_a$ $(a = 1, \ldots, \dim G)$；其中 f^a_{bc} 为结构常数。接着，$J^1\pi$ 的局部坐标为 $(x^\mu, A^a_\nu, A^a_{\mu\nu})$，而在 $J^{1*}\pi$ 上则为 $(x^\mu, A^a_\nu, \pi^{\mu\nu}_a)$。拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = L\,\mathrm{d}^4x = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \in \Omega^4(J^1\pi)\ ,$$

其中，$F^a_{\mu\nu} = A^a_{\mu\nu} - A^a_{\nu\mu} - f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu$ 在经 $j^1\phi$ 拉回后给出非阿贝尔场强曲率张量。杨–米尔斯拉格朗日量是奇异的，因为多重海森矩阵是奇异的：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial A^a_{\mu\nu}\partial A^b_{\rho\sigma}} = \delta_{ab}\left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right)\ .$$

采用如下记法，将二阶张量分量分解为对称部分 $V_{(\mu\nu)}$ 和反对称部分 $V_{[\mu\nu]}$，即 $V_{\mu\nu} = V_{(\mu\nu)} + V_{[\mu\nu]}$，显然，上述海森矩阵的相关零向量构成对称时空矩阵的集合 $\left\{V_{\mu\nu} = V_{(\mu\nu)}\right\}$。

拉格朗　　朗日能量函数 $E_{\mathscr{L}} \in C^\infty(J^1\pi)$ 以及 $J^1\pi$a 上的庞加莱–嘉当形式　　re

$$\begin{aligned}
E_{\mathscr{L}} &= -F^{\mu\nu}_a A^a_{\mu\nu} + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu}\ .\\
\Theta_{\mathscr{L}} &= -F^{\mu\nu}_a \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu + \left(F^{\mu\nu}_a A^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu}\right)\mathrm{d}^4x\ ,\\
\Omega_{\mathscr{L}} &= -\left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right)\left(\mathrm{d}A_{a\rho\sigma} + f_{abc}A^b_\sigma \mathrm{d}A^c_\rho\right)\wedge \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu - f^a_{bc}F^{\mu\nu}_a A^b_\mu \mathrm{d}A^c_\nu \wedge \mathrm{d}^4x\\
&\quad + \left(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\right)A^{\rho\sigma}_a\left(\mathrm{d}A^a_{\mu\nu}\wedge \mathrm{d}^4x + f^a_{bc}A^b_\mu \mathrm{d}A^c_\nu \wedge \mathrm{d}^4x\right)\ .
\end{aligned}$$

由此得到的场方程即欧拉–拉格朗日方程，

$$D^a_{\mu b}F^{\mu\nu}_a = 0$$

其中 $D^a_{\mu b} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} - f^a_{cb}A^c_\mu\right)$。

勒让德映射 $\mathscr{FL}$：$J^1\pi \to J^{1*}\pi$ 几乎正则，其像是初级约束子流形 $P_0 \subset J^{1*}\pi$，由下式定义：

$$\mathscr{FL}_*\pi^{\mu\nu}_a = -F^{\mu\nu}_a\ . \tag{23}$$

由此可知，作为 $F^{\mu\nu}_a = F^{[\mu\nu]}_a$，$\mathscr{FL}$ 的像给出了 $\pi^{(\mu\nu)} = 0$。哈密顿–嘉当形式为

$$\begin{aligned}
\Theta^0_{\mathrm{h}} &= \pi^{[\mu\nu]}_a \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu - \left(\frac{1}{2}f^a_{bc}\pi^{[\mu\nu]}_a A^b_\mu A^c_\nu - \frac{1}{4}\pi^{[\mu\nu]}_a \pi^a_{[\mu\nu]}\right)\mathrm{d}^4x\ ,\\
\Omega^0_{\mathrm{h}} &= -\mathrm{d}\pi^{[\mu\nu]}_a \wedge \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^3x_\mu + \left[\frac{1}{2}\left(f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu - \pi^a_{[\mu\nu]}\right)\mathrm{d}\pi^{[\mu\nu]}_a + f^a_{bc}\pi^{[\mu\nu]}_a A^b_\mu \mathrm{d}A^c_\nu\right]\wedge \mathrm{d}^4x\ .
\end{aligned}$$

除了初级约束（23）之外，不存在其他哈密顿约束，因此 $P_f = P_0$。该理论的（哈密顿）–De Donder–Weyl场方程为

$$D^a_{\mu b}\pi^{[\mu\nu]}_a = 0 \quad , \quad \frac{\partial A^a_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\left(\pi^a_{\mu\nu} - f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\right) = 0\ .$$

$SU(N)$规范场的变换形式为

$$\delta A_\mu = \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} + [A_\mu, \chi] \equiv D_\mu \chi \quad , \quad \delta A^a_\mu = \delta^a{}_b \frac{\partial \chi^b}{\partial x^\mu} - f^a_{cb} \chi^b A^c_\mu \equiv D^a_{\mu b} \chi^b \ ,$$

在 E上生成 $SU(N)$变换的向量场为

$$X^E_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\nu} \in \mathfrak{X}(E) \ ,$$

X^E_χ到 $J^1\pi$ 的典范提升为

$$X_\chi = j^1 X^E_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} - \left(\frac{\partial D^a_{\nu b} \chi^b}{\partial x^\mu} - f^a_{cb} A^c_{\mu\nu} \chi^b \right) \frac{\partial}{\partial A^a_{\mu\nu}} \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ ,$$

而 $\mathscr{FL}$向 $P_0 \subset J^{1*}\pi$, $Y_\chi = \mathscr{FL}_* X_\chi \in \mathfrak{X}(P_0)$的投影为

$$Y_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} - \left[\frac{\partial D^a_{\nu b} \chi^b}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} f^a_{cb} \chi^b \left(\pi^c_{[\mu\nu]} - f^c_{de} \chi^b A^d_\mu A^e_\nu \right) \right] \left(\delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha} - \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} \right) \frac{\partial}{\partial \pi^{[\alpha\beta]}_a} \ .$$

相应的多重动量映射为

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\chi) &= -i(X_\chi)\Theta_{\mathscr{L}} = -F^{\mu\nu}_a D^a_{\nu b} \chi^b \mathrm{d}^3 x_\mu \in \Omega^3(J^1\pi) \ , \\ \mathrm{J}^0_{\mathrm{h}}(Y_\chi) &= -i(Y_\chi)\Theta^0_{\mathrm{h}} = \pi^{[\mu\nu]}_a D^a_{\nu b} \chi^b \mathrm{d}^3 x_\mu \in \Omega^3(P_0) \ . \end{aligned}$$

