arXiv:2301.01258v1 [physics.atom-ph] 3 Jan 2023

人工晶体中各向异性超流密度的观测

J. Tao，* M. Zhao，* 和 I. B. Spielman联合量子研究所，马里兰大学与美国国家标准与技术研究院，马里兰州大学公园市 *20742*，美国（日期：2023年1月4日）

我们通过实验和理论研究了一维光学晶格中原子超流体（超流）的玻色–爱因斯坦凝聚体的各向异性声速。由于声速取决于超流密度，这意味着超流密度本身具有各向异性。我们发现，光学晶格会降低声速，超流密度也随之减小。在纯玻色凝聚相中，这种减小伴随着正常流体的出现。超流密度的降低——最初由 [A. J. Leggett，《物理评论快报》**25** 1543–1546 (1970)] 在超固性背景下作出预测——源于超流性与密度调制的共存，但并不涉及这些调制的起源。此外，我们通过剪刀模实验测量了系统的转动惯量，证明了旋转流的存在。因此，我们利用施加而非自发形成的密度有序，揭示了超固性的若干性质。

超流性与玻色–爱因斯坦凝聚（BEC）密切相关。在稀薄原子玻色–爱因斯坦凝聚体中，超流（SF）密度通常与凝聚体密度相等 [1, 2]。相比之下，超流 ^{4}He几乎可以是纯超流，其凝聚分数仅约为 14 % [3]，；而无限二维别列津斯基–科斯特利茨–索利斯（BKT）超流则完全没有凝聚体 [4, 5]。1970 年，Tony Leggett 指出，超固体——即自发形成超流性和晶体有序（也就是密度调制）的系统——表现出相反的情况：超流密度远低于凝聚体密度 [6]。在此，我们在一种近乎纯净的原子玻色–爱因斯坦凝聚体中观测到了这一效应，其中的人工晶体有序由光学晶格印刻而成。

复值序参量$\phi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho^{\rm sf}}\exp[i\varphi(\mathbf{r})]$，描述了具有数密度 $\rho^{\rm sf}$ 和相位 $\varphi(\mathbf{r})$的超流，并由此产生超流的两种标志性性质：与 $\varphi(\mathbf{r})$空间梯度相关的无耗散超流电流，以及由 $\varphi(\mathbf{r})$中的行波描述的（Bogoliubov [2]）声波。由于超流电流源自相位梯度，因此在局部不可旋；在液态 ^{4}He中，由此产生的非经典转动惯量会在超流转变温度 $T_{\rm c}$ 以下显现。超固体是更为奇异的系统，能够自发形成晶体有序，同时表现出超流输运性质。近期对镝和铒偶极玻色–爱因斯坦凝聚体的实验显示了这些性质的迹象 [7, 8]。Leggett 指出，超固体的调制密度 $\rho(\mathbf{r})$必然会导致 $\rho^{\rm sf}$降低，并推导出了 $\rho^{\rm sf}$ [6]的上限。这种降低源自三维密度分布，因此在玻色–哈伯德模型等紧束缚描述中会被掩盖；该模型另行预言，在超流到莫特绝缘体转变时 $\rho^{\rm sf}$ 会消失 [9, 10]。

我们利用一维光学晶格将周期性密度调制印刻到原子玻色-爱因斯坦凝聚体中，从而制备出人工超流晶体，如图 1(a) 所示。虽然这些调制并非自发形成，但 Leggett 结果仍然适用，因此这是一个理想系统，可用于理解晶态超流体，同时避免自发对称性破缺带来的额外复杂性。我们通过对声子模进行布拉格光谱测量，实验测得各向异性声速。这意味着存在一种有效的各向异性超流密度——可表示为二阶张量 $\rho^{\rm sf}_{ij}$——并且我们发现它达到了 Leggett 界，这与 Gross-Pitaveskii 方程（GPE）模拟结果一致。我们还根据剪刀模频率 [11, 12]确定了相应的转动惯量各向异性抑制。

各向异性超流体——这里我们考虑纯三维玻色-爱因斯坦凝聚体，其凝聚态模 $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|\exp[i\vartheta(\mathbf{r})]$ 可由 Gross-Pitaevskii 方程（GPE）很好地描述。光学晶格势 $V(\mathbf{r}) = (U_0/2)\cos(2k_{\rm r}x)$ 周期性地调制凝聚体密度 $\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$，其晶胞（UC）尺寸为 $a = \pi/k_{\rm r}$ [图 1(b)-*i*]。相比之下，超流序参量 $\phi(\mathbf{r})$ 是一种粗粒化量，用于描述系统在尺度 $\gg a$上的性质，因此图 1(c)-*i* 中的密度名义上是均匀的。

