arXiv:2301.01266v1 [math.AG] 3 Jan 2023

希格斯-库仑　　阿贝尔 GLSM 中的 B 对应与墙穿越　　S

KONSTANTIN ALESHKIN 和刘秋珠·梅丽莎·刘

Dedicated to the memory of Professor Bumsig Kim

Abstract. 我们利用 Favero 和 Kim 的虚拟矩阵分解，计算阿贝尔 GLSM 的 I-函数和中心荷。在卡拉比-丘情形下，我们通过显式积分公式给出中心荷的解析延拓。相关积分称为半球配分函数，我们将这种积分表示称为希格斯-库仑对应。随后，我们利用它证明中心荷的 GIT 稳定性墙穿越。

Contents

1. 引言 1 2. 规范线性σ模型的几何与 A-模型态空间 2 3. B 膜范畴与 K 理论 10 4. 希格斯分支 10 5. 库仑支 32 附录 A. 多元超几何函数的收敛性 41 参考文献 46

1. Introduction

二维规范线性σ模型（GLSM）由 Witten 于 1993年提出。根据 [FJR], , GLSM 的输入数据是一个五元组（V、G、$\mathbb{C}^*_R$、W、ζ），其中 V是有限维复向量空间， $G \subset \mathrm{GL}(V)$是称为规范群的约化线性群， $\mathbb{C}^*_R \cong \mathbb{C}^*$ 在线性作用于 V 上，且该作用与 G-作用交换； $W : V \to \mathbb{C}$ 是一个 G-不变多项式，并且相对于 $\mathbb{C}^*_R$-作用是拟齐次的； ζ是一个 G-特征，满足性质 $V_G^{ss}(\zeta) = V_G^s(\zeta)$，即每个 ζ-半稳定点都是 ζ-稳定的，因此 GIT 商栈 $\mathcal{X}_\zeta = [V/\!/_\zeta G] = [V_G^{ss}(\zeta)/G]$ 是一个轨形（即具有平凡一般稳定子的光滑 DM 栈）。稳定条件空间是ˆ $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{C}} Z(G)}$，其中ˆ$G = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$是 G特征群，而 $Z(G)$是 G的中心；该空间分解为称为相的壁室。 G-不变多项式W 下降为 $\mathrm{w}_\zeta : \mathcal{X}_\zeta \to \mathbb{C}$；二元组（$\mathcal{X}_\zeta$，$\mathrm{w}_\zeta$）是一个兰道–金兹堡（LG）模型，其中 w_ζ 称为超势。GLSM（V、G、$\mathbb{C}^*_R$、W、ζ）的不变量，粗略地说，是临界轨迹 $\mathcal{Z}_\zeta := \mathrm{Crit}(\mathrm{w}_\zeta) = [(\mathrm{Crit}(W) \cap V_G^{ss}(\zeta))$中的曲线虚计数；该临界轨迹通常假设为紧致/真，但可能是奇异的。

GLSM 的不同相（即仅稳定性参数的选择不同的 GLSM）彼此密切相关。例如，设 $G = \mathbb{C}^*$ 按权重 (1，1，1，1，1，−5) 作用于 $V = \mathbb{C}^6$，其中 $W = pW_5W_5 = x_1^5 + \cdots + x_5^5$ 是 5 个变量上的费马五次多项式。在 CY/几何相 $\zeta > 0$， $\mathcal{X}_\zeta = K_{\mathbb{P}^4}$， $\mathcal{Z}_\zeta = X_5 := \{W_5 = 0\} \subset \mathbb{P}^4$ 是费马五次三维簇，而 GLSM 不变量（相差一个符号）是 X_5的 Gromov-Witten （GW）不变量。在 LG 相 $\zeta < 0$， $\mathcal{X}_\zeta \cong [\mathbb{C}^5/\mu_5]$，其中 μ_5 是 5 次单位根群，它在 $\mathbb{C}^5$ 上按对角方式作用， $\mathcal{Z}_\zeta$ 支持在原点，而 GLSM 不变量是仿射 LG 模型（$[\mathbb{C}^5/\mu_5]$， W_5）的 Fan-Jarvis-Ruan-Witten（FJRW）不变量。Chiodo-Ruan [CR] 证明了五次三维簇的零亏格 LG/CY 对应，该对应联系了 X_5 的 GW 不变量与（$[\mathbb{C}^5/\mu_5]$， W_5）的 FJRW 不变量。他们的证明可概括为两个步骤。

(1)（ϵ-墙穿越）在 CY（分别为 LG）相中，Givental 型镜像定理表明，支配属零 GW（分别为 FJRW）的 J函数与 I函数相关，后者可用显式超几何级数表示；二者通过称为镜像映射的显式变量代换联系起来。(2)（ζ-墙穿越） I函数具有 Mellin–Barnes 积分表示。两个相中的 I函数通过 $\mathbb{C}$中积分路径的变形所给出的解析延拓彼此相关。

将步骤 (1) 解读为 ϵ 墙穿越的观点出现在后来的工作中。对于每个 $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$，Ciocan-Fontanine–Kim– Maulik [CKM] 引入了 ϵ-稳定拟映射到某些 GIT 商 $W/\!/G$。Ciocan-Fontanine 和 Kim [CK]

引入了 J^ϵ，它是由亏格零 ϵ-稳定拟映射定义的不变量生成函数；当 $\epsilon \to 0^+$ 和 $\epsilon \to +\infty$ 分别取值时，J^ϵ 分别专化为 I-函数和 J-函数。在存在良好环面作用的情况下，他们证明了 ϵ 墙穿越，它通过变量代换将任意 $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ 的 J^ϵ 与 J-函数 $J = J^\infty$ 联系起来。他们显式计算了 I-函数 $I = J^{0+}$。特别地，他们重新得到几何相中的镜像定理，该定理最早由 Givental [Gi96] 和 Lian-Liu-Yau [LLY] 证明。LG 相中的镜像定理最早由 Chiodo-Ruan [CR] 证明，后来 Ross-Ruan [RR] 又通过 ϵ 墙穿越重新证明。

对于一般的 GLSM，GLSM 不变量定义为在 ϵ-稳定 LG 拟映射的模空间上对虚循环进行积分。对于窄扇区，虚循环由 Fan-Jarvis-Ruan [FJR] 通过余截面局部化构造；对于窄扇区和宽扇区，Favero-Kim [FK] 则通过矩阵分解构造。Favero-Kim 的构造推广了此前针对仿射 LG 模型 [PV16]和凸混合模型 [CFGKS]的构造。当$\epsilon > 0$时，定义依赖于一个良好提升 ζ，它是群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ 的特征，由 G 和 $\mathbb{C}^*_R$ 生成，且满足 $V_\Gamma^{ss}(\tilde{\zeta}) = V_G^{ss}(\zeta)$。这种良好提升并非总是存在。在 $\epsilon = 0^+$ 处，不需要良好提升。本文聚焦于 $\epsilon \to 0^+$ 稳定性条件，研究属零 GLSM 不变量以及 ζ-墙穿越，涉及满足 $G = (\mathbb{C}^*)^\kappa$ 的~阿贝尔 GLSM。在此情形下，$\mathcal{X}_\zeta$ 是一个光滑环面 DM 叠。令 T 为 $\mathrm{GL}(V)$ 的对角子群。利用 Favero-Kim [FK]，的工作，我们定义并计算 K 理论 GLSM I-函数 $I^K_{\mathbf{w}}$，其取值于惯性叠 $I\mathcal{X}_\zeta$ 上矩阵分解范畴的 K 理论；同时定义并计算（上同调）GLSM I-函数 $I_{\mathbf{w}}$，其取值于 GLSM 态空间 $H_{\mathbf{w}}$。我们还定义并计算 $(V, G, \mathbb{C}^*_R, 0, \zeta)$ 的 K 理论$\widetilde{T}$-等变 I-函数 $I^K_{\widetilde{T}}$，其取值于 $K_{\widetilde{T}}(I\mathcal{X}_\zeta)$；以及 $(V, G, \mathbb{C}^*_R, 0, \zeta)$ 的 $\widetilde{T}$-等变 I-函数 $I_{\widetilde{T}}$，其取值于 $H_{\widetilde{T}}(I\mathcal{X}_\zeta)$。

在 Gromov-Witten 理论中，I-函数无法捕捉上同调 [Ir09] 上的整结构。Hosono 定义了一种称为中心荷的对象，它能够体现伽马整结构。整结构对于积分表示至关重要。中心荷是幂级数，由目标流形的 J-函数以及相干层导出范畴中的对象共同构造而成。Hori 和 Romo [HR]构造了称为半球配分函数的显式解析函数，并猜想在适当情形下，它们的幂级数展开等于中心荷。我们将矩阵分解 $\mathfrak{B}$ of $(\mathcal{X}_\zeta, \mathrm{w}\zeta)$ 的 GLSM 中心荷定义为 $Z_{\mathbf{w}}(\mathfrak{B}) = \langle I_{\mathbf{w}}, \Gamma_{\mathbf{w}}\, \mathrm{ch}_{\mathbf{w}}([\mathfrak{B}])\rangle$，其中 $\Gamma_{\mathbf{w}}$ 是 Iritani 的 Γ-类的适当版本，而 $[\mathfrak{B}]$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 K-~理论类。我们还将 $\mathcal{X}_\zeta$ 上一个 T等变完全复形 $\mathfrak{B}$ 的 T等变中心荷定义为$Z^T(\mathfrak{B}) = \langle I_{\widetilde{T}}, \Gamma_{\widetilde{T}} \mathrm{ch}\, \tilde{\tau}([\mathfrak{B}])\rangle$。我们证明，我们的中心荷确实具有半球配分函数形式的积分表示（定理 5.6）。我们将这一表示称为希格斯-库仑对应，因为在物理学中，GLSM 中心荷可以通过希格斯支定位的一个版本获得，而半球配分函数则通过库仑支定位计算得到（参见 [BC]）。我们得到的积分表示连续依赖于复化稳定性参数 $\theta = \zeta + 2\pi\sqrt{-1}B$，并且对 ζ 没有任何限制。

按照这一理念，ζ-墙穿越可通过在 ζ 中的解析延拓立即得到（定理 5.21）。值得注意的是，相关中心荷的矩阵分解通过傅里叶-穆凯变换 [BP10]彼此关联。设 $\zeta_\pm$表示两个相邻壁室中的稳定性条件，且 $\mathcal{B}_+$ 是处于与 ζ_+对应的相中的一个矩阵分解。那么，$\mathcal{B}_+$ 的中心荷的解析延拓就是 $\mathcal{B}_-$ =FM($\mathcal{B}_+$)的一个中心荷。特定的傅里叶-穆凯核由 B =Im(θ)/2π 选定，而积分表示的收敛性等价于所谓的等级限制规则 [HL、BFK、CIJS]。

(1.1)
$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{B} & \\ {\scriptstyle \pi_+}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \pi_-} \\ \mathcal{B}_+ & \xrightarrow{\quad FM \quad} & \mathcal{B}_- \end{array}$$

致谢。我们感谢 Daniel Halpern-Leistner、Kentaro Hori、Hiroshi Iritani、Andrei Okounkov、Tudor P˘adurariu、Renata Picciotto、Alexander Polishchuk、Che Shen、Yefeng Shen、Mark Shoemaker 和 Yang Zhou 所提供的有益交流。感谢西蒙斯几何与物理中心（SCGP）在可积性、计数几何与量子化项目（2022年8月22日至9月23日）期间给予我们的热情接待与支持，本论文的部分工作即在此期间完成。作者得到美国国家科学基金会 NSF DMS-1564497 项目的部分资助。

2. Geometry of gauged linear sigma models and A-model state spaces

本文中的所有概形和代数栈都定义在 Spec$\mathbb{C}$ 上，其中 $\mathbb{C}$ 是复数域。

2.1. 规范线性σ模型。我们按照 [FJR、FK] 的做法，从一般规范线性σ模型（GLSM）的设定开始。我们在第 4 节中的部分表述，更接近 [CJR] 中更一般的设定。GLSM 的输入数据是一个 5 元组（V，G，$\mathbb{C}^*_R$，W，ζ），其中

(1)（线性空间） $V = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}] \simeq \mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 是一个有限维复向量空间，其中 $\boldsymbol{\kappa}$ =维数为 G。(2)（规范群） $G \subset \mathrm{GL}(V)$ 是一个约化代数群。(3)（向量R对称性） $\mathbb{C}^*_R \cong \mathbb{C}^*$ 在线性且忠实地作用于 V，因此我们可以将 $\mathbb{C}^*_R$ 视为 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群。我们假设：(a) 交集 $G \cap \mathbb{C}^*_R$ 是有限的；(b) $\mathbb{C}^*_R$作用与 G作用可交换。有限群 $G \cap \mathbb{C}^*_R$ 必为循环群，由一个有限阶为 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 的元素 J生成，该元素在下文的公式（2.2）中给出。满射群同态 $\mathbb{C}^*_R \to \mathbb{C}^*_\omega := \mathbb{C}^*/\langle J\rangle$ 是一个次数为 r 的覆盖映射。令 $\Gamma := G\mathbb{C}^*_R \subset \mathrm{GL}(V)$ 为由 G 和 $\mathbb{C}^*_R$生成的子群。那么我们有如下群的短正合列：

$$1 \to G \to \Gamma \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*_\omega \to 1. \tag{2.1}$$

由 (b)， Γ 对 V 的作用在光滑 Artin 叠 $[V/G]$ 上诱导出一个 $\mathbb{C}^*_\omega$ 作用，其意义如 [Ro] 所述。R 荷为

$$(q_1, \dots, q_{n+\boldsymbol{\kappa}}) = \Big(\frac{2c_1}{r}, \dots, \frac{2c_{n+\boldsymbol{\kappa}}}{r}\Big),$$

其中 $c_1, \dots, c_{n+\boldsymbol{\kappa}} \in \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{C}^*_R$ 对 $V \simeq \mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 作用的权。（注意，$\gcd(c_1, \dots, c_{n+\boldsymbol{\kappa}}) = 1$，因为 $\mathbb{C}^*_R$ 在 V 上忠实作用。）令

$$J = (e^{2\pi\sqrt{-1}c_1/r}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}c_{n+\boldsymbol{\kappa}}/r}). \tag{2.2}$$

(4)（超势） $W : V \to \mathbb{C}$ 是一个 G-不变正则函数，它是关于 $\mathbb{C}^*_R$ 对 V 作用的次数为 r 的拟齐次多项式；换言之，$W \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}]^G$ 和

$$W(t^{c_1}x_1, \dots, t^{c_{n+\boldsymbol{\kappa}}}x_{n+\boldsymbol{\kappa}}) = t^r W(x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}), \quad t \in \mathbb{C}^*_R, \quad (x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}) \in V.$$

它下降为函数 $\mathbf{w}$： $[V/G] \to \mathbb{C}$，关于 $\mathbb{C}^*_\omega$ 对 $[V/G]$ 的作用，其次数为 1。

(5)（稳定性条件） $\zeta \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^*)$，其中 $G^{\mathrm{ab}} = G/[G, G]$ 是 G的阿贝尔化。我们将 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ 视为加法群，并令 $\chi^\zeta : G \to \mathbb{C}^*$ 表示相应的 G-特征。令$V^{ss}_G(\zeta)$（分别地， $V^s_G(\zeta)$）为 V 中由平凡线丛 $V \times \mathbb{C} \to V$上的$G$-线性化所确定的半稳定（分别地，稳定）点集，该线性化由 $g \cdot (v, t) = (g \cdot p, \chi^\zeta(g)t)$给出。我们假设$V^s_G(\zeta) = V^{ss}_G(\zeta)$。于是，商叠 $\mathcal{X}_\zeta := [V^{ss}_G(\zeta)/G]$ 是一个轨形（即具有平凡一般稳定子的光滑 Deligne-Mumford 叠），其维数为 n。GIT 商 $X_\zeta := V /\!\!/_\zeta G = V^{ss}_G(\zeta)/G$ 是 $\mathcal{X}_\zeta$的粗模空间。

令 $\mathcal{Z}_\zeta := [(\mathrm{Crit}(W) \cap V^{ss}_G(\zeta))/G]$ 为$\mathbf{w}_\zeta := \mathbf{w}|_{\mathcal{X}_\zeta} : \mathcal{X}_\zeta \to \mathbb{C}$的临界轨迹。若 $\mathrm{Crit}(W) \cap V^{ss}(\zeta)$ 非奇异，我们称 ζ处于几何相，这意味着 $\mathcal{Z}_\zeta$ 是一个轨形。

GLSM 的中心荷 为（参见 [FJR，定义 3.2.3]）

$$\hat{c} := \dim V - \dim G - 2\hat{q} = n - 2\hat{q}, \quad \text{where } \hat{q} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} q_j = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} c_j. \tag{2.3}$$

注 2.1. 根据上述条件 *(4)*，超势 W 相对于 Γ 是半不变的，其含义见 *[PV11，第 2], 节*，即

$$W(\gamma \cdot x) = \chi(\gamma)W(x) \quad \textit{for any } \gamma \in \Gamma \textit{ and } x \in V. \tag{2.4}$$

注 2.2. 本文中的稳定性条件 ζ 是 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ 中的一个元素，对应于 *[FJR, FK]*中的符号 θ。本文中的一维环面 $\mathbb{C}^*_\omega$ 对应于 *[CJR]*中的$\mathbf{C}^*_\omega$。

注 2.3. 此处我们不假设临界轨迹 $\mathcal{Z}_\zeta$ 是适当的。这样便可将不含超势的情形作为一个特例纳入考虑：此时超势和 R-荷均为零，即 $W = 0$ 和 $q_j = 0$对于 $j = 1, \dots, n + \boldsymbol{\kappa}$；注意在这个特例中， V上的 $\mathbb{C}^*_R$-作用是平凡的，因此特别地，它不是忠实作用。

2.2. **阿贝尔 GLSM**。 本文其余部分将讨论规范群 $G = (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 为复代数环面的阿贝尔 GLSM。在此情形下， $[G, G] = \{1\}$ 和 $G^{\mathrm{ab}} = G$。

在 GL(V) 的一个内自同构下，不妨假设 $\rho_V\colon\ G \to \mathrm{GL}(V)$ 的像包含于~对角环面 $T \simeq (\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}} \subset \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_{n+\boldsymbol{\kappa}}(\mathbb{C})$ 中。于是， $\mathcal{X}_\zeta$ 是一个 n 维环面轨形，其粗~模空间 X_ζ 是一个半射影单纯环面簇，并且包含 $T := T/G \cong (\mathbb{C}^*)^n$ 作为扎里斯基稠密开子集。我们有一个阿贝尔群的短正合列

$$1 \to G \xrightarrow{\rho_V} \widetilde{T} \longrightarrow T \to 1. \tag{2.5}$$

~**注 2.4**。 本小节中的记号与 *[CIJ]*中的记号相似，但略有不同：本文中的 G、 T 和 T分别对应于 *[CIJ* 第 *4* 节中的 K、 T 和 $\mathcal{Q}$ *3],* ；本文中的 $\boldsymbol{\kappa}$ 和 n 分别对应于 *[CIJ* 第 *4* 节中的 r 和 $m - r$ *1],*。

- 对 (4.38) 应用 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, –)$，得到如下余特征格的短正合列

$$0 \to \mathbb{L} := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, G) \longrightarrow \widetilde{N} := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \widetilde{T}) \longrightarrow N := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) \to 0, \tag{2.6}$$

~其中 $\mathbb{L} \cong \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\kappa}}$、 $N \cong \mathbb{Z}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 和 $N \cong \mathbb{Z}^n$。

- 对 (4.38) 应用 $\mathrm{Hom}(–, \mathbb{C}^*)$，或者等价地对 (2.6) 取对偶，得到如下特征格的短正合列:

$$0 \to M := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \widetilde{M} := \mathrm{Hom}(\widetilde{T}, \mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathbb{L}^\vee := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) \to 0 \tag{2.7}$$

~映射 $\mathbb{L} \to N \cong \mathbb{Z}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 由 $(\mathsf{D}_1, \dots, \mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}})$ 给出，其中 $\mathsf{D}_i \in \mathbb{L}^\vee$。稳定性条件 ζ是 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*) = \mathbb{L}^\vee$中的一个元素。若选取 $\mathbb{L}$的一个 $\mathbb{Z}$-基 $\{\xi_1, \dots, \xi_{\boldsymbol{\kappa}}\}$ （这等价于选取一个同构$G \simeq (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$），并令 $\{\xi_1^*, \dots, \xi_{\boldsymbol{\kappa}}^*\}$ 为 $\mathbb{L}^\vee$的对偶 $\mathbb{Z}$-基，则

$$\mathsf{D}_i = \sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} Q_i^a \xi_a^*$$

对某个 $Q_i^a \in \mathbb{Z}$。给定任意 $\mathsf{t} = \sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} t_a \xi_a^* \in \mathbb{L}^\vee$， 其中 $t_1, \dots, t_{\boldsymbol{\kappa}} \in \mathbb{Z}$， 令 $\chi^{\mathsf{t}}\colon\ G \to \mathbb{C}^*$ 为相应的 G特征，定义如下

$$\chi^{\mathsf{t}}(s_1, \dots, s_{\boldsymbol{\kappa}}) = \prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} s_a^{t_a}. \tag{2.8}$$

~那么映射 $G \simeq (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}} \to T \cong (\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 定义如下

$$s = (s_1, \dots, s_{\boldsymbol{\kappa}}) \in G \mapsto \big(\chi^{\mathsf{D}_1}(s), \dots, \chi^{\mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}}}(s)\big) \in \widetilde{T}, \quad \text{where } \chi^{\mathsf{D}_i}(s) = \prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} s_a^{Q_i^a}. \tag{2.9}$$

给定一个格 格 $\Lambda \cong \mathbb{Z}^r$ 和域 $\mathbb{F}$，我们定义 $\Lambda_{\mathbb{F}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F} \cong \mathbb{F}^r$；本文中， $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$或 $\mathbb{C}$.

~**注记 2.5.** 映射 $G \to T$为单射，当且仅当$\mathsf{D}_1, \dots, \mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 在实数集 $\mathbb{Z}$上生成格 $\mathbb{L}^\vee$。在第 *5* 节（库仑支）中，我们采用较弱的假设，即$\mathsf{D}_1, \dots, \mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 在实数集 $\mathbb{Q}$上张成向量空间 $\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}^\vee$；或者~等价地说，群同态 $G \to T$ 的核 K 是有限的。于是 $\mathcal{X}_\zeta$ 是一个具有一般稳定子 K的光滑环面 *DM* 叠；当且仅当 K 是平凡的，它才是环面轨形。在第 *4* 节（希格斯分支）中，也可以在这一一般性下开展研究。我们在第 *4* 节假设 K 是平凡的，主要是因为 *[FJR]* 和 *[FK]* 都作此假设；不过在由 *[CCK]*研究的轨形拟映射理论中， K 可以是非平凡的。该理论可视为一种不带超势的 *GLSM* 数学理论。

令 $G_{\mathbb{R}} \simeq U(1)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 为 $G \simeq (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 的极大紧子群。那么 $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}$ 与 $G_{\mathbb{R}}$ 的李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 有典范同构。 G 在 $V = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}]$上的作用限制为 K¨ahler 流形 $(V, \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} dx_i \wedge d\bar{x}_i)$ 上的 Hamiltonian $G_{\mathbb{R}}$ 作用，其动量映射为

$$\mu : V \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^\vee = \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^\vee, \quad (x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} Q_i^a |x_i|^2 \xi_a^*.$$

Then

$$\mathcal{X}_\zeta = [V_G^{ss}(\zeta)/G] = [\mu^{-1}(\zeta)/G_{\mathbb{R}}].$$

从这一视角来看，稳定性条件 ζ 是动量映射 μ 的正则值，也可以是 $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^\vee \cong \mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}}$ 中的一个元素。

2.3. 反锥与扩展叠状扇。 </style三元组（G，ζ）是给定阿贝尔 GLSM 的输入数据（V，G，$\mathbb{C}^*_{\mathbb{R}}$，$W$，$\zeta$）的一部分，它确定了一组反锥 $\mathcal{A}_\zeta$ 和一个扩展叠状扇 $\mathbf{\Sigma}_\zeta=(N,\ \Sigma_\zeta,\ \beta,\ S_\zeta)$。我们将在本小节中对它们进行描述，并用反锥来描述 $V_G^{ss}(\zeta)\subset V$。

我们固定一个同构 $V=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}}]\cong\mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$，它确定了 N 的一个有序 $\mathbb{Z}$-基 $(\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_{n+\boldsymbol{\kappa}})\widetilde{\ }$。特别地，

$$\widetilde{N}=\bigoplus_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\mathbb{Z}\widetilde{e}_i.$$

$\widetilde{\ }$令 $v_i\in N$ 为 e_i 在 $N\to N$ 下的像。定义 $\beta=(v_1,\dots,v_{n+\boldsymbol{\kappa}})$。G

iv给定 $\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}$的一个子集 I，令 $I'=\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}\setminus I$ 为其补集，并定义 e

$$\angle_I=\{\sum_{i\in I}a_i\mathsf{D}_i:a_i\in\mathbb{R},a_i>0\}\subset\mathbb{L}^\vee_{\mathbb{R}},\quad \sigma_I=\{\sum_{i\in I}a_iv_i:a_i\in\mathbb{R},a_i\geq 0\}\subset N_{\mathbb{R}}.$$

若 $I=\emptyset$ 为空集，则定义 $\sigma_\emptyset=\{0\}$。

For 在 V 上一个固定的 G-作用下，一个稳定性条件 $\zeta\in\mathbb{L}^\vee_{\mathbb{R}}$ 确定以下三个集合 .