杨-米尔斯理论也将时空等距变换视为诺特对称性。这种对称性的无穷小形式，首先将基灵矢量提升到构型丛上；此处的基灵矢量对应于闵可夫斯基度量， $\xi = -\xi^\mu(x) \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\xi_E = -\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} \in \mathfrak{X}(E) \ .$$

因此，到多速度相空间 $J^1\pi$ 的典范提升为

$$X_\xi = j^1 \xi_E = -\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} + \left(A^a_{\nu\mu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} + A^a_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A^a_{\rho\mu}} \ ,$$

相应的多重动量映射 $J^1\pi$ 为

$$\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(X_\xi) = -i(X_\xi)\Theta_{\mathscr{L}} = F^{\mu\nu}_a A^a_\rho \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu} \mathrm{d}^3 x_\mu + F^{\mu\nu}_a \xi^\rho \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^2 x_{\mu\rho} + \left(F^{\mu\nu}_a A^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \right) \xi^\rho \mathrm{d}^3 x_\rho \ .$$

X_ξ 的 $\mathscr{FL}$ 投影为

$$\begin{aligned} Y_\xi &= \mathscr{FL}_* X_\xi = -\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} \\ &\quad + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\rho} \left[\left(\pi_{b[\mu\nu]} - f_{bcd} A^c_\mu A^d_\nu \right) \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} + \left(\pi_{b[\nu\rho]} - f_{bcd} A^c_\nu A^d_\rho \right) \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \right] \frac{\partial}{\partial \pi^{[\alpha\beta]}_b} \ , \end{aligned}$$

而在 $P_0 \subset J^1\pi^*$ 上得到的多重动量映射为

$$\mathrm{J}^0_h(Y_\xi) = -\pi^{[\mu\nu]}_a A^a_\rho \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\nu} \mathrm{d}^3 x_\mu - \pi^{[\mu\nu]}_a \xi^\rho \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^2 x_{\mu\rho} - \left(\pi^{[\mu\nu]}_a A^a_{\mu\nu} + \frac{1}{4} \pi^a_{[\mu\nu]} \pi^{[\mu\nu]}_a \right) \xi^\rho \mathrm{d}^3 x_\rho \ .$$

5.3 陈-西蒙斯理论

关于阿贝尔规范群 $U(1)$ 下陈-西蒙斯理论的多辛处理，参见 [32]。考虑定义在 $2+1$ 维空间中的陈-西蒙斯理论，其规范群为 $G=SU(N)$，维数为 $G=N^2-1$。规范联络记为 $A_\mu=A_\mu^a t_a$，其中 t_a 是相应李代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(N)$ 的生成元（采用某种矩阵表示）。这些生成元满足 $[t_b,t_c]=f_{bc}^a t_a$, $a=1,...,$ 维数为 G，其中 f_{bc}^a 是结构常数。于是， $J^1\pi$ 的局部坐标为 $(x^\mu,A_\nu^a,A_{\mu\nu}^b)$。现在，令 $A=A_\mu \mathrm{d}x^\mu\in\Omega^1(J^1\pi)$ 和 $F=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\in\Omega^2(J^1\pi)$，其中 $F_{\mu\nu}\equiv 2A_{[\mu\nu]}+\frac{1}{2}[A_\mu,A_\nu]$；因此陈-西蒙斯拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=L(x^\mu,A_\nu,A_{\mu\nu})\mathrm{d}^3x=\mathrm{Tr}\left[F\wedge A-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right]=\epsilon^{\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}\left[A_{\mu\nu}A_\rho+\frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right]\mathrm{d}^3x\\ =\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aA_\rho^b+\frac{1}{6}f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^cA_\rho^d\right)\mathrm{d}^3x=-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}\left(A_{\mu\nu}^aA_\rho^b+\frac{2}{3}f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^cA_\rho^d\right)\mathrm{d}^3x\ ,\end{aligned}$$

其中，上述迹在李代数上是伴随不变的，因此可以通过 $\mathfrak{g}$上的嘉当-基林度量 $g_{ab}=-2\mathrm{Tr}(t_at_b)$来计算。该理论是奇异的，因为海森矩阵

$$\frac{\partial^2 L}{\partial A_{\mu\nu}^a\partial A_{\rho\sigma}^b}=0\ .$$

拉格朗日能量和庞加莱-嘉当形式由下式给出

$$\begin{aligned}E_{\mathscr{L}}&\equiv\frac{\partial L}{\partial A_{\mu\nu}^a}A_{\mu\nu}^a-L=\frac{1}{3}\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^cA_\rho^d\in C^\infty(J^1\pi)\ ,\\ \Theta_{\mathscr{L}}&=-\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}\left[\frac{1}{2}A_\rho^b\mathrm{d}A_\nu^a\wedge\mathrm{d}^2x_\mu+\frac{1}{3}f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^cA_\rho^d\mathrm{d}^3x\right]\ ,\\ \Omega_{\mathscr{L}}&=\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}\left[\frac{1}{2}\mathrm{d}A_\rho^b\wedge\mathrm{d}A_\nu^a\wedge\mathrm{d}^2x_\mu+f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^c\mathrm{d}A_\rho^d\wedge\mathrm{d}^3x\right]\ .\end{aligned}$$

该理论中的拉格朗日约束源于对满足拉格朗日场方程的多重向量场解施加 SOPDE条件，从而得到以下约束

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(g_{ab}A_{\mu\nu}^b+g_{db}f_{ca}^bA_\mu^dA_\nu^c\right)=0\ ,$$

它定义了子流形$\mathsf{S}_f\subset J^1\pi$。该子流形上的相切条件不会产生新的约束。

多重动量相空间 $J^{1*}\pi$具有局部坐标 $(x^\mu,A_\nu^a,\pi_a^{\mu\nu})$，勒让德映射 $\mathscr{F}\mathscr{L}$: $J^1\pi\to J^1\pi^*$: $(x^\mu,A_\nu^a,A_{\mu\nu}^a)\mapsto(x^\mu,A_\nu^a,\pi_a^{\mu\nu})$ 满足

$$\mathscr{F}\mathscr{L}^*\pi_a^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu\nu}^a}=-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}A_\rho^b\ ,$$

这意味着 $\mathscr{F}\mathscr{L}$的像是由以下约束定义的子流形 $P_0\subset J^{1*}\pi$

$$\pi_a^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}A_\rho^b=0\ .$$

因此， P_0上的局部坐标为（x^μ,A_ν^a）。德·唐德–韦尔哈密顿函数为

$$H_0(x^\mu,A_\nu)=\frac{1}{3}\epsilon^{\mu\nu\rho}g_{ab}f_{cd}^bA_\mu^aA_\nu^cA_\rho^d\in C^\infty(P_0)\ ,$$