即使不考虑 $\rho^{\rm sf}(\mathbf{r})$ 和$\rho(\mathbf{r})$ 之间可能存在的差异，我们仍认为 $\phi(\mathbf{r})$ 并非简单地等于在某个远大于 a的尺度上对 $\psi(\mathbf{r})$ 取平均。通过考虑一个大小为 L 、具有周期性边界条件的一维系统，可以理解这一效应的根本来源：其中凝聚体相位 ϑ 和超流相位 φ 均绕转 2π [的整数倍 N 图 1(b,c)-*ii*], , 从而产生亚稳量子化超流 [13]。为了满足稳态连续性方程，微观流 $J(x) = \rho(x)\,[\hbar\partial_x\vartheta(x)/m]$ 必须与 x [无关图 1(b)-*ii*], ；然而，周期性调制的密度 $\rho(x) > 0$ 意味着局域速度$v(x) = \hbar\partial_x\vartheta(x)/m$ 呈现振荡结构，因此 $\vartheta(x)$呈阶梯状变化 [图 1(b)-*iii, iv*]。

根据宏观考虑，超流流为 $J = \rho^{\rm sf}\,[\hbar\partial_x\varphi(x)/m] = 2\pi N\hbar\rho^{\rm sf}/(mL)$。将通过考察凝聚态模和超流序参量得到的流相等

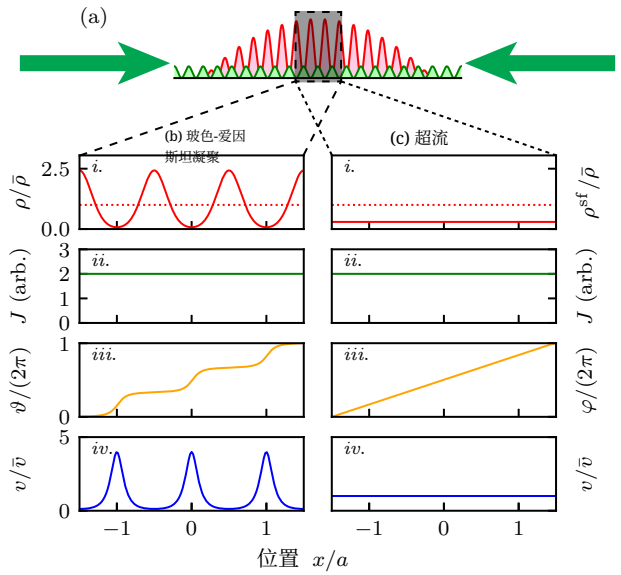

图 1. 概念图。(a) 玻色-爱因斯坦凝聚被囚禁在一个谐振阱中，该阱叠加了一维光学晶格（沿$\mathbf{e}_x$方向，绿色），使凝聚体密度（红色）在空间上发生调制。虚线和点线标示出一个平均密度名义上恒定的区域，左右两列分别表示存在流时的(b)凝聚体状态和(c)超流。这些图是针对深度为 $5E_\mathrm{r}$ 的光晶格计算得到的，展示了：*i.* 密度（红色），*ii.* 流（绿色），*iii.* 相位（橙色），以及*iv.* 局域速度（蓝色）。红色虚线表示平均密度$\bar{\rho}$。

并对一个晶胞积分，得到 Leggett 方程 [6]

$$\rho^{\mathrm{sf}} = a\left[\int_{\mathrm{UC}} \frac{dx}{\rho(x)}\right]^{-1}, \text{ as well as } \varphi = \frac{1}{a}\int_{\mathrm{UC}} \vartheta(x)dx. \quad (1)$$

这意味着 $\rho^{\mathrm{sf}} \leq \bar{\rho}$，其中 $\bar{\rho}$ 是一个原胞内凝聚体密度的空间平均值；正如我们下面将要讨论的，剩余密度 $\rho^{\mathrm{n}} = \bar{\rho} - \rho^{\mathrm{sf}}$ 表现为赝正常流体。在更一般的情形下，Gross–Pitaevskii 方程并不适用，而Leggett关于 ρ^{sf}的表达式是具有晶体有序的系统中超流密度的上限 [6]。