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\zeta &= \{I\subset\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}:\zeta\in\angle_I\},\\ \Sigma_\zeta &= \{\sigma_I:I'\in\mathcal{A}_\zeta\},\\ S_\zeta &= \{i\in\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}:\sigma_{\{i\}}\notin\Sigma_\zeta\}=\{i\in\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}:\{i\}'\notin\mathcal{A}_\zeta\}.\end{aligned}$$

注意，对于任意 $I\in\mathcal{A}_\zeta$，都有 $S_\zeta\subset I$。

假设 2.6。 我们选择稳定性条件 $\zeta\in\mathbb{L}^\vee_{\mathbb{R}}$，使其满足以下三个等价条件。

(i) 对任意 $I\in\mathcal{A}_\zeta$, $\{\mathsf{D}_i:\ i\in I\}$ 作为实数集 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间张成 $L^\vee_{\mathbb{Q}}$。*(ii)* 对任意 $I\in\mathcal{A}_\zeta$, $\{v_i:\ i\in I'\}$ 是 $N_{\mathbb{Q}}$ 中一组线性无关向量，或者等价地，$\sigma_{I'}$ 是 $N_{\mathbb{R}}$ 中的单纯锥。*(iii)* Σ_ζ 是 $N_{\mathbb{R}}$中的单纯扇。

Σ_ζ 中的元素称为锥，而 $\mathcal{A}_\zeta$ 中的元素称为反锥。由 (i) 可知，任意反锥 $I\in\mathcal{A}_\zeta$ 的基数 $|I|$ 大于或等于 $\boldsymbol{\kappa}$。令 $\Sigma_\zeta(d)$ 表示 Σ_ζ 中 d 维锥的集合。那么 $\sigma\in\Sigma_\zeta(d)$ 当且仅当$\sigma=\sigma_I$，其中 $|I|=d$ 和 $I'\in\mathcal{A}_\zeta$。令

$$\mathcal{A}^{\min}_\zeta=\{I\in\mathcal{A}_\zeta:|I|=\boldsymbol{\kappa}\}=\{I\in\mathcal{A}_\zeta:\sigma_{I'}\in\Sigma_\zeta(n)\}$$

为极小反锥的集合。

ζ的无关理想是 $\mathbb{C}[x]$ 中的理想 $B_\zeta:=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}}]$，由 $\{x_I:=\prod_{i\in I}x_i:\ I\in\mathcal{A}_\zeta\}$生成。令$Z_\zeta=Z(B_\zeta)$为 $V=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x]$ 中由无关理想 $B_\zeta\subset\mathbb{C}[x]$定义的闭子簇，并令 $U_\zeta=V\setminus Z_\zeta$。若 $\zeta\in\mathbb{L}^\vee$ 是一个 G 特征，则 $U_\zeta=V_G^{ss}(\zeta)$，且 $Z_\zeta=V_G^{un}(\zeta)$是由 ζ定义的不稳定点集合。

对于任意 $I\in\mathcal{A}_\zeta$，定义

$$V_I=V\setminus Z(x_I)=\{(x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V:x_i\neq 0\text{ if }i\in I\}=(\mathbb{C}^*)^I\times\mathbb{C}^{I'}. \tag{2.10}$$

Then

$$U_\zeta=\bigcup_{I\in\mathcal{A}_\zeta}V_I.$$

注意，若 I，$J\in\mathcal{A}_\zeta$且 $I\subset J$，则 $V_J\subset V_I$。因此，

$$U_\zeta=\bigcup_{I\in\mathcal{A}^{\min}_\zeta}V_I.$$

现在我们给出 Z_ζ的另一种描述。若 $I\subset\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}$且 $I\notin\mathcal{A}_\zeta$，或者等价地，若 $\sigma_{I'}\notin\Sigma_\zeta$，定义

$$Z_I=\mathbb{C}^I\times\{0\}^{I'}=\{(x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V:x_i=0\text{ if }i\in I'\}.$$

Then

$$Z_\zeta=\bigcup_{I\notin\mathcal{A}_\zeta}Z_I.$$

定义

$$C_\zeta:=\bigcap_{I\in\mathcal{A}_\zeta}\angle_I=\bigcap_{I\in\mathcal{A}^{\min}_\zeta}\angle_I\subset L^\vee_{\mathbb{R}}.$$

开锥 C_ζ 称为 [CIJ] 中的扩展丰裕锥。它是稳定条件空间中的一个壁室：若$\zeta'\in C_\zeta$，则 $\Sigma_{\zeta'}=\Sigma_\zeta$ 且 $U_{\zeta'}=U_\zeta$。我们回顾以下事实。

(1) 商叠

$$\mathcal{X}_\zeta = [U_\zeta/G]$$

是由叠状扇 $(N,\ \Sigma_\zeta,\ \beta)$ 定义的光滑环面Deligne-Mumford叠。关于以叠状扇定义环面 Deligne-Mumford 叠的内容，参见 Borisov-Chen-Smith [BCS] 。

(2) $\mathcal{X}_\zeta$ 的粗模空间是范畴商（也是几何商）

$$X_\zeta = U_\zeta/G$$

它是由单纯扇 $\Sigma_\zeta \subset N_{\mathbb{R}}$ 定义的环面簇。关于环面簇的介绍，尤其是以扇定义一般正规环面簇的内容，参见 [Fu93,CLS] 。

(3) 如果 $\zeta \in \mathbb{L}^\vee$ 是一个 G-特征，那么

$$\mathcal{X}_\zeta = [V_G^{ss}(\zeta)/G]$$

是 GIT 商栈，并且

$$X_\zeta = V_G^{ss}(\zeta)/G = V /\!\!/_\zeta G$$

是 GIT 商。

(4) 三元组 $(V,\ G,\ \zeta)$ 确定了 $\mathcal{X}_\zeta$ 作为商叠 $[U_\zeta/G]$ 的一种特定表示，以及一个扩展叠状扇

$$\mathbf{\Sigma}_\zeta = (N, \Sigma_\zeta, \beta, S_\zeta),$$

由 Jiang [Ji08] 引入的一个概念。

2.4. **闭环面子叠及其一般稳定子**。 T-除子 $D_j = \{x_j = 0\} \subset V = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[x]$ 限制为一个 T-除子 $D_j \cap U_\zeta \subset U_\zeta$，后者下降为环面代数堆 $\mathcal{X}_\zeta = [U_\zeta/G]$ 中的一个 T-除子 $\mathcal{D}_j = [(D_j \cap U_\zeta)/G]$，以及环面簇 X_ζ 中的一个 T-除子 D_j。注意，如果 $j \in S_\zeta$，$\mathcal{D}_j$ 和 D_j 为空。

给定任意 $\sigma \in \Sigma_\zeta(d)$，其中 $0 \le d \le n$，对于某个满足 $|I| = \boldsymbol{\kappa} + n - d$ 的 $I \in \mathcal{A}_\zeta$，我们有 $\sigma = \sigma_{I'}$。令

$$\mathcal{V}(\sigma) = \bigcap_{i \in I'} \mathcal{D}_i \subset \mathcal{X}_\zeta, \quad V(\sigma) = \bigcap_{i \in I'} D_i \subset X_\zeta.$$

那么，$\mathcal{V}(\sigma)$（分别地，$V(\sigma)$）是 $\mathcal{X}_\zeta$（分别地，X_ζ）中的一个 $(n-d)$ 维闭环面子叠（分别地，子簇）。环面叠 $\mathcal{V}(\sigma)$ 的一般稳定子是有限群

$$G_\sigma = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\chi^{\mathsf{D}_i}) \subset G$$

其中 $\chi^{\mathsf{D}_i}\colon G \to \mathbb{C}^*$ 的定义同 (2.9)。若 $\tau,\ \sigma \in \Sigma_\zeta$ 且 $\tau \subset \sigma$，则 $\mathcal{V}(\tau) \supset \mathcal{V}(\sigma)$，因此 $G_\tau \subset G_\sigma$。特别地，$\mathcal{V}(\{0\}) = \mathcal{X}_\zeta$，且 $G_{\{0\}}$ 是平凡的。若 $I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}$，则 $\sigma_{I'} \in \Sigma_\zeta(n)$，并且 $\mathfrak{p}_I := \mathcal{V}(\sigma_{I'}) \simeq [\bullet/G_{\sigma_{I'}}] = BG_{\sigma_{I'}}$ 是唯一的 T-不动点

$$\mathcal{X}_I := [V_I/G] \simeq \left[\left((\mathbb{C}^*)^I \times \mathbb{C}^{I'}\right)/G\right] \simeq [\mathbb{C}^{I'}/G_{\sigma_{I'}}] \simeq [\mathbb{C}^n/G_{\sigma_{I'}}].$$

这里 $\bullet = \mathrm{谱}\mathbb{C}$ 是一个点，$BG_{\sigma_{I'}}$ 是 $G_{\sigma_{I'}}$ 的分类空间，而 V_I 由方程 (2.10 定义).

2.5. **线丛**。令

$$U_j^T := \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\zeta}(-\mathcal{D}_j) \in \mathrm{Pic}_T(\mathcal{X}_\zeta), \quad u_j^T := -(c_1)_T(U_j^T) \in H_T^2(X_\zeta; \mathbb{Q}).$$

那么 u_j^T 是 T-等变的庞加莱对偶 $\mathcal{D}_j$。注意，$u_j^T = 0$ 当 $j \in S_\zeta$ 时。U_j^T 的 T-等变陈特征为 $\mathrm{ch}_T(U_j^T) = e^{-u_j^T}$。

U_j^T 这些 T-等变线丛作为 $\mathbb{Z}$ 上的代数生成 $K_T(\mathcal{X}_\zeta)$。任意群同态 $A \to T$ 都诱导出映射 $[\mathcal{X}_\zeta/A] \to [\mathcal{X}_\zeta/T] = [V_G^{ss}(\zeta)/T]$ 以及环同态

$$K_T(\mathcal{X}_\zeta) \to K_A(\mathcal{X}_\zeta), \quad \phi^*: H_T^*(X_\zeta; \mathbb{Q}) \to H_A^*(X_\zeta; \mathbb{Q}).$$

令 $U_j \in \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $u_j \in H^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）表示在由群同态 $\{1\} \to T$ 诱导的满射群同态 $\mathrm{Pic}_T(\mathcal{X}_\zeta) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $H_T^2(X_\zeta; \mathbb{Q}) \to H^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）下，$U_j^T \in \mathrm{Pic}_T(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $u_j^T \in H_T^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）的像。那么 $c_1(U_j) = -u_j$，且 $\mathrm{ch}(U_j) = e^{-u_j}$。

令 $U_j^T \in$ 皮卡群 $\tilde{T}(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $u_j^T \in H_{\tilde{T}}^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）表示由群同态 $\widetilde{T} \to T = \widetilde{T}/G$ 诱导的群同态 $\mathrm{Pic}_T(\mathcal{X}_\zeta) \to \mathrm{Pic}_{\tilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $H_T^2(X_\zeta; \mathbb{Q}) \to H_{\tilde{T}}^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）下，$U_j^T \in \mathrm{Pic}_T(\mathcal{X}_\zeta)$（分别为 $u_j^T \in H_T^2(X_\zeta; \mathbb{Q})$）的像。则 $(c_1)_{\tilde{T}}(U_j^{\tilde{T}}) = -u_j^{\tilde{T}}$ 且陈特征 $\mathrm{ch}_{\tilde{T}}(U_j^{\tilde{T}}) = e^{-u_j^T}$。

对于 $i = 1, \dots, n+\boldsymbol{\kappa}$，按 (2.9) 中的定义设 $\chi^{\mathsf{D}_i}\colon G \to \mathbb{C}^*$。对于 $a = 1, \dots, \boldsymbol{\kappa}$，设 $\chi^{\xi_a^*}\colon G \to \mathbb{C}^*$ 为与 $\xi_a^* \in \mathbb{L}^\vee$ 关联的特征，即 $\chi^{\xi_a^*}(s_1, \dots, s_{\boldsymbol{\kappa}}) = s_a$。令 G 作用于 $U_\zeta \times \mathbb{C}$，其作用为

$$s \cdot (x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}, y) = (\chi^{\mathsf{D}_1}(s)x_1, \dots, \chi^{\mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}}}x_{\boldsymbol{\kappa}}, \chi^{\xi_a^*}(s^{-1})y),$$

这定义了 U_ζ 上的一个 G-等变线丛，或者等价地，定义了 $\mathcal{X}_\zeta=[U_\zeta/G]$ 上的一个线丛 P_a。令 $p_a=-c_1(P_a)\in H^2(X_\zeta;\mathbb{Q})$。那么 $\mathrm{ch}(P_a)=e^{-p_a}$。对于 $j=1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}$，有

$$U_j=\prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}P_a^{Q_j^a}\in\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_\zeta),\quad u_j=\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}Q_j^a p_a\in H^2(X_\zeta;\mathbb{Q}). \tag{2.11}$$

令 $\Lambda_j\in\mathrm{Pic}_{\widetilde{T}}(\bullet)=\mathrm{Pic}(B\widetilde{T})$ 为一点上的 $\widetilde{T}$-等变线丛 $\bullet$，由 $\widetilde{T}$-特征 $\widetilde{t}_j$ 定义，且令 $\lambda_j=-(c_1)_{\widetilde{T}}(\Lambda_j)\in H^2_{\widetilde{T}}(\bullet;\mathbb{Z})=H^2(BT;\mathbb{Z})$。则

$$K_{\widetilde{T}}(\bullet)=\mathbb{Z}[\Lambda_1^{\pm1},\dots,\Lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}^{\pm1}],\quad H^*(B\widetilde{T};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}].$$

为方便后文，我们引入如下定义。

定义 2.7。令 $I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}$ 为一个极小反锥。则 $\{\mathsf{D}_i:\ i\in I\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个基。令 $\{\mathsf{D}_i^{*,I}:\ i\in I\}$ 为 $\mathbb{L}_\mathbb{Q}$ 的对偶 $\mathbb{Q}$-基，即对于任意 $i,j\in I$，

$$\langle\mathsf{D}_i,\mathsf{D}_j^{*,I}\rangle=\delta_{ij}$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle:\ \mathbb{L}_\mathbb{Q}^\vee\times\mathbb{L}_\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上对偶向量空间之间的自然配对。

给定任意 $I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}$，环面不动点 $\mathfrak{p}_I$ 的包含映射 $\iota_I:\mathfrak{p}_I\hookrightarrow\mathcal{X}_\zeta$ 诱导一个环同态

$$\iota_I^*:H^*_{\widetilde{T}}(X_\zeta;\mathbb{Q})\longrightarrow H^*_{\widetilde{T}}(\mathfrak{p}_I;\mathbb{Q})\simeq H^*(B\widetilde{T};\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}].$$

对于 $i=1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}$，

$$\iota_I^*u_i^{\widetilde{T}}=\sum_{j\in I}\langle\mathsf{D}_i,\mathsf{D}_j^{*,I}\rangle\lambda_j-\lambda_i\quad\forall I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}. \tag{2.12}$$

~特别地，如果 $i\in I$，那么 $\iota_I^*u_i^T=0$，这与以下事实一致：T-不动点 $\mathfrak{p}_I$不包含在除子 $\mathcal{D}_i$ 中。

Let $\widetilde{T}\times G$ 通过以下方式作用于 $U_\zeta\times\mathbb{C}$

$$(\widetilde{t},s)\cdot(x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}},y)=(\widetilde{t}_1\chi^{\mathsf{D}_1}(s)x_1,\dots,\widetilde{t}_{n+\boldsymbol{\kappa}}\chi^{\mathsf{D}_{n+\boldsymbol{\kappa}}}x_{\boldsymbol{\kappa}},\chi^{\xi_a^*}(s^{-1})y),$$

其中 $\widetilde{t}=(\widetilde{t}_1,\dots,\widetilde{t}_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in\widetilde{T}$且 $s\in G$。这定义了 $\widetilde{T}\times G$ 等变线丛在 U_ζ 上，或等价地，定义了一个~$\widetilde{T}$ 等变线丛 $P_a^{\widetilde{T}}$在 $\mathcal{X}_\zeta=[U_\zeta/G]$上。令 $p_a^{\widetilde{T}}=-c_1(P_a^{\widetilde{T}})\in H^2_{\widetilde{T}}(X_\zeta;\mathbb{Q})$。那么陈特征$\tilde{\tau}(P_a^{\widetilde{T}})=e^{-p_a^T}$。对于$a=1\dots,\boldsymbol{\kappa}$,

$$\iota_I^*p_a^{\widetilde{T}}=\sum_{j\in I}\langle\xi_a^*,\mathsf{D}_j^{*,I}\rangle\lambda_j\quad\forall I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}. \tag{2.13}$$

我们有

$$U_j^{\widetilde{T}}=\prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(P_a^{\widetilde{T}})^{Q_j^a}\cdot\Lambda_j^{-1}\in\mathrm{Pic}_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta),\quad u_j^{\widetilde{T}}=\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}Q_j^a p_a^{\widetilde{T}}-\lambda_j\in H^2_{\widetilde{T}}(X_\zeta;\mathbb{Q}). \tag{2.14}$$

~ ~在 $K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)\longrightarrow K(\mathcal{X}_\zeta)$ 下，U_j^T、P_a^T 和 Λ_j 分别映射到 U_j、P_a 和 $\mathbf{1}$；在 $H^2_{\widetilde{T}}(X_\zeta;\mathbb{Q})\to$ ~ ~ ~ ~ ~ ~$H^2(X_\zeta;\mathbb{Q})$ 下，u_j^T、p_a^T 和 λ_j 分别映射到 u_j、p_a 和 0。我们对 u_j^T、U_j^T、p_a^T、P_a^T、λ_j、Λ_j 的定义与 Givental 关于托里克流形置换等变量子 K 理论的论文 [GiV,GiVI] 中的约定一致。

2.6. **惯性叠**。

2.6.1. 一般代数叠的惯性叠。给定一个一般代数叠 $\mathcal{X}$，$\mathcal{X}$ 的惯性叠 $\mathcal{I}\mathcal{X}$ 是纤维积

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{I}\mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X}\\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta}\\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{X}\times\mathcal{X}\end{array}$$

其中 $\Delta:\mathcal{X}\to\mathcal{X}\times\mathcal{X}$是对角态射。$\mathcal{I}\mathcal{X}$是一个代数栈，特别是一个群胚。群胚 $\mathcal{I}\mathcal{X}$ 中的一个对象是一个对 $(x,\ g)$，其中 x 是群胚 $\mathcal{X}$ 中的一个对象，而 k 是自同构群 $\mathrm{Aut}_\mathcal{X}(x)=\mathrm{Hom}_\mathcal{X}(x,\ x)$ 中的一个元素，属于 x。$\mathcal{I}\mathcal{X}$中两个对象之间的态射是

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}\mathcal{X}}((x_1,g_1),(x_2,g_2))=\{h\in\mathrm{Hom}_\mathcal{X}(x_1,x_2):h\circ g_1=g_2\circ h\}.$$

映射 $(x,\ g)\mapsto(x,\ g^{-1})$（其中 $(x,\ g)$ 是 $\mathcal{I}\mathcal{X}$中的一个对象）定义了一个对合

$$\mathrm{inv}:\mathcal{I}\mathcal{X}\to\mathcal{I}\mathcal{X}.$$

2.6.2. 商叠的惯性叠。如果 $\mathcal{X}=[U/G]$ 是一个商叠，其中 U 是一个概形，G 是一个代数群，那么惯性叠也是一个商叠:

$$\mathcal{I}\mathcal{X}=[IU/G]$$

其中 $IU:=\{(x,\ g)\in U\times G\mid g\cdot x=x\}$ 是 $U\times G$ 的一个闭子概形，而 G 对 IU 的作用由以下给出 y

$$h\cdot(x,g)=(h\cdot x,hgh^{-1}),\quad \text{where } h\in G \text{ and } (x,g)\in IU.$$

特别地，如果 G 是阿贝尔的，那么该作用由 $h\cdot(x,\ g)=(h\cdot x,\ g)$ 给出。
对合 $\mathrm{inv}:\mathcal{I}\mathcal{X}\to\mathcal{I}\mathcal{X}$ 由 G-等变对合 $IU\to IU$ 诱导，该对合定义为 $(x,\ g)\mapsto(x,\ g^{-1})$.

2.6.3. 环面轨形 $\mathcal{X}_\zeta$的惯性叠。</style>令 $\mathcal{X}_\zeta=[U_\zeta/G]$ 如第2.3节所述。为更明确地描述其惯性叠$\mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta$，我们引入一些定义。给定 $\sigma=\sigma_I\in\Sigma_\zeta$，其中 $I\subset\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}$，定义

$$\mathrm{Box}(\sigma):=\Big\{v\in N: v=\sum_{i\in I}c_iv_i,\ 0\le c_i<1\Big\} \tag{2.15}$$

and

$$\mathrm{Box}'(\sigma):=\Big\{v\in N: v=\sum_{i\in I}c_iv_i,\ 0<c_i<1\Big\}. \tag{2.16}$$

定义

$$\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta):=\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\zeta}\mathrm{Box}(\sigma)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\zeta(n)}\mathrm{Box}(\sigma). \tag{2.17}$$

它是一个有限集 。对于任意 $v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)$，存在唯一的 $\sigma\in\Sigma_\zeta$，使得 $v\in\mathrm{Box}'(\sigma)$。因此 ,

$$\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\zeta}\mathrm{Box}'(\sigma), \tag{2.18}$$

其中右 端 (2.18) 是一个不交并。给定任意 $\sigma=\sigma_I\in\Sigma_\zeta$，其中 $I'\in\mathcal{A}_\zeta$，定义

$$\mathrm{age}(v)=\sum_{i\in I}c_i\in\mathbb{Q}\quad \text{if } v=\sum_{i\in I}c_iv_i\in\mathrm{Box}'(\sigma). \tag{2.19}$$

假设 $\sigma=\sigma_I\in\Sigma_\zeta$，其中 $I'\in\mathcal{A}_\zeta$。存在一个双射 $\mathrm{Box}(\sigma)\longrightarrow G_\sigma$，由下式给出

$$v=\sum_{i\in I}c_iv_i\mapsto g(v)=(a_1,\cdots,a_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in G_\sigma\subset G\subset\widetilde{T}\simeq(\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}}\ \text{ where }\ a_i=\begin{cases}e^{2\pi\sqrt{-1}c_i}, & i\in I,\\ 1, & i\in I'.\end{cases} \tag{2.20}$$

映射 $v\mapsto g(v)$ 定义了一个双射

$$\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)=\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\zeta}\mathrm{Box}(\sigma)\longrightarrow\bigcup_{\sigma\in\Sigma_\zeta}G_\sigma=\{g\in G:(U_\zeta)^g\text{ is non-empty.}\},$$

其中 $(U_\zeta)^g=\{x\in U_\zeta:\ g\cdot x=x\}$。我们有

$$IU_\zeta=\{(x,g)\in U_\zeta\times G: g\cdot x=x\}=\bigcup_{v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)}(U_\zeta)^{g(v)}\times\{g(v)\}. \tag{2.21}$$

上述并是连通分支的不交并。

$$I\mathcal{X}_\zeta=[IU_\zeta/G]=\bigcup_{v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)}\mathcal{X}_{\zeta,v}\quad\text{where }\mathcal{X}_{\zeta,v}\simeq[(U_\zeta)^{g(v)}/G].$$

特别地，$g(0)=1$ 是 G 的单位元$\mathcal{X}_{\zeta,\ 0}\simeq\mathcal{X}_\zeta$。存在一个对合 $\mathrm{inv}:\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)\to\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)$，其特征为 $g(\mathrm{inv}(v))=g(v)^{-1}\in G$。对合 $\mathrm{inv}:\ \mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta\longrightarrow\mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta$ 将 $\mathcal{X}_{\zeta,\ v}$ 同构地映射到 $\mathcal{X}_{\zeta,\ \mathrm{inv}(v)}$。注意,

$$\mathrm{age}(v)+\mathrm{age}(\mathrm{inv}(v))+\dim\mathcal{X}_{\zeta,v}=n=\dim\mathcal{X}_\zeta.$$

Let

$$\eta=(e^{\pi\sqrt{-1}q_1},\dots,e^{\pi\sqrt{-1}q_{n+\boldsymbol{\kappa}}})\in\mathbb{C}^*_R. \tag{2.22}$$

于是 $\eta^2 = J = (e^{2\pi\sqrt{-1}q_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}q_{n+\kappa}})$ 和 $W(\eta \cdot x) = -W(x)$。令 $\mathrm{inv}_R\colon \mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta \to \mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta$ 为映射 $IU_\zeta \to IU_\zeta$ 所诱导的映射，其中 $IU_\zeta \to IU_\zeta$ 由 $(x,\ g) \mapsto (\eta \cdot x,\ g^{-1})$ 给出。于是，inv_R 将 $\mathcal{X}_{\zeta,\ v}$ 同构地映射到 $\mathcal{X}_{\zeta,\ \mathrm{inv}(v)}$。注意，一般而言，$\mathrm{inv}_R \circ \mathrm{inv}_R$ 不是恒等映射，即 inv_R 不是对合。

2.7. A模型GLSM态空间。 令 M 为一个足够大的正数，使得 W的任意临界值的实部都小于 M，并定义$\mathbf{w}_\zeta^\infty := (\mathfrak{Re}W)^{-1}(M,\infty) \subset \mathcal{X}_\zeta$。作为 $\mathbb{Q}$上的分次向量空间，$(V, G, \mathbb{C}_R^*, W, \zeta)$的有理GLSM态空间为

$$\mathcal{H}_{\mathbf{w},\mathbb{Q}} = \bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{Q})[2\,(\mathrm{age}(v) - \hat{q})]. \tag{2.23}$$

其中$\mathbf{w}_{\zeta,v} = \mathbf{w}^\zeta\big|_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}$。特别地，$\mathcal{H}_{\mathbf{w},\mathbb{Q}} \cong H^*(\mathcal{I}\mathcal{X}_\zeta;\ \mathbb{Q})$作为 $\mathbb{Q}$上的向量空间。注意，inv_R将$(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v})$微分同胚地映到$(\mathcal{X}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}, -\mathbf{w}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)})$，并诱导出一个同构

$$\mathrm{inv}_R^*\colon H^*(\mathcal{X}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}, -\mathbf{w}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}^\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{Q}). \tag{2.24}$$

根据 [FK，推论 4.3], $\mathrm{Crit}(\mathbf{w}_{\zeta,v}) \subset \mathcal{Z}_\zeta = \mathrm{Crit}(\mathbf{w}_\zeta)$。若 $\mathcal{Z}_\zeta$ 为真，则存在一个非退化配对 g

$$H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{Q}) \times H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, -\mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}. \tag{2.25}$$

对所有 $v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)$。结合 (2.24) 和 (2.25)，我们得到一个非退化配对

$$H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{Q}) \times H^*(\mathcal{X}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}, \mathbf{w}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}^\infty; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$$

对所有 $v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)$，因此得到一个非退化配对 $(\ ,\ )_{\mathbf{w}}\colon \mathcal{H}_{\mathbf{w},\ \mathbb{Q}} \times \mathcal{H}_{\mathbf{w},\ \mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$。

作为 $\mathbb{C}$ 上的分次向量空间，$(V,\ G,\ \mathbb{C}_R^*,\ W,\ \zeta)$ 的 GLSM态空间为

$$\mathcal{H}_{\mathbf{w}} = \bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} \mathbb{H}^* \left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, d\mathbf{w}_{\zeta,v}) \right) [2(\mathrm{age}(v) - \hat{q})]$$

其中

$$\mathbb{H}^* \left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, d\mathbf{w}_{\zeta,v}) \right) \simeq H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{C}).$$

因此，$\mathcal{H}_{\mathbf{w}} \simeq \mathcal{H}_{\mathbf{w},\ \mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的分次向量空间。

我们称 $v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)$ 若$\mathcal{X}_\zeta$窄v 紧致，则为窄扇区。若 v 为窄扇区，则$\mathbf{w}_{\zeta,v}$ 为常数，且$\mathbf{w}_{\zeta}^\infty{}_{,v}$ 为空，因此

$$H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{C}) = H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}; \mathbb{C}).$$

在这种情况下，我们将上述向量空间称为窄扇区。若 v 不是窄扇区，则称 v 为宽扇区，并将

$$H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{C})$$

称为宽扇区。

我们还考虑一个密切相关的 GLSM（$V, G, \mathbb{C}_R^*, 0, \zeta$），它由将超势 W替换为零得到。作为一个定义在 $\mathbb{C}$上的分次向量空间，GLSM（$V, G, \mathbb{C}_R^*, 0, \zeta$）的GLSM态空间为

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}; \mathbb{C})[2\,(\mathrm{age}(v) - \hat{q})]. \tag{2.26}$$

注意，inv 和 inv_R 作为从$\mathcal{X}_{\zeta,v}$ 到$\mathcal{X}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}$的映射是同伦的，因此 $\mathrm{inv}_R^* = \mathrm{inv}^*\colon H^*(\mathcal{X}_{\zeta,\mathrm{inv}(v)}; \mathbb{C}) \to H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}; \mathbb{C})$。

~ T 在 V 上的作用与其子群 G 和 $\mathbb{C}_R^*$的作用可交换，并保持零超势~0及半稳定轨迹 $V_G^{ss}(\zeta)$不变。我们如下定义（$V, G, \mathbb{C}_R^*, 0, \zeta$）的 T-等变态空间 $\mathcal{H}_{\widetilde{T}}$。作为一个定义在 $\mathbb{C}$上的分次向量空间，

$$\mathcal{H}_{\widetilde{T}} = \bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}; \mathbb{C})[2\,(\mathrm{age}(v) - \hat{q})] \tag{2.27}$$

~其中，每个 $H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{X}_{\zeta,v};\ \mathbb{C})$ 都是 $H_{\widetilde{T}}^*(\bullet;\ \mathbb{C}) = H^*(BT;\ \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n+\kappa}]$ 上的模。令 $\mathbb{C}(\lambda) := \mathbb{C}(\lambda_1, \dots, \lambda)$ 为 $\mathbb{C}[\lambda] := \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n+\kappa}]$ 的分式域。存在一个非退化配对

$$\mathcal{H}_{\widetilde{T}} \otimes_{\mathbb{C}[\lambda]} \mathbb{C}(\lambda) \times \mathcal{H}_{\widetilde{T}} \otimes_{\mathbb{C}[\lambda]} \mathbb{C}(\lambda) \to \mathbb{C}(\lambda).$$

3. Categories of B-branes and K-theories

给定一个阿贝尔 GLSM，我们考虑 B 膜范畴和 A 模型态空间的若干版本。

dg范畴	B膜范畴	K理论	A 模型态空间
矩阵分解$(\mathcal{X}_\zeta,\ \mathbf{w}_\zeta)$	D矩阵分解$(\mathcal{X}_\zeta,\ \mathbf{w}_\zeta)\simeq D_{\mathrm{Sg}}(\mathcal{X}_{\zeta,\ 0})$	$K(D$矩阵分解$(\mathcal{X}_\zeta,\ \mathbf{w}_\zeta))$	$\mathcal{H}_{\mathbf{w}}=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*(\mathcal{X}_{\zeta,\ v},\ \mathbf{w}_\zeta^{\infty,\ v})$
$\mathrm{Perf}_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$	$D^b_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$	$K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$	$\mathcal{H}_{\widetilde{T}}=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,\ v})$
$\mathrm{Perf}(\mathcal{X}_\zeta)$	$D^b(\mathcal{X}_\zeta)$	$K(\mathcal{X}_\zeta)$	$\mathcal{H}=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*(\mathcal{X}_{\zeta,\ v})$
	$D^b_c(\mathcal{X}_\zeta)$	$K_c(\mathcal{X}_\zeta)$	$\mathcal{H}_c=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H^*_c(\mathcal{X}_{\zeta,\ v})$

在每个版本中，陈特征都将 B 膜的 K-理论类映射到 A 模型态空间中的一个元素。

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbf{w}}=K(D\mathrm{MF}(\mathcal{X}_\zeta,\mathbf{w}_\zeta)) &\xrightarrow{\mathrm{ch}_{\mathbf{w}}} \mathcal{H}_{\mathbf{w}}:=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H_{\mathbf{w},v},\quad H_{\mathbf{w},v}=H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v},w_{\zeta,v};\mathbb{C}).\\
K_{\widetilde{T}}=K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta) &\xrightarrow{\mathrm{ch}_{\widetilde{T}}} \mathcal{H}_{\widetilde{T}}=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H_{\widetilde{T},v},\quad H_{\widetilde{T},v}=H^*_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,v};\mathbb{C}).\\
K=K(\mathcal{X}_\zeta) &\xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathcal{H}=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H_v,\qquad H_v:=H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v};\mathbb{C}).\\
K_c=K_c(\mathcal{X}_\zeta) &\xrightarrow{\mathrm{ch}_c} \mathcal{H}_c=\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)} H_{c,v},\quad H_{c,v}=H^*_c(\mathcal{X}_{\zeta,v};\mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