P_0 上的Hamilton-Cartan形式为

$$\Theta^0_{\rm h} = -\epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab} \left[\frac{1}{2} A^b_\rho {\rm d}A^a_\nu \wedge {\rm d}^2 x_\mu + \frac{1}{3} f^b_{cd} A^a_\mu A^c_\nu . x; p03 A^d_\rho {\rm d}^3 x \right] \ ,$$
$$\Omega^0_{\rm h} = \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab} \left[\frac{1}{2} {\rm d}A^b_\rho \wedge {\rm d}A^a_\nu \wedge {\rm d}^2 x_\mu + f^b_{cd} A^a_\mu A^c_\nu {\rm d}A^d_\rho \wedge {\rm d}^3 x \right] \ .$$

除初级约束和 $\mathscr{FL}$(Sf) $=P_0$ 外，不存在其他哈密顿约束。拉格朗日框架和哈密顿框架下的场方程为

$$\epsilon^{\mu\nu\nu} g_{ab} \left(\partial_\mu A^b_\nu + f^b_{dc} A^d_\mu A^c_\nu \right) = 0 \ \Rightarrow \ F^b_{\mu\nu} = 0 \ \Rightarrow \ F_{\mu\nu} = 0 \ .$$

陈-西蒙斯理论的规范对称群 $SU(N)$ 产生无穷小变换

$$\delta A_\mu = D_\mu \chi = \partial_\mu \chi + [A_\mu, \chi] \quad , \quad \delta A^a_\mu = D^a_{\mu b} \chi^b = \delta^a{}_b \partial_\mu \chi^b - f^a_{cb} \chi^b A^c_\mu \ ,$$

其中 $\chi = \chi^a t_a \in {\rm C}^\infty(M)$。在 E 上生成 $SU(N)$ 变换的向量场为

$$X^E_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\nu} \in \mathfrak{X}(E) \ ,$$

其到 $J^1\pi$ 的典范提升为

$$X_\chi = j^1 X^E_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} - \left(\frac{\partial D^a_{\nu b} \chi^b}{\partial x^\mu} - f^a_{cb} A^c_{\mu\nu} \chi^b \right) \frac{\partial}{\partial A^a_{\mu\nu}} \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ .$$

其到 $P_0 \subset J^{1*}\pi$ 的 $\mathscr{FL}$-投影为

$$Y_\chi = \mathscr{FL}_* X_\chi = -D^a_{\mu b} \chi^b \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} \in \mathfrak{X}(P_0) \ .$$

最后，相应的多动量映射为

$$\begin{aligned} {\rm J}_{\mathscr{L}}(X_\chi) &= -i(X_\chi)\Theta_{\mathscr{L}} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab} A^b_\rho D^a_{\nu b} \chi^b {\rm d}^2 x_\mu \in \Omega^2(J^1\pi) \ , \\ {\rm J}^0_{\rm h}(Y_\chi) &= -i(Y_\chi)\Theta^0_h = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab} A^b_\rho D^a_{\nu b} \chi^b {\rm d}^2 x_\mu \in \Omega^2(J^1\pi) \in \Omega^2(P_0) \ . \end{aligned}$$

与杨–米尔斯理论完全相同，作为等距变换的时空微分同胚是由 Killing向量场 $\xi = -\xi^\mu(x) \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ 生成的诺特对称性。到构型丛 E 上的典范提升为

$$\xi_E = -\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial A^a_\nu} \in \mathfrak{X}(E) \ ,$$

它还可以再次提升到 $J^1\pi$，从而得到

$$X_\xi = j^1 \xi_E = -\xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial A^a_\mu} + \left(A^a_{\nu\mu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} + A^a_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial A^a_{\rho\mu}} \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ ,$$

与之前一样。相应的多重动量映射 ${\rm J}_{\mathscr{L}}(X_\xi) \in \Omega^2(J^1\pi)$ 为

$$\begin{aligned} {\rm J}_{\mathscr{L}}(X_\xi) &= -i(X_\xi)\Theta_{\mathscr{L}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab} \left[\frac{1}{2} A^b_\rho \left(A^a_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} {\rm d}^2 x_\mu + \xi^\sigma {\rm d}A^a_\nu \wedge {\rm d}^1 x_{\mu\sigma} \right) - \frac{1}{3} f^b_{cd} \xi^\sigma A^a_\mu A^c_\nu A^d_\rho {\rm d}^2 x_\sigma \right] \ . \end{aligned}$$

此外， $X_\xi \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ 到 $P_0 \subset J^1\pi^*$ 的投影为

$$Y_\xi = \mathscr{F}\mathscr{L}_* X_\xi = -\xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + A^a_\nu \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial A^a_\mu} \in \mathfrak{X}(P_0) \ .$$

所得的多重动量映射 $\mathrm{J}^0_{\mathrm{h}}(Y_\xi) \in \Omega^2(P_0)$ 为

$$\begin{aligned} \mathrm{J}^0_{\mathrm{h}}(Y_\xi) &= -i(Y_\xi)\Theta^0_{\mathrm{h}} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{ab}\left[\frac{1}{2}A^b_\rho\left(A^a_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu}\mathrm{d}^2x_\mu + \xi^\sigma \mathrm{d}A^a_\nu \wedge \mathrm{d}^1 x_{\mu\sigma}\right) - \frac{1}{3}f^b_{cd}\xi^\sigma A^a_\mu A^c_\nu A^d_\rho \mathrm{d}^2 x_\sigma\right] \ . \end{aligned}$$

5.4 电卡罗尔标量场论

考虑两个标量场 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$，它们是构型丛 $\pi\colon E \to M\colon(\phi,\pi) \mapsto x^\mu$ 的局部截面 $\phi : M \to E :$ $x^\mu \mapsto (x^\mu, \phi(x)\ \pi(x))$，其中 M 是一个具有闵可夫斯基度量 $\eta_{\mu\nu}$ 的 m 维时空流形。现在，对以下拉格朗日量取电 Carroll 收缩，

$$L = \pi\phi_0 - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\phi_i\phi^i \in C^\infty(J^1\pi) \ , \tag{27}$$

通过作场重定义 $\phi(x) \to c\phi(x)$， $\pi(x) \to \frac{1}{c}\pi(x)$，并对光速取极限 $c \to 0$ ，可得闵可夫斯基度量变为退化度量：

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = -c^2\mathrm{d}x^0 \otimes \mathrm{d}x^0 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \ \longrightarrow \ \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \ . \tag{28}$$

由对 (27) 作电 Carroll 收缩得到的拉格朗日函数 $L \in C^\infty(J^1\pi)$ 为

$$L = \pi\phi_0 - \frac{1}{2}\pi^2 \ ,$$

这就是本节所研究的电 Carroll 标量场拉格朗日量。该拉格朗日量是奇异的，因为 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial\phi_\mu\partial\phi_\nu} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial\pi_\mu\partial\pi_\nu} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial\pi_\mu\partial\phi_\nu} = 0$。拉格朗日能量函数和庞加莱–嘉当形式为