在三维系统中，流 $J_i = \rho_{ij}^{\mathrm{sf}}\,[\hbar\partial_j\varphi/m]$ 源自超流密度张量。对于具有矩形对称性的系统， [14] ρ_{ij}^{sf} 为对角张量；与式（1）对应的三个分量的表达式均使用沿横向积分的一维密度。在我们的实验中，这意味着超流密度仅沿光学晶格方向降低，因此 $\rho_{yy}^{\mathrm{sf}} = \rho_{zz}^{\mathrm{sf}} = \bar{\rho}$。

实验—我们使用了含有 $N \approx 2\times10^5$个原子的 ^{87}铷玻色-爱因斯坦凝聚，处于 $|F=1,\ m_F=1\rangle$ 超精细基态。椭圆形截面的1064 nm囚禁激光沿$\mathbf{e}_x$ 传播，提供强垂直约束，频率为 $\omega_z/(2\pi) = 220$ 赫兹；面内频率从$\omega_{x,\ y}/(2\pi)$ = (34，51) Hz到(56，36) Hz，针对不同实验进行了优化。我们使用一束沿$\mathbf{e}_x$传播、波长为 $\lambda = 532$ nm的激光，经反射后创建了一维光学晶格，其晶格周期为 $a = 266$ nm，与 $\xi = 170(20)$ nm的最小愈合长度相当。光学晶格在100 ms内线性开启，达到最终深度 $\leq 10\ E_\mathrm{r}$；单光子反冲能量和动量分别为 $E_\mathrm{r} = \hbar^2k_\mathrm{r}^2/(2m)$和 $\hbar k_\mathrm{r} = 2\pi\hbar/\lambda$ [15]。布拉格实验的最终态在15 ms飞行时间（TOF）后通过共振吸收成像测量；剪刀模测量则在原位使用部分转移吸收成像进行 [16]。

各向异性声速——对于对角的 ρ_{ij}^{sf}，声速预计由 $c_i^2 = f_{ii}^{\mathrm{sf}}/(\kappa m)$ 给出，其取决于超流分数 $f_{ii}^{\mathrm{sf}} = \rho_{ij}^{\mathrm{sf}}/\bar{\rho}$、可压缩率 $\kappa = \bar{\rho}^{-1}\,(\partial\bar{\rho}/\partial\mu)$ 以及化学势μ。对于各向同性均匀系统，这一结果退化为众所周知的值 $c^2 = \mu/m$（有关线性近似之外的完整色散关系，请参见 [17] ）。声速比

$$\frac{c_x^2}{c_y^2} = \frac{\rho_{xx}^{\mathrm{sf}}}{\rho_{yy}^{\mathrm{sf}}} = f_{xx}^{\mathrm{sf}}, \quad (2)$$

可直接获得超流密度的不同组成部分 [，关于约瑟夫森求和规则的论证 [17]见 [18]]。由于密度与 y无关，式（1）意味着 $\rho_{yy}^{\mathrm{sf}} = \bar{\rho}$。

我们利用数字微镜器件（DMD [19]）对激光束进行图案化，使其形成一个缓慢以速度 v 移动、倒格矢为 δk 的弱正弦势，并用布拉格散射作用于玻色-爱因斯坦凝聚，测量散射比例 p。这实际上是由两束相互干涉的激光驱动双光子跃迁，其差波矢为 δk，角频率为 $\delta\omega = \delta k\ v$。我们施加该势 $\approx$ 5毫秒。当差能量和动量与玻色-爱因斯坦凝聚的Bogoliubov色散关系共振时，便发生布拉格跃迁；图2(a)展示了线性区的数据。该谱特征的宽度受玻色-爱因斯坦凝聚非均匀密度分布的限制；因此，洛伦兹拟合（实线）得到的共振位置（竖直虚线）反映了平均声速 [20]。

一系列此类拟合得出了布拉格光晶格周期从 2.25 μm 到 8.5 μm 的声子色散关系。沿$\mathbf{e}_x$ 和$\mathbf{e}_y$ 方向测得的代表性色散曲线如图 2(b) 所示，我们通过线性拟合得到了声速。图 2(c) 汇总了这些数据，显示声速沿晶格方向$\mathbf{e}_x$ 递减，而沿$\mathbf{e}_y$ 略有增加（这是由于各个晶格位点中的原子密度增加所致）。最后，图 2(d) 展示了我们的主要结果：根据这些数据并使用式 (2) 得到的归一化超流密度随 U_0 增大而降低。