$K_{\widetilde{T}}$是一个含幺交换环，也是一个定义在 $K_{\widetilde{T}}(\bullet)=K(B\widetilde{T})=\mathbb{Z}[\Lambda_1^{\pm},\dots,\Lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}^{\pm}]$ 上的代数；K是一个含幺交换环，也是一个定义在 $K(\bullet)=\mathbb{Z}$ 上的代数。存在一个满射环同态 $K_{\widetilde{T}}\to K$。K_c 和 $K_{\mathbf{w}}$ 是环 K 上的模。存在一个映射 $K_c\to K$，它是 K-模的态射；其像K_{ct} 是环 K 中的一个理想。取欧拉示性数可定义非退化配对：

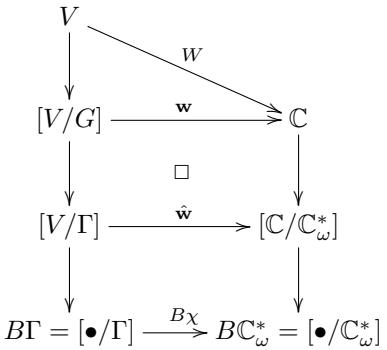
$$
K_{\widetilde{T}}\times K_{\widetilde{T}}\to\mathbb{Q}(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}),\quad K\times K_c\to\mathbb{Z},\qquad K_{\mathbf{w}}\times K_{\mathbf{w}}\to\mathbb{Z}.
$$

~固定 $v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)$。$H_{\widetilde{T},\ v}$是一个含幺交换环，也是一个定义在 $H^*_{\widetilde{T}}(\bullet)=H^*(BT)=\mathbb{C}[\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}]$ 上的代数；H_v是一个含幺交换环，也是一个定义在 $H^*(\bullet)=\mathbb{C}$ 上的代数。存在一个满射环同态 $H_{\widetilde{T},\ v}\to H_v$。$H_{c,\ v}$和$H_{w,\ v}$是环 H_v 上的模。存在一个映射 $H_{c,\ v}\to H_v$，它是 H_v-模的态射；其像 $H_{\mathrm{ct},\ v}$ 是环 H_v中的一个理想。我们有：非退化配对：

$$
H_{\widetilde{T},v}\times H_{\widetilde{T},\mathrm{inv}(v)}\to\mathbb{C}(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}),\quad H_v\times H_{c,\mathrm{inv}(v)}\to\mathbb{C},\quad H_{\mathbf{w},v}\times H_{\mathbf{w},\mathrm{inv}(v)}\to\mathbb{C}.
$$

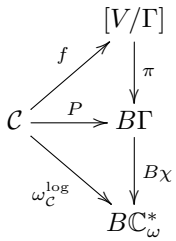
4. The Higgs Branch

4.1. GLSM 的数学理论：概述。 设 $(V,G,\mathbb{C}^*_R,W,\zeta)$ 为 GLSM 的输入数据。前四个分量 $(V,G,\mathbb{C}^*_R,W)$ 导出如下图表：



其中，中间的方块是笛卡尔图，上方的三角形和下方的方块均为交换图，右下方的箭头 $B\chi:B\Gamma\to B\mathbb{C}^*_\omega$ 由群同态 $\chi:\Gamma\to\mathbb{C}^*_\omega$诱导。到 $(V,G,\mathbb{C}^*_R,W,\zeta)$ 的兰道–金兹堡（LG）拟映射，是从轨形曲线 $\mathcal{C}$到 $[V_G^{ss}(\zeta)/\Gamma]$ 的双有理映射，并可延拓为可表示的

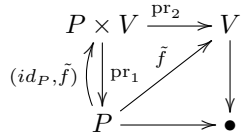
光滑 Artin 叠之间的态射 $f\colon \mathcal{C}\to[V/\Gamma]$，且满足某些稳定性条件，使得下图交换:



回想一下， $B\Gamma$ 是主 Γ-丛的分类空间，而 $[V/\Gamma]$ 是主Γ-丛 $P\to\mathcal{C}$ 连同一个截面 $u\colon \mathcal{C}\to P\times_\Gamma V$的分类空间，其中 $P\times_\Gamma V\to\mathcal{C}$ 是与表示 $\Gamma\to \mathrm{GL}(V)$关联的秩为 $n+\boldsymbol{\kappa}$ 的向量丛。截面 $u\colon \mathcal{C}\to P\times_\Gamma V$ 等价于一个 Γ-等变映射$\sim f\colon P\to V$。更明确地说，我们有以下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}=P/\Gamma & \xrightarrow{\pi\circ f} & B\Gamma=[\bullet/\Gamma] \end{array}$$

令 $\mathrm{pr}_1\colon P\times V\longrightarrow P$和 $\mathrm{pr}_2\colon P\times V\to V$分别为到第一和第二个因子的投影。我们有一个交换图



其中所有箭头都是 Γ-等变的。对上述图取关于 Γ作用的商，我们得到以下交换图

$$\begin{array}{ccc} P\times_\Gamma V & \longrightarrow & [V/\Gamma] \\ u\uparrow\downarrow & \nearrow_{f} & \downarrow\pi \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi\circ f} & B\Gamma=[\bullet/\Gamma] \end{array}$$

4.2. 扭曲曲线及其模空间。 我们遵循 [AV02,AGV] 关于扭曲曲线的表示。亏格为g、带 ℓ个标记点的扭曲预稳定曲线，是一个连通的真一维 DM 栈 $\mathcal{C}$ ，连同 ℓ 个互不相交的零维不可约闭子叠 $\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell\subset\mathcal{C}$，满足

(i) $\mathcal{C}$ 在 étale 局部同构于节点曲线；(ii) 在节点附近的形式局部意义下， $\mathcal{C}$ 同构于商叠

$$[\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/(xy))/\mu_r],\quad \text{where } \eta\cdot(x,y)=(\eta x,\eta^{-1}y),\ \eta\in\mu_r;$$

(iii) 每个标记点 $\mathfrak{z}_i\subset\mathcal{C}$ 都包含于 $\mathcal{C}$的光滑部分；(iv) 除标记点和 $\mathcal{C}$的奇点外， $\mathcal{C}$ 是概形； $\mathcal{C}$ 的粗模空间 C 是算术亏格为 g的节点曲线。

令 $\pi\colon \mathcal{C}\to C$为粗模空间态射；令 $z_i=\pi(\mathfrak{z}_i)$。由此得到的 $(C,z_1,\dots,z_\ell)$ 是一个亏格为 g、带 ℓ 个标记点的预稳定曲线。若 $(C,z_1,\dots,z_\ell)$ 稳定，则称 $(\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell)$ 稳定。亏格为 g 、带 ℓ 个标记点的扭曲预稳定曲线的模空间 $\mathfrak{M}_g^{\mathrm{tw}},_\ell$ 是维数为 $3g-3+\ell$ 的光滑 Artin 叠。对于 $i=1,\dots,\ell$，令 $\mathbb{L}_i$ 为 $\mathfrak{M}_g^{\mathrm{tw}},_\ell$上的线丛，其在点 $(\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell)$ 上的纤维为 $T^*_{z_j}C$，即粗曲线 C在 z_i处的余切线。

$(\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \dots\dots,\ \mathfrak{z}_\ell)$ 的无穷小自同构空间为

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_\mathcal{C}}(\Omega_\mathcal{C}(\mathfrak{z}_1+\cdots+\mathfrak{z}_\ell),\mathcal{O}_\mathcal{C}),$$

$(\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \dots\dots,\ \mathfrak{z}_\ell)$ 的无穷小变形空间为

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathcal{C}}(\Omega_\mathcal{C}(\mathfrak{z}_1+\cdots+\mathfrak{z}_\ell),\mathcal{O}_\mathcal{C}).$$

$(\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \dots\mathfrak{z}_\ell)$ 稳定，当且仅当 $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_\mathcal{C}}(\Omega_\mathcal{C}(\mathfrak{z}_1+\cdots+\mathfrak{z}_\ell)\ \mathcal{O}_\mathcal{C})\ =0$。

4.3. 扭曲曲线上的线丛。设 $(\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)$ 是一个亏格为 g、带 ℓ 个标记点的扭曲预稳定曲线，其中 $\mathfrak{z}_i = B\mu_{r_i}$。$\mathcal{C}$ 上的线丛 $\mathcal{L}$ 定义了一个态射 $\mathcal{C} \longrightarrow B\mathbb{C}^*$，使得我们有如下笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & [\mathbb{C}/\mathbb{C}^*] \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & [\bullet/\mathbb{C}] = B\mathbb{C}^* \end{array}$$

其中 $[\mathbb{C}/\mathbb{C}^*] \to B\mathbb{C}^*$ 是主 $\mathbb{C}^*$-丛的分类空间 $B\mathbb{C}^*$ 上的万有线丛。

给定 $\mathcal{C}$ 上的任意线丛 $\mathcal{L}$，存在一个正整数 m，使得对于粗模空间 C 上的某个线丛 M，有 $\mathcal{L}^{\otimes m} = \pi^* M$。定义

$$\deg \mathcal{L} = \frac{1}{m} \deg M \in \mathbb{Q}$$

- 若 $\mathfrak{z}_i$ 是一个概形点，我们定义年龄$_{\mathfrak{z}_i}(\mathcal{L}) = 0$。
- 若 $\mathfrak{z}_i = B\mu_{r_i}$，其中 $r_i > 1$，则 $\mathcal{L}$ 在 $\mathfrak{z}_i$ 上的限制 $\mathcal{L}_{\mathfrak{z}_i}$ 是 $\mathrm{Pic}(B\mu_{r_i}) = \mathrm{Hom}(\mu_{r_i}, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}/r_i\mathbb{Z}$ 中的一个元素。存在唯一的 $a_i \in \{0, 1, \ldots, r_i - 1\}$，使得

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{z}_i} \cong (T_{\mathfrak{z}_i}\mathcal{C})^{\otimes a_i}.$$

定义年龄$_{\mathfrak{z}_i}(\mathcal{L}) = \dfrac{a_i}{r_i} \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$。

粗模空间 C 上存在唯一的线丛 L，使得

$$\mathcal{L} \simeq \pi^* L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \mathfrak{z}_i).$$

其中

$$\deg\Big(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\big(\sum_{i=1}^{\ell} a_i \mathfrak{z}_i\big)\Big) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{age}_{\mathfrak{z}_i}(\mathcal{L}), \quad \deg(\pi^* L) = \deg L \in \mathbb{Z}.$$

So

$$\deg \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{age}_{\mathfrak{z}_i}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}.$$

对于 $i = 0,\ 1$, $h^i(\mathcal{C},\ \mathcal{L}) = h^i(C,\ L)$，因此

$$\chi(\mathcal{C}, \mathcal{L}) = \chi(C, L) = \deg \mathcal{L} + 1 - g - \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{age}_{\mathfrak{z}_j}(\mathcal{L}) \tag{4.1}$$

w这是 Kawasaki 的轨形版本 Riemann-Roch 定理 [Ka79] 的一个特例 .

在固定的扭曲预稳定曲线 $\mathcal{C}$ i 上，$\mathcal{L}$ 的无穷小自同构空间 s

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C).$$

在固定的扭曲预稳定曲线 $\mathcal{C}$ 上，$\mathcal{L}$ 的无穷小变形空间为

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \simeq H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

4.4. 主 Γ-丛的普适模空间。令 $\mathfrak{M}_{g,\ \ell}(B\Gamma)$ 表示由对 $((\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)\ P)$ 构成的模空间，其中

- $(\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)$ 是一个亏格为 g、带 ℓ 个标记点的扭曲预稳定曲线；
- P是 在 $\mathcal{C}$ 上的一个主 Γ-丛，它对应于一个可表示态射 $\mathcal{C} \longrightarrow B\Gamma$.

那么 $\mathfrak{M}_{g,\ \ell}(B\Gamma)$ 是一个光滑 Artin 叠。注意，$\mathfrak{M}_{g,\ \ell}(B\Gamma)$ 可以被识别为 Hom 叠

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}}, \mathcal{B}\Gamma \times \mathfrak{M})$$

其中$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{g,\ \ell}^{\mathrm{tw}}$。忘记 主丛 P定义了一个光滑 Artin 叠之间的（不可表示）态射 s

$$\pi_{\mathfrak{D}/\mathfrak{M}} : \mathfrak{D} := \mathfrak{M}_{g,\ell}(\mathcal{B}\Gamma) \longrightarrow \mathfrak{M}$$

其相对维数为 $\dim \Gamma(g-1) = (\kappa+1)(g-1)$，且是光滑的。因此，$\mathfrak{M}_{g,\ \ell}(\mathcal{B}\Gamma)$ 是一个维数为

$$3g - 3 + \ell + (\kappa+1)(g-1) = (4+\kappa)(g-1) + \ell = (\dim \mathcal{B}\Gamma - 3)(1-g) + \ell$$

其中 $\dim B\Gamma = -\dim\,\Gamma = -\boldsymbol{\kappa} - 1$。令 $\pi_{\mathfrak{D}}\colon\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{D} := \mathfrak{M}_{g,\,\ell}(\mathcal{B}\Gamma)$ 为万有曲线，令 $f_{\mathfrak{D}}\colon\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}} \to B\Gamma$ 为万有映射，并令 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}}$ 为万有主 Γ-丛。我们有以下笛卡尔图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}} & \longrightarrow & \mathfrak{C}_{\mathfrak{M}} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathfrak{D}}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{M}}} \\ \mathfrak{D} & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{D}/\mathfrak{M}}} & \mathfrak{M} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}_{\mathfrak{D}} & \longrightarrow & \bullet \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}} & \xrightarrow{f_{\mathfrak{D}}} & B\Gamma \end{array}$$

~令 $\mathbb{L} := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, \Gamma) \cong \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\kappa}+1}$ 为 Γ 的余特征格。其对偶格 $\mathbb{L}^\vee = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ 是 Γ 的特征格。主 Γ-丛 $P \longrightarrow \mathcal{C}$ 确定一个映射 $\mathcal{C} = P/\Gamma \to B\Gamma = [\bullet/\Gamma]$，其次数是一个元素

$$\beta_\Gamma \in H_2(B\Gamma; \mathbb{Q}) = \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}$$

~由以下性质刻画。对于任意 Γ-特征 $\lambda \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) = \mathbb{L}^\vee = H^2(B\Gamma;\, \mathbb{Z})$，令 $P \times_\lambda \mathbb{C} \to \mathbb{C}$为与表示 $\lambda\colon \Gamma \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1)$ 相关联的线丛。那么

$$\int_{\beta_\Gamma} \lambda = \deg(P \times_\lambda \mathbb{C}) = \int_{[\mathcal{C}]} c_1(P \times_\lambda \mathbb{C}) \in \mathbb{Q},$$

其中

- $\int_{\beta_\Gamma} \lambda$ denotes the natural pairing between $\beta_\Gamma \in \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}} = H_2(B\Gamma; \mathbb{Q})$ and $\lambda \in \widetilde{\mathbb{L}}^\vee \subset \widetilde{\mathbb{L}}^\vee_{\mathbb{Q}} = H^2(B\Gamma; \mathbb{Q})$, and
- $\int_{[\mathcal{C}]} c_1(P \times_\lambda \mathbb{C})$ denotes the natural pairing between $[\mathcal{C}] \in H_2(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$ and $c_1(P \times_\lambda \mathbb{C}) \in H^2(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$.

I换言之，$\beta_\Gamma \in H_2(B\Gamma;\, \mathbb{Q})$ 是 $[\mathcal{C}] \in H_2(\mathcal{C}; \mathbb{Q})$ 在 $P_*\colon\ H_2(\mathcal{C};\, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_2(B\Gamma;\, \mathbb{Q})$ 下的像。

P 在 $\mathfrak{z}_j = \mathcal{B}\mu_{r_j}$ 处的单值化是一个阶为 r_j的元素 $\gamma_j \in \Gamma$。子集

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathbb{L}} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\boldsymbol{\kappa}+1} \subset \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}}/\widetilde{\mathbb{L}} \cong (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{\boldsymbol{\kappa}+1} = (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}+1}$$

可识别为

$$\{\gamma \in \Gamma : \mathrm{ord}(\gamma) \text{ is finite.}\}.$$

单值化（γ_1，.. .., γ_ℓ）$\in (\widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathbb{L}})^\ell$ 以及次数 $\beta_\Gamma \in \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}$ 满足以下相容条件 :

$$\sum_{j=1}^{\ell} \gamma_j = \beta_\Gamma + \widetilde{\mathbb{L}} \in \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathbb{L}}.$$

~令$\mathfrak{M}_{g,\vec{\gamma}}(B\Gamma, \beta_\Gamma) \subset \mathfrak{M}_{g,\ell}(B\Gamma)$为由次数为 $\beta_\Gamma \in \mathbb{L}_{\mathbb{Q}}$且单值化为 $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell) \in (\widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathbb{L}})^\ell$的配对（$(\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)$ P）构成的开闭子叠。那么

$$\mathfrak{M}_{g,\ell}(B\Gamma) = \bigcup_{\substack{\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell)\in(\widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathbb{L}})^\ell \\ \beta_\Gamma\in\widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}},\ \sum_{i=1}^{\ell}\gamma_i=\beta_\Gamma+\widetilde{\mathbb{L}}}} \mathfrak{M}_{g,\vec{\gamma}}(B\Gamma, \beta_\Gamma).$$

4.5. 的普适模空间 Γ-结构。 Polishchuk-Vaintrob 引入了 Γ-结构 [PV16]，这是对 [FJR11]中 W-结构的一种替代表述。

给定 $\mathfrak{M}_{g,\ell}(\bullet)$ 中的一个对象 $(\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)$，$(\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)$ 上的一个 Γ-结构是一个二元组 (P, ρ)，其中 $((\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)\ P)$ 是$\mathfrak{M}_{g,\,\ell}(B\Gamma)$ 中的一个对象，并且

$$\rho : P \times_\chi \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \omega_{\mathcal{C}}^{\log}$$

是 $\mathcal{C}$ 上线丛的一个同构。

令 $\mathfrak{B}_{g,\ell}$ 为三元组 $((\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)\ P, \rho)$ 的模空间，其中 $(\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)$ 是 $\mathfrak{M}_g^{\mathrm{tw}}{}_{,\ell}(\bullet)$ 中的一个对象，而 (P, ρ) 是 $(\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)$ 上的一个 Γ- 结构。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{g,\ell} & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{B}/\mathfrak{D}}} & \mathfrak{D} := \mathfrak{M}_{g,\ell}(B\Gamma) \\ & {\scriptstyle \pi_{\mathfrak{B}/\mathfrak{M}}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathfrak{D}/\mathfrak{M}}} \\ & & \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\mathrm{tw}}_{g,\ell} \end{array}$$

其中 $\pi_{\mathfrak{B}/\mathfrak{D}}$: $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{D}$ 由遗忘 ρ 给出。映射 $\pi_{\mathfrak{B}/\mathfrak{M}}$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{M}$ 是相对维数为 $\dim G(g-1) = \boldsymbol{\kappa}(g-1)$ 的光滑映射，因此 $\mathfrak{B}_{g,\ \ell}$ 是一个维数为

$$3g - 3 + \ell + \boldsymbol{\kappa}(g-1) = (3 + \boldsymbol{\kappa})(g-1) + \ell = (\dim BG - 3)(1-g) + \ell.$$

映射

$$(\rho_V,\rho_R): G\times \mathbb{C}_R^* \cong (\mathbb{C}^*)^{\kappa+1} \longrightarrow \Gamma \cong (\mathbb{C}^*)^{\kappa+1} \quad (h,t)\mapsto ht$$

is 一个满射群同态和一个次数为 $r=\mathrm{ord}(J)$ 的覆盖映射。它诱导 es

$$(\rho_V,\rho_R)_*: H_2(BG;\mathbb{Z})\times H_2(B\mathbb{C}_R^*;\mathbb{Z}) = \mathbb{L}\times\left(\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1]\right) \longrightarrow H_2(B\Gamma;\mathbb{Z}) = \widetilde{\mathbb{L}}$$

这是一个有限指数为 r 的格的包含。（回顾一下， $B\mathbb{C}_R^*=\mathbb{P}^\infty$，并令 $[\mathbb{P}^1]\in H_2(\mathbb{P}^\infty;\mathbb{Z})$ 为 $\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^\infty$ 的类。）因此，我们得到一个同构

$$(\rho_V,\rho_R)_*: H_2(BG;\mathbb{Q})\times H_2(B\mathbb{C}_R^*;\mathbb{Q}) = \mathbb{L}_{\mathbb{Q}}\times\left(\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1]\right) \xrightarrow{\cong} H_2(B\Gamma;\mathbb{Q}) = \widetilde{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}}.$$

设 $(\beta_G,\beta_R) = (\rho_V,\rho_R)_*^{-1}(\beta_\Gamma)$。那么 $\beta_R = \dfrac{2g-2+\ell}{r}[\mathbb{P}^1]\in\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1] = H_2(B\mathbb{C}_R^*;\mathbb{Q}) = H_2(\mathbb{P}^\infty;\mathbb{Q})$。

设 $\mathfrak{B}_{g,\ell}(\beta_G)\subset\mathfrak{B}_{g,\ell}$ 为三元组 $((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho)$ 的开闭子叠，其次数为

$$\beta_\Gamma = \left(\beta_G, \frac{2g-2+\ell}{r}[\mathbb{P}^1]\right)\in\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}\times\left(\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1]\right)\cong H_2(B\Gamma;\mathbb{Q}).$$

Then

$$\mathfrak{B}_{g,\ell} = \bigcup_{\beta_G\in\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}} \mathfrak{B}_{g,\ell}(\beta_G).$$

对于每个 β_G，令 $\mathfrak{B}_{g,\ \vec{\gamma}}(\beta_G)\subset\mathfrak{B}_{g,\ \ell}(\beta_G)$ 表示由三元组 $((\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)\ P,\ \rho)$ 构成的开闭子叠，其单值化为 $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_\ell)\in(\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})^\ell$。于是

$$\mathfrak{B}_{g,\ell}(\beta_G) = \bigcup_{\substack{\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell)\in(\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})^\ell \\ \sum_{i=1}^\ell\gamma_i=\beta_G+\mathbb{L}}} \mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(\beta_G).$$

4.6. **截面的模空间**。本小节中，我们固定 $g,\ \ell,\ \beta_G$ 和 $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_\ell)$，并令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_{g,\ \vec{\gamma}}(\beta_G$).

遵循 [BF97 第 1], 节，我们引入如下定义。给定代数栈 X 上的 $\mathcal{O}_X$-模相干层 $\mathcal{F}$，令 $C(\mathcal{F}):=$ 谱x(Sym$\mathcal{F}^\vee$) 为与 $\mathcal{F}$ 关联的阿贝尔锥。特别地，当 $\mathcal{F}$ 局部自由时， $C(\mathcal{F})=\mathrm{tot}(\mathcal{F})$ 是与 $\mathcal{F}$ 关联的向量丛。

令 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ 为万有曲线 $\pi_{\mathfrak{B}}:\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}$ 上的万有主 Γ-丛。回想一下， Γ 是对角环面 $T\subset\mathrm{GL}(V)$ 的一个 ~ 子群，因此

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{B}} := \mathfrak{P}_{\mathfrak{B}}\times_\Gamma V = \bigoplus_{i=1}^{n+\kappa}\mathcal{L}_{i,\mathfrak{B}}$$

其中每个 $\mathcal{L}_{i,\ \mathfrak{B}}$ 都是 $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ 上的线丛。考虑截面模空间

$$\mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(V,\beta_G) := C\left(\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}\right)$$

它参数化四元组 s $((\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)\ P,\ \rho,\ u)$，其中三元组 $((\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)\ P,\ \rho)$ 是 $\mathfrak{B}(\bullet)$ 中的一个对象，并且

$$u=(u_1,\ldots,u_{n+\kappa})\in H^0(\mathcal{C},P\times_\Gamma V) = H^0(\mathcal{C},\bigoplus_{j=1}^{n+\kappa}\mathcal{L}_j)$$

其中 $u_j\in H^0(\mathcal{C},\ \mathcal{L}_j)$。令

$$\mathfrak{B}_{g,\ell}(V,\beta_G) := C\left(\pi_{\mathfrak{B}_{g,\ell}(\beta_G)*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}_{g,\ell}(\beta_G)}\right).$$

Then

$$\mathfrak{B}_{g,\ell}(V,\beta_G) = \bigcup_{\substack{\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell)\in(\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{L})^\ell \\ \sum_{i=1}^\ell\gamma_i=\beta_G+\mathbb{L}}} \mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(V,\beta_G).$$

给定一个固定的三元组 $((\mathcal{C},\ \mathfrak{z}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_\ell)\ P,\ \rho)$，线丛 $\mathcal{L}_j$ 的截面 u_j 的无穷小变形空间为 $H^0(\mathcal{C},\ \mathcal{L}_j)$，而变形 u_j 的障碍空间为 $H^1(\mathcal{C},\ \mathcal{L}_j)$。现在我们计算

$$\chi(\mathcal{C},\mathcal{L}_j) = h^0(\mathcal{C},\mathcal{L}_j) - h^1(\mathcal{C},\mathcal{L}_j).$$

线丛 $\mathcal{L}_j$ 的次数为

$$\langle \mathsf{D}_j,\beta_G\rangle + \frac{q_j}{2}(2g-2+\ell)$$

其绕 $\mathfrak{z}_i$的单值化为 $e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{age}_{\gamma_i}(\mathsf{D}^j)}$，其中年龄$\gamma_i(\mathsf{D}j) \in \mathbb{Q}\cap[0,1)$ 是配对 $\langle \mathsf{D}j, \beta_G\rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 在 $[0,1)$ 中的唯一代表。注意，年龄$\gamma_i(\mathsf{D}j) =$ 年龄$_{\mathfrak{z}_i}\mathcal{L}_j$。我们有

$$\langle \mathsf{D}_j, \beta_G\rangle + \frac{q_j}{2}(2g-2+\ell) - \sum_{i=1}^{\ell}\mathrm{age}_{\gamma_i}(\mathsf{D}_j) \in \mathbb{Z}.$$

根据 Kawasaki 的轨形版黎曼-罗赫定理 [Ka79],

$$\chi(\mathcal{C},\mathcal{L}_j) = \langle \mathsf{D}_j, \beta_G\rangle + \frac{q_j}{2}(2g-2+\ell) + (1-g) - \sum_{i=1}^{\ell}\mathrm{age}_{\gamma_i}(\mathsf{D}_j).$$

Let

$$(c_1)_G(V) = \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathsf{D}_j \in \mathbb{L}^\vee, \quad \mathrm{age}_\gamma(V) = \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathrm{age}_{\gamma_i}(\mathsf{D}_j) \in \mathbb{Q}, \tag{4.2}$$

并回顾 $\hat{}q = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} q_j$。于是

$$\chi(\mathcal{C}, P\times_\Gamma V) = \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\chi(\mathcal{C},\mathcal{L}_j) = \langle (c_1)_G(V),\beta_G\rangle + (n+\boldsymbol{\kappa}-2\hat{q})(1-g) - \sum_{i=1}^{\ell}\left(\mathrm{age}_{\gamma_i}(V)-\hat{q}\right).$$

存在映射 $\pi_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}}\colon \mathfrak{S} = \mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(V,\beta_G) \longrightarrow \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(\beta_G)$，其定义为 $((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho,u) \mapsto ((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho)$，即忘掉截面 u。映射 $\pi_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}}$ 在虚意义下光滑：存在相对完美障碍理论 $\mathbb{E}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}}$，其中

$$\mathbb{E}^\vee_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}} = \pi^*_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}}\mathbb{R}\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}.$$

$\pi_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}}$ 的相对虚维数为

$$d^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}} = \langle (c_1)_G(V),\beta_G\rangle + (n+\boldsymbol{\kappa}-2\hat{q})(1-g) - \sum_{i=1}^{\ell}\left(\mathrm{age}_{\gamma_i}(V)-\hat{q}\right). \tag{4.3}$$

因此，截面模空间 $\mathfrak{S}$ 是一个可能奇异但在虚意义下光滑的 Artin 叠；它带有完美障碍理论 $\mathbb{E}_{\mathfrak{S}}$，其虚维数为

$$d^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{S}} = d^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{S}/\mathfrak{B}} + \dim\mathfrak{B} = \langle (c_1)_G(V),\beta_G\rangle + (n+\boldsymbol{\kappa}-2\hat{q})(1-g) - \sum_{i=1}^{\ell}\left(\mathrm{age}_{\gamma_i}(V)-\hat{q}\right) + (\boldsymbol{\kappa}+3)(g-1)+\ell$$

可将其改写为

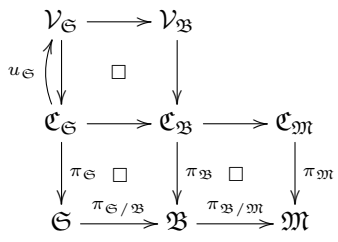
$$d^{\mathrm{vir}}_{\mathfrak{S}} = \langle (c_1)_G(V),\beta_G\rangle + (\hat{c}-3)(1-g) + \ell - \sum_{i=1}^{\ell}\left(\mathrm{age}_{\gamma_i}(V)-\hat{q}\right) \tag{4.4}$$