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{L}} &= \frac{1}{2}\pi^2 \in C^\infty(J^1\pi) \ , \\ \Theta_{\mathscr{L}} &= \pi\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 - \frac{1}{2}\pi^2\mathrm{d}^m x \in \Omega^m(J^1\pi) \ , \\ \Omega_{\mathscr{L}} &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^{n-1}x_0 + \pi\mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^m x \in \Omega^{m+1(}J^1\pi) \ . \end{aligned}$$

同样，拉格朗日场方程的相容性产生了两个 SOPDE 约束

$$\pi_0 = 0 \quad , \quad \phi_0 - \pi = 0 \ ,$$

它们定义了约束子流形 $\mathrm{S}_f \subset J^1\pi$，而该子流形上的相切条件不会产生新的约束。

勒让德映射为

$$\mathscr{F}\mathscr{L}^* p^0_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi_0} = \pi \quad , \quad \mathscr{F}\mathscr{L}^* p^i_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0 \quad , \quad \mathscr{F}\mathscr{L}^* p^\mu_\pi = \frac{\partial L}{\partial \pi_\mu} = 0 \ ,$$

并给出初级约束

$$p^0_\phi - \pi = 0 \quad , \quad p^i_\phi = 0 \quad , \quad p^\mu_\pi = 0 \ ,$$

它们定义了子流形 $P_0 \subset J^1\pi^*$，其局部坐标为（x^μ， ϕ， π）。拉格朗日函数L 几乎正则，且 De Donder–Weyl 哈密顿量为

$$H_0 = \frac{1}{2}\pi^2 \in \mathrm{C}^\infty(P_0) \ ,$$

Hamilton-Cartan形式为

$$\begin{aligned} \Theta^0_{\mathrm{h}} &= \pi \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 - \frac{1}{2}\pi^2 \mathrm{d}^m x \in \Omega^m(P_0) \ , \\ \Omega^0_{\mathrm{h}} &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \pi \mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^m x \ . \end{aligned}$$

时空对称性为卡罗尔变换 [36]

$$x'^0 = x^0 + b_k x^k \quad , \quad x'^i = x^i + \epsilon^i{}_j x^j \quad \Rightarrow \quad x'^\mu = C^\mu{}_\nu x^\nu \ , \tag{29}$$

其中 $C^0{}_0 = 1$、 $C^0{}_k = b_k$、 $C^k{}_0 = 0$， $(C^i{}_j) \in O(d)$。这些变换的无穷小表示为

$$C^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \ , \tag{30}$$

因此现在 $b_k = \epsilon^0{}_k$ 是无穷小的。保留 $\phi'(x') = \phi(x)$ 和 $\pi'(x') = \pi(x)$ 中的线性项后，场的无穷小变换为

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = -b_k x^k \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \ , \\ \delta\pi(x) \equiv \pi'(x) - \pi(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha} = -b_k x^k \frac{\partial \pi}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial \pi}{\partial x^i} \ . \end{aligned}$$

此外,

$$\phi'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\phi_\nu(x) \iff \phi'_\mu(C \cdot x) = (C^{-1})^\nu{}_\mu \phi_\nu(x) \ ,$$

其中 $C \equiv (C^\mu{}_\nu)$ 和 $C \cdot x \equiv C^\mu{}_\nu x^\nu$；因此,

$$\begin{aligned} \delta\phi_\mu(x) \equiv \phi'_\mu(x) - \phi_\mu(x) &= -\epsilon^\nu{}_\mu \phi_\nu - \epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\alpha} \ , \\ \delta\pi_\mu(x) \equiv \pi'_\mu(x) - \pi_\mu &= -\epsilon^\nu{}_\mu \pi_\nu - \epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \pi_\mu}{\partial x^\alpha} \ . \end{aligned}$$

按分量表示,

$$\begin{aligned} \delta\phi_0(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x^\alpha} = -b_k x^k \frac{\partial \phi_0}{\partial x^0} - \epsilon^k{}_j x^j \frac{\partial \phi_0}{\partial x^k} \ , \\ \delta\phi_i(x) &= -\epsilon^\nu{}_i \phi_\nu - \epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\alpha} = -b_i \phi_0 - \epsilon^k{}_i \phi_k - b_k x^k \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0} - \epsilon^k{}_j x^j \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} \ , \end{aligned}$$

对于 $\delta\pi_\mu(x)$ 的分量也同样如此。在上述变换下，拉格朗日量变换为 $\delta\mathscr{L}(x) = -\partial_\alpha \left(\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \mathscr{L}(x)\right)$。这些变换由向量场$\xi = -\xi^\mu(x)\,\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(M)$ 对局部截面 $\phi : M \to E$ 和 $j^1\phi : M \to J^1\pi$ 的李导数产生；该向量场生成卡罗尔变换；此时 $\xi^\mu(x) = \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu$由式 (29) 和 (30) 给出。在构型丛 E 上生成卡罗尔变换的向量场为

$$\xi_E = -\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathfrak{X}(E) \ ,$$

而 ξ_E 到 $J^1\pi$ 的典范提升为

$$\begin{aligned} X &= -\epsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \epsilon^{\nu}{}_{\mu}\phi_{\nu}\frac{\partial}{\partial \phi_{\mu}} + \epsilon^{\nu}{}_{\mu}\pi_{\nu}\frac{\partial}{\partial \pi_{\mu}} \\ &= -b_i x^i \frac{\partial}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(b_i\phi_0 + \epsilon^j{}_i\phi_j\right)\frac{\partial}{\partial \phi_i} + \left(b_i\pi_0 + \epsilon^j{}_i\pi_j\right)\frac{\partial}{\partial \pi_i} \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ . \end{aligned}$$

显然， X 与约束子流形 S_f 相切，因为 $\mathbf{L}(X)(\pi - \phi_0) = 0$ 且 $\mathbf{L}(X)\pi_0 = 0$。最后，由于 $\mathbf{L}(X)\mathscr{L} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}(X)\Theta_{\mathscr{L}} = 0$，拉格朗日框架下对应于卡罗尔时空变换的动量映射 $\mathbf{J}_{\mathscr{L}}(X)$ 为

$$\mathbf{J}_{\mathscr{L}}(X) = -i(X)\Theta_{\mathscr{L}} = -\epsilon^i{}_j x^j \pi \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{0i} - \frac{1}{2}\pi^2\left(b_i x^i \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \epsilon^i{}_j x^j \mathrm{d}^{m-1}x_i\right) \in \Omega^{m-1}(J^1\pi) \ .$$

在定义于 $P_0 \subset J^1\pi^*$ 上的哈密顿框架中，动量映射 $\mathbf{J}^0_{\mathrm{h}}(Y) \in \Omega^{m-1}(P_0)$ 通过向量场构造

$$Y = \mathscr{F}\mathscr{L}_{0*}X = -\epsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = -b_i x^i \frac{\partial}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(P_0) \ .$$