我们通过两种方式将这些数据与 GPE 模拟进行比较：(1) 使用 Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程求得 c_x 和 c_y；(2) 直接根据 Gross–Pitaevskii 方程基态密度计算公式 (1)。图 2(c) 中的实线绘出了通过

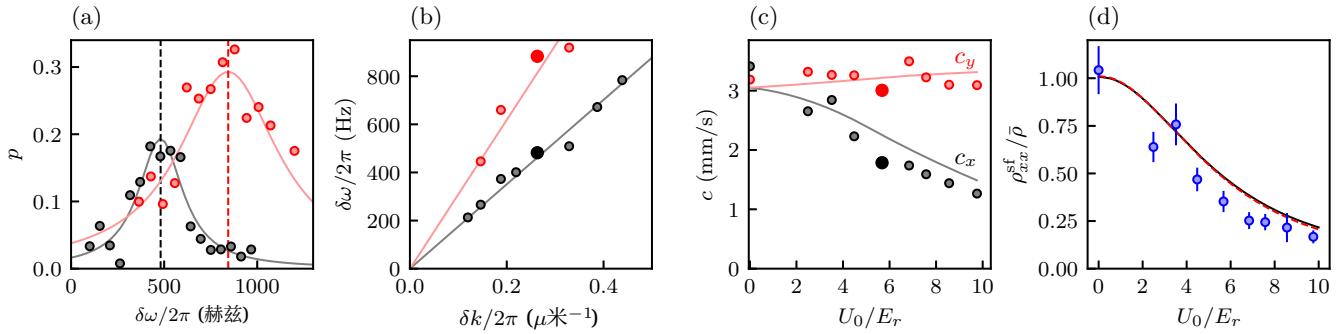

图 2. 布拉格光谱。黑色和红色符号分别表示沿$\mathbf{e}_x$ 和$\mathbf{e}_y$ 方向产生的激发。(a) 转移的布居比例 p 随频率差 $\delta\omega$ 的变化，其中波矢为 $\delta k/2\pi = 0.26\ \mu\mathrm{m}^{-1}$，晶格深度为 $U_0 = 5.7E_\mathrm{r}$。实线为洛伦兹拟合，得到的共振频率以竖直虚线标出。(b) 根据布拉格谱得到的声子色散。粗体符号取自 (a)，线性拟合（截距为零）给出声速。(c) 各向异性声速。粗体符号由 (b) 得出，实线为 BdG模拟结果（无自由参数 [17]）。(d) 根据声速测量得到的超流密度（蓝色标记，误差棒表示单个标准差的统计不确定性）。我们将结果与两个模型进行比较：红色虚线表示均匀气体的 BdG 计算结果，黑色实线表示公式 (1) 的结果。模拟采用了经过校准的实验参数。

求解一维BdG [21], 得到的声速，(d) 中的红色虚线则表示这些声速的比值。为了与 Leggett的预测进行比较，我们针对实验参数求得二维GPE的基态，并在整个非均匀系统中计算公式 (1)。图 2 中的黑线表示由此得到的加权平均值。值得注意的是，BdG 的结果与 Leggett表达式几乎完美吻合。

剪刀模——超流序参量的单值性极大地影响转动惯量 I等旋转性质。对于高度各向异性阱，剪刀模 [11] 描述了一个固定的密度分布，该分布以阱中心为 θ 轴心小角度转动，频率为 $\omega_{\rm sc}$。剪刀模实验让人联想到在 ^{4}He [22]中进行的扭秤实验，后者可以测得非经典转动惯量 [6]。

用拉格朗日量 $L = I\dot{\theta}^2/2 - V(\theta)$ 来量化这些动力学过程颇具启发性，其中转动惯量为

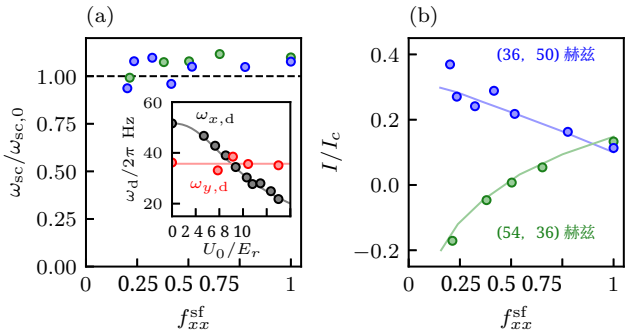

图 3. 剪刀模的转动惯量。（a-插图）测得的偶极模频率（标记）及其拟合结果（曲线），其中 U_0 处的频率是每条曲线唯一的自由参数。（a）剪刀模频率。蓝色和绿色分别对应 $U = 0$ 阱频率（34，51）赫兹和（54，36）赫兹。（b）以 I_c为单位的转动惯量。符号表示按照正文所述计算得到的数据，实线曲线为使用 $I = \partial_\Omega\langle L_z\rangle$并具有角频率 Ω 的GPE预测。