其中$\hat{c} = n - 2\hat{}q$ 是 GLSM 的中心荷。注意，如果 $\gamma\in\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{L}$ 对应于 $v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)$，那么

$$\mathrm{age}_\gamma(V) = \mathrm{age}(v).$$

中心荷$\hat{c}$和 A 模型态空间定义中的次数移位 $2(\mathrm{age}(v) - \hat{}q)$，其动机来自虚维数的公式 (4.4)，这与 [FJR 引理 6.1.7]一致。

令 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ 为万有曲线 $\pi_{\mathfrak{S}}\colon \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ 上的万有主 Γ-丛，令 $u_{\mathfrak{S}}\colon \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}} \to \mathcal{V}_{\mathfrak{S}} := \mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}\times_\Gamma V$ 为泛截面。我们有如下交换图。



4.7. **Landau–金兹堡拟映射及其模空间**。

定义 4.1 (预稳定 LG 拟映射)。 到五元组 $\mathfrak{X}=(V,G,\mathbb{C}^*_R,W,\zeta)$ 的预稳定亏格-g、带 ℓ 个标记点、次数为 β_G 的兰道–金兹堡（*LG*）拟映射，是一个四元组 $\mathrm{Q}=((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho,u)$，它是$\mathfrak{B}_{g,\ell}(V,\beta_G)(\bullet)$ 中的一个对象，并且其基点集

$$B(\mathrm{Q}):=u^{-1}(P\times_\Gamma V_G^{us}(\zeta))\subset\mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ 中的Q 部分是纯零维的，且与标记点和节点不相交。

注 4.2。 注意， T 作用保持 $V_G^{ss}(\zeta)$ 和 $V_G^{us}(\zeta)$。特别地， Γ 作用于 $V_G^{us}(\zeta)$。

令 $LG_{g,\ell}^{\mathrm{pre}}(\mathfrak{X},\beta_G)$ 为亏格-g、带 ℓ 个标记点、次数为 β_G 的到 $\mathfrak{X}$ 的 LG 拟映射的预稳定模空间。它是 $\mathfrak{B}_{g,\ell}(V,\beta_G)$ 的一个开子叠。存在求值映射

$$\mathrm{ev}_i:LG_{g,\ell}^{\mathrm{pre}}(\mathfrak{X},\beta_G)\to I\mathcal{X}_\zeta=\bigcup_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})}\mathcal{X}_{\zeta,v},\quad i=1,\ldots,\ell.$$

给定 $\vec{v}=(v_1,\ldots,v_\ell)\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)^\ell$，令

$$LG_{g,\vec{v}}(\mathfrak{X},\beta_G):=\bigcap_{i=1}^{\ell}\mathrm{ev}_i^{-1}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v_i}\right).$$

那么 $LG_{g,\vec{v}}(\mathfrak{X},\beta_G)$ 是 $\mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell)}(V,\beta_G)$ 的一个开子叠，其中 $\gamma_i\in\mathbb{L}_\mathbb{Q}/\mathbb{L}$ 对应于 $v_i\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})$。因此，$LG_{g,\vec{v}}(\mathfrak{X},\beta_G)$ 的虚维数为

$$\langle(c_1)_G(V),\beta_G\rangle+(\hat{c}-3)(1-g)+\ell-\sum_{i=1}^{\ell}(\mathrm{age}(v)-\hat{q})\,. \tag{4.5}$$

定义 4.3 (良好提升)。 $\tilde{\zeta}\in\mathbb{L}^\vee$ 是 $\zeta\in\mathbb{L}^\vee$ 的一个提升，如果 ζ 是 $\tilde{\zeta}$ 在

$$\widetilde{\mathbb{L}}^\vee=\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)\to\mathbb{L}^\vee=\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*).$$

下 $\tilde{\zeta}$ 是 ζ 的良好提升，如果 $V_\Gamma^{ss}(\tilde{\zeta})=V_G^{ss}(\zeta)$。

对于任意 $\tilde{\zeta}\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)=\widetilde{\mathbb{L}}^\vee$，令 $\chi^{\tilde{\zeta}}\colon\Gamma\to\mathbb{C}^*$ 表示相应的 Γ-特征，令$\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}}\in$ 皮卡群$_\Gamma(V)$表示由 χ^{ζ}确定的 Γ-等变线丛，定义在 V 上

$$\chi^{\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2}=\chi^{\tilde{\zeta}_1}\chi^{\tilde{\zeta}_2},\quad\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}_1+\tilde{\zeta}_2}=\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}_1}\otimes\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}_2}.$$

截面 $s\in H^0(V,\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}})^\Gamma$ 定义了一个 Γ-等变映射 $V\to\mathbb{C}$，它诱导出一个态射

$$s:P\times_\Gamma V\to P\times_{\chi^{\tilde{\zeta}}}\mathbb{C}.$$

给定任意 $u\in H^0(\mathcal{C},P\times_\Gamma V)$，令 $u^*s:=s\circ u\in H^0(\mathcal{C},P\times_{\chi^\zeta}\mathbb{C})$。以下定义来自 [FJR，定义 4.2.10]（本质上是 [CKM，定义 7.1.1]），只是采用了稍有不同的记号。

定义 4.4 (长度)。 设 $\mathrm{Q}=((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho,u)$ 是到 $\mathfrak{X}=(V,G,\mathbb{C}^*_R,W,\zeta)$的一个预稳定 *LG* 拟映射，令 $\tilde{\zeta}\in\mathbb{L}^\vee$ 为 $\zeta\in\mathbb{L}^\vee$的一个良好提升。点 y 在 $\overline{\mathcal{C}}$ 处相对于 Q 和 ζ 的长度定义为

$$\ell_y(\mathrm{Q},\tilde{\zeta}):=\min\left\{\frac{\mathrm{ord}_y(u^*s)}{m}\;\middle|\;s\in H^0(V,\mathbf{L}_{m\tilde{\zeta}}=\mathbf{L}_{\tilde{\zeta}}^{\otimes m})^\Gamma,m\in\mathbb{Z}_{>0}\right\} \tag{4.6}$$

其中 $\mathrm{ord}_y(u^*s)$ 是截面 $u^*s\in H^0(\mathcal{C},P\times_{\chi^{m\tilde{\zeta}}}\mathbb{C})$ 在 y处的消失阶。

定义 4.5 (ϵ-稳定 LG 拟映射)。 设 $\zeta\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}^*)$ 是 $\zeta\in\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$的一个良好提升，并设 ϵ 为一个正有理数。预稳定 *LG* 拟映射 $\mathrm{Q}=((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\ldots,\mathfrak{z}_\ell)\ P,\rho,u)$ 关于 ζ 是 ϵ-稳定的，如果

(1) $\omega_{\mathcal{C}}^{\log}\otimes(P\times_{\tilde{\zeta}}\mathbb{C})^{\epsilon}\in$ 皮卡群$(\mathcal{C})\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个丰沛 $\mathbb{Q}$ 线丛，

并且 *(2)* $\epsilon\ell_y(\mathrm{Q},\zeta)\le 1$ 对每个 $y\in\mathcal{C}$ 都成立。

注 4.6. 令 $\mathcal{C}_v$ （分别地， C_v）为 $\mathcal{C}$ （分别地， C）的正规化中与粗模空间 C 的对偶图中的顶点 v 相关联的连通分支。令 g_v 为 C_v 的亏格，令 ℓ_v 为 C_v 上在正规化映射下映射到标记点或节点的点数，并令 $\beta_\Gamma(v)\in H_2(B\Gamma;\mathbb{Q})=\widetilde{\mathbb{L}}_\mathbb{Q}$ 为 $\mathcal{C}_v\to\mathcal{C}\xrightarrow{P}B\Gamma$的次数。定义 *4.5* 中的条件 *(1)* 等价于以下条件：

$$2g_v-2+\ell_v+\epsilon\int_{\beta_\Gamma(v)}\tilde{\zeta}>0\quad\textit{for all vertex } v \textit{ in the dual graph of } C.$$

注记 4.7. 令 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$、 $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ 和 $\zeta \in \mathbb{L}^\vee$。那么 Q 关于 ζ 是 ϵ-稳定的，当且仅当它关于 $m\zeta$是 (ϵ/m)-稳定的；关于拟映射理论中的类似陈述，见 *[CKM, 注 7.1.4]* 。给定 $\nu \in \mathbb{L}^\vee_{\mathbb{Q}}$，选取 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $m\nu \in \mathbb{L}^\vee$ ，并定义 Q 为 ν-稳定的，当且仅当它关于 $m\nu$是 $(1/m)$-稳定的；该定义与 m 的选取无关，且与 *[FK, 定义 2.6]*一致。

令 $LG^{\mathrm{pre}}_{g,\ell}(\mathfrak{X},\beta_G)$（分别为 $LG^{\epsilon,\zeta}_{g,\ell}(\mathfrak{X},\beta_G)$）表示到 $\mathfrak{X}:=(V,G,\mathbb{C}^*_{\mathbb{R}},W,\zeta)$ 的亏格为 g、带 ℓ 个标记点、次数为 β_G 的预稳定（分别为关于 ζ 的 ϵ-稳定）拟映射的模空间。更一般地，令 Y 为 V 的一个 Γ-不变闭子概形，使得 $Y \cap V_G^s(\zeta) = Y \cap V_G^{ss}(\zeta)$ 非空（例如 $Y = \mathrm{Crit}(W)$），并令 $\mathfrak{Y} = (Y,G,\mathbb{C}^*_{\mathbb{R}},W,\zeta)$。令 $LG^{\mathrm{pre}}_{g,\ell}(\mathfrak{Y},\beta_G)$ 为 $LG^{\mathrm{pre}}_{g,\ell}(\mathfrak{X},\beta_G)$ 的闭子叠，其参数化满足 $u\colon \mathcal{C} \to [Y/\Gamma] \subset [V/\Gamma]$ 的 $\mathsf{Q} = ((\mathcal{C},\mathfrak{z}_1,\dots,\mathfrak{z}_\ell),P,\rho,u)$，并类似地定义 $LG^{\epsilon,\zeta}_{g,\ell}(\mathfrak{Y},\beta_G)$。Fan-Jarvis-Ruan 证明了以下结果：

定理 4.8 ([FJR])。 $LG^{\epsilon,\zeta}_{g,\ell}(\mathfrak{Y},\beta_G)$ 是一个有限型分离 *Deligne-Mumford* 叠。它在谱$\mathbb{C}$上是真，如果 $[(Y \cap V_G^{ss}(\zeta))/G]$ 是真。

给定 $\vec{v} = (v_1,\dots,v_\ell) \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)^\ell$，令

$$LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\vec{v}}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G) := LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\ell}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G) \cap LG_{g,\vec{v}}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G).$$

Then

$$LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\ell}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G) = \bigcup_{\vec{v}\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)^\ell} LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\vec{v}}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G).$$

在下文第 4.8 节和第 4.9 节中，我们固定 g， $\vec{v}$， ϵ， β_G，并令

$$\mathbf{X} = LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\vec{v}}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G), \quad \mathbf{Z} = LG^{\epsilon,\tilde{\zeta}}_{g,\vec{v}}(\underline{\mathfrak{Z}},\beta_G)$$

其中 $\underline{\mathfrak{Z}} = (\mathrm{Crit}(W)\ G,\ \mathbb{C}^*_R,\ W,\ \zeta)$。根据定理 4.8，若

$$\mathcal{Z}_\zeta = [(\mathrm{Crit}(W) \cap V_G^{ss}(\zeta))/G] = \mathrm{Crit}(\mathbf{w}_\zeta)$$

若是真，则$\mathbf{Z}$ 是真。

4.8. **余截面局部化虚拟循环与余截面局部化虚拟结构层。** 回顾一下， $v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma}_\zeta)$ 是窄扇区，当且仅当 $\mathcal{X}_{\zeta,v}$是紧致的。本小节中，我们假设 $v_1,\dots,v_\ell$都是窄扇区。在此假设下，Fan-Jarvis-Ruan [FJR] 构造了一个余截面 $\delta\colon \mathcal{O}b_{\mathbf{X}} \to \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ ，其零点轨迹为$\mathbf{Z}$。应用 [KL13], ，他们得到一个余截面局部化虚拟循环

$$[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{loc}} \in A_*(\mathbf{Z};\mathbb{Q})$$

使得

$$\iota_*[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{loc}} = [\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}} \in A_*(\mathbf{X};\mathbb{Q})$$

其中 $\iota\mathbf{Z} \to \mathbf{X}$ 是包含映射，而 $[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}$ 是 Behrend-Fantechi 虚拟基本类 [BF97] ，由前几小节所述的完美障碍理论定义。当$\mathbf{Z}$ 是紧致的， $[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{loc}}$ 可用于定义窄扇区中的（上同调）GLSM 不变量[1]。 [FJR] 中窄扇区内余截面局部化虚拟循环的构造，可视为 Chang-Li-Li 通过余截面局部化构造 Witten 顶陈类的推广 [CLL]。

现在我们考虑如下特别理想的情形，如 [BF97，命题 5.6] 中所述。

情形4.9。$\mathbf{X}$ 是维数为 r_0 的光滑空间，且 $\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}$ 是秩为 r_1的局部自由层。

在情形4.9中，$\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}} := \mathrm{tot}(\mathcal{O}b_{\mathbf{X}})$ 是$\mathbf{X}$ 上的秩为 r_1的向量丛，称为障碍丛，虚维数为 $r = r_0 - r_1$。令 $\delta^\vee\colon \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \to \mathcal{O}b^\vee_{\mathbf{X}}$ 为余截面的对偶，它是 $\mathcal{O}b^\vee_{\mathbf{X}}$的一个截面。

$$[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}} = c_{r_1}(\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}}) \cap [\mathbf{X}] = (-1)^{r_1} c_{r_1}(\mathrm{Ob}^\vee_{\mathbf{X}}) \cap [\mathbf{X}] \in A_r(\mathbf{X};\mathbb{Q}), \tag{4.7}$$

$$[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{loc}} = (-1)^{r_1} c_{r_1}(\mathrm{Ob}^\vee_{\mathbf{X}},\delta^\vee) \cap [\mathbf{X}] \in A_r(\mathbf{Z};\mathbb{Q}). \tag{4.8}$$

其中

- $[\mathbf{X}] \in A_{r_0}(\mathbf{X};\mathbb{Q})$ 是光滑 DM 叠 $\mathbf{X}$ 的基本类，
- $c_{r_1}(\mathrm{Ob}^\vee\mathbf{x}) \cap -\colon A_k(\mathbf{X};\mathbb{Q}) \to A_{k-r_1}(\mathbf{X};\mathbb{Q})$ 是顶陈类，并且
- $c_{r_1}(\mathrm{Ob}^\vee\mathbf{x}\,\delta^\vee) \cap -\colon A_k(\mathbf{X};\mathbb{Q}) \to A_{k-r_1}(\mathbf{Z};\mathbb{Q})$ 是局部化顶陈类 [Fu98，第 14] 章。

[1]在 [FJR 的第 6], 节中，为紧型插入 [FJR 定义了 GLSM 关联函数，定义 4.1。4] 这类插入比窄扇区插入更一般。有关定义涉及非窄扇区紧型插入的 GLSM 不变量时需要注意的问题，以及在附加假设下构造零亏格紧型 GLSM 不变量的另一种方法，请参见 [Sh] 。

令 $K_0(\mathbf{X})$（分别为 $K^0(\mathbf{X})$）表示由 $\mathbf{X}$ 上的相干层（分别为局部自由层）生成的格罗滕迪克群，其关系为 $[F]=[F']+[F'']$，其中存在短正合列 $0\to F'\to F\to F''\to 0$。应用 [KL18], 可得一个余截面局部化虚拟结构层

$$\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X},\mathrm{loc}}\in K_0(\mathbf{Z})$$

使得

$$\iota_*\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X},\mathrm{loc}}=\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X}}\in K_0(\mathbf{X})$$

其中，$\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X}}$是 [BF97] 中定义的虚结构层（参见 [BF97，第5.4]条注记）以及 [Lee]。当$\mathbf{Z}$ 为真时，$\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathrm{loc}}$ 可用于定义窄扇区中的K理论GLSM不变量。

在情形4.9中,

$$\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X}}=\sum_{i=0}^{r_1}(-1)^i\wedge^i\mathcal{O}b^\vee_{\mathbf{X}}=(-1)^{r_1}\det(\mathcal{O}b^\vee_{\mathbf{X}})\sum_{i=0}^{r_1}(-1)^i\wedge^i\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}\in K_0(\mathbf{X}).$$

注意,

$$\mathrm{td}(\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}})\mathrm{ch}(\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X}})=c_{r_1}(\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}}),$$

so

$$[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}}=\mathrm{td}(\mathrm{Ob}_{\mathbf{X}})\mathrm{ch}(\mathcal{O}^{\mathrm{vir}}_{\mathbf{X}})\cap[\mathbf{X}].$$

截面 $\delta^\vee:\mathcal{O}_{\mathbf{X}}\to\mathcal{O}b^\vee$ 定义了一个 Koszul 复形

$$\mathbb{K}(\delta^\vee):=\mathrm{Sym}^{r_1}\left(\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}\xrightarrow{i_{\delta^\vee}}\mathcal{O}_{\mathbf{X}}\right)=\left[0\to\wedge^{r_1}\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}\xrightarrow{i_{\delta^\vee}}\wedge^{r_1-1}\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}\to\cdots\to\wedge^1\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}\xrightarrow{i_{\delta^\vee}}\mathcal{O}_{\mathbf{X}}\to 0\right]\tag{4.9}$$

它在$\mathbf{X}-\mathbf{Z}$上是正合的。若 $e_1,\dots,e_k$ 是 $\mathcal{O}b_{\mathbf{X}}$ 的局部截面，则

$$i_{\delta^\vee}(e_1\wedge\cdots\wedge e_k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\langle\delta^\vee,e_i\rangle e_1\wedge\cdots\wedge e_{i-1}\wedge e_{i+1}\wedge\cdots\wedge e_k.$$

注意

$$\mathrm{td}(\mathrm{Ob}^\vee_{\mathbf{X}})\mathrm{ch}^{\mathbf{X}}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{K}(\delta^\vee))=c_{r_1}(\mathrm{Ob}^\vee_{\mathbf{X}},\delta^\vee),$$

其中，$\mathrm{ch}^{\mathbf{X}}_{\mathbf{Z}}(\mathbb{K}(\delta^\vee))\cap:\ A_*(\mathbf{X};\mathbb{Q})\to A_*(\mathbf{Z};\mathbb{Q})$ 是局部化陈特征 [Fu98，第 18] 章。

4.9. 虚拟分解。 Favero-Kim [FK] 通过矩阵分解，为窄扇区和宽扇区中的一般稳定性选择构造 GLSM 不变量，从而推广了 [PV16,CFGKS] 中的构造。本小节将简要介绍这一构造（采用略有不同的记号）。

4.9.1. *Artin*叠 $\mathbf{C}$。 令 $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_\ell)$，其中 $\gamma_i\in\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{L}$ 对应于 $v_i\in\mathrm{Box}(\Sigma_\zeta)$。令 $\mathfrak{B}:=\mathfrak{B}_{g,\vec{\gamma}}(\beta_G)$ 为第 4.5 节中定义的 Γ-结构的普适模空间。令 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ 为万有曲线 $\pi_{\mathfrak{B}}:\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}\to\mathfrak{B}$ 上的普适主 Γ-丛，令 $\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}=\mathfrak{P}_{\mathfrak{B}}\times_\Gamma V$，并令 $C(\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}})$ 为截面模空间；如第 4.6 节所述，它是 $\mathfrak{B}$ 上的阿贝尔锥。于是，$\mathbf{X}$ 是 $C(\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}})$ 的开子叠，而 $\mathbf{X}$ 在投影 $C(\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}})\to\mathfrak{B}$ （遗忘截面）下的像包含于一个有限型开子叠 $\mathfrak{B}^\circ\subset\mathfrak{B}$ 中。因此，$\mathbf{X}$ 是

$$\mathbf{C}:=C\left(\pi_{\mathfrak{B}^\circ *}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}^\circ}\right)=\mathfrak{B}^\circ\times_{\mathfrak{B}}C\left(\pi_{\mathfrak{B}*}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}}\right).$$

对于 $i=1,\ \dots,\ \ell$，存在求值映射

$$\mathrm{ev}_i^{\mathbf{C}}:\mathbf{C}\longrightarrow\mathfrak{X}_{v_i}:=[V^{g(v_i)}/G]\tag{4.10}$$

其限制为

$$\mathrm{ev}_i:\mathbf{X}\longrightarrow\mathcal{X}_{\zeta,v_i}=\left[\left(V^{g(v_i)}\cap V_G^{ss}(\zeta)\right)/G\right]\subset\mathfrak{X}_{v_i}.\tag{4.11}$$

4.9.2. 光滑 *Artin* 叠 $\mathbf{A}$ 和光滑 *DM* 叠 $\mathbf{U}$。 在有限型光滑 Artin 叠 $\mathfrak{B}^\circ$,$\mathbb{R}\pi_{\mathfrak{B}^\circ *}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}^\circ}$ 上存在一个整体解消

$$\mathbb{R}\pi_{\mathfrak{B}^\circ *}\mathcal{V}_{\mathfrak{B}^\circ} = [A \xrightarrow{d_A} B]$$

其中 A, B 是 $\mathcal{O}_{\mathfrak{B}^\circ}$-模的局部自由层。令 $\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ} : \mathbf{A} := \mathsf{tot}(A) \to \mathfrak{B}^\circ$ 为投影，令$t_A \in \Gamma(\mathbf{A}\ \pi^*_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}A)$ 为典范截面，并令 $\beta_{\mathbf{A}} := \left(\pi^*_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}d_A\right) \circ t_A \in \Gamma(\mathbf{A}\ \pi^*_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}B)$。$t_A$ 的零点轨迹是 $\mathbf{A}$ $=\mathsf{tot}(A)$ 中的零截面，而 $\beta_{\mathbf{A}}$ 的零点轨迹是 $\mathbf{C}$。存在一个开子叠 $\mathbf{U} \subset \mathbf{A}$，使得 $\mathbf{U}$ 是有限型 DM 栈，并且下图是一个笛卡尔方块。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} = Z(\beta_{\mathbf{U}}) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{X}}} & \mathbf{U} \\ \downarrow{\scriptstyle j_{\mathbf{X}}} & & \downarrow{\scriptstyle j_{\mathbf{U}}} \\ \mathbf{C} = Z(\beta_{\mathbf{A}}) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{C}}} & \mathbf{A} \end{array}$$

在上述笛卡尔图中，两条竖直箭头是开浸入，两条水平箭头是闭浸入，并且 $\beta_{\mathbf{U}} = j^*_{\mathbf{U}}\beta_{\mathbf{A}} \in \Gamma(\mathbf{U}\ B_{\mathbf{U}})$，其中 $B_{\mathbf{U}} := j^*_{\mathbf{U}}\pi^*_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}B$。$\mathbf{X}$ 的虚维数 r 为

$$r = \dim \mathfrak{B} + \mathrm{rank}A - \mathrm{rank}B = \dim \mathbf{U} - \mathrm{rank}B.$$

我们有

$$[\mathbf{X}]^{\mathrm{vir}} = c_{\mathrm{rank}B}\left(B_{\mathbf{U}}, \beta_{\mathbf{U}}\right) \cap [\mathbf{U}],$$

其中

- $[\mathbf{U}] \in A_{r+\mathrm{rank}B}(\mathbf{U};\mathbb{Q})$ 是光滑 DM 叠 $\mathbf{U}$ 的基本类,
- $c_{\mathrm{rank}B}\left(B_{\mathbf{U}}\ \beta_{\mathbf{U}}\right) \cap - : A_{r+\mathrm{rank}B}(\mathbf{U}) \to A_r(\mathbf{X})$ 是局部化顶陈类，并且
- $[\mathbf{X}]_{\mathrm{vir}} \in A_r(\mathbf{X};\mathbb{Q})$ 是 $\mathbf{X}$ 的 Behrend-Fantechi 虚拟基本类。

4.9.3. 求值映射。 对于 $i = 1, \ldots, \ell$，求值映射 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{C}}$: $\mathbf{C} \to \mathfrak{X}_{v_i}$ 延拓为 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{A}}$: $\mathbf{A} \to \mathfrak{X}_{v_i}$，其限制为 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{U}}$: $\mathbf{U} \to \mathcal{X}_{\zeta,v_i}$，因此我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{X}}} & \mathbf{U} & \xrightarrow{\mathsf{ev}_i^{\mathbf{U}}} & \mathcal{X}_{\zeta,v_i} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{C}}} & \mathbf{A} & \xrightarrow{\mathrm{ev}_i^{\mathbf{A}}} & \mathfrak{X}_{v_i} \end{array}$$

其中 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{U}} \circ \iota_{\mathbf{X}} = \mathsf{ev}_i$ 和 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{A}} \circ \iota_{\mathbf{C}} = \mathsf{ev}_i^{\mathbf{C}}$，且所有竖直箭头都是开浸入。令

$$\vec{v} = (v_1, \ldots, v_\ell), \quad \mathfrak{X}_{\vec{v}} := \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{X}_{v_i}, \quad \mathcal{X}_{\zeta,\vec{v}} := \prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{X}_{\zeta,v_i}.$$

$\mathbf{A}$ 和 $\mathsf{ev}_i^{\mathbf{A}}$的选取满足

$$\mathrm{ev}^{\mathbf{A}} := \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{ev}_i^{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathfrak{X}_{\vec{v}} \tag{4.12}$$

是光滑 Artin 叠之间的满射光滑映射。更明确地说，给定 $\mathfrak{B}^\circ(\bullet)$ 中的任意对象 $\xi = ((\mathcal{C}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\ell)\ P, \rho)$，它对应于一个态射 $\mathrm{Spec}\mathbb{C} \to \mathfrak{B}^\circ$，令 $\mathbf{A}_\xi := \mathrm{Spec}\mathbb{C} \times_{\mathfrak{B}^\circ} \mathbf{A}$ 为 $\mathbf{A}$ $= \mathsf{tot}(A)$ 在 ξ 上的纤维。我们有复向量空间之间的以下线性映射:

$$H^0(\mathcal{C}, P \times_\Gamma V) \xrightarrow{\iota_{\mathbf{C},\xi}} \mathbf{A}_\xi \xrightarrow{\mathrm{ev}_\xi^{\mathbf{U}}} \bigoplus_{i=1}^{\ell} H^0(\mathfrak{z}_i, (P \times_\Gamma V)|_{\mathfrak{z}_i}) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} V^{g(v_i)} \tag{4.13}$$

其中 $\iota_{\mathbf{C},\xi}$ 是单射，且 $\mathsf{ev}_\xi^{\mathbf{U}}$是满射。因此,

$$\mathrm{ev}^{\mathbf{U}} := \prod_{i=1}^{\ell} \mathrm{ev}_i^{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathcal{X}_{\zeta,\vec{v}} \tag{4.14}$$

是光滑 DM 叠之间的光滑映射。

4.9.4. 超势与矩阵分解。令$\mathbf{w}_{v_i}:\mathfrak{X}_{v_i}=[V^{g(v_i)}/G]\to\mathbb{C}$ 表示$\mathbf{w}:[V/G]\to\mathbb{C}$的限制。在$\mathbf{A}$上定义一个超势$\mathbf{w}_{\mathbf{A}}$：

$$\mathbf{w}_{\mathbf{A}}:=\sum_{i=1}^{\ell}(\mathrm{ev}_i^{\mathbf{A}})^*\mathbf{w}_{v_i}\in\Gamma(\mathbf{A},\mathcal{O}_{\mathbf{A}}) \tag{4.15}$$

它限制在$\mathbf{U}$上是一个超势：

$$\mathbf{w}_{\mathbf{U}}:=j_{\mathbf{U}}^*\mathbf{w}_{\mathbf{A}}=\sum_{i=1}^{\ell}(\mathrm{ev}_i^{\mathbf{U}})^*\mathbf{w}_{\zeta,v_i}\in\Gamma(\mathbf{U},\mathcal{O}_{\mathbf{U}}). \tag{4.16}$$

曲线上亚纯1-形式的留数之和为零，因此

$$\iota_{\mathbf{C}}^*\mathbf{w}_{\mathbf{A}}=0,\quad \iota_{\mathbf{X}}^*\mathbf{w}_{\mathbf{U}}=0.$$

当 GLSM $\mathfrak{X}$ 是凸的混合模型时，[CFGKS] 中证明了

(a) $\mathbf{U}$ 可以选取得使其在 Spec$\mathbb{C}$ 上是分离的。

(b) 存在一个 c 截面 $\alpha_{\mathbf{A}}^\vee:\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}^*B\to\mathcal{O}_{\mathbf{A}}$，或等价地，一个截面 $\alpha_{\mathbf{A}}:\mathcal{O}_{\mathbf{A}}\to\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}^*B^\vee$，使得 t

$$\langle\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\rangle=-\mathbf{w}_{\mathbf{A}}.$$

(c) 令 $\alpha_{\mathbf{U}}:=j_{\mathbf{U}}^*\alpha_{\mathbf{A}}\in\Gamma(\mathbf{U}\ B_{\mathbf{U}}^\vee)$。则

$$\mathbf{Z}=Z(\alpha_{\mathbf{U}})\cap Z(\beta_{\mathbf{U}})\subset\mathbf{X}=Z(\beta_{\mathbf{U}})\subset\mathbf{U}.$$