与拉格朗日框架中一样，$\mathbf{L}(Y)\Theta^0_{\mathrm{h}} = 0$ 且 $\mathbf{J}^0_{\mathrm{h}}(Y)$ 为

$$\mathbf{J}^0_{\mathrm{h}}(Y) = -i(Y)\Theta^0_{\mathrm{h}} = -\epsilon^i{}_j x^j \pi \, \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{0i} - \frac{1}{2}\pi^2\left(b_i x^i \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \epsilon^i{}_j x^j \mathrm{d}^{m-1}x_i\right) \ .$$

5.5 磁性卡罗尔标量场论

通过将 c （光速）的因子重新代入拉格朗日量（27），并取极限 $c \to 0$，对正则克莱因–戈尔登拉格朗日量进行磁性卡罗尔收缩 [36] 。与电 Carroll 标量场论中一样，闵可夫斯基度量（28）变得退化。通过对正则克莱因–戈尔登拉格朗日量（27）进行磁性卡罗尔收缩而得到的拉格朗日函数 $L \in C^\infty(J^1\pi)$ 为

$$L = \pi\phi_0 - \frac{1}{2}\phi_i\phi^i \ .$$

该拉格朗日量是奇异的，因为海森矩阵（相对于多重速度）的分量为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\phi_0\partial\phi_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial\phi_0\partial\phi_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial\phi_i\partial\phi_j} = -\delta^{ij} \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial\pi_\mu\partial\pi_\nu} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial\pi_\mu\partial\phi_\nu} = 0 \ .$$

拉格朗日能量函数和庞加莱–卡当形式现在为

$$\begin{aligned} E_{\mathscr{L}} &= -\frac{1}{2}\phi_i\phi^i \in C^\infty(J^1\pi) \ , \\ \Theta_{\mathscr{L}} &= \pi\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 - \phi^i\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_i + \frac{1}{2}\phi_i\phi^i\mathrm{d}^m x \in \Omega^m(J^1\pi) \ , \\ \Omega_{\mathscr{L}} &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \mathrm{d}\phi^i \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_i + \phi^i\mathrm{d}\phi_i \wedge \mathrm{d}^m x \in \Omega^{m+1}(J^1\pi), \end{aligned}$$

且 $\Omega_{\mathscr{L}}$ 是一个预多辛形式。施加 SOPDE 条件，

$$C^i_i - \pi_0 = 0 \quad , \quad \phi_0 = 0 \ .$$

第一个方程给出了系数 C_i^i 的关系，第二个方程则是一个 SOPDE 约束，它定义了约束子流形 $S_1 \hookrightarrow J^1\pi$ ，且约束算法不会再产生其他约束。

勒让德映射 $\mathscr{FL}$: $J^1\pi \to J^1\pi^*$ 给出多重动量

$$\mathscr{FL}^*p^0_\phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_0} = \pi \quad , \quad \mathscr{FL}^*p^i_\phi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i} = -\phi^i \quad , \quad \mathscr{FL}^*p^\mu_\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \pi_\mu} = 0 \ .$$

由此可知，$p^0_\phi - \pi = 0$ 和 $p^\mu_\pi = 0$ 是初级约束，它们定义了初级约束子流形 $P_0 \hookrightarrow J^1\pi^*$，其局部坐标为 $(x^\mu, \phi, \pi, p^i_\phi)$，且拉格朗日量仍然是几乎正则的。De Donder–Weyl 哈密顿量 $H_0 \in C^\infty(P_0)$ 给出如下:

$$H_0 = -\frac{1}{2} p_{\phi i} p^i_\phi \ ,$$

而 P_0 上的哈密顿–嘉当形式为

$$\begin{aligned} \Theta^0_{\mathrm{h}} &= \pi \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 + p^i_\phi \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_i + \frac{1}{2} p_{\phi i} p^i_\phi \mathrm{d}^m x \in \Omega^m(P_0) \ , \\ \Omega^0_{\mathrm{h}} &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\pi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}p^i_\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_i - p_{\phi i} \mathrm{d}p^i_\phi \wedge \mathrm{d}^m x \in \Omega^{m+1}(P_0) \, . \end{aligned}$$

磁性标量场论中的对称卡罗尔变换与电标量场中的略有不同，具体写作

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = -b_k x^k \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \ , \\ \delta\pi(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \pi}{\partial x^\alpha} - b_i \phi^i = -b_k x^k \frac{\partial \pi}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial \pi}{\partial x^i} - b_i \phi^i \ , \\ \delta\phi_0(x) &= -\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi_0}{\partial x^\alpha} = -b_k x^k \frac{\partial \phi_0}{\partial x^0} - \epsilon^k{}_j x^j \frac{\partial \phi_0}{\partial x^k} \ , \\ \delta\phi_i(x) &= -\epsilon^\nu{}_i \phi_\nu - \epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\alpha} = -b_i \phi_0 - \epsilon^k{}_i \phi_k - b_k x^k \frac{\partial \phi_i}{\partial x^0} - \epsilon^k{}_j x^j \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} \ . \end{aligned}$$

在这些变换下，拉格朗日量变换为 $\delta L(x) = -\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta L(x)\Big)$。注意，场 $\pi(x)$ 不再按卡罗尔标量变换；相反， $\pi(x)$ 在卡罗尔时空变换 $-\epsilon^\alpha{}_\beta x^\beta \dfrac{\partial \pi}{\partial x^\alpha}$ 下变换，并附加一项 $-b_i\phi^i(x)$，它无法在 E 上表示。场变换在几何上表现为局部截面 $j^1\phi : M \to J^1\pi$ 的李导数。在 $J^1\pi$ 上生成卡罗尔变换的向量场为

$$\begin{aligned} X &= -\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + b_i \phi^i \frac{\partial}{\partial \pi} + \epsilon^\nu{}_\mu \phi_\nu \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} + \epsilon^\nu{}_\mu \pi_\nu \frac{\partial}{\partial \pi_\mu} \\ &= -b_i x^i \frac{\partial}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \phi^i \frac{\partial}{\partial \pi} + \Big(b_i \phi_0 + \epsilon^j{}_i \phi_j\Big) \frac{\partial}{\partial \phi_i} + \epsilon^\nu{}_\mu \pi_\nu \frac{\partial}{\partial \pi_\mu} \in \mathfrak{X}(J^1\pi) \ , \end{aligned}$$