I，势能为 $V(\theta)$。当 θ 较小时，势能可展开为 $V(\theta) \approx I\omega_{\rm sc}^2\theta^2/2$，其中

$$\frac{I}{I_{\rm c}} = \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2}{\omega_{\rm sc}^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)} \tag{3}$$

以经典转动惯量 $I_{\rm c}$ 表示，并且与文献 [11] 中关于各向同性超流体的结果一致。尽管这种解释非常直观，但经仔细考量后便站不住脚。各向异性超流密度会使径向流与方位流耦合，因此，单参数拉格朗日量不足以描述转动动力学。

相反，超流体流体动力学方程预测，转动惯量相较于方程（3）会按因子 $(f^{\rm sf}_{xx}\omega_x^2 - f^{\rm sf}_{yy}\omega_y^2)/(\omega_x^2 - \omega_y^2)$ 缩放（见 [17]）。因此，我们预计 $\omega_{\rm sc}$ 与超流密度结合后，将给出 I/I_c 随晶格深度变化的关系。

图3(a)的插图绘出了囚禁势频率为 (54，36) 赫兹时的偶极模频率 $\omega_{x,\,\rm d}$ 和 $\omega_{y,\,\rm d}$。频率降低也与沿晶格方向 [17]的 $\rho^{\rm sf}$ 有关，其关系为 $f^{\rm sf} = (\omega_{x,\,\rm d}/\omega_x)^2$。这个比值也可以用增大的有效质量来表示；当晶格周期小于愈合长度时，该有效质量趋近于单粒子能带结构预测。在我们的实验中，根据 GPE 进行微扰计算所得的数值与能带结构预测相差约 20%。这一建模结果由实线表示。

我们使用数字微镜器件将谐势倾斜 50 至 140 毫弧度，持续 ≈ 1 毫秒（短于囚禁势的周期），从而激发剪刀模，并让玻色-爱因斯坦凝聚在原始囚禁势中演化不同时间。我们通过原位测量所得动力学，并将所得密度分布拟合为旋转高斯分布，以提取角度。图 3(a) 显示了剪刀模频率相对于预期频率 [24] of $\omega^2_{\rm sc,0} = f^{\rm sf}_{xx}\omega_x^2 + f^{\rm sf}_{yy}\omega_y^2$ 的归一化结果；囚禁势沿 $\mathbf{e}_x$ [方向拉长时，其频率为 (56,36) 赫兹，图中以蓝色表示]

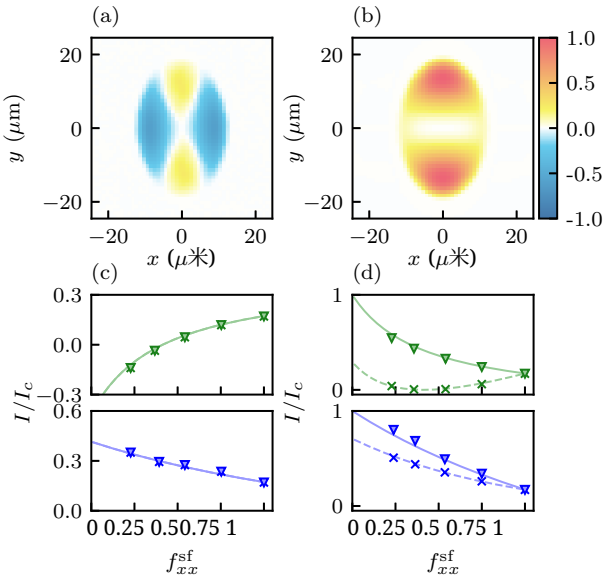

图4. 使用二维 GPE 模拟计算得到的旋转系统中的转动惯量。左列表示光晶格静止时的模拟，而右列表示光晶格与囚禁势共同旋转时的模拟。(a、b) 阱频率为 $2\pi\times$(56,36)和 $U_0 = 10E_r$时的角动量密度。(c、d) 阱频率为 $2\pi\times$(56,36)（顶部，绿色）和 $2\pi\times$(36，56)赫兹（底部，蓝色）的囚禁势中的总转动惯量。虚线绘制 I^{sf}/I_c，实线绘制 I/I_c。