在第4.14节中，我们将为用于定义所有阿贝尔 GLSM 的 GLSM I-函数的零亏格单标记模空间，给出满足 (a)-(c) 的 $\mathbf{U}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A}}^\vee$ 的显式构造。

When 若 $\alpha_{\mathbf{A}}$ 存在，则可得到一个由下式定义的 $(\mathbf{A}\ -\mathbf{w}_{\mathbf{A}})$ 的 Koszul 矩阵分解 $\{\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\}$：

$$\{\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\}=\Big[\bigoplus_i\Lambda^{2i}\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}^*B^\vee\underset{\partial}{\overset{\partial}{\rightleftarrows}}\bigoplus_i\Lambda^{2i+1}\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}^*B^\vee\Big],\quad\text{where }\partial=i_{\beta_{\mathbf{A}}}+\alpha_{\mathbf{A}}\wedge.$$

Then

$$\mathbb{K}_{\mathbf{U}}:=\{\alpha_{\mathbf{U}},\beta_{\mathbf{U}}\}=j_{\mathbf{U}}^*\{\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\}$$

是 $(\mathbf{U}\ -\mathbf{w}_{\mathbf{U}})$ 的 Koszul 矩阵分解。在 [PV16、CFGKS] 中称为基本分解，在 [FK] 中称为虚拟分解。

4.9.5. 局部化陈特征与虚拟基本类。设 U 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑 DM 叠，并设 $w:U\to\mathbb{C}$ 是一个正则函数。在 [FK 第 B.4]，节中，Favero-Kim 定义了矩阵分解关于 (U,w) 的 Atiyah 类和局部化陈特征；当 U 是光滑概形时，该定义遵循 Kim-Polishchuk [KP22] 的构造。将此定义应用于 $\mathbb{K}_{\mathbf{U}}$，可得到一个局部化陈特征

$$\mathrm{ch}_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{U}}\mathbb{K}_{\mathbf{U}}\in\mathbb{H}_{\mathbf{Z}}^{even}\left(\mathbf{U},(\Omega_{\mathbf{U}}^\bullet,-d\mathbf{w}_{\mathbf{U}})\right).$$

$\mathbf{X}$ 的虚拟基本类定义为

$$[\mathbf{U}]_{\mathbf{w}}^{\mathrm{vir}}:=\big(\prod_{i=1}^{\ell}r_i\big)\mathrm{tdch}_{\mathbf{Z}}^{\mathbf{U}}\mathbb{K}_{\mathbf{U}}\in\mathbb{H}_{\mathbf{Z}}^{even}\left(\mathbf{U},(\Omega_{\mathbf{U}}^\bullet,-d\mathbf{w}_{\mathbf{U}})\right).$$

其中 $r_i=\mathrm{ord}(g(v_i))$，或者等价地，$\mathfrak{z}_i=B\mu_{r_i}$。

4.10. **有效类**。给定 $\mathfrak{X}=(V,G,\mathbb{C}_R^*,W,\zeta)$ 和 $g,\ell\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，定义

$$\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,\ell}:=\{\beta_G\in\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}:LG_{g,\ell}^{\mathrm{pre}}(\underline{\mathfrak{X}},\beta_G)\text{ is nonempty}\}.$$

现在我们给出 $K^{\mathrm{eff}}(\mathfrak{X})_{g,\ell}$ 在 $\ell=1$ 时的更明确描述。设 $((\mathcal{C},\mathfrak{z})\ P,\rho,u)$ 是 $LG_{g\ 1}^{\mathrm{pre}},(\mathfrak{X},\beta_G)$ 中的一个对象。那么 _

$$u(\mathfrak{z})\in\mathcal{X}_\zeta=\bigcup_{I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}}\mathcal{X}_I.$$

若 $u(\mathfrak{z})\in\mathcal{X}_I$ 则 $u_i(x)\neq0$ 对 $i\in I$成立。我们注意到

$$u_i(\mathfrak{z})\neq0\Rightarrow\deg\mathcal{L}_i\geq0\text{ and }\mathrm{age}_{\mathfrak{z}}(\mathcal{L})=0\Leftrightarrow\deg\mathcal{L}_i\in\mathbb{Z}_{\geq0}$$

因为 $\deg \mathcal{L}_i -$ 年龄$_\beta(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}$。因此，

$$\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,1} \subset \bigcup_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} \mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,1},$$

其中

$$\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,1} = \{\beta_G \in \mathbb{L}_{\mathbb{Q}} : \langle \mathsf{D}_i, \beta_G \rangle + \frac{q_i}{2}(2g-1) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in I\}. \tag{4.17}$$

事实上，不难看出

$$\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,1} = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} \mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\underline{\mathfrak{X}})_{g,1}. \tag{4.18}$$

令 $\{\mathsf{D}_i^{*I}\colon\ i \in I\}$ 为与 $\mathbb{Q}$-基 $\{\mathsf{D}_i :\ i \in I\}$ 对偶的 $\mathbb{Q}$-基 $\mathbb{L}_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{\boldsymbol{\kappa}}$：对于任意 $i,\ j \in I$，

$$\langle \mathsf{D}_i, \mathsf{D}_j^{*I} \rangle = \delta_{ij}$$

Then

$$\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\mathcal{X}_\zeta, \mathbf{w}_\zeta)_{g,1} = \Big\{ \sum_{i \in I} (m_i - \frac{q_i}{2}(2g-1)) \mathsf{D}_i^{*I} : m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Big\}$$

4.11. 栈化环空间。 在轨形拟映射理论中，[CKK], 函数通过对亏格零 ϵ-稳定拟映射图空间进行 $\mathbb{C}^*$ 局部化来定义。当规范群 $G = (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 是代数环面时，小I函数 $I = J^{0+}|_{t=0}$ 可通过对栈化环空间进行 $\mathbb{C}^*$ 局部化而完全显式地计算。类似地，我们可以通过对亏格零 ϵ-稳定的 LG准映射图空间进行 $\mathbb{C}^*$ 局部化，来定义 GLSM 的小 J^ϵ函数。当规范群 $G =(\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 是代数环面时，GLSM 的小 I函数 $I = J^{0+}|_{t=0}$ 可通过在栈化环空间的 LG 版本上进行 $\mathbb{C}^*$ 局部化来计算。本文通过对本小节所定义的栈化环空间进行 $\mathbb{C}^*$ 局部化，定义并计算K-理论和上同调 I函数。

4.11.1. 经典版本。 给定 $\{1, \dots, n+\boldsymbol{\kappa}\}$的任意子集 I，定义

$$V_I = \{(x_1, \dots, x_{\boldsymbol{\kappa}+n}) \in V = \mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mid x_i \neq 0 \text{ if } i \in I\} = \mathbb{C}^{I'} \times (\mathbb{C}^*)^I$$

其中 $I' = \{1, \dots, n+\boldsymbol{\kappa}\} \setminus I$。那么

$$V_G^{ss}(\zeta) = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} V_I,$$

and

$$\mathcal{X}_\zeta = [V_G^{ss}(\zeta)/G] = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} \mathcal{X}_I$$

其中 $\mathcal{X}_I = [V_I/G] \subset \mathcal{X}_\zeta$ 是一个开托里克子叠，它是由 $\{v_i$ 张成的 n维锥 $\sigma_{I'}$ 定义的仿射托里克轨形：$i \in I'\}$。$\mathcal{X}_I$ 包含一个唯一的环面不动点（可能是栈状点）

$$\mathfrak{p}_I = \Big[\Big(\{0\}^{I'} \times (\mathbb{C}^*)^I\Big) \Big/ G\Big] = \Big[\Big(\{0\}^{\bar{I}} \times \{1\}^I\Big) \Big/ G_{\sigma_{I'}}\Big] \cong BG_{\sigma_{I'}}$$

其中 $G_{\sigma_{I'}} \subset G$ 是点 $\{0\}^{I'} \times \{1\}^I \in V$的稳定子（见第2节.4）。令

$$N_{\sigma_{I'}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} v_i.$$

那么 $G_{\sigma_{I'}}$ 是一个有限阿贝尔群，并且

$$G_{\sigma_{I'}} \cong N/N_{\sigma_{I'}}, \quad \mathrm{Hom}(G_{\sigma_{I'}}, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{L}^\vee \Big/ \big(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\mathsf{D}_i\big).$$

4.11.2. 量子版本。 我们引入以下约定。给定任意有理数 m/a，其中 $m\in\mathbb{Z}$、$a\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和 m，a 互素，我们定义

$$H^i(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{m}{a}))\coloneqq H^i(\mathbb{P}[a,1],\mathcal{O}_{\mathbb{P}[a,1]}(m)),\quad i=0,1.$$

回忆一下，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1[a,1]}(m)$的全空间是 $[((\mathbb{C}^2-\{0\})\times\mathbb{C})/\mathbb{C}^*]$，其中 $\mathbb{C}^*$ 以权（a，$\mathbf{1}$，m）作用。

给定任意的 $\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\mathcal{X}_\zeta,\mathbf{w}_\zeta)_{0,1}$，我们令

$$V_\beta=\bigoplus_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}V_{\beta,i},\quad \text{where } V_{\beta,i}=H^0\left(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\langle\mathsf{D}_i,\beta\rangle-\frac{q_i}{2})\right), \tag{4.19}$$

并令

$$W_\beta=\bigoplus_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}W_{\beta,i},\quad \text{where } W_{\beta,i}=H^1\left(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\langle\mathsf{D}_i,\beta\rangle-\frac{q_i}{2})\right). \tag{4.20}$$

令 $\chi^{\mathsf{D}_i}\colon G\to\mathbb{C}^*$，其中 $1\le i\le n+\boldsymbol{\kappa}$，定义如第2节所示。令 G 作用于$V_{\beta,\,i}$和$W_{\beta,\,i}$，其作用方式为 $g\cdot u=\chi^{\mathsf{D}_i}(g)u$，其中 $g\in G$ 且$u\in V_{\beta,\,i}$，或者$W_{\beta,\,i}$。

定义 4.10 (叠环空间**)。**我们将次数为 β 的叠环空间定义为

$$\mathcal{X}_{\zeta,\beta}\coloneqq[V_\beta^{ss}(\zeta)/G]. \tag{4.21}$$

上述定义中的叠环空间是轨形拟映射理论中叠环空间的类比对象 [CCK, 第 4 节。2], 它可以视为 Givental 的环面映射空间的轨形版本 [Gi98,第5]节。

我们有

$$V_\beta^{ss}(\zeta)=\bigcup_{I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}}V_{\beta,I}$$

其中

$$V_{\beta,I}=\{(u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V_\beta\mid u_i\neq0\text{ if }i\in I\}.$$

定义 4.11 （障碍丛与障碍层）。我们将次数 β 障碍丛定义为

$$\mathrm{Ob}_{\zeta,\beta}=[\left(V_\beta^{ss}(\zeta)\times W_\beta\right)/G].$$

次数为 β 障碍层$\mathcal{O}b_{\zeta,\,\beta}$ 是 $\mathcal{X}_{\zeta\text{ 上}\beta}$ 与向量丛 $\mathrm{Ob}_{\zeta\text{ 相}\beta}$关联的 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\zeta\text{-}\beta}}$模的局部自由层。

障碍丛 $\mathrm{Ob}_{\zeta,\,\beta}$ 是光滑环面 DM 叠 $\mathcal{X}_{\zeta\text{ 上}\beta}$的环面向量丛，并且

$$\mathrm{Ob}_{\zeta,\beta}=\mathrm{Spec}\left(\mathrm{Sym}\mathcal{O}b_{\zeta,\beta}^\vee\right).$$

设 $\mathcal{T}_{\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}}$ 为 $\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}$ 的切丛层。这个二项复形

$$\left[\mathcal{T}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\xrightarrow{0}\mathcal{O}b_{\zeta,\beta}\right] \tag{4.22}$$

是 [LT98] 上的完美切阻复形$\mathcal{X}_{\beta,\,\zeta}$。对 (4.22) 取对偶，可得

$$\left[\mathcal{O}b_{\zeta,\beta}^\vee\xrightarrow{0}\Omega_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\right] \tag{4.23}$$

这是 [BF97] 上的完美障碍理论$\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}$。特别地，切阻复形 (4.22) 和完美障碍理论都是 $D(\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta})$ 中的对象，即 $\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}$ 上的相干层导出范畴。虚切丛为

$$T^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}=T_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}-\mathrm{Ob}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\in K(\mathcal{X}_{\zeta,\beta}).$$

设 $T_{\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}/BG}$ 为光滑映射 $\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}\to BG$ 的相对切丛。我们有 $\mathcal{X}_{\zeta,\,\beta}$ 上如下的向量丛短正合列:

$$0\to\mathcal{X}_{\zeta,\beta}\times\mathbb{L}_{\mathbb{C}}\to T_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}/BG}=[\left(V_\beta^{ss}(\zeta)\times V_\beta\right)/G]\to T_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\to0. \tag{4.24}$$

给定 $I\in\mathcal{A}_\zeta^{\min}$, $\sigma_{I'}$ 是 Σ中的一个 n维锥。定义

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\mathcal{X},\zeta)_{0,1}\quad&\longrightarrow\quad\mathrm{Box}(\sigma_{I'})=\Big\{\sum_{i\in I'}a_iv_i:a_i\in[0,1)\cap\mathbb{Q}\Big\}\\ \beta\quad&\mapsto\quad v(\beta)\coloneqq\sum_{i\in I'}\{-\langle\mathsf{D}_i,\beta\rangle+\frac{q_i}{2}\}v_i.\end{aligned}$$

~大环面 $T=(\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 在 V_β 上的作用为

$$(\widetilde{t}_1,\dots,\widetilde{t}_{n+\boldsymbol{\kappa}})\cdot(u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}})=(\widetilde{t}_1u_1,\dots,\widetilde{t}_{n+\boldsymbol{\kappa}}u_{n+\boldsymbol{\kappa}}).$$

~这诱导了$\mathcal{X}_{\zeta,\beta}$上 $T=T/G\cong(\mathbb{C}^*)^n$ （味环面）的作用。切丛层$\mathcal{T}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}$和障碍层$\mathcal{O}b_{\zeta,\beta}$都是 T-等变局部自由层$\mathcal{X}_{\zeta,\beta}$，因此完美障碍理论是 T-等变的，并且是 $D_T(\mathcal{X}_{\zeta,\beta})$中的一个对象，即$\mathcal{X}_{\zeta,\beta}$上 T-等变相干层的导出范畴中的对象；并且$T^{\mathrm{vir}}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\in K_T(\mathcal{X}_{\zeta,\beta})$。

定义

$$V^\circ_{\beta,I}=\{(u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V_\beta\mid u_i(1,0)\neq 0\text{ if }i\in I\}.$$

那么，$V^\circ_{\beta,I}$是$V_{\beta,I}$的扎里斯基稠密开子集，并且

$$V^{ss}_\beta(\zeta)^\circ:=\bigcup_{I\in\mathcal{A}^{\min}_\zeta}V^\circ_{\beta,I}$$

是 $V^{ss}_\beta(\zeta)$的扎里斯基稠密开子集。定义

$$\mathcal{X}^\circ_{\zeta,\beta}:=[V^{ss}_\beta(\zeta)^\circ/G]$$

它是$\mathcal{X}_{\zeta,\beta}$的开子叠。（我们的记号$\mathcal{X}^\circ_{\zeta,\beta}$ 源自Okounkov在 [Ok20], 中的记号，其中QM。表示QM的开子叠，在该子叠中 $\infty=[1,0]$ 不是基点。）

给定 $I\in\mathcal{A}^{\min}_\zeta$, $\sigma_{I'}$ 是 Σ 中一个顶维（即 n 维）锥。回忆一下， $g(v)\in G_I$ 是 $v=\sum_{i\in I'}a_iv_i\in\mathrm{Box}(\sigma_{I'})$ 在双射 $\mathrm{Box}(\sigma_{I'})\to G_{\sigma_{I'}}$下的像。 $g(v)$-不变子空间 V 为

$$V^{g(v)}=\{x=(x_1,\dots,x_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V\mid x_i=0\text{ if }i\in I'\text{ and }a_i\notin\mathbb{Z}\}.$$

与 v 相关联的惯性叠 $I\mathcal{X}_\zeta$ 的连通分支 $\mathcal{X}_{\zeta,v}$ 为 $\mathcal{X}_{\zeta,v}=\big[\big(V^{g(v)}\cap V^{ss}(\zeta)\big)/G\big]$，它是 Artin叠 $\mathfrak{X}_v=[V^{g(v)}/G]$ 的开稠密子叠。存在一个求值映射

$$\mathrm{ev}_\infty:\mathcal{X}_{\zeta,\beta}\longrightarrow\mathfrak{X}_{v(\beta)}\quad[u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}}]\mapsto[u_1(1,0),\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}}(1,0)].$$

Then

$$\mathrm{ev}_\infty^{-1}(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})=\mathcal{X}^\circ_{\zeta,\beta}$$

4.12. 环面作用与 $\mathbb{C}^*_q$ 不动点。 在轨形拟映射理论中， I-函数通过在叠环空间上进行环面局部化得到，所用的是 $\mathbb{P}^1$ 上的 $\mathbb{C}^*$-作用； $\mathbb{P}^1$ 是 $\mathbb{P}[a,1]$ 的粗模空间，其中 a 是一个~正整数。我们将这个 $\mathbb{C}^*$ 记作 $\mathbb{C}^*_q$，因为它对应于 [Ok20] 中的 $\mathbb{C}^\times_q$。对于 T-等变参数，我们采用与 [CIJ] 和 [GiV] 中类似的记号。

$$K_{\mathbb{C}^*_q}(\bullet)=K(B\mathbb{C}^*_q)=\mathbb{Z}[q^{\pm1}],\quad K_{\widetilde{T}}(\bullet)=K(B\widetilde{T})=\mathbb{Z}[\Lambda_1^{\pm1},\dots,\Lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}^{\pm1}],$$

Let

$$z=c_1(q)\in H^2_{\mathbb{C}^*_q}(\bullet;\mathbb{Z}),\quad\lambda_j=-c_1(\Lambda_j)\in H^2_{\widetilde{T}}(\bullet;\mathbb{Z}).$$

Then

$$H^*_{\mathbb{C}^*_q}(\bullet;\mathbb{Z})=H^*(B\mathbb{C}^*_q;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[z],\quad H^*_{\widetilde{T}}(\bullet;\mathbb{Z})=H^*(B\widetilde{T};\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}],\quad\widetilde{M}=\bigoplus_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\mathbb{Z}\lambda_j.$$

令 $\deg(x)=a$， $\deg(y)=1$。则

$$\mathbb{C}[x,y]=\bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathbb{C}[x,y]_m$$

其中 $\mathbb{C}[x,y]_m$表示分次环 $\mathbb{C}[x,y]$的次数 m 部分。若 $m\in\mathbb{Z}_{\geq0}$，则

$$H^0(\mathbb{P}[a,1],\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1[a,1]}(m))=\mathbb{C}[x,y]_m=\bigoplus_{k=0}^{\lfloor\frac{m}{a}\rfloor}\mathbb{C}x^ky^{m-ka},\quad H^1(\mathbb{P}[a,1],\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1[a,1]}(m))=0.$$

令 $\mathbb{C}^*_q$通过 $q\cdot[x,y]=[qx,y]=[x,q^{-1/a}y]$作用于 $\mathbb{P}[a,1]$，并通过 $q\cdot x=x$、 $q\cdot y=q^{-1/a}y$作用于 $\mathbb{C}[x,y]$。给定任意数 $r\in\mathbb{Q}$，令 $\lfloor r\rfloor$ 为满足 $\lfloor r\rfloor\leq r<\lfloor r\rfloor+1$的唯一整数，并令 $\{r\}:=r-\lfloor r\rfloor\in[0,1)$ 。作为一个

$K_{\mathbb{C}_q^*}(\bullet)$中的元素,

$$\begin{aligned} & H^0(\mathbb{P}[a,1],\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1[a,1]}(m)) - H^1(\mathbb{P}[a,1],\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1[a,1]}(m)) \\ = \quad & \frac{q^{-\{\frac{m}{a}\}}}{1-q^{-1}} + \frac{q^{-\frac{m}{a}}}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{-\{\frac{m}{a}\}-k} - \sum_{k=0}^{\infty} q^{-\frac{m}{a}-1-k} \\ = \quad & \begin{cases} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{a} \rfloor} q^{-\{\frac{m}{a}\}-k}, & m \geq 0 \\ 0, & -a \leq m \leq -1 \\ -\sum_{k=1}^{-\lfloor \frac{m}{a} \rfloor -1} q^{-\{\frac{m}{a}\}+k}, & m \leq -a-1 \end{cases} \end{aligned}$$

对于 $j=1,\ \ldots\ldots,\ n+\boldsymbol{\kappa}$, 我们定义

$$d_j(\beta) := \langle \mathsf{D}_j, \beta \rangle - \frac{q_j}{2} \in \mathbb{Q} \tag{4.25}$$

Then

$$V_\beta^j = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\lfloor d_j(\beta) \rfloor} \Lambda_j q^{-\{d_j(\beta)\}-k}, & d_j(\beta) \geq 0; \\ 0, & d_j(\beta) < 0 \end{cases}, \qquad W_\beta^j = \begin{cases} 0, & d_j(\beta) \geq -1, \\ \sum_{k=1}^{-\lfloor d_j(\beta) \rfloor -1} \Lambda_j q^{-\{d_j(\beta)\}+k}, & d_j(\beta) < -1. \end{cases} \tag{4.26}$$

$$(V_\beta^j)^{\mathbb{C}_q^*} = \begin{cases} \mathbb{C}, & d_j(\beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

记

$$V = \bigoplus_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} V_j = V_\beta^+ \oplus V_\beta^- \oplus V_\beta^\perp$$

其中 $V_j = \mathsf{Spec}\mathbb{C}[x_j]$,

$$V_\beta^+ := \bigoplus_{\substack{j\in[1..n+\boldsymbol{\kappa}] \\ d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} V_j, \quad V_\beta^- := \bigoplus_{\substack{j\in[1..n+\boldsymbol{\kappa}] \\ d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}}} V_j, \quad V_\beta^\perp := \bigoplus_{\substack{j\in[1..n+\boldsymbol{\kappa}] \\ d_j(\beta)\notin\mathbb{Z}}} V_j. \tag{4.27}$$

Then

$$V_\beta^+ = V_\beta^{\mathbb{C}_q^*}, \quad V_\beta^+ \oplus V_\beta^- = V^{g(v(\beta))}.$$

我们定义

$$\mathcal{F}_\beta := \left[\left(V_\beta^+ \cap V_G^{ss}(\zeta) \right) \Big/ G \right].$$

那么 $\mathcal{F}_\beta$ 是$\mathcal{X}_{\zeta,\ v(\beta)}$的闭子叠。

$$\mathrm{ev}_\infty : \mathcal{X}_{\zeta,\beta}^\circ \to \mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}$$

限制为一个同构

$$\mathrm{ev}_\infty : \left(\mathcal{X}_{\zeta,\beta}^\circ\right)^{\mathbb{C}_q^*} \to \mathcal{F}_\beta.$$

我们在上述同构下将 $\left(\mathcal{X}_{\zeta,\beta}^\circ\right)^{\mathbb{C}_q^*}$ 与 $\mathcal{F}_\beta$ 视为相同。

如果 $I \in \mathcal{A}^{\mathrm{ni}}{}_{n\zeta}$ 和 β 若 $\in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\mathcal{X}_\zeta, \mathbf{w}\zeta)$, 则环面不动点 $\mathfrak{p}_I$ 包含于 $\mathcal{F}_\beta$ 当且仅当 $\beta \in \mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}$.

4.13. 虚切丛与虚法丛。 由于 $\mathbb{C}_q^*$ 在 $\mathcal{F}_\beta$ 上平凡作用，因此它在线性作用于任意 $\mathbb{C}_q^*$-等变向量丛的纤维上。如果 V 是 $\mathcal{F}_\beta$ 上的一个 $\mathbb{C}_q^*$- 等变向量丛，则

$$V = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} V_d = V^f \oplus V^m,$$

其中 V_d 是 $\mathbb{C}_q^*$ 以权重 d 作用的子丛，而 $V^m = \bigoplus V_d$ （分别地， $V^f = V_0$）是移动的（分别地，$d\neq 0$

在 $\mathbb{C}_q^*$ 作用下的固定部分。令

$$T_\beta^1 := T_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}}\big|_{\mathcal{F}_\beta}, \quad T_\beta^2 := \mathrm{Ob}_{\zeta,\beta}|_{\mathcal{F}_\beta}.$$

那么， $T^{1,\ }{}_\beta{}^f = T_{\mathcal{F}_\beta}$是 $\mathcal{F}_\beta$的切丛，而 $T^{1,\ }{}_\beta{}^m = N_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,\ \beta}^\circ}$是 $\mathcal{F}_\beta$在$\mathcal{X}_{\zeta,\ \beta}$中的法丛。

$\mathcal{F}_\beta$ 的虚切丛为

$$T_\beta^{1,f} - T_\beta^{2,f} = T_{\mathcal{F}_\beta} - 0 = T_{\mathcal{F}_\beta}.$$

因此,

$$[\mathcal{F}_\beta]^{\mathrm{vir}} = [\mathcal{F}_\beta].$$

$\mathcal{F}_\beta$ 的虚法丛定义为

$$N_\beta^{\mathrm{vir}} := T_\beta^{1,m} - T_\beta^{2,m} \in K_{\mathbb{C}_q^*\times\widetilde{T}}(\mathcal{F}_\beta). \tag{4.28}$$

Let

$$\iota_{\beta\to v(\beta)} : \mathcal{F}_\beta \to \mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}, \quad \iota_v : \mathcal{X}_{\zeta,v} \to \mathcal{X}_\zeta, \quad \iota_\beta = \iota_{v(\beta)} \circ \iota_{\beta\to v(\beta)} : \mathcal{F}_\beta \to \mathcal{X}_\zeta$$

为包含映射。

命题 4.12。

$$N_\beta^{\mathrm{vir}} = \iota_{\beta\to v(\beta)}^* \widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}} \tag{4.29}$$

其中

$$\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}} = \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \iota_{v(\beta)}^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{-d_j(\beta)+k} - \sum_{k=0}^{\infty} q^{\{-d_j(\beta)\}+k}\Big) + \sum_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_{v(\beta)}^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1} \quad \in K_{\mathbb{C}_q^*\times\widetilde{T}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}\right). \tag{4.30}$$

证明。

$$T_\beta^{1,m} = \sum_{d_j(\beta)\geq 0} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ 0\leq k<d_j(\beta)}} q^{-d_j(\beta)+k}\Big) = \sum_{d_j(\beta)\geq 0} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{-d_j(\beta)+k} - \sum_{k=0}^{\infty} q^{\{-d_j(\beta)\}+k}\Big).$$

$$\begin{aligned} T_\beta^{2,m} &= \sum_{d_j(\beta)<0} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ d_j(\beta)<k<0}} q^{-d_j(\beta)+k}\Big) \\ &= \sum_{d_j(\beta)<0} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{\{-d_j(\beta)\}+k} - \sum_{k=0}^{\infty} q^{-d_j(\beta)+k}\Big) - \sum_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1} \end{aligned}$$

因此,

$$N_\beta^{\mathrm{vir}} = T_\beta^{1,m} - T_\beta^{2,m} = \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^{-d_j(\beta)+k} - \sum_{k=0}^{\infty} q^{\{-d_j(\beta)\}+k}\Big) + \sum_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1} \tag{4.31}$$

注意到 $\iota_\beta^* = \iota_{\beta\to v(\beta)}^* \circ \iota_{v(\beta)}^*$, 因此 (4.29) 可由 (4.30) 和 (4.31) 得出。 □

在上述证明中,

$$\sum_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_\beta^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1} = N_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}}.$$

我们定义

$$\widetilde{N}_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}} := \sum_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_{v(\beta)}^*(U_j^{\widetilde{T}})^{-1} \in K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}). \tag{4.32}$$

Then

$$\iota_{\beta\to v(\beta)}^* \widetilde{N}_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}} = N_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}}. \tag{4.33}$$

回忆一下 $V^{g_{(v(\beta))}} = V_\beta^+ \oplus V_\beta^-$。我们有

$$\mathrm{tot}\big(\widetilde{N}_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}}\big) = \Big[\Big(V^{g(v(\beta))} \cap V_G^{ss}(\zeta)) \times V_\beta^-\Big)/G\Big], \quad \mathrm{tot}\big(N_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}}\big) = \Big[\Big((V_\beta^+ \cap V_G^{ss}(\zeta)) \times V_\beta^-\Big)/G\Big].$$

4.14. 虚拟分解与奇点范畴。 在本小节中，我们固定一个有效类 β，并令 $v=v(\beta)$。令 $n_\pm=\dim V_\beta^\pm$。我们引入变量 $(y_1,\dots,y_{n_+})$ 和 $(p_1,\dots,p_{n_-})$，使得

$$\{y_1,\dots,y_{n_+}\}=\{x_i: d_i(\beta)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\},\quad \{p_1,\dots,p_{n_-}\}=\{x_i: d_i(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}\}.$$

Then

$$V_\beta^+=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[x_i: d_i(\beta)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[y],\quad V^{g(v)}=\mathrm{Spec}\mathbb{C}[y,p].$$

其中

$$\mathbb{C}[y]=\mathbb{C}[y_1,\dots,y_{n_+}],\quad \mathbb{C}[y,p]=\mathbb{C}[y_1,\dots,y_{n_+},p_1,\dots,p_{n_-}].$$