它与约束子流形 $S_1 \subset J^1\pi$ 相切，该子流形由约束 $\phi_0 = 0$ 给出，因为 $\mathrm{L}(X)\phi_0 = 0$。此外，尽管向量场 X 使拉格朗日密度保持不变（$\mathrm{L}(X)\mathscr{L} = 0$），但它并不产生精确诺特对称性，因为

$$\mathrm{L}(X)\Theta_{\mathscr{L}} = b^i \phi_0 (\phi_i \mathrm{d}^m x - \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-1}x_i) \ .$$

此外，如上所写，在整个 $J^1\pi$ 上的向量场 X 无法投影到 $P_0 \subset J^1\pi^*$。相反， X 在 S_1 上定义为

$$X|_{S_1} = -b_i x^i \frac{\partial}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \phi^i \frac{\partial}{\partial \pi} + \epsilon^j{}_i \phi_j \frac{\partial}{\partial \phi_i} + \epsilon^\nu{}_\mu \pi_\nu \frac{\partial}{\partial \pi_\mu} \ , \tag{31}$$

是可投影到 P_0 的 $\mathscr{FL}_0$，得到

$$Y = \mathscr{FL}_{0*}X|_{S_1} = -b_i x^i \frac{\partial}{\partial x^0} - \epsilon^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - b_i p^i_\phi \frac{\partial}{\partial \pi} + \epsilon^i{}_j p^j_\phi \frac{\partial}{\partial p^i_\phi} \in \mathfrak{X}(P_0) \ .$$

现在，令 $\widetilde{X}$ 为 $X|_{S_1}$ 到 $J^1\pi$ 的局部延拓，其坐标表达式由（31）给出；于是可得，$\mathrm{L}(\widetilde{X})\Theta_{\mathscr{L}} = 0$ 在 $J^1\pi$上。因此，可以定义动量映射如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{\mathscr{L}}(\widetilde{X}) = -i(\widetilde{X})\Theta_{\mathscr{L}} &= -\left(\epsilon^i{}_j x^j \pi + b_j x^j \phi^i\right) \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{0i} + \phi^i \epsilon^j{}_k x^k \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi_i \phi^i \left(b_k x^k \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \epsilon^k{}_j x^j \mathrm{d}^{m-1}x_k\right) \in \Omega^{m-1}(J^1\pi) \ , \\
\mathrm{J}^0_{\mathrm{h}}(Y) = -i(Y)\Theta^0_{\mathrm{h}} &= -\left(\epsilon^i{}_j x^j \pi - b_j x^j p^i_\phi\right) \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{0i} - p^i_\phi \epsilon^j{}_k x^k \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}^{m-2}x_{ij} \\
&\quad + \frac{1}{2} p_{\phi i} p^i_\phi \left(b_k x^k \mathrm{d}^{m-1}x_0 + \epsilon^k{}_j x^j \mathrm{d}^{m-1}x_k\right) \in \Omega^{m-1}(P_0) \ .
\end{aligned}$$

6 结论

本研究实现的主要目标之一，是精确阐明标准物理学文献中研究经典场论的方式与较新的（预）多辛几何研究中处理经典场论的方式之间的联系。本研究全面概述了（预）多辛几何中的嘉当（诺特）对称性，以及如何在拉格朗日和德唐德–韦尔哈密顿形式中运用这些对称性来描述经典场论中的诺特对称性。在微分几何文献中，嘉当对称性的处理广为人知 [18, 26, 32, 45]。然而，对于拉格朗日量为奇异的场论，其诺特对称性的处理存在一些微妙之处；这类奇异场论的约束由相应多相空间的预多辛形式导出 [30]。本文特别描述了存在约束时诺特对称性的分析。

更具体地说，在相关的（预）多辛多相空间上发展起来的经典场论，其诺特对称性由其守恒量编码，这些守恒量称为多重动量映射（如诺特定理所述）。针对理论物理中重要的各种奇异场论，相关多重动量映射的构造得到了明确阐述。将这些多重动量映射沿着从丛结构的底空间映射到多相空间的局部截面拉回后，便得到经典场论的标准诺特流。此外，与规范对称性相关的多重动量映射对于实施所需的对称性约化过程（或规范固定）至关重要，例如 [22]；预多辛场论中此类对称性约化过程的形式化发展仍是一个开放的研究领域（参见例如 [7, 8, 14]）。

流形与纤维丛上的多向量场

（参见[10, 11, 20]）。设 $\mathscr{M}$ 是一个 N 维可微流形。$\mathscr{M}(m \leq N)$ 中的 m 多向量场是 m 多重切丛 $\bigwedge^m \mathrm{T}\mathscr{M} := \overbrace{\mathrm{T}\mathscr{M} \wedge \ldots \wedge \mathrm{T}\mathscr{M}}^{m}$ 的截面；也就是说，它们是 $\mathscr{M}$ 中 m 阶的反对称逆变张量场；其集合记作 $\mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$。那么，若 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，对于每个点 $\bar{y} \in \mathscr{M}$，都存在一个开邻域 $U \subset \mathscr{M}$ 以及 X_1、.....、$X_r \in \mathfrak{X}(U)$，使得对于 $m \leqslant r \leqslant \dim \mathscr{M}$，

$$\mathbf{X}|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq r} f^{i_1 \ldots i_m} X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_m} \ ,$$

其中 $f^{i_1\dots i_m} \in C^\infty(U)$。特别地，若存在 X_1、……、$X_m \in \mathfrak{X}(U)$ 使得 $\mathbf{X}|_U = X_1 \wedge \ldots \wedge X_m$，则称 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$ 是局部可分解的多向量场。局部可分解的 m 多向量场与 m 维分布 $D \subset \mathrm{T}\mathscr{M}$ 局部相关联，而这将 $\mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$ 分解为等价类 $\{\mathbf{X}\} \subset \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，其中每个等价类由与同一分布相关联的局部可分解多向量场构成。若 $\mathbf{X}$、$\mathbf{X}' \in \{\mathbf{X}\}$，则对于每个$U \subset \mathscr{M}$，都存在一个处处非零函数 $f \in C^\infty(U)$，使得 $\mathbf{X}' = f\mathbf{X}$ 在 U 上成立。

若 $\Omega \in \Omega^p(\mathscr{M})$ 且 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，则 $\mathbf{X}$ 与 Ω 之间的缩并是张量场之间的自然缩并；特别地，当 $p < m$ 时结果为零，且若 $p \geq m$，

$$i(\mathbf{X})\Omega\,|_U := \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq r} f^{i_1\ldots i_m}\, i(X_1 \wedge \ldots \wedge X_m)\Omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq r} f^{i_1\ldots i_m}\, i(X_m)\ldots i(X_1)\Omega\ .$$

Ω 关于 $\mathbf{X}$ 的李导数是分次括号（次数为 $m-1$）

$$\mathrm{L}(\mathbf{X})\Omega := [\mathrm{d}, i(\mathbf{X})]\Omega = (\mathrm{d}\, i(\mathbf{X}) - (-1)^m\, i(\mathbf{X})\mathrm{d})\Omega\ .$$