或者沿 $\mathbf{e}_y$ [方向拉长时，其频率为 (36,50) 赫兹，图中以绿色表示]。在这两种情况下， ω_{sc} 都比简单预测值高出约 5 %，这可能是由有限温度或光学偶极阱中的非谐性造成的。

我们在图3(b)中综合这些观察结果，得到 I/I_c；数据（符号）与我们的二维 Gross–Pitaevskii 方程模拟（曲线）一致。对于沿$\mathbf{e}_x$ （绿色）方向拉长的囚禁势， I/I_c 出乎意料地在$\omega_{x,\ \mathrm{d}} = \omega_{y,\ \mathrm{d}}$时改变符号。为理解这一效应的物理起源，我们现在将注意力转向旋转系统。

旋转——迄今为止，我们只关注超流密度，而没有探讨任何相关的正常流体。通过考虑一维环形几何中（半径为 R）的两个思想实验，我们可以推断正常流体组分的存在，并用由此产生的角动量 [25] 对两种情况进行量化。情况（i）中，我们考虑一个阿哈罗诺夫–玻姆几何，缓慢地向环中穿入一个磁通量子（关于人工规范场方案，见参考文献 [26] ）。这一过程等同于赋予系统一个 2π相位绕转（类型见第 1 页），从而产生角速度 $\Omega = \hbar/(mR^2)$ 和角动量$L_z/\hbar = 2\pi R\rho^{\mathrm{sf}}$。情况（ii）中，我们考虑一个互补实验：将光晶格极其缓慢地加速至最终角速度 Ω；理解这一过程的最佳方式是变换到与光晶格共转的参考系。这会产生实验室参考系中的角动量 $L_z/\hbar = 2\pi R(\bar{\rho} - \rho^{\mathrm{sf}})$，我们将其解释为正常流体随光晶格共同运动的结果。

有了这一认识，我们将二维数值模拟扩展到旋转谐和囚禁系统中的类似情形：（i）光晶格在实验室参考系中静止（如剪刀模实验），或（ii）光晶格与囚禁势共同旋转。在这两种情况下，我们都使用式（1）中定义的粗粒化来求得超流密度和相位。由此，我们根据 $\psi(\mathbf{r}\ t)$ 计算总转动惯量 I，根据 $\phi(\mathbf{r}\ t)$ 计算超流组分 I^{sf}，并将正常组分定义为两者之差 $I^{\mathrm{n}} = I - I^{\mathrm{sf}}$。

情况（i）：与我们的一维思想实验相同，只有超流体分量会产生响应。因此，尽管 $\nabla\varphi$ 显然是无旋的，但由于 $\rho^{\mathrm{sf}}_{xx} \neq \rho^{\mathrm{sf}}_{yy}$，超流体电流可以是有旋的。在这种情况下，同向旋转和反向旋转贡献的相对大小会随晶格深度变化，导致玻色-爱因斯坦凝聚体的短半轴[上出现角动量密度为负的区域 $\mathcal{L}$（$\mathbf{r}$）图 4(a)]。根据这些模拟计算出的超流体转动惯量 [图 4(c)] 与剪刀模模拟完全一致；正如静态晶格的预期（ $I^{\mathrm{sf}} = I$ 没有正常流动）。

当光晶格沿短半轴方向时，如图（a）和（c）中的绿色曲线所示，反向旋转贡献会随 U_0增大，直到沿$\mathbf{e}_x$和$\mathbf{e}_y$ 方向的偶极模频率反转，此后 I/I_c 变为负值。光晶格沿长半轴方向时则相反，且 I/I_c单调增大。这一新颖的观察证实了由 θ导致的负动能。