Let

$$W_v:=W|_{V^{g(v)}}\in\mathbb{C}[y,p]^G.$$

包含映射 $\iota_{\beta\to v}:\mathcal{F}_\beta\to\mathcal{X}_{\zeta,v}$ 是一个闭嵌入，并可识别为求值映射 $\mathsf{ev}_\infty:\mathcal{X}^\circ_{\zeta,\beta}\to\mathcal{X}_{\zeta,v}$ 在 $(\mathcal{X}^\circ_{\zeta,\beta})^{\mathbb{C}_q^*}\cong\mathcal{F}_\beta$ 上的限制。给定任意 $(u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in V_\beta$, $W(u_1,\dots,u_{n+\boldsymbol{\kappa}})\in H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))=0$，因此 $\mathsf{ev}_\infty^*\mathsf{w}_{\zeta,v}=0\in H^0(\mathcal{X}_{\zeta,\beta},\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\zeta,\beta}})$，这意味着 $\iota_{\beta\to v}^*\mathsf{w}_{\zeta,v}=0\in H^0(\mathcal{F}_\beta,\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta})$，进而推出 $W_v|_{V_\beta^+}=0$。因此，W_v 属于理想 $I=\langle p_1,\dots,p_{n_-}\rangle\subset\mathbb{C}[y,p]$，并可写为

$$W_v=\sum_{k=1}^{n_-}p_kW_k(y,p)\tag{4.34}$$

对于某些 $W_k(y,p)\in\mathbb{C}[y,p]$，它们在模 I 的意义下唯一。我们有

$$W_k(y,p)|_{p=0}=\left.\frac{\partial W_v}{\partial p_k}(y,p)\right|_{p=0}.$$

回顾一下，

$$V=\bigoplus_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}V_i$$

其中 G 通过特征 D_i作用于 V_i。令 L_i 表示 $\mathfrak{X}_v=[V^{g(v)}/G]$ 上的线丛，其全空间为

$$\mathrm{tot}(L_i)=[(V^{g(v)}\times V_i)/G].$$

If $p_k=x_{i_k}$，则 p_k 定义了 L_{i_k} 的一个截面，而 $W_k(y,p)$ 定义了 $L_{i_k}^{-1}$ 的一个截面（因为 W_v 是 G-不变的）。现在我们将第 4.9 节中的构造应用于

$$\mathbf{X}=\mathcal{F}_\beta=[(V_\beta^+\cap V_G^{ss}(\zeta))/G],\quad \mathbf{C}=[V_\beta^+/G],\quad \mathfrak{B}^\circ=[\bullet/G]=BG.$$

Let

$$\mathbf{U}=\mathcal{X}_{\zeta,v}=[V^{g(v)}\cap V_G^{ss}(\zeta)/G],\quad \mathbf{A}=\mathfrak{X}_v=[V^{g(v)}/G].$$

闭嵌入映射 $\iota_{\mathbf{X}}:\mathbf{X}\hookrightarrow\mathbf{U}$ 和 $\iota_{\mathbf{C}}:\mathbf{C}\hookrightarrow\mathbf{A}$ 由包含映射 $V_\beta^+\subset V^{g(v)}$诱导。

$$B_{\mathbf{A}}:=\pi_{\mathbf{A}/\mathfrak{B}^\circ}^*B=\bigoplus_{k=1}^{n_-}L_{i_k},\quad B_{\mathbf{U}}=j_U^*B_{\mathbf{A}}=\bigoplus_{k=1}^{n_-}j_U^*L_{i_k}=\bigoplus_{k=1}^{n_-}\iota_v^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\zeta}(\mathcal{D}_{i_k}).$$

该满射线性映射

$$(p_1,\dots,p_k):V^{g(v)}\to\mathbb{C}^{n_-}$$

下降为一个正则截面 $\beta_{\mathbf{A}}\in H^0(\mathbf{A},B_{\mathbf{A}})$，其限制到 $\mathbf{U}$ $B_{\mathbf{U}}$ 上后为正则截面 $\beta_{\mathbf{U}}\in H^0$，并且

$$Z(\beta_{\mathbf{A}})=\mathbf{C},\quad Z(\beta_{\mathbf{U}})=\mathbf{X}.$$

求值映射 $\mathsf{ev}_{\mathbf{A}}:\mathbf{A}\to\mathfrak{X}_v$ 和 $\mathsf{ev}_{\mathbf{U}}:\mathbf{U}\to\mathcal{X}_{\zeta,v}$ 是恒等映射，并且

$$\mathbf{w}_{\mathbf{A}}=\mathrm{ev}_{\mathbf{A}}^*\mathbf{w}_v=\mathbf{w}_v,\quad \mathbf{w}_{\mathbf{U}}=\mathrm{ev}_{\mathbf{U}}^*\mathbf{w}_{\zeta,v}=\mathbf{w}_{\zeta,v}.$$

该向量值多项式函数

$$(-W_1,\dots,-W_k):V^{g(v)}\to\mathbb{C}^{n_-}$$

下降为一个截面 $\alpha_{\mathbf{A}}\in H^0(\mathbf{A},B_{\mathbf{A}}^\vee)$，其限制到 $\mathbf{U}$ $B_{\mathbf{U}}^\vee$ 上为 $\alpha_{\mathbf{U}}=j_{\mathbf{U}}^*\alpha_{\mathbf{A}}\in H^0$。

$$\langle\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\rangle=-\mathbf{w}_{\mathbf{A}},\quad \langle\alpha_{\mathbf{U}},\beta_{\mathbf{U}}\rangle=-\mathbf{w}_{\mathbf{U}}.$$

那么 $\{\alpha_{\mathbf{A}},\beta_{\mathbf{A}}\}$ 是 $(\mathbf{A},-\mathbf{w}_{\mathbf{A}})$ 的 Koszul 矩阵分解，并且

$$\mathbb{K}_\beta:=\{\alpha_{\mathbf{U}},\beta_{\mathbf{U}}\}\tag{4.35}$$

是 $(\mathbf{U}\ -\mathbf{w}_{\mathbf{U}}) = (\mathcal{X}_{\zeta,\ v},\ -\mathbf{w}_{\zeta,\ v})$ 的 Koszul 矩阵分解。注意，$\beta_{\mathbf{U}}$ 是 $B_{\mathbf{U}}$ 的正则截面，因此 $\{\alpha_{\mathbf{U}}, \beta_{\mathbf{U}}\}$是 PV16 定义 1.6 中意义下的正则 Koszul 矩阵分解。1] 而且（根据 PV16 第1节6]）应被视为 Koszul 复形 $\{0, \beta_{\mathbf{U}}\}$ 的一种变形。

令 $\mathcal{X}_{\zeta,v,0} = \mathbf{w}_{\zeta\ v}^{-1}{}_{,}(0)$，并令

$$\mathfrak{C} : H\mathrm{MF}(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}) \to D_{\mathrm{Sg}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v,0}\right)$$

为函子，将　　一个矩阵分解 $(E_\bullet, \delta)$ 发送到 $\delta_1 :\ E_1 \to E_0$ 的余核。有两种情形：　　s:

(i) 若 $\mathbf{w}_{\zeta,v}$ 非零，则它不是零因子。由 [PV16，引理 1.6.2 (i)],

$$\mathfrak{C}(\{\alpha_{\mathbf{U}}, \beta_{\mathbf{U}}\}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta} \ \text{ in } D_{\mathrm{Sg}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v,0}\right), \tag{4.36}$$

w此处将 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}$ 视为 $\mathcal{X}_{\zeta,v,0}$ 上的相干层。由 [PV11，定理 3.14], 函子　　r

$$\overline{\mathfrak{C}} : D\mathrm{MF}(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}) \to D_{\mathrm{Sg}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v,0}\right)$$

由 $\mathfrak{C}$ 诱导，是三角范畴之间的等价。

(ii) 若 $\mathbf{w}_{\zeta,v} = 0$，则由 [PV16, 引理 1.6.2 (ii)]

$$H^0\left(\{\alpha_{\mathbf{U}}, \beta_{\mathbf{U}}\}\right) \simeq i_{\beta\to v*}\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}, \quad H^1\left(\{\alpha_{\mathbf{U}}, \beta_{\mathbf{U}}\}\right) = 0. \tag{4.37}$$

4.15. K 理论 I-函数。对于每个 $\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} := \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}(\mathcal{X}_\eta, \mathbf{w}\zeta)_{0,1},$，导出推前

$$R\iota_{\beta\to v(\beta)*}\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}$$

~定义了一个元素 $G_\beta^T \in K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$ 和 $G_\beta \in K(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$。我们有

$$G_\beta^{\widetilde{T}} = \Lambda_{-1}(\widetilde{N}_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}})^\vee = \prod_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \left(1 - \iota_v^* U_j^{\widetilde{T}}\right) \ \in K_{\widetilde{T}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}\right) \tag{4.38}$$

$$G_\beta = \prod_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} (1 - \iota_v^* U_j) \ \in K(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}). \tag{4.39}$$

注记 4.13. 若 $\mathcal{F}_\beta$ 是真，则 $R\iota_{\beta\to v(\beta)*}\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}$ 定义了一个元素 $G_\beta^c \in K_c(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$，且 G_β 属于理想$K_{\mathrm{ct}}(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}) \subset K(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$。

~我们定义K 理论 T-等变 I-函数 为 GLSM $(V, G, \mathbb{C}_R^*, 0, \zeta)$ 的

$$I_{\widetilde{T}}^K = \sum_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} I_{\widetilde{T},v}^K$$

其中

$$\begin{aligned} I_{\widetilde{T},v}^K &:= \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta (R\iota_{\beta\to v(\beta)})_* \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}}{\Lambda_{-1}(N_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee}\right) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta (R\iota_{\beta\to v(\beta)})_* \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathcal{F}_\beta}}{\iota_{\beta\to v(\beta)}^*\Lambda_{-1}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee}\right) \\ &= \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{G_\beta^{\widetilde{T}}}{\Lambda_{-1}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee} = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{\prod_{k=0}^\infty (1 - \iota_v^* U_j^{\widetilde{T}} q^{k+\{-d_j(\beta)\}})}{\prod_{k=0}^\infty (1 - \iota_v^* U_j^{\widetilde{T}} q^{k-d_j(\beta)})} \end{aligned} \tag{4.40}$$

上面的等式 (4.40) 中，第二、第三和第四个等号分别由 (4.29)、(4.38) 和 (4.30) 得出。

$I_{\widetilde{T}}^K$的非等变极限为

$$I^K = \sum_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} I_v^K$$

其中

$$I_v^K = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{G_\beta}{\Lambda_{-1}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee} = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \frac{\prod_{k=0}^\infty (1 - \iota_v^* U_j q^{k+\{-d_j(\beta)\}})}{\prod_{k=0}^\infty (1 - \iota_v^* U_j q^{k-d_j(\beta)})}.$$

注记 4.14。 若 $\mathcal{F}_\beta$ 对所有 $\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}$ 都是真，则我们可以定义 I_c^K其取值于 $\bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} K_c(\mathcal{X}_{\zeta,\ v})$:

$$I_c^K = \sum_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} I_{c,v}^K \quad where \quad I_{c,v}^K := \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{G_\beta^c}{\Lambda_{-1}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee}.$$

对于每个 $\beta \in K^{\mathrm{eff}}$，令

$$[\mathbb{K}_\beta] \in K\left(\mathrm{MF}(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v})\right)$$

是第 4.14 节中定义的 Koszul 矩阵分解的 K-理论类 $\mathbb{K}_\beta$。那么，G_β 是 $[\mathbb{K}_\beta]$ 在 $K\left(\mathrm{MF}(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v})\right) \longrightarrow K(\mathcal{X}_{\zeta,v})$ 下的像。我们将 GLSM $(V, G, \mathbb{C}_R^*, W, \zeta)$ 的 *K*理论 *GLSM* I-函数定义为

$$I_{\mathbf{w}}^K = \sum_{v \in \mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} I_{\mathbf{w},v}^K \quad \text{where} \quad I_{\mathbf{w},v}^K := \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{[\mathbb{K}_\beta]}{\Lambda_{-1}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})^\vee}.$$

4.16. 上同调 I-函数。我们有一个适当推前

$$(\iota_{\beta\to v(\beta)})_* : H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{F}_\beta) \to H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}) \tag{4.41}$$

这是 $H_{\widetilde{T}}^*\left(\mathcal{X}_{\zeta,\,v(\beta)}\right)$-模的一个态射：对于任意 $a \in H_{\widetilde{T}}^*\left(\mathcal{X}_{\zeta,\,v(\beta)}\right)$ 和 $b \in H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{F}_\beta)$，我们有

$$(\iota_{\beta\to v(\beta)})_*\left(\iota_{\beta\to v(\beta)}^* a \cup b\right) = a \cup (\iota_{\beta\to v(\beta)})_* b.$$

该像是由 $\mathcal{F}_\beta$ 在 $\mathcal{X}_{\zeta,\,v(\beta)}$ 中的 $\widetilde{T}$-等变庞加莱对偶 $F_\beta^{\widetilde{T}}$ 生成的主理想，其中

$$F_\beta^{\widetilde{T}} = (\iota_{\beta\to v(\beta)})_* 1 = e_{\widetilde{T}}(\widetilde{N}_{\mathcal{F}_\beta/\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}}) = \prod_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_{v(\beta)}^* u_j^{\widetilde{T}} \in H_{\widetilde{T}}^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}). \tag{4.42}$$

的非等变庞加莱对偶是

$$F_\beta = \prod_{d_j(\beta)\in\mathbb{Z}_{<0}} \iota_{v(\beta)}^* u_j \in H^*\left(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}\right). \tag{4.43}$$

注4.15。若 $\mathcal{F}_\beta$ 是真，则它也有一个非等变庞加莱对偶 $F_\beta^c \in H_c^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$，且 F_β 是 F_β^c 在 $H_c^*(\mathcal{X}_{\zeta,\beta}) \to H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$ 下的像；特别地，F_β 属于理想 $H_{\mathrm{ct}}^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)}) \subset H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v(\beta)})$。

We 定义 GLSM $(V, G, \mathbb{C}_R^*, W, \zeta)$ 的（上同调）T-等变 I-函数 为 b e

$$I_{\widetilde{T}}(y,z) = \sum_{v\in\mathrm{Box}(\mathbf{\Sigma})} I_{\widetilde{T},v}(y,z)\mathbf{1}_v$$

其中

$$\begin{aligned}
I_{\widetilde{T},v}(y,z) :=& e^{(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(\log y_a)\iota_v^* p_a^{\widetilde{T}})/z} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \left(\iota_{\beta\to v(\beta)}\right)_* \left(\frac{1}{e_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}_q^*}(N_\beta^{\mathrm{vir}})}\right) \\
=& e^{(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(\log y_a)\iota_v^* p_a^{\widetilde{T}})/z} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \left(\iota_{\beta\to v(\beta)}\right)_* \left(\frac{1}{\iota_{\beta\to v(\beta)}^* e_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}_q^*}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})}\right) \\
=& e^{(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(\log y_a)\iota_v^* p_a^{\widetilde{T}})/z} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{F_\beta^{\widetilde{T}}}{e_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}_q^*}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})} \\
=& e^{(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(\log y_a)\iota_v^* p_a^{\widetilde{T}})/z} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} y^\beta \prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \frac{\prod_{k=0}^{\infty}(\iota_v^* u_j^{\widetilde{T}} + (-\{-\langle \mathsf{D}_j,\beta\rangle + q_j/2\} - k)z)}{\prod_{k=0}^{\infty}(\iota_v^* u_j^{\widetilde{T}} + (\langle \mathsf{D}_j,\beta\rangle - q_j/2 - k)z)} \\
=& \frac{e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(\log y_a)\iota_v^* p_a^{\widetilde{T}}\right)/z}}{z^{\mathrm{age}(v)-\hat{q}}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}\\ v(\beta)=v}} \frac{y^\beta}{z^{\langle\sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\mathsf{D}_j,\beta\rangle}} \prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\iota_v^* u_j^{\widetilde{T}}}{z} - \{-\langle \mathsf{D}_j,\beta\rangle + \frac{q_j}{2}\}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\iota_v^* u_j^{\widetilde{T}}}{z} + \langle \mathsf{D}_j,\beta\rangle - \frac{q_j}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

在上面的公式（4.44）中，第二、第三和第四个等号分别由（4.29）、（4.42）和（4.30）得出。回想一下，

$$\deg u_j^{\widetilde{T}} = \deg p_a^{\widetilde{T}} = \deg z = 2.$$

我们定义

$$\deg y^\beta = 2\Big\langle \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathsf{D}_j, \beta \Big\rangle, \quad \deg(\mathbf{1}_v) = 2(\mathrm{age}(v) - \hat{q}).$$

则 $I_{\widetilde{T}}(y,\ z)$ 是零次齐次的。令 $q_j = 0$，即可得到 [CCIT 第 5] 节和 [CIJ 第 6.2 节中（扩展） I-函数的公式1]。

$I_{\widetilde{T}}(y,\ z)$ 的非等变极限为

$$I(y,z) = \sum_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})} I_v(y,z)\mathbf{1}_v$$

其中

$$\begin{aligned} I_v(y,z) =& e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} (\log y_a)\iota_v^* p_a\right)/z} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} y^\beta \left(\iota_{\beta \to v(\beta)}\right)_* \frac{1}{e_{\mathbb{C}_q^*}(N_\beta^{\mathrm{vir}})} \\ =& e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} (\log y_a)\iota_v^* p_a\right)/z} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{F_\beta}{e_{\mathbb{C}_q^*}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})} \\ =& \frac{e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} (\log y_a)\iota_v^* p_a\right)/z}}{z^{\mathrm{age}(v)-\hat{q}}} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} \frac{y^\beta}{z^{\langle \sum_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathsf{D}_j, \beta\rangle}} \prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\iota_v^* u_j}{z} - \{-\langle \mathsf{D}_j, \beta\rangle + \frac{q_j}{2}\}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\iota_v^* u_j}{z} + \langle \mathsf{D}_j, \beta\rangle - \frac{q_j}{2}\right)} \end{aligned} \tag{4.45}$$

对于每个 $\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}$,

$$\mathrm{tdch}^{\mathcal{X}_{\zeta,v}}_{\mathcal{Z}_{\zeta,v}}(\mathbb{K}_\beta) \in \mathbb{H}^{even}_{\mathcal{Z}_{\zeta,v}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, -d\mathbf{w}_{\zeta,v})\right)$$

其中 $\mathcal{Z}_{\zeta,\ v} = \mathsf{Crit}(\mathbf{w}_{\zeta,\ v})$。我们将 GLSM $(V,\ G,\ \mathbb{C}_R^*,\ W,\ \zeta)$ 的 *GLSM* I-函数定义为 $\mathsf{b}\quad \mathrm{e}$

$$I_{\mathbf{w}}(y,z) = \sum_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})} I_{\mathbf{w},v}(y,z)$$

其中

$$I_{\mathbf{w},v}(y,z) := e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} (\log y_a)\iota_v^* p_a\right)/z} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{1}{e_{\mathbb{C}_q^*}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})} \cdot \mathrm{tdch}^{\mathcal{X}_{\zeta,v}}_{\mathcal{Z}_{\zeta,v}}(\mathbb{K}_\beta). \tag{4.46}$$

引理 4.16。 若 $\mathbf{w}_{\zeta,\ v} = 0$ （当 v 属于窄扇区时这一条件成立），则

$$I_{\mathbf{w},v}(y,z) = I_v(y,z).$$

证明。 若 $\mathbf{w}_{\zeta,\ v} = 0$ 则 $\mathcal{Z}_{\zeta,\ v} = \mathcal{X}_{\zeta,\ v}$ 且

$$\mathbb{H}^{even}_{\mathcal{Z}_{\zeta,v}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, -d\mathbf{w}_{\zeta,v})\right) = \mathbb{H}^{even}_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}\left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, 0)\right) = H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}), \quad \mathrm{tdch}^{\mathcal{X}_{\zeta,v}}_{\mathcal{Z}_{\zeta,v}}(\mathbb{K}_\beta) = F_\beta.$$

□

注 4.17。 若 $\mathcal{F}_\beta$ 对所有 $\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}$ 都是真映射，则我们可以定义 $I_c(y,\ z)$ 其取值于 $\bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})} H_c^*(\mathcal{X}_{\zeta,\ v})$:

$$I_c(y,z) = \sum_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})} I_{c,v}(y,z)\mathbf{1}_v$$

其中

$$I_{c,v}(y,z) := e^{\left(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} (\log y_a)\iota_v^* p_a\right)/z} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{K}^{\mathrm{eff}} \\ v(\beta)=v}} y^\beta \frac{F_\beta^c}{e_{\mathbb{C}_q^*}(\widetilde{N}_\beta^{\mathrm{vir}})}. \tag{4.47}$$

4.17. 中心荷。回顾 $H^*_{\widetilde{T}}(\bullet;\mathbb{C}) = H^*(BT;\mathbb{C}) = \mathbb{C}[\lambda_1,\dots,\lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}] =: \mathbb{C}[\lambda]$。根据 Fang [Fa20, 第 4 节2], , 我们定义一个映射

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}_z : K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta) &\longrightarrow \bigoplus_{v\in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)} H^*_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,v};\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}[\lambda]}\mathbb{C}[\lambda]((z^{-1}))\mathbf{1}_v,\\ \mathcal{E} &\mapsto \sum_{v\in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)} \widetilde{\mathrm{ch}}_z(\mathcal{E})_v\mathbf{1}_v,\end{aligned}$$

由以下两个性质唯一确定它。

(1) 若 $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ 是 T-等变向量丛，定义在 $\mathcal{X}_\zeta$ 上，则

$$\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_1\oplus\mathcal{E}_2)_v = \widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_1)_v + \widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_2)_v,\quad \widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2)_v = \widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_1)_v\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{E}_2)_v.$$

(2) 若 $\mathcal{L}$ 是定义在 $\mathcal{X}_\zeta$ 上的 T-等变线丛，则

$$\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{L})_v = e^{2\pi\sqrt{-1}(\mathrm{age}_v(\mathcal{L})-\frac{(c_1)_{\widetilde{T}}(\iota_v^*\mathcal{L})}{z})}$$

注 4.18。回忆一下，$\deg(z)=2$，因此 陈特征 $\widetilde{\text{陈特征}}^T_z(\mathcal{L})_v$ 是 0 次齐次的，并由 $\widetilde{\text{陈特征}}^T_1(\mathcal{L})_v = \widetilde{\text{陈特征}}^T_z(\mathcal{L})_v\Big|_{z=1}$ 确定：

$$\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z(\mathcal{L})_v = z^{-\deg/2}\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_1(\mathcal{L}).$$

我们定义

$$\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{T}}_z = \sum_{v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})}\prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\exp\Big(\log z(1+\frac{\iota_v^*u_j^{\widetilde{T}}}{z}-\mathrm{age}_v(U_j^{-1})\Big)\Gamma\Big(1+\frac{\iota_v^*u_j^{\widetilde{T}}}{z}-\mathrm{age}_v(U_j^{-1})\Big)\mathbf{1}_v$$

回忆一下，$(V,G,\mathbb{C}^*_R,\mathbf{0},\zeta)$ 的 T-等变态空间 $\mathcal{H}_{\widetilde{T}}$为

$$\mathcal{H}_{\widetilde{T}} = \bigoplus_{v\in\mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)} H^*_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,v};\mathbb{C})[2\,(\mathrm{age}(v)-\hat{q})]$$

作为 $\mathbb{C}$ 上的分次向量空间，其中每个 $H^*_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_{\zeta,\,v};\,\mathbb{C})$ 都是一个 $\mathbb{C}[\lambda]$-模。令 $(\,,\,)_{\widetilde{T}}$ 表示非退化配对

$$\mathcal{H}_{\widetilde{T}}\otimes_{\mathbb{C}[\lambda]}\mathbb{C}(\lambda)\times\mathcal{H}_{\widetilde{T}}\otimes_{\mathbb{C}[\lambda]}\mathbb{C}(\lambda)\longrightarrow\mathbb{C}(\lambda).$$

定义 4.19 ($\widetilde{T}$-等变中心荷)。给定 $\mathfrak{B}\in D^b_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$，我们将其 $\widetilde{T}$-等变中心荷定义为

$$Z_{\widetilde{T}}(\mathfrak{B}) := \Big(I_{\widetilde{T}}(y,-z),\widetilde{\Gamma}^{\widetilde{T}}_z\widetilde{\mathrm{ch}}^{\widetilde{T}}_z([\mathfrak{B}])\Big)_{\widetilde{T}} \tag{4.48}$$

其中 $[\mathfrak{B}]\in K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$ 是 $\mathfrak{B}$ 的 K-理论类。

根据定义， $Z_{\widetilde{T}}(\mathfrak{B})$ 仅取决于 $[\mathfrak{B}]\in K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$。我们采用第 2.5 节中的记号，并作如下观察：

- $K_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$ 中的任意类都可以写成

$$\sum_{\mathsf{t}\in\mathbb{L}^\vee} c_{\mathsf{t}}\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}}$$

其中 $c_{\mathsf{t}}\in K_{\widetilde{T}}(\bullet)=\mathbb{Z}[\Lambda_1^{\pm1},\dots,\Lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}}^{\pm1}]$，并且

$$\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}} = \prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}(P_a^{\widetilde{T}})^{-\langle\mathsf{t},\xi_a\rangle}\in\mathrm{Pic}_{\widetilde{T}}(\mathcal{X}_\zeta)$$

其特征为

$$(c_1)_{\widetilde{T}}\big(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}}\big) = \sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\langle\mathsf{t},\xi_a\rangle p_a^{\widetilde{T}}.$$

- 映射 $\mathfrak{B}\longrightarrow Z_{\widetilde{T}}(\mathfrak{B})$ 是 $K_{\widetilde{T}}(\bullet)$-线性的。

因此，只需计算所有 $\in\mathbb{L}^\vee$ 的 $Z_{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^T)$。对于 $j\in\{1,\dots,n+\boldsymbol{\kappa}\}$，我们 l et

$$\alpha_j = \frac{\lambda_j}{z}+\frac{q_j}{2}. \tag{4.49}$$

定理 4.20. 对于任意$\mathsf{t} \in \mathbb{L}^\vee$，我们有

$$Z_{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}}) = \sum_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} Z_{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}})_I,$$

其中

$$\begin{aligned} Z_{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}})_I &= \frac{1}{|G_{\sigma_{I'}}|} \sum_{m \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^I} \prod_{i' \in I'} \frac{\Gamma\left(\langle \mathsf{D}_{i'}, -\sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i)\mathsf{D}_i^{*I}\rangle + \alpha_{i'}\right)}{z^{\langle \mathsf{D}_{i'}, \sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i)\mathsf{D}_i^{*I}\rangle - \alpha_{i'}}} \prod_{i\in I} \frac{1}{(-z)^{m_i} m_i!} \\ &\quad \cdot \exp(\langle (\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \log y_a \xi_a) - 2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t}, \sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i) D_i^{*I}\rangle) \end{aligned}$$

证明。令

$$\Xi = \{(I,v) : I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}, v \in \mathrm{Box}(\sigma_{I'})\} = \{(I,v) : I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}, \mathfrak{p}_I \subset \mathcal{X}_{\zeta,v}\}.$$

给定一对 $(I,\ v) \in \Xi$，令 $\iota_{I,\ v} : \mathfrak{p}_I \hookrightarrow \mathcal{X}_{\zeta,\ v}$ 为包含映射。则

$$Z_{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}}) = \sum_{I \in \mathcal{A}_\zeta^{\min}} A_I$$

其中

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{1}{|G_{\sigma_I}|} \sum_{v \in \mathrm{Box}(\sigma_{I'})} \frac{\iota_{I,v}^* I_{\widetilde{T},v} \iota_{I,\mathrm{inv}(v)}^* \iota_{\mathrm{inv}(v)}^* \left(\widetilde{\Gamma}_z \iota_{I,\mathrm{inv}(v)} \widetilde{\mathrm{ch}}_z(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}})\right)}{e_{\widetilde{T}}(T_{\mathfrak{p}_I}\mathcal{X}_v)} \\ &= \frac{1}{|G_{\sigma_{I'}}|} \sum_{m \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^I} \prod_{i' \in I'} \frac{\Gamma\left(\langle \mathsf{D}_{i'}, -\sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i)\mathsf{D}_i^{*I}\rangle + \alpha_{i'}\right)}{z^{\langle \mathsf{D}_{i'}, \sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i)\mathsf{D}_i^{*I}\rangle - \alpha_{i'}}} \prod_{i\in I} \frac{1}{(-z)^{m_i} m_i!} \\ &\quad \cdot \exp(\langle (\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \log y_a \xi_a) - 2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t}, \sum_{i\in I}(m_i+\alpha_i) D_i^{*I}\rangle) \end{aligned}$$

□

假设 $\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathsf{D}_i = 0$ （卡拉比-丘条件），并令 C 为次级扇中包含稳定性条件 ζ 的极大锥。则

$$Z^{\widetilde{T}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}^{\widetilde{T}})\Big|_{z=1} = Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_C \Big|_{\substack{\theta = -\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \log y_a \xi_a \\ \alpha_j = \lambda_j + q_j/2}}$$