若 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^i(\mathscr{M})$ 且 $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}^j(\mathscr{M})$，则 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$ 的肖滕-奈恩赫斯括号是双线性映射 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \mapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}],$，其中 $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ 是一个 $(i+j-1)$-多向量场，由 $\mathrm{L}(\mathbf{X})$ 与 $\mathrm{L}(\mathbf{Y})$ 的分次交换子得到；也就是说，

$$\mathrm{L}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}])\Omega := [\mathrm{L}(\mathbf{X}), \mathrm{L}(\mathbf{Y})]\,\Omega\ .$$

这是一个次数为 $i+j-2$ 的运算，也称为 $\mathbf{Y}$ 关于 $\mathbf{X}$ 的李导数，记作 $\mathrm{L}(\mathbf{X})\mathbf{Y} := [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$。此外，若 $Y \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ 且 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$，则

$$i([Y, \mathbf{X}])\Omega = \mathrm{L}(Y)\, i(\mathbf{X})\Omega - i(\mathbf{X})\, \mathrm{L}(Y)\Omega\ . \tag{32}$$

现在，设 $\varrho\colon\ \mathscr{M} \to M$一个纤维丛。若对于每个满足 $\beta_{\varrho(\mathrm{p})} \neq 0$ 的 $\beta \in \Omega^m(M)$，在每个点 $\mathrm{p} \in \mathscr{M}$ 处都有 $(i(\mathbf{X})(\bar{\pi}^{k*}\beta))_{\mathrm{p}} \neq 0$，则多向量场 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$ 称为 ϱ-横截的。我们关注可积多向量场，即那些局部可分解且其关联分布可积的多向量场。于是，若 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$ 可积且 ϱ-横截，则其积分流形是投影 $\varrho\colon\ \mathscr{M} \to M$ 的局部截面。

在特定情形下，$\mathscr{M} = J^1\pi$且我们有喷射丛 $\bar{\pi}^1\colon\ J^1\pi \to M$；若可积多向量场 $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^m(\mathscr{M})$ 的积分截面是 $\bar{\pi}^1$ 的全纯约束截面，则称该场为全纯约束的。

致谢

我们感谢 Joaquim Gomis 和 Jordi Gaset 提供了有益且富有启发性的讨论。我们感谢 Victor Tapia 指出方程（21）首次计算中的错误。我们也感谢审稿人提出的建设性意见。本研究得到西班牙科学、创新与大学部项目 PID2021- 125515NB-C21 的经费支持，并获得加泰罗尼亚理工大学（UPC）AGRUPS-2022 研究组的经费支持。

参考文献

[1] D. Adame-Carrillo、J. Gaset 和 N. Rom´an-Roy，《k-预辛拉格朗日场论的二阶问题：在爱因斯坦–帕拉蒂尼模型中的应用》，*RACSAM* **116**，20（2022）。（https://doi.org/10.1007/s13398-021-01136-x。

[2] V. Aldaya 和 J.A. de Azcarraga，《场论中纤维丛的 rth 阶射流上的变分原理》，《数学物理杂志》**19**(9) (1978) 1869–1875。（https://doi.org/10.1063/1.523904）。

[3] V.I. Arnold，《经典力学的数学方法》。《数学研究生教材》**60**。施普林格出版社，纽约，1989。（https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1）。

[4] C. Batlle、J. Gomis、J. Par´ıs 和 J. Roca，《场-反场形式体系与哈密顿BRST方法》，《核物理B辑》**329**(1) (1990) 139-154。（https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90061-H）。

[5] K. Becker、M. Becker 和 J.H. Schwarz，《弦理论与M理论：现代导论》，剑桥大学出版社，剑桥，2006。（https://doi.org/10.1017/CBO9780511816086）。

[6]M.J. Bergvelt 和 E.A. de Kerf，“杨-米尔斯理论与瞬子的哈密顿结构”（第一部分），《物理学》**139A** (1986) 101–124。（https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0378-4371(86)90007-5）。

[7]C. Blacker，“多辛流形的约化”，《数学物理快报》**111** (2021) 64。（https://doi.org/10.1007/s11005-021-01408-y）。

[8] C. Blacker，“多辛流形上可观测量的 L_∞-代数的约化”，arXiv:92206.03137[math.DG] (2022)。

[9] D. Bleecker，《规范理论与变分原理》，多佛出版社，纽约，1981年。ISBN-10：0486445461。

[10]F. Cantrijn、L.A. Ibort 和 M. de Le´on，“多辛流形上的哈密顿结构”，《都灵理工大学数学研讨会报告》54(3)（1996）225–236。（https://www.researchgate.net/publication/233917958）。[11] F. Cantrijn、L.A. Ibort 和 M. de Le´on，“多辛流形的几何”，《澳大利亚数学学会杂志》（A辑）66(3)（1999）303–330。（https://www.researchgate.net/publication/231926129）。[12] J.F. Cari˜nena、M. Crampin 和 L.A. Ibort，“一阶场论的多辛形式体系”，《微分几何及其应用》1(4)（1991）345–374。（https://doi.org/10.1016/0926-2245(91)90013-Y）。[13] M. Castrill´on、J. Mu˜noz-Masqu´e 和 M.E. Rosado，“与爱因斯坦–希尔伯特拉格朗日量一阶等价”，《数学物理杂志》55(8)（2014）082501。（https://doi.org/10.1063/1.4890555）。[14] F.M. Ciaglia、F. Di Cosmo、A. Ibort、G. Marmo 和 L. Schiavone，“经典哈密顿场论的协变约化：从达朗贝尔到克莱因–戈尔登和薛定谔”，《现代物理快报A辑》35(23)（2020）2050214。（https://doi.org/10.1142/S0217732320502144）。[15]P. Dedecker，“变分法中将辛几何推广到多重积分”，载于《数学物理中的微分几何方法》（会议论文集，波恩大学，波恩，1975），《数学讲义》第570卷，施普林格，柏林，1977，395–456。（https://doi.org/10.1007/BFb0087794）。[16] M. de Le´on、J. Mar´ın-Solano 和 J.C. Marrero，“经典场论的几何方法：奇异理论的约束算法”，载于《微分几何新进展会议论文集》，L. Tamassi、J. Szenthe 编，克吕维尔学术出版社，阿姆斯特丹（1996）291–312。（https://doi.org/10.1007/978-94-009-0149-0 22）。[17] M. de Le´on、J. Mar´ın-Solano、J.C. Marrero、M.C. Mu˜noz-Lecanda 和 N. Rom´an-Roy，“场论的预多辛约束算法”。《国际几何方法与现代物理学杂志》2（2005）839–871。（http://doi.org/10.1142/S0219887805000880）。[18] M. de Le´on、D. Mart´ın de Diego 和 A. Santamar´ıa-Merino，“经典场论中的对称性”，《国际几何方法与现代物理学杂志》1(5)（2004）651–710。（http://doi.org/10.1142/S0219887804000290）。[19]A. Echeverr´ıa-Enr´ıquez、M.C. Mu˜noz-Lecanda 和 N. Rom´an-Roy，“拉格朗日一阶经典场论的几何”，《物理进展》44（1996）235–280。（https://doi.org/10.1002/prop.2190440304）。