情况（ii）：相比之下，对于两种光晶格取向，角动量密度始终为正 [图4(b)]，并且 I/I_c 随晶格深度增加 [图4(d)]。在这种情况下，正常流体与囚禁势共同旋转，从而产生流 $J^n = (-\rho^{\mathrm{n}}_{xx}y,\ \rho^{\mathrm{n}}_{yy}x)\theta$。因此，总 I/I_c 为超流 [17] 与正常流体贡献之和

$$\frac{I}{I_c} = \frac{(f^{\mathrm{sf}}_{xx}\omega_x^2 - f^{\mathrm{sf}}_{yy}\omega_y^2)^2}{(f^{\mathrm{sf}}_{xx}\omega_x^2 + f^{\mathrm{sf}}_{yy}\omega_y^2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)} + \frac{f^{\mathrm{n}}_{xx}\omega_x^2 + f^{\mathrm{n}}_{yy}\omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2}. \quad (4)$$

这一结果与我们的二维 Gross–Pitaevskii 方程模拟一同绘于图4(d)中。虚线表示对 I^{sf}/I_c 的超流贡献，与粗粒化 Gross–Pitaevskii 方程（十字标记）一致。实线和三角形表示相应的总转动惯量，超出超流贡献的部分。这表明出现了正常流体流动。

这一吻合证实，超流贡献源自粗粒化相位φ的梯度，而正常流体贡献则源自 ϑ 在每个光晶格位点内的变化。

讨论与展望——若不进行详细建模，我们就无法通过剪刀模测量获得 I/I_c，这进一步印证了偶极气体中的类似结论 [27]。在这两种情况下，简单的论证都不成立，因为 θ 与比单独的 L_z 更多的内部自由度相耦合。在这一背景下，参考文献 [27]得出结论，剪刀模

确实能在一维密度调制随振荡运动共同移动时给出转动惯量：这与我们对比静态光晶格和旋转光晶格中的运动所得的结果一致。我们的 GPE 模拟表明，这些解析关系可推广至周期大于愈合长度的光晶格。

尽管我们得出存在正常流体的结论，但它与光学晶格不可分割，并且自身不具备任何内部动力学，即它不由动力学运动方程描述。相比之下，自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中的超条纹相 [28–32]以及偶极气体的超固态相 [33–35], 都支持动态密度调制。Leggett表达式适用于这两类系统，意味着超流密度有所降低；在本例中，这种降低的超流密度可能表现出动力学特性，这正是由两流体模型 [11, 12]描述的系统所预期的。

这引发了关于自旋轨道耦合系统中正常流体本质的疑问：在这类系统中，单粒子物理与相互作用之间的相互作用共同决定了类超固体性质。此外，在超条纹相 [31, 32]之外，预计 ρ^{sf} 会降低；此时密度是均匀的（使Leggett表达式不适用），但玻色-爱因斯坦凝聚体的自旋矢量在空间上呈周期性变化。

注： 在稿件准备的早期阶段，我们得知了一项相关研究，该研究在均匀约束的二维玻色-爱因斯坦凝聚体中施加了长周期一维晶格。

作者感谢 S. Stringari 提出这一研究方向，并感谢 S. Stringari 和 S. Roccuzzo 的热烈讨论。此外，W. D. Phillips 和 S. Mukherjee 仔细审阅了稿件。本研究部分得到了美国国家标准与技术研究院以及美国国家科学基金会的支持，资助经费来自联合量子研究所物理学前沿中心（PHY-1430094）和稳健量子模拟量子飞跃挑战研究所（OMA-2120757）。

* 这两位作者贡献相同

[1] J. R. Ensher、D. S. Jin、M. R. Matthews、C. E. Wieman 和 E. A. Cornell, 《物理评论快报》**77**, 4984（1996）。[2] F. Dalfovo、S. Giorgini、L. P. Pitaevskii 和 S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463（1999）。[3] V. F. Sears、E. C. Svensson、P. Martel 和 A. D. B. Woods, 《物理评论快报》**49**, 279（1982）。[4] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **34**, 610（1972）。[5] J. M. Kosterlitz 和 D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181（1973）。[6] A. J. Leggett, 《物理评论快报》**25**, 1543（1970）。[7] L. Tanzi、J. Maloberti、G. Biagioni、A. Fioretti、C. Gab-banini 和 G. Modugno, Science **371**, 1162（2021）。[8] M. A. Norcia、C. Politi、L. Klaus、E. Poli、M. Sohmen、M. J. Mark、R. N. Bisset、L. Santos 和 F. Ferlaino, 《自然》**596**, 357（2021）。