其中 $Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_C$ 是定义 5.5 中的室半球配分函数。

回忆一下，GLSM态空间 $\mathcal{H}_{\mathbf{w}}$（V，G，$\mathbb{C}_R^*$，W，ζ）为

$$\mathcal{H}_{\mathbf{w}} = \bigoplus_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma}_\zeta)} \mathbb{H}^*\left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, d\mathbf{w}_{\zeta,v})\right)[2(\mathrm{age}(v) - \hat{q})]$$

作为 $\mathbb{C}$ 上的分次向量空间，其中

$$\mathbb{H}^*\left(\mathcal{X}_{\zeta,v}, (\Omega^\bullet_{\mathcal{X}_{\zeta,v}}, d\mathbf{w}_{\zeta,v})\right) \simeq H^*(\mathcal{X}_{\zeta,v}, \mathbf{w}_{\zeta,v}^\infty; \mathbb{C}).$$

令 $(\ ,\ )_{\mathbf{w}}$ 表示第 2.7 节中的非退化配对 $\mathcal{H}_{\mathbf{w}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{w}} \to \mathbb{C}$

变极限 令 Γ 表示 Γ 的非等 $\widetilde{T}\big|_{z=1}$，即，

$$\widetilde{\Gamma} = \sum_{v \in \mathrm{Box}(\boldsymbol{\Sigma})} \prod_{j=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \Gamma\Big(1 + \iota_v^* u_j - \mathrm{age}_v(U_j^{-1})\Big)\mathbf{1}_v \tag{4.50}$$

定义 4.21 (GLSM 中心荷)。 给定 $\mathfrak{B} \in D$矩阵分解$(\mathcal{X}_\zeta, \mathbf{w}_\zeta)$，我们将其 *GLSM* 中心荷定义为

$$Z_{\mathbf{w}}(\mathfrak{B}) := \Big(I_{\mathbf{w}}(y,-1), \widetilde{\Gamma}\widetilde{\mathrm{ch}}_{\mathbf{w}}([\mathfrak{B}])\Big)_{\mathbf{w}} \tag{4.51}$$

其中 $[\mathfrak{B}] \in K$（$D\mathrm{MF}(\mathcal{X}_\eta, \mathbf{w}_\zeta)$）是 $\mathfrak{B}$ 的 *K*理论类，而 陈特征$_{\mathbf{w}}$（$[\mathfrak{B}]$）定义见 *[CKS]*。

5. The Coulomb Branch

5.1. 圆盘配分函数。本节我们沿用 [HR]，将圆盘配分函数引入为与给定相中的 GLSM 和膜（ K(MF($[V/G]$, **w**)) 的元素）相关联的显式围道积分。从物理角度看，该积分是圆盘配分函数的一种库仑分支表示。我们证明，该积分与前文各节引入的 D膜中心荷一致，从而建立希格斯-库仑对应。**积分密度**。我们采用第2节.2中的记号。回顾一下，我们有如下环面的正合序列

$$1 \to G \to \widetilde{T} \to T \to 1, \tag{5.1}$$

其中 $\tilde{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}} \subset V \simeq \mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$，且 $G \simeq (\mathbb{C}^*)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 的作用由荷向量 $\mathsf{D}_i \in \mathbb{L}^\vee$, $1 \le i \le n+\boldsymbol{\kappa}$给出。事实上，只需假设这些荷向量在 $\mathbb{Q}$ 上张成 $\mathbb{L}^\vee_{\mathbb{Q}}$，这等价于说映射$\sim\rho_V$: $G \to T$ 的像是 $\boldsymbol{\kappa}$维的；或者等价地， ρ_V 的核是有限的。

令 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数，并令 $\mathfrak{g}^\vee$ 为 $\mathfrak{g}$的对偶。于是 $\mathfrak{g} = \mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{g}^\vee = \mathbb{L}^\vee_{\mathbb{C}}$。.令 $\theta \in \mathfrak{g}^\vee$ 为复化稳定性参数（复化 K¨ahler 变量），并令 $\sigma = \sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \sigma_a \xi_a \in \mathfrak{g}$。那么 $H^*_G(V)$ 可与 $\mathfrak{g}$上的代数函数环相识别： $H^*_G(V) \simeq H^*_G(\bullet) = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_{\boldsymbol{\kappa}}]$，其中 $\sigma_1, \dots, \sigma_{\boldsymbol{\kappa}} \in H^2_G(V)$ 是环面 G的等变变量。我们有

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_{\boldsymbol{\kappa}}], \quad G = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s_1^{\pm 1}, \dots, s_{\boldsymbol{\kappa}}^{\pm 1}], \quad \text{where } s_a = e^{2\pi\sqrt{-1}\sigma_a}.$$

令 $H^*_{G,\ an}(V)$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上亚纯函数构成的环。我们通过以下公式定义 $\Gamma \in H^*_{G,\ an}(V)$

$$\Gamma := \prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \Gamma(\langle \mathsf{D}_i, \sigma \rangle + \alpha_i) = \prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \Gamma(\sum_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} Q_i^a \sigma_a + \alpha_i) \tag{5.2}$$

其中 $Q_i^a = \langle \mathsf{D}_i,\ \xi_a \rangle \in \mathbb{Z}$ 按第2节 2.2 中的定义。固定 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ 后， Γ 是 $\sigma_1,\ \dots, \sigma_{\boldsymbol{\kappa}}$ 中的亚纯函数，其极点位于 $\langle \mathsf{D}_i,\ \sigma \rangle + \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\le 0}$ 上。每个极点除子都是 $\mathfrak{g}$ 中的一个超平面。每当 $\{\mathsf{D}_i\}_{i\in I}$ 构成 $\mathfrak{g}^\vee$ 的一组基时，相应的极超平面就构成简单正规交叉除子。如下文所示，对于稳定性参数 ζ 的特定取值，这些简单正规交叉除子对应于 $[V /\!\!/_\zeta G]$ 的有效曲线类。

变量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+\boldsymbol{\kappa}})$ 与大环面 $\tilde{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 的等变变量 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+\boldsymbol{\kappa}})$ 之间的关系为 $\alpha_i = \lambda_i + q_i/2$。目前讨论中尚未引入超势；此外，只有 $\sim x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 中的单项式相对于 $V =$ 谱 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+\boldsymbol{\kappa}}]$ 上的 T-作用是等变的。为了将超势纳入考虑，我们首先需要取极限 $\alpha_i \to q_i/2$，然后将结果与 GLSM 膜 K(矩阵分解($[V/G]$, **w**)) 的元素配对。注意，另一个极限 $\alpha_i \to 0$ 对应于不带超势的非等变理论（到 GIT 商 $[V /\!\!/_\zeta G]$ 的拟映射）。

令 $\mathfrak{B} \in K(\mathrm{MF}([V/G],\ \mathbf{w}))$。我们可以将遗忘态射 $K(\mathrm{MF}([V/G],\ \mathbf{w})) \to K([V/G]) \simeq K_G(V)$ 与等变陈特征映射复合

$$\mathrm{ch} \ : \ K_G(V) \to H^*_{G,an}(V), \quad \sum_{\mathsf{t}\in\mathbb{L}^\vee} c_{\mathsf{t}} \mathbf{L}_{\mathsf{t}} \mapsto \sum_{\mathsf{t}\in\mathbb{L}^\vee} c_{\mathsf{t}} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \mathsf{t}, \sigma\rangle}$$

其中 $c_{\mathsf{t}} \in \mathbb{Z}$，且该和是有限的。我们将所得映射记作 ch。注意， $e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \mathsf{t},\sigma\rangle} = \prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} s_a^{\langle \mathsf{t}, \xi_a\rangle}$，其中 $\langle \mathsf{t}\ \xi_a\rangle \in \mathbb{Z}$，因此 ch 的像是子环 $\mathbb{Z}[s_1^{\pm}, \dots, s_{\boldsymbol{\kappa}}^{\pm}] \subset H^*_{G,\ an}(V)$。

定义 5.1. 圆盘配分函数的积分密度是 $H_{G,\ an}(V)$ 中的以下类：

$$F_{\mathfrak{B}}(\sigma) := \Gamma \cdot \mathrm{ch}(\mathfrak{B}). \tag{5.3}$$

5.2. **圆盘配分函数的分量**。

积分定义。圆盘配分函数关于 $\mathfrak{B}$ 具有可加性，因此我们首先在 G 的特征上定义它。该定义取决于复化稳定性参数 θ，它也是 G 的一个（复化）特征。

取 $\mathbb{L}$ 的一个有序 $\mathbb{Z}$-基 $\{\xi_a\}_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}$，并令 $\mathbb{L}^\vee$ 为 $\{\xi_a^*\}_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}$ 的对偶 $\mathbb{Z}$-基，如第 2.2 节所述。这定义了一个体积形式 $\mathsf{d}\sigma = \Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \xi_a^*$，以及 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{L}_{\mathbb{R}}$ 上的一个定向。进一步令 $\delta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{L}_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathcal{C}_{\mathsf{d}\sigma}(\delta)$ 为由微分形式 $\mathsf{d}\sigma$ 定向的循环$\delta + \sqrt{-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$。

定义 5.2。特征 t 的圆盘配分函数是变量 $\theta = \zeta + 2\pi\sqrt{-1}B \in \mathfrak{g}^\vee$ 的解析函数，由以下公式给出：

$$Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}) := \frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^{\boldsymbol{\kappa}}} \int_{\mathcal{C}_{\mathsf{d}\sigma}(\delta)} \mathrm{d}\sigma \ \Gamma \cdot e^{\langle \theta + 2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t}, \sigma\rangle}, \tag{5.4}$$

其中 $\delta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 满足条件 [2] $\forall i \in [1..n+\boldsymbol{\kappa}]$： $\langle \mathsf{D}_i, \delta\rangle + \alpha_i > 0$。

注记 5.3。 公式 (5.4) 是 $\Gamma e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \mathsf{t},\sigma\rangle}$ 的多维逆梅林变换（例如参见 *[Ts]*），其中 G-特征 $\mathsf{t} \in \mathbb{L}^\vee$ 通过自然同构与线丛 $\mathbf{L}_{\mathsf{t}} \in K_G(V)$ 对应。

由于命题 5.8

注记 5.4。 (5.4) 的右端在定义域中收敛

$$U_{\mathsf{t}} := \Big\{ B \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \mid |\langle B+\mathsf{t}, \nu\rangle| < \sum_i |\langle \mathsf{D}_i, \nu\rangle|/4 \ \textit{for all}\ \nu \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\backslash\{0\} \Big\}. \tag{5.5}$$

特别地，当 $B = -\mathsf{t}$ 时，此时对于任意特征 t， U_{t} 都非空。这个条件限制相当严格，特别是镜像五次例子中 $K(\mathrm{MF}([V/G], \mathbf{w}))$ 中的膜都不满足这个条件。

各相中的展开。 现在我们转而描述 GLSM 各相中的圆盘配分函数分量。

Let C 是次级扇的一个极大锥。极小反锥集合定义为 :

$$\mathcal{A}_C^{\min} := \{ I \subset [1..n+\boldsymbol{\kappa}] \mid C \subset \angle_I,\ |I| \text{ is minimal} \} \tag{5.6}$$

其中， $\angle_I$ 的定义见第2.3节。后一条件等价于 $|I| = \boldsymbol{\kappa}$。为表述我们的希格斯-库仑对应版本（定理 5.6），我们回顾定义 2.7中的一些记号。对于固定的极小反锥 $I \in \mathcal{A}_C^{\min}$， G-特征 $\{\mathsf{D}_i : i \in I\}$ 构成$\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}^\vee$的一组 $\mathbb{Q}$-基。我们将 $\{ \mathsf{D}_i^{*\,I} ,: i \in I\}$ 定义为 $\mathbb{L}_{\mathbb{Q}}$的对偶$\mathbb{Q}$-基。

定义 5.5 （室半球配分函数）。 设 C 为次级扇的一个极大锥。定义室半球配分函数

$$Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_C := (-1)^{\boldsymbol{\kappa}} \sum_{I\in\mathcal{A}_C^{min}} \left| \frac{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \xi_a^*}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}} \mathsf{D}_{i_a}} \right| \sum_{m\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\boldsymbol{\kappa}}} \prod_{i'\in I'} \Gamma(\langle \mathsf{D}_{i'}, \sigma_m\rangle + \alpha_{i'}) \prod_{i\in I} \frac{(-1)^{m_i}}{m_i!} \exp(\langle \theta + 2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t}, \sigma_m\rangle), \tag{5.7}$$

其中， $m = (m_{i_1}, \ldots\ldots, m_{i_{\boldsymbol{\kappa}}})$ 、 $I = \{i_1, \ldots, i_{\boldsymbol{\kappa}}\}$和$\sigma_m = -\sum_{i\in I} (m_i + \alpha_i)\ \mathsf{D}_i^{*\,I}$, 。

定理 5.6 （希格斯-库仑对应）。 设 $U_C := \bigcap_{I\in\mathcal{A}_C^{\min}} U_I \subset C$，其中 U_I 的定义见命题 *A.3*。 U_C 是开且非空的；若 $\zeta \in U_C$ 且 $B \in U_{\mathsf{t}}$， 则有如下等式

$$Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}) = Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_C \tag{5.8}$$

证明。 在定理的假设下，由命题 5.8 和命题 A.3 可知，(5.8) 中的所有积分和级数都收敛。

现在我们转向证明右端与左端相等。我们的策略是变形 (5.4) 中的积分轮廓，同时分离来自不同环面不动点的贡献。

首先，我们需要引入一些记号来处理积分轮廓。令 $\pi_{m_i}^i$ 表示一个超平面 $\langle \mathsf{D}_i, \sigma\rangle + \alpha_i = -m_i$并且

$$\pi_{\{m_{i_1},\ldots,m_{i_l}\}}^{\{i_1,\ldots,i_l\}} := \bigcap_{k=1}^{l} \{ \langle \mathsf{D}_{i_k}, \sigma\rangle + \alpha_{i_k} = -m_{i_k} \}.$$

下面我们将使用以下记号： $I_k = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n+\boldsymbol{\kappa}\}$， 除非另有说明，$\mathbf{D}^{i_1}, \ldots, \mathbf{D}^{i_k}$ 线性无关。 I_k^{or} 表示 I_k 的一个排列 $(i_1, \ldots, i_k)$。此外， $m_{I_k} = (m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$。

给定这样的 I_k ，考虑以下正合序列：

$$1 \to G_{I_k} \to G \xrightarrow{\mathsf{D}_{i_1},\ldots,\mathsf{D}_{i_k}} H_{I_k} \simeq (\mathbb{C}^*)^k \to 1,$$

其中 $H_{I_k} := G/G_{I_k}$。我们还将相应的李代数记为 $\mathfrak{g}_{I_k}$ （维数为 $\boldsymbol{\kappa} - k$）和 $\mathfrak{h}_{I_k}$（维数为 k）。规范地， $\mathfrak{h}_{I_k}^\vee = \langle \mathbf{D}^{i_1}, \ldots\ldots, \mathbf{D}_{i_k}\rangle$。注意， $\pi_{m_{I_k}}^{I_k}$是一个平行于 $\mathfrak{g}_{I_k}$的仿射空间，因此只要 $i \in I_k$， $\pi_{\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}_{I_k}}(\pi_{m_i}^i)$就是 $\mathfrak{h}_{I_k}$ 中的一个超平面。我们将这些超平面记作同一个符号。若$k = \boldsymbol{\kappa}$，则 $\pi_{m_{I_k}}^{I_k}$ 只是一个点，而 $G_{I_k} = G_{\sigma_{I_k'}}$ 是有限的。

给定一点 $p \in \pi_{m_{I_k}}^{I_k}$ ，它不属于其他超平面；考虑一个解析邻域 U，它与其他超平面不相交，并令 $[p]$ 和 $U_0 = \pi_{\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}_{I_k}}(U)$ 为它们在商空间 $\mathfrak{h}_{I_k}$ 上的投影。

[2]该条件指定了被积函数的极点超平面排列中的一个壁室。这样的壁室非空这一事实并非显而易见。对于镜像五次，我们可以取 $\delta = (\sum_{a=1}^{100} s_{1a})\, c\xi_{101} - c\sum_{a=1}^{100} \xi_a$，其中 c 是一个小的正数， $0 < 500c < 1$。

线性无关条件意味着，对于任意以 $[p]$ 为中心的 m_{I_k}， $\bigcup_{l=1}^{k}\pi_{m_{i_l}}^{i_l}$ 都是一个简单正规交叉除子，因此 $U_0\backslash\bigcup_{l=1}^{k}\pi_{m_{i_l}}^{i_l}$ 与 $(S^1)^k$ 同伦等价。令 $\mathcal{C}_0^{I_k^{\mathrm{or}}}([p])$ 表示 $H_k(U_0\backslash\bigcup_{l=1}^{k}\pi_{m_{i_l}}^{i_l})$ 中的一个生成元，其取向由微分形式 $(2\pi\sqrt{-1})^{-k}\mathrm{d}\mathsf{D}_{i_1}/\mathsf{D}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\mathsf{D}_{i_k}/\mathsf{D}_{i_k}$确定；也就是说，在由 $z_l=\mathsf{D}_{i_l}$ 给出的 $\mathfrak{h}_{I_k}$ 上（复）线性函数的基中，我们有

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^k}\int_{\mathcal{C}_0^{I_k^{\mathrm{or}}}([p])}\Lambda_{l=1}^{k}\frac{\mathrm{d}z_l}{z_l}=1. \tag{5.9}$$

另令 $\mathcal{C}_0^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)$ 表示.....的一个生成元

$$H_k(U\backslash\bigcup_{l=1}^{k}\pi_{m_{i_l}}^{i_l})$$

投影到 $\mathcal{C}_0^{I_k^{\mathrm{or}}}([p])$。令 $\Omega\in\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}-k}(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}^{\vee}$ 为一个体积形式。这样的微分形式为 $\sqrt{-1}(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$ 定向。这正是 $(G_{I_k})^{\mathrm{comp}}$ 的李代数，即 G_{I_k} 的极大紧子群。

我们将一个循环定义为

$$\mathcal{C}_{\Omega}^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)\in H_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathfrak{g}\backslash\mathrm{Polar},|\Im(\sigma)|\gg 0)$$

作为 $\mathcal{C}_0^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)+\sqrt{-1}(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$的一个类，其定向由微分形式 $(2\pi\sqrt{-1})^{-k}\Lambda_{l=1}^{k}\mathrm{d}\mathsf{D}_{i_l}/\mathsf{D}_{i_l}\wedge\Omega$ 给出。在上述定义中，Polar 表示被积函数的极除子，即$\bigcup_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\bigcup_{m_i\geq 0}\pi_{m_i\circ}^{i}$ 若 $k=\boldsymbol{\kappa}$，则 $\Omega\in\mathbb{R}$。若 $\Omega=1$，我们通常会在记号中省略它。

注 5.7. 我们将考虑如下形式的积分 $\int_{\mathcal{C}_{\Omega}^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}$。此类积分仅取决于该群中循环的同调类

$$H_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathfrak{g}\backslash\bigcup_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\bigcup_{m\geq 0}\pi_{m_i}^{i},|\Im(\sigma)|\gg 0).$$

特别地，若两个循环可由一种光滑同伦相联系，且该同伦保持集合 $|\Im(\sigma)|\gg 0$不变并且不穿过极超平面，则它们是同调的。

引理 5.8. 令 $\mathcal{C}^{I_k^{or}}\Omega(p)$ 如上，并且 $k<\boldsymbol{\kappa}$ 和

$$|\langle B,\nu\rangle|<\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\langle\mathsf{D}_i,\nu\rangle\ \textit{for all}\ \nu\in\mathfrak{g}_{I_k}\backslash\{0\}. \tag{5.10}$$

那么积分

$$\int_{\mathcal{C}_{\Omega}^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} \tag{5.11}$$

绝对收敛。特别地，当 $B\in\mathfrak{g}_{I_k}^{\perp}$ 时，它总是收敛。我们证明， $\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}$ 在积分循环上随着 $|\sigma|\to\infty$ 趋近而一致地指数衰减。

证明。 我们在附录 A 中给出该结论的证明。 □

引理 5.9 (单平面穿越**)**。 设 $I_k^{\mathrm{or}}=(I_{k-1}^{\mathrm{or}},i)$ 满足 $\mathfrak{g}_{I_{k-1}}\neq\mathfrak{g}_{I_{k-1}\cup\{i\}}$，且 Ω 是 $(\mathfrak{g}_{I_{k-1}})_{\mathbb{R}}$ 上的体积形式，并且 $p\in\pi_{m_{I_k}}^{I_k}$ 是一般的（不与其他极超平面相交）。取 $f\in\mathfrak{g}_{I_{k-1}}\backslash\mathfrak{g}_{I_k}$。

$$\mathcal{C}_{\Omega}^{I_{k-1}^{\mathrm{or}}}(p+\varepsilon f)=\mathcal{C}_{\iota_f\Omega}^{I_k^{\mathrm{or}}}(p)+\mathcal{C}_{\Omega}^{I_{k-1}^{\mathrm{or}}}(p-\varepsilon f), \tag{5.12}$$

其中 $\iota_f\Omega$ 是定义在$(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$上的一个 $\boldsymbol{\kappa}-k$微分形式，且 ε足够小。

证明。 令 $D(z,r)$表示一个以 $z\in\mathbb{C}$ 为中心、半径为 r的圆盘。在 $\mathfrak{g}$ 上考虑线性坐标系 $\sigma_1,\ldots,\sigma_{\boldsymbol{\kappa}}$，其中心位于 p，使得 $\mathcal{C}^{I_k^{\mathrm{or}}}\Omega(r+\varepsilon f)$可以表示为循环

$$(\partial D(0,\alpha))^{k-1}\times(\varepsilon+\sqrt{-1}\mathbb{R})\times(\sqrt{-1}\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k})$$

对于某个 $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，使得 $f=\partial/\partial\sigma_k$。那么微分形式 Ω 等于 $c\,\mathrm{d}\sigma_k\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{\kappa}}$，其中 $c\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$。这个循环同伦于以下集合

$$(\partial D(0,\alpha))^{k-1}\times(-\varepsilon+\sqrt{-1}\mathbb{R})\times(\sqrt{-1}\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k})$$

由同一微分形式定向的

$$(\partial D(0,\alpha))^k \times (\sqrt{-1}\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k})$$

由微分形式 $c\,\mathrm{d}\sigma_{k+1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\sigma_{\boldsymbol{\kappa}} = \iota_f\Omega$ 定向。同伦仅在第 k 个分量中非平凡，如图1所示。

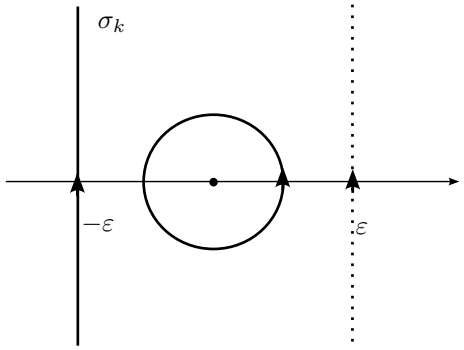


FIGURE 1. 基本围道变形

□

多次应用该引理，可得如下结论：

引理5.10。 考虑 I^{or}_{k-1}，这是定义在$(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$ 上的体积形式Ω，以及 $p\in\pi^{I_{k-1}}_{m_{I_{k-1}}}$ 一般的（不与其他极超平面相交）且 $f\in\mathfrak{g}_{I_{k-1}}\backslash\bigcup_{i,\,\mathfrak{g}_{I_{k-1}}\neq\mathfrak{g}_{I_{k-1}\cup\{i\}}}\mathfrak{g}_{I_{k-1}\cup\{i\}}$。

$$\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p) = -\sum_{i\notin I_{k-1}}\sum_{m_i\geq 0}\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k}}_{\iota_f\Omega}(\{p+[0,N]f\}\cap\pi^i_{m_i}) + \mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p+Nf), \tag{5.13}$$

其中 $\iota_f\Omega$ 是定义在$(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$上的 $\boldsymbol{\kappa}-k$微分形式；若交集为空，则该循环也为空。注意，只有满足 $\mathfrak{g}_{I_{k-1}}\neq\mathfrak{g}_{I_{k-1}\cup\{i\}}$ 的 i 才会出现在右端。

注5.11。 接下来我们考虑如下形式的积分

$$\int_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle},$$

$\mathcal{C}\in H_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathfrak{g}\backslash Polar, |\Im(\sigma)|\gg 0)$。设 $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset H_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathfrak{g}\backslash Polar, |\Im(\sigma)|\gg 0)$。若 A是一个无限集，那么当我们写出形如

$$\sum_{\alpha\in A}\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C} \tag{5.14}$$

的表达式时，我们实际上指的是

$$\sum_{\alpha\in A}\int_{\mathcal{C}_\alpha}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = \int_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}, \tag{5.15}$$

在左侧收敛的情况下。使用这种记法是为了简化本已繁复的记号。

推论 5.12。 设 p,Ω N如引理*5.10*所述，则存在一个常数 $const$，它与 p和f无关，使得若 $\langle\zeta,f\rangle<const$，则

$$\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p) = -\sum_{i\notin I_{k-1}}\sum_{m_i\geq 0}\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k}}_{\iota_f\Omega}(\{p+\mathbb{R}_{\geq 0}f\}\cap\pi^i_{m_i}). \tag{5.16}$$

证明。 引理5.10意味着

$$\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = -\sum_{i\notin I_{k-1}}\sum_{m_i\geq 0}\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k}}_{\iota_f\Omega}(\{p+[0,N]f\}\cap\pi^i_{m_i})}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} + \int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p+Nf)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}. \tag{5.17}$$

利用命题 A.5 和 $p\to p+Nf$，我们可以估计右端的最后一项：

$$\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}_{k-1}}_{\Omega}(p+Nf)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}\leq e^{-const|p+Nf|}, \tag{5.18}$$

特别地，当 $N \to \infty$ 时，积分趋于 0。现在令 $N \to \infty$ 取极限，即可推出该推论。

□

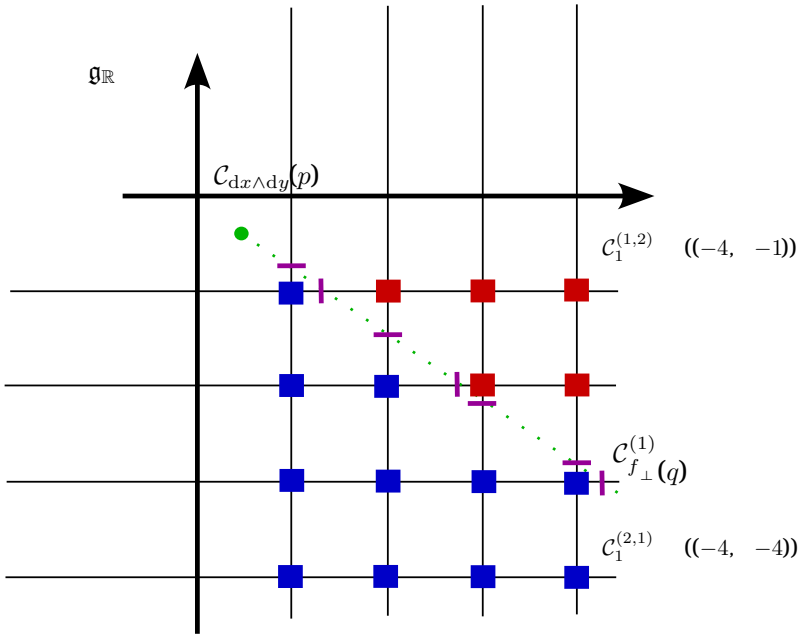


FIGURE 2. 向 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 投影时的围道变形。

图 2 展示了在一个简单例子中连续两次应用推论 5.12。该平面是二维李代数 $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^2$的一个实部$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 。图中仅显示了位于$x = -1, -2, -3, \ldots$ 和 $y = -1, -2, -3, \ldots$处的两列极除子。初始围道 $\mathcal{C}_{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}(p)$是一个纯虚围道，以绿色圆点表示。它在实李代数上的投影只是一个点。变形方向 f 用绿色虚线表示。首次应用推论 5.12 后，围道变成两列副本 $\mathbb{R} \times S^1$，以紫色线段表示。事实上，这些围道在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 上的投影是与相应极超平面相交的线段。再次应用推论 5.12，使每个围道平行于相应的极超平面变形。这些围道变形为若干 $T^2 \simeq (S^1)^2$，分别缠绕在极超平面的每个交点周围。

我们再引入一些记号，用于表示 $\mathfrak{g}$ 中不同维数的锥。给定 I，使得 $\{\mathsf{D}_i\}_{i\in I}$ 构成 $\mathfrak{g}^\vee$ 的一组基，考虑锥

$$\angle_I^{*,\zeta} = \{\sum_{i\in I} \mathrm{sign}(\langle\zeta, \mathsf{D}_i^{*,I}\rangle) c_i \mathsf{D}_i^{*,I} \mid c_i \geq 0\}, \tag{5.19}$$

及其子锥：

$$\angle_{J\subset I}^{*,\zeta} = \angle_I^{*,\zeta} \cap \mathfrak{g}_J. \tag{5.20}$$

符号函数的选取满足：对任意 $\sigma \in \angle^*_{,\ J\subset I}^{\zeta}$，均有 $\langle\zeta, \sigma\rangle \geq 0$。我们还定义

$$\mathrm{sign}_{J\subset I}^{\zeta} = (-1)^{\#\{i\in I\setminus J \mid \langle\zeta, \mathsf{D}_i^{*,I}\rangle < 0\}}.$$

特别地，若 I 是一个极小反锥（这是我们主要关注的情形），则 $\angle^*_{,\ I}{}^{\zeta} = \angle_I^*$，其中 $\angle_I^* \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 是 $\angle_I \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^\vee$ 的对偶锥，并且对所有 $J \subset I$，均有 $\mathrm{sign}_{J\subset I}^{\zeta} = 1$。我们还有 $\angle^*_{,\ \varnothing\subset I}^{\zeta} = \angle^*_{,\ I}{}^{\zeta}$ 以及 $\angle^*_{,\ I\subset I}^{\zeta} = 0$。

还需回顾

$$\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}} = \Big\{ \sum_{i\in I} m_i \mathsf{D}_i^{*,I} \,\Big|\, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Big\}$$

并定义

$$\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha) := -\sum_{i\in I} \alpha_i \mathsf{D}_i^{*,I} - \mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}} = \Big\{ -\sum_{i\in I} (\alpha_i + m_i) \mathsf{D}_i^{*,I} \,\Big|\, m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \Big\}.$$

若 $\alpha_i = q_i/2$，则 $\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha) = -\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\mathfrak{X}_\zeta,\ \mathbf{w}\zeta)$。若 $p \in \pi^{I_k}_{m_{I_k}}$，则

$$p - \angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I} = \Big\{ -\sum_{i\in I_k}(\alpha_i+m_i)\mathsf{D}_i^{*,I} + \sum_{i\in I\setminus I_k}(\langle \mathsf{D}_i, p\rangle - c_i)\mathsf{D}_i^{*,I} \ \Big|\ c_i\in\mathbb{R}, c_i\geq 0 \text{ if } \langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*,I}\rangle > 0 \text{ and } c_i \leq 0 \text{ if } \langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*,I}\rangle < 0\Big\}.$$

下面的引理是证明中的主要技术引理。它通过递归地应用推论 5.12，并验证只有对应锥中的贡献会保留下来，将对 $(S^1)^k\times\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}$ 的积分与某个 $\boldsymbol{\kappa}-k$ 维锥中 $(S^1)^{\boldsymbol{\kappa}}$ 上的循环之和联系起来。

引理 5.13。考虑 I_k^{or}、定义在$(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$ 上的体积形式Ω 以及$(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}$ 上的 $p\in\pi^{I_k}_{m_{I_k}}$，其中 $p\in\pi^{I_k}_{m_{I_k}}$ 是一般的（不与其他极超平面相交）。那么

$$\mathcal{C}_\Omega^{I_k^{\mathrm{or}}}(p) = (-1)^{\boldsymbol{\kappa}-k}\sum_{I,I_k\subset I}\mathrm{sign}^\zeta_{I_k\subset I}\sum_{q\in(p-\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I})\cap\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha)}\mathrm{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q). \tag{5.21}$$

注意，我们可以明确地将集合$(p-\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I})\cap\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha)$ 描述如下。令 $-n_{i'} := \lfloor\langle \mathsf{D}_{i'}, p\rangle + \alpha_{i'}\rfloor\in\mathbb{Z}$，其中 $i'\in I\setminus I_k$。那么

$$(p-\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I})\cap\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha) = \Big\{ -\sum_{i\in I}(\alpha_i+m_i)\mathsf{D}_i^{*,I}\ \Big|\ i\in I\setminus I_k \implies m_i\in\mathbb{Z} \text{ and } \begin{cases} n_i\leq m_i & \text{if } \langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*,I}\rangle>0,\\ 0\leq m_i<n_i & \text{if } \langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*,I}\rangle<0.\end{cases}\Big\}.$$

证明。根据命题 A.3，右端收敛，因为右端的级数是该命题中所考虑级数的一个子级数。

我们通过对 k 进行递归来证明该引理。首先，令 $k=\boldsymbol{\kappa}-1$。我们应用推论 5.12，其中 $f\in(\mathfrak{g}_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}})_{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{R}$使得 $\langle\zeta,f\rangle<0$。$\Omega\in(\mathfrak{g}_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}})^\vee_{\mathbb{R}}\simeq\mathfrak{g}^\vee_{\mathbb{R}}/\left(\oplus_{i\in I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}\mathbb{R}\mathsf{D}_i\right)$，因此对每个 $i\notin I_{\boldsymbol{\kappa}-1}$，都可以写成 $\Omega = c_i\mathsf{D}_i$（其中右端是一个代表元）。特别地，$\iota_f\Omega = c_i\langle\mathsf{D}_i,\ f\rangle$，其中

$$c_i = \frac{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}-1}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}-1}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_i}.$$

此外，符号函数$(\langle\mathsf{D}_i,\ f\rangle)$ =符号函数$(\langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*\,I}\rangle.\ )$ =符号函数$\zeta_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}\subset I^\circ}$。因此我们有

$$\mathcal{C}_\Omega^{I^{\mathrm{or}}_{\boldsymbol{\kappa}-1}}(p) = -\sum_{i\notin I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}\sum_{m_i\geq 0}\mathcal{C}^{(I^{\mathrm{or}},i)}_{c_i\langle\mathsf{D}_i,f\rangle}(\{p+\mathbb{R}_{\geq 0}f\}\cap\pi^i_{m_i}). \tag{5.22}$$

因此，该情形下的定理得证。

我们指出，推论 5.12 中的条件比定理的收敛条件更严格，但该表述涉及某个定义域上解析函数的相等性，因此可延拓至相互收敛的最大定义域。

考虑一般情形 $0\leq k<\boldsymbol{\kappa}-1$。我们选择一个一般的 $f\in(\mathfrak{g}_{I_k})_{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}$，使得 $\langle\zeta,f\rangle<0$，并应用推论 5.12

$$\mathcal{C}_\Omega^{I_k^{\mathrm{or}}}(p) = -\sum_{i\notin I_k}\sum_{m_i\geq 0}\mathcal{C}^{(I_k^{\mathrm{or}},i)}_{\iota_f\Omega}(\{p+[0,N]f\}\cap\pi^i_{m_i}) + \mathcal{C}_\Omega^{I_k^{\mathrm{or}}}(p+Nf). \tag{5.23}$$

对 $m_i\in\mathbb{Z}$ 的求和限制在一个集合上

$$\begin{cases} n_i\leq m_i,\ \langle\mathsf{D}_i,f\rangle>0,\\ 0\leq m_i<n_i,\ \langle\mathsf{D}_i,f\rangle<0,\end{cases} \tag{5.24}$$

其中再次有 $-n_i = \lfloor\langle\mathsf{D}_i,\ p\rangle+\alpha_i\rfloor$. 特别地，如果 I 是一个极小反锥，则第二种情况不会出现。N

ow 我们可以对右端双重求和中的每一项使用递归步骤 .

(5.25)

$$\mathcal{C}^{(I_k^{\mathrm{or}},i)}_{\iota_f\Omega}(\tilde{p}=\{p+[0,N]f\}\cap\pi^i_{m_i}) = \sum_{I,I_k\cup\{i\}\subset I}\mathrm{sign}^\zeta_{I_k\cup\{i\}\subset I}\sum_{q\in(\tilde{p}-\angle^{*,\zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I})\cap\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha)}\mathrm{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_i\wedge\iota_f\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)$$

接下来分析在应用 (5.25) 后，公式 (5.32) 的展开中何时会出现 $q\in\mathbb{K}_I^{\mathrm{eff}}(\alpha)$。当存在 $i\in I'_k,\ m_i\in\mathbb{Z}$ 使得

$$q\in\{p+[0,N]f\}\cap\pi^i_{m_i} - \angle^{*,\zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I}. \tag{5.26}$$

但是 $\bigcup_{i\in I_k'} \angle^{*,\ \zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I} = \partial\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I^\circ}$。因此我们可以将方程 (5.26) 改写为

$$q \in p + cf - \partial\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I}$$

对于某个 $c>0$，或者

$$q - cf \in p - \partial\angle^{*,\zeta}_{I_k\subset I}. \tag{5.27}$$

换句话说，对于射线 $q-\mathbb{R}_{\geq 0}f$ 与锥 $p-\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$ 的边界的每个交点，在式 (5.32) 的展开中都有一项，其循环以 q 为中心。这类交点的数量取决于$q\in p-\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$是否成立。

(1) $q\in p-\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I^\circ}$。根据定义，$\zeta$ 与 $\partial\angle^{*,\ \zeta}_{I_k}$ 的所有内法向量的标量积均为正，f 是这些法向量的线性组合，并且 $\langle\zeta,f\rangle<0$。因此，该线性组合中至少有一个系数为负，且 $q-\mathbb{R}_{\geq 0}f$ 与 $p-\partial\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$有一个交点。对总和的贡献为

$$\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_i\wedge\iota_f\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q), \tag{5.28}$$

其中

$$\Omega = c\mathsf{D}_i\wedge\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=k+2}\mathsf{D}_{i_l}+\cdots$$

and

$$\iota_f\Omega = c\langle\mathsf{D}_i,f\rangle\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=k+2}\mathsf{D}_{i_l}+\cdots,$$

其中省略号表示公式 (5.28) 中可能出现的消失项。将这个符号函数的表达式代入，我们得到等式

$$\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_i\wedge\iota_f\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)=\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\subset I}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right). \tag{5.29}$$

(2) $q\notin p-\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I^\circ}$。交点要么为 0 个，要么为 2 个，因为 f 与 $\partial\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$ 的至少一个内法向量的标量积为负。对公式 (5.32) 的总贡献为

$$\left(\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{i\}\subset I}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_i\wedge\iota_f\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)+\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{j\}\subset I}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^k_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}\wedge\mathsf{D}_j\wedge\iota_f\Omega}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=1}\mathsf{D}_{i_l}}\right)\right)\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q). \tag{5.30}$$

这里我们可以写成

$$\Omega = c\mathsf{D}_i\wedge\mathsf{D}_j\wedge\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=k+3}\mathsf{D}_{i_l}+\cdots,$$

其中省略号再次表示无关项。在第一个加数中，我们有

$$\iota_f\Omega = c\langle\mathsf{D}_i,f\rangle\mathsf{D}_j\wedge\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=k+3}\mathsf{D}_{i_l}+\cdots,$$

而在第二个加数中

$$\iota_f\Omega = -c\langle\mathsf{D}_j,f\rangle\mathsf{D}_i\wedge\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{l=k+3}\mathsf{D}_{i_l}+\cdots.$$

因此，总系数为

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{i\}}\operatorname{sign}(c\langle\mathsf{D}_j,f\rangle)+\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k\cup\{j\}}\operatorname{sign}(c\langle\mathsf{D}_i,f\rangle)=\\ =\operatorname{sign}^{\zeta}_{I_k}\left(\operatorname{sign}(c\langle\zeta,\mathsf{D}_j^{*\,I}\rangle\langle\mathsf{D}_j,f\rangle)+\operatorname{sign}(c\langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*,I}\rangle\langle\mathsf{D}_i,f\rangle)\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

在最后一个公式中，$\langle\zeta,\mathsf{D}_i^{*\,I}\rangle$,$\mathsf{D}_i$ 和 $\langle\zeta,\mathsf{D}_j^{*\,I}\rangle$,$\mathsf{D}_j$ 是锥 $\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$的内法向量。然而，我们知道射线 $q-\mathbb{R}_{\geq 0}f$ 与锥 $p-\angle^{*,\ \zeta}_{I_k\subset I}$相交，其首次交点指向内侧，第二个交点指向外侧，因此公式 (5.31) 第二行中的符号函数不同，总贡献为零。

对所有 I，汇总所有点 $q\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_I(\alpha)$的贡献，并利用上述结论，即可得到引理的结论。图示见玩具例子（我们假设 $\langle\zeta,\mathsf{D}_1^{*\{1,2\}}\rangle$, $\langle\zeta,\mathsf{D}_2^{*\{1,2\}}\rangle>0$），参见图 2。

□

在 $\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}\ni(p)=\mathcal{C}_{\mathrm{d}\sigma}(\delta)$ 的情形下应用引理 5.13（这里提醒一下，我们的选择是 $\mathrm{d}\sigma=\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{a=1}\xi^*_a$），可得

$$\int_{\mathcal{C}_{\mathrm{d}\sigma}(\delta)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}==(-1)^{\boldsymbol{\kappa}}\sum_{I\in\mathcal{A}_C^{\min}}\sum_{q\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_I(\alpha)}\operatorname{sign}\left(\frac{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{a=1}\xi^*_a}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{a=1}\mathsf{D}_{i_a}}\right)\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}. \tag{5.32}$$

让我们计算右端的每一项。

引理 5.14。

$$\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)} \mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = (2\pi\sqrt{-1})^{\boldsymbol{\kappa}}\frac{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\xi_a^*}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\mathsf{D}_{i_a}}\prod_{i'\in I'}\Gamma(\langle\mathsf{D}_{i'},\sigma_m\rangle+\alpha_{i'})\prod_{i\in I}\frac{(-1)^{m_i}}{m_i!}e^{\langle\theta,\sigma_m\rangle}. \tag{5.33}$$

证明。 每个积分都是围绕简单正规交叉除子的一个 $\boldsymbol{\kappa}$ 维环面，且 $q=-\sum_{i\in I}(\alpha_i+m_i)\mathsf{D}_i^{*\,I}$. 。令 $\{\sigma_i^I\}_{i\in I}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 上与 $\mathfrak{g}$ 上的线性函数 $\{\mathsf{D}_i\}_{i\in I}$ 相对应的一组坐标。那么我们有

$$\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)} \mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = (2\pi\sqrt{-1})^{\boldsymbol{\kappa}}\operatorname*{Res}_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)} \mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}. \tag{5.34}$$

接下来我们使用

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\xi_a^*}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\mathsf{D}_{i_a}}\mathrm{d}\sigma^I \tag{5.35}$$

使得

$$\operatorname*{Res}_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)} \mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = \frac{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\xi_a^*}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}_a^*}\mathsf{D}_{i_a}}\prod_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\operatorname*{Res}_{\sigma_{i_a}^I\to-\alpha_{i_a}-m_{i_a}}\mathrm{d}\sigma_{i_a}^I\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} = \tag{5.36}$$

$$= \frac{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}}\xi_a^*}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}_a^*}\mathsf{D}_{i_a}}\prod_{i'\in I'}\Gamma(\langle\mathsf{D}_{i'},\sigma_m\rangle+\alpha_{i'})\prod_{i\in I}\frac{(-1)^{m_i}}{m_i!}e^{\langle\theta,\sigma_m\rangle},$$

其中 $\sigma_m=q$。 □

将此表达式代入 (5.32)，即可证明该命题。

□

推论 5.15。 不同稳定性室对应的(5.8) 中的幂级数，在参数 $\zeta=\Re(\theta)$下彼此解析延拓。这种解析延拓通过圆盘配分函数的积分表示实现。此解析延拓可视为环面 *Deligne-Mumford* 叠的保正则变换猜想的一个特例 *[Ru99, Ru02, Ru06]*，该猜想已由 *[CIJ]* 证明。

5.3. **圆盘配分函数与墙穿越**。 我们定义了与 GLSM 各相（次级扇的锥）对应的室圆盘配分函数分量。墙穿越由解析延拓公式 (5.4) 给出。

我们希望将其推广到任意膜的墙穿越。设 $\mathfrak{B}=\sum_{\mathsf{t}} c_{\mathsf{t}}\mathbf{L}_{\mathsf{t}}\in K([V/G])$。那么，对于不同的特征 t_1 和 t_2，希格斯-库仑对应 (5.8) 分别在不同的定义域 $B\in U_{\mathsf{t}_1}$ 和 $B\in U_{\mathsf{t}_2}$ 上成立。可能出现 $U_{\mathsf{t}_1}\cap U_{\mathsf{t}_2}=\varnothing$ 的情况。此时我们需要另一种方式来描述解析延拓。定义 5.18 给出了这种描述，适用于一般的单墙穿越。

首先，我们需要说明所采用的墙穿越设定。我们遵循例如 [BH2] 中所述的设定。

考虑次级扇中沿余维一墙$\mathfrak{h}^\perp\subset\mathfrak{g}^\vee$相邻的两个极大锥 C_+,C_-。设 $\mathfrak{h}:=(\mathfrak{h}^\perp)^\perp\subset\mathfrak{g}$，并取其整生成元 $h\in\mathbb{L}$, $\mathfrak{h}=\mathbb{C}h$。再定义 $h_i:=\langle\mathsf{D}_i,h\rangle$。那么$\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}h_i=0$，因为 $\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\mathsf{D}_i=0$ （卡拉比-丘条件）。

按照参考文献 [BH2] $h=(h_1,\dots,h_{n+\boldsymbol{\kappa}})$ 中的术语，定义了与壁穿越相关的回路。我们定义

$$I_\pm:=\{i\mid \pm h_i>0\}.$$

回路本身为 $\{v_i:\quad i\in I_+\cup I_-\}$。

设 $I_0\subset(I_+\cup I_-)'$。若 $I=I_0\sqcup\{i_0\}$ 是 $C_\pm$ 的一个极小反锥，且 $i_0\in I_\pm$，则对每个 $i_\pm\in I_\pm$，$I_0\sqcup\{i_\pm\}$ 都是$C_\pm$ 的一个反锥。沿回路的修改可通过将所有形如 $I_0\sqcup\{i_+\}$ 的锥替换为反锥 $I_0\sqcup\{i_-\}$得到。我们用 $\mathcal{A}^0_{C_0}$ 表示所有此类 I_0的集合。

沿用 [BH2]的术语，我们将所有这类反锥称为本质反锥。我们有

$$\mathcal{A}^{\min}_{C_\pm}=\mathcal{A}^{\mathrm{ess}}_{C_\pm}\sqcup\mathcal{A}^{\mathrm{noness}}_{C_\pm}.$$

引理 5.16. 非本质反锥总是至少包含来自 I_+ 和 I_-的各一个元素 .

证明。 出于维数方面的原因，每个极小反锥都必须至少包含 $I_+\cup I_-$ 中的一个数。如果它不包含 I_- 中的数，那么当它恰好包含 I_+ 中的一个数时，它就是本质的；如果包含的数多于 1 个，那么锥 $C_\pm$ 就沿着余维更高的壁相邻。□

注 5.17。 我们使用反锥而不是锥，因为反锥更适用于配分函数，尽管二者可以完全互换。每个极小反锥都对应于相应环面簇的一个环面不动点。

定义 5.18 （壁半球配分函数）。 设 $C_0 = C_+ \cap C_-$ 是次级扇的一个余维一锥，并且

$$|\langle B + \mathsf{t}, h\rangle| < \sum_i |\langle \mathsf{D}_i, h\rangle|/4. \tag{5.37}$$

对于每个 $I_{\boldsymbol{\kappa}-1} \in \mathcal{A}^0_{C_0}$ 和 $m_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\boldsymbol{\kappa}-1}$，我们选取满足如下性质的泛型 $p(m_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}) \in \pi^{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}_{m_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}}$：对于所有 $i_\pm \in I_\pm$，$(p(m) \mp \mathbb{R}_{\geq 0}h) \cap \mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}\cup\{i_\pm\}}(\alpha)$ 的基数均由 $c|m|$ 控制（例如，如果所有 $p(m)$ 都位于同一个超平面上，则满足此性质）[3]。

定义与壁 C_0 对应的墙半球配分函数：

$$Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_{C_0} := \sum_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}\in\mathcal{A}^0_{C_0}} Z^{\mathrm{ess}}_{I_{\boldsymbol{\kappa}-1}}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}) + \sum_{I\in\mathcal{A}^{\mathrm{noness}}_{C_\pm}} Z_I(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}), \tag{5.38}$$

其中

$$Z_I(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}) = \sum_{q\in\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_I(\alpha)} \mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{a=1}\mathsf{D}_{i_a}}\right)\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)} \mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta+2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t},\sigma\rangle}, \quad I\in\mathcal{A}^{\mathrm{noness}}_{C_\pm}. \tag{5.39}$$

and

$$\begin{aligned} Z^{\mathrm{ess}}_J(\mathbf{L}_{\mathsf{t}}) = \sum_{m\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\boldsymbol{\kappa}-1}} \Bigg(&-\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}-1}_{a=1}\mathsf{D}_{j_a}\wedge\Omega}\right)\int_{\mathcal{C}^{J^{\mathrm{or}}}_\Omega(p(m))}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta+2\pi\sqrt{-1}t,\sigma\rangle} + \\ &+\sum_{i_\pm\in I_+\cup I_-}\sum_{q\in(p(m)\mp\mathbb{R}_{\geq 0}h)\cap\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_{J\cup\{i_\pm\}}(\alpha)}\mathrm{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda^{\boldsymbol{\kappa}}_{a=1}\mathsf{D}_{i_a}}\right)\int_{\mathcal{C}^{I^{\mathrm{or}}}(q)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta+2\pi\sqrt{-1}\mathsf{t},\sigma\rangle}\Bigg), \end{aligned} \tag{5.40}$$

其中 Ω 是 $(\mathfrak{g}_J)_{\mathbb{R}}$中的任意体积形式。注意，在(5.40) 中，第二个求和中的求和是有限的。*e.*

注 5.19。 在墙半球配分函数的定义中，点 $p(m)$ 似乎有无穷多种选择。这是因为在一般情形下， $\mathfrak{g}$ 中对应于相邻相的本质反锥的锥彼此相交，因此无法对相应的有效类进行统一拆分。如下文所示，该定义与这些选择无关。

注 5.20 (等级限制规则**)**。 公式(5.37) 称为等级限制规则，因为它对特征t （膜的分级）施加了限制。若满足等级限制规则，则圆盘配分函数分量可沿次级扇的壁直接作解析延拓，正如下述定理所述。

定理 5.21 (墙穿越**)**。 在定义 *5.18* 的设定下，存在一个连通开集 $U_{C_0}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，使得 $U_{C_0}\cap U_{C_+}$ 和 $U_{C_0}\cap U_{C_-}$ 非空，并且对于所有 $\zeta\in U_{C_0}$，若B 满足(5.37)，则墙半球配分函数收敛；此外，对于所有 $\zeta\in U_{C_0}\cap U_{C_\pm}$，它等于室半球配分函数

$$Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_{C_0} = Z_{D^2}(\mathbf{L}_{\mathsf{t}})_{C_\pm} \tag{5.41}$$

特别地，墙半球配分函数不依赖于定义中的选择。

Proof. 非本质 g部分的收敛性 pri 的一部分g手边的论证已由命题 pA.3 证明。

考虑本质部分。设 $\zeta\in C_+\cup C_-$。那么对于每个 J，我们可以写成 $\zeta=\sum_{j\in J}\zeta^J_j\mathrm{D}j$，其中 $\zeta^J_j>0$。注意，所有 $\mathrm{D}j$ 都位于墙超平面 $(\mathbb{R}h)^\perp$ 中，因此 $\langle\mathrm{D}j,\ h\rangle=0$；对于任意 $c_1>0$，我们都可以将 ζ 选取得足够远且位于 $C_+\cup C_-$ 的内部，使得 $\langle\zeta,p(m)/|p(m)|\rangle<-c_1$ 对所有 m 都成立。此外，对于（5.40）中的所有 q，同一不等式也成立。于是，我们可以使用命题 A.5，分别将（5.40）中的积分项和留数项估计为 $e^{-c_2|p(m)|}$ 和 $e^{-c_2|q|}$。对于每个 m，项的数量由 $c_3|m|$ 有界，因为条件$q\in(p(m)\mp\mathbb{R}_{\geq 0}h)\cap\mathbb{K}^{\mathrm{eff}}_{J\sqcup\{i_\pm\}}$ 关于 m 是线性的，只要 $p(m)$ 按照定义 5.18 中的方式选取。因此，本质项 $Z^{\mathrm{ess}}_J(t)$ 由 $\sum_{m_J\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\boldsymbol{\kappa}-1}}c_3|m_J|e^{-c_2}\mathrm{dist}(\pi^J_{m_J},\ 0)<\infty$ 有界。此外，收敛性是关于 ζ 的开条件，因此它必然在某个开邻域内成立。这就完成了收敛性的证明。

[3]这一性质相当技术性，而且还可以进一步弱化。这一性质的含义是， $p(m)$沿着 $\pm h$ 的方向趋于无穷时，速度不能太快，如 $|m|\to\infty$

考虑（5.40）中的一个本质积分项。如果 $\zeta \in C_+$，我们可以应用推论 5.12：

$$\mathcal{C}_\Omega^{J^{\rm or}}(p(m)) = -\sum_{i_\pm \in I_\pm} \sum_{m_{i_\pm} \geq 0} \mathcal{C}_{\iota_h \Omega}^{(J^{\rm or}, i_\pm)}(\{p(m) + \mathbb{R}_{\geq 0} h\} \cap \pi_{m_{i_\pm}}^{i_\pm}). \tag{5.42}$$

稍微滥用一下记号，我们可以写作 $\Omega = c_{i_\pm} \mathsf{D}_{i_\pm} \in (\mathfrak{g}_J)^*_{\mathbb{R}}$，因此 $\iota_h \Omega = \pm c_{i_\pm 0}$。于是

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}-1} \mathsf{D}_{j_a} \wedge \Omega}\right) = \operatorname{sign}\left(c_{i_\pm} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}-1} \mathsf{D}_{j_a} \wedge \mathsf{D}_{i_\pm}}\right), \tag{5.43}$$

因此

$$-\operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}-1} \mathsf{D}_{j_a} \wedge \Omega}\right) \mathcal{C}_\Omega^{J^{\rm or}}(p(m)) = \pm \sum_{i_\pm} \sum_{q \in (p(m) + \mathbb{R}_{\geq 0} h) \cap \mathbb{K}^{\rm eff}_{J \cup \{i_\pm\}}(\alpha)} \operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\Lambda_{a=1}^{\boldsymbol{\kappa}-1} \mathsf{D}_{j_a} \wedge \mathsf{D}_{i_\pm}}\right) \mathcal{C}^{(J^{\rm or}, i_\pm)}(q). \tag{5.44}$$

将此结果与 (5.40) 中的第二项结合，得到：

$$Z_J^{\rm ess}(\mathbf{L}_{\mathfrak{t}}) = \sum_{i_+} Z_{J \cup \{i_+\}}(\mathbf{L}_{\mathfrak{t}}). \tag{5.45}$$

同理，若 $\zeta \in C_-$ 我们计算

$$Z_J^{\rm ess}(\mathbf{L}_{\mathfrak{t}}) = \sum_{i_-} Z_{J \cup \{i_-\}}(\mathbf{L}_{\mathfrak{t}}). \tag{5.46}$$

定理得证。[4] □

Appendix A. Convergence of multivariate hypergeometric functions

这方面的内容大多已为众人所知：[Ho] or，尤其是更系统的论述 [**?**], [**?**] 等人的成果。作者未能找到其中部分结果的出处，因此在此简要概述这一主题。我们沿用论文主体部分的记号，尤其是第 5 节中的记号。

令 $\theta = \zeta + 2\pi\sqrt{-1}B$ 和 $\sigma = \tau + \sqrt{-1}\nu$ 分别表示定义在 $\mathfrak{g}^\vee$ 和 $\mathfrak{g}$ 上的复变量，并令 $\mathbf{D}_i \in \mathbb{L}^\vee$，$i \leq n + \boldsymbol{\kappa}$ 为一组向量，它们在 $\mathbb{C}$ 上张成 $\mathfrak{g}^\vee$，且满足 $\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{D}_i = 0$（卡拉比-丘条件）。令 $\alpha \in \mathbb{C}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 为一个一般向量，并且

$$\Gamma = \Gamma(\sigma) = \prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}} \Gamma(\langle \mathsf{D}_i, \sigma \rangle + \alpha_i). \tag{A.1}$$

提醒一下，次级扇 Σ^2 定义为一个满足 $\Sigma^2(1) = \{\mathbf{D}_i\}_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}$ 的扇，其极大锥是所有维数为 $\boldsymbol{\kappa}$ 的 $\angle_I$ 的可能交集。

首先，我们需要一些关于伽马函数的基本结果。斯特林近似：

$$\Gamma(x + iy) = (2\pi)^{1/2} z^{z-1/2} e^{-z} (1 + O(\frac{1}{|z|})), \quad |\mathrm{Arg}(z)| < \pi - \alpha \tag{A.2}$$

其中 $\alpha > 0$，朗道符号为

$$f(z) = O(\frac{1}{|z|}) \text{ is equivalent to } \limsup_{|z| \to \infty} |z||f(z)| < \infty$$

特别地，

$$|\Gamma(x + iy)| = (2\pi)^{1/2} |z|^{x-1/2} e^{-x} e^{-y\mathrm{Arg}(z)} (1 + O(\frac{1}{|z|})), \quad |\mathrm{Arg}(z)| < \pi - \alpha. \tag{A.3}$$

现在令 $S_\delta = \mathbb{R} \backslash \bigcup_{n=0}^\infty (-n - \delta, \ -n + \delta)$ 为实数集 $\mathbb{R}$ 中一个与伽马函数的极点相距一个小正数的定义域 δ。

[4]我们再次讨论收敛性。推论 5.12 中的条件比定理中的条件更严格，但解析函数的相等性可延伸到两者均收敛的