[20]A. Echeverr´ıa-Enr´ıquez、M.C. Mu˜noz-Lecanda 和 N. Rom´an-Roy，《多向量场与联络：建立场论中的拉格朗日方程》，《数学物理杂志》39(9)（1998）4578–4603。（https://doi.org/10.1063/1.532525）。[21] A. Echeverr´ıa-Enr´ıquez、M.C. Mu˜noz-Lecanda 和 N. Rom´an-Roy，《哈密顿场论的多向量场表述：方程与对称性》，《物理学杂志A：数学与一般物理》32（1999）8461–8484。（https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/48/309）。[22] A. Echeverr´ıa-Enr´ıquez、M.C. Mu˜noz-Lecanda 和 N. Rom´an-Roy，《关于多辛约化的若干评论》，《数学物理报告》81(3)（2018）415–424。（https://doi.org/10.1016/S0034-4877(18)30057-0）。[23] M. Forger 和 B.L. Soares，《有限维框架下规范理论中的局部对称性》，《几何物理学杂志》62(9)（2012）1925–1938。（https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.05.003）。[24] P.L. Garc´ıa，《变分法中的庞加莱-嘉当不变量》，《数学研讨会》14（1973）219–246。[25] J. Gaset，《多辛场论中的几何规范自由度》，arXiv:2209.11212 [math-ph]（2022）。[26] J. Gaset、P.D. Prieto-Mart´ınez 和 N. Rom´an-Roy，《纤维化多辛流形上的变分原理与对称性》，《数学通讯》24(2) 137-152。（https://doi.org/10.1515/cm-2016-0010）。[27] J. Gaset 和 N. Rom´an-Roy，《多辛一阶和二阶拉格朗日场论中的对称性与规范对称性：电磁场与引力场》，《加那利科学院评论》（RACC）32 Mathematics 2020（2021）。[28] G. Giachetta、L. Mangiarotti 和 G. Sardanashvily，《场论中的新拉格朗日与哈密顿方法》，世界科学出版公司，新泽西州里弗埃奇，1997。（https://doi.org/10.1142/2199）。[29] H. Goldschmidt 和 S. Sternberg，《变分法中的哈密顿-嘉当形式体系》，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》23(1)（1973）203–267。（http://eudml.org/doc/74112）。[30] J. Gomis、A. Guerra IV 和 N. Rom´an-Roy，《标量场论、陈-西蒙斯引力和玻色弦理论的多辛约束分析》，《核物理B辑》987（2023）116069。（https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.116069）。[31] J. Gomis、J. Par´ıs 和 S. Samuel，《反括号、反场与规范理论量子化》，Phys.Rep. 259(1-2)（1995）1-145。（https://doi.org/10.1016/0370-1573%2894%2900112-G）。[32] M.J. Gotay、J. Isenberg、J.E. Marsden 和 R. Montgomery，《动量映射与经典相对论场。I. 协变理论》，arXiv:physics/9801019 [math-ph]（2004）。[33] M.J. Gotay 和 J.M. Nester，《预辛哈密顿与拉格朗日系统、规范变换及狄拉克约束理论》，载于《物理学中的群论方法》；W. Beigel- bock、A. B¨ohm、E. Takasugi 编。《物理学讲义》94，272-279；施普林格，柏林（1979）。（https://doi.org/10.1007/3-540-09238-2 74）。[34] X. Gr`acia 和 J.M. Pons，《奇异微分方程的对称性与无穷小对称性》，《物理学杂志A：数学与一般物理》35(24)（2002）5059。（https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/24/306）。[35] F. H´elein 和 J. Kouneiher，《适用于多个变量变分法的协变哈密顿形式体系：Lepage–Dedecker 与 De Donder–Weyl》，《理论与数学物理进展》8（2004），565–601，[36] M. Henneaux、P. Salgado-Rebolledo，《洛伦兹不变理论的卡罗尔压缩》，J. High Energy Phys. 2021（2021）180。（https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)180）。[37] Y. Kosmann-Schwarzbach，《诺特定理：二十世纪的不变性与守恒律》，Sringer，纽约，2011。（https://doi.org/10.1007/978-0-387-87868-3）。[38] I. Kol´ar、J. Slov´ak 和 P.W. Michor，《微分几何中的自然运算》，施普林格，柏林、海德堡，1993。（https://doi.org/10.1007/978-3-662-02950-3）。

[39] D. Krupka，《全局变分几何导论》，Atlantis 变分几何研究丛书，Atlantis 出版社，2015。（https://link.springer.com/book/10.2991/978-94-6239-073-7）。[40]L. Mangiarotti 和 G. Sardanashvily，《规范力学》，世界科技出版社，新加坡（1998）。（https://doi.org/10.1142/3905）。[41]T.B. Madsen 和 A. Swann，“多重矩映射”，Adv. Math. 229(4)（2012）2287-2309。（https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.01.002）。[42] P.W. Michor，《微分几何专题》，Grad. Stud. in Math. 93，Am. Math. Soc.，维也纳（奥地利），2008。ISBN-10：0821820036。[43] N. Rom´an-Roy，“经典场论的多辛拉格朗日与哈密顿形式体系”，Symm. Integ. Geom. Meth. Appl. (SIGMA) 5（2009）100。（https://doi.org/10.3842/SIGMA.2009.100）。[44] N. Rom´an-Roy，“自治哈密顿系统对称性与守恒量概述”。J. Geom. Mech. 12(3)（2020）541–551。（https://doi.org/10.3934/jgm.2020009）。[45] L. Ryvkin、T. Wurzbacher 和 M. Zambon，“多辛流形上的守恒量”，J. Austral Math. Soc. 108(1)（2020）120–144。（https://doi.org/10.1017/S1446788718000381）。[46] W. Sarlet 和 F. Cantrijn，“高阶诺特对称性与运动常数”，《物理学杂志A：数学与一般物理》14(2)（1981）479-492。（https://doi.org/10.1088/0305-4470/14/2/023）。[47] D.J. Saunders，《射流丛几何》，伦敦数学会讲义丛书142，剑桥大学出版社，剑桥、纽约，1989。（https://doi.org/10.1017/CBO9780511526411）。[48] J. Sniatycki，“适当作用的多辛约化”，Canad. J. Math. 56(3)（2004）638-654。（https://doi.org/10.4153/CJM-2004-029-8）。