[9] M. P. A. Fisher、P. B. Weichman、G. Grinstein 和 D. S. Fisher, 《物理评论B》40, 546（1989年）。[10] M. Greiner、O. Mandel、T. Esslinger、T. W. Hänsch 和 I. Bloch, 《自然》415, 39（2002年）。[11] D. Guéry-Odelin 和 S. Stringari, 《物理评论快报》83, 4452（1999年）。[12] O. M. Maragò、S. A. Hopkins、J. Arlt、E. Hodby、G. Hechenblaikner 和 C. J. Foot, 《物理评论快报》84, 2056（2000年）。[13] M. E. Fisher、M. N. Barber 和 D. Jasnow, 《物理评论A》8, 1111（1973年）。[14] 此外，凝聚态模必须具有可分离的形式 [36]。[15] 我们通过突然施加晶格势并拟合由此产生的卡皮察-狄拉克散射 U_0 ，对晶格深度 [37]进行了标定。[16] A. Ramanathan、S. R. Muniz、K. C. Wright、R. P. Ander-son、W. D. Phillips、K. Helmerson 和 G. K. Campbell, 《科学仪器评论》83, 083119（2012年）。[17] 参见在线补充材料。[18] R. C. Clark 和 G. H. Derrick, 《固态与超流体理论中的数学方法：苏格兰大学暑期学校》（施普林格，2013年）。[19] L.-C. Ha、L. W. Clark、C. V. Parker、B. M. Anderson 和 C. Chin, 《物理评论快报》114, 055301（2015年）。[20] 在高纵横比的准一维玻色-爱因斯坦凝聚体中，纵向声速从 $\sqrt{\mu/m}$降低了 $\sqrt{2}$ 倍。我们$_z$方向的紧致约束预计会导致类似的降低，但布拉格谱会因$_{x}$-$_{y}$ 平面中近似各向同性的托马斯-费米剖面而呈现非均匀展宽 [21] 。 k 为使其成为良好量子数，我们采用周期性边界条件对无囚禁系统进行了建模。通过选择化学势，使得在没有光晶格时的声速达到观测到的 3 mm/s。[22] E. L. Andronikashvili, 《实验与理论物理学杂志》16, 780。（1946年）。[23] K. Jiménez-García 和 I. B. Spielman, “冷原子与分子年度评论: 第2卷”, （世界科学出版社，2013年）第145–191页。[24] L. Pitaevskii 和 S. Stringari, 《玻色-爱因斯坦凝聚与超流性》, 第164卷（牛津大学出版社，2016年）。[25] 这些论证并不限于为 2π的倍数的相位绕转。[26] N. R. Cooper 和 Z. Hadzibabic, 《物理评论快报》104, 030401 2010（）。[27] S. M. Roccuzzo、A. Recati 和 S. Stringari, 《物理评论A》105, 023316（2022年）。[28] Y. J. Lin、K. Jiménez-García 和 I. B. Spielman, 《自然》471, 83（2011年）。[29] J.-R. Li、J. Lee、W. Huang、S. Burchesky、B. Shteynas、F. Ç. Top、A. O. Jamison 和 W. Ketterle, 《自然》543, 91 2017（）。[30] Y. Li、G. I. Martone、L. P. Pitaevskii 和 S. Stringari, 《物理评论快报》110, 235302（2013年）。[31] Y.-C. Zhang、Z.-Q. Yu、T. K. Ng、S. Zhang、L. Pitaevskii 和 S. Stringari, 《物理评论A》94, 033635（2016年）。[32] G. I. Martone 和 S. Stringari, 《SciPost物理》11, 92（2021年）。[33] L. Tanzi、E. Lucioni、F. Famà、J. Catani、A. Fioretti、C. Gabbanini、R. N. Bisset、L. Santos 和 G. Modugno, 《物理评论快报》122, 130405（2019年）。

[34] F. Böttcher、J.-N. Schmidt、M. Wenzel、J. Hertkorn、M. Guo、T. Langen 和 T. Pfau, 《物理评论X》**9**，011051（2019年）。[35] L. Chomaz、D. Petter、P. Ilzhöfer、G. Natale、A. Traut-mann、C. Politi、G. Durastante、R. M. W. van Bijnen、A. Patscheider、M. Sohmen、M. J. Mark 和 F. Ferlaino, 《物理评论X》**9**, 021012 (2019年)。[36] A. J. Leggett, 《统计物理学杂志》**93**, 927 (1998年)。[37] J. H. Huckans, I. B. Spielman, B. L.Tolra, W.D. Phillips, and J. V. Porto, 《物理评论A：原子、分子与光学物理》**80**, 043609 (2009年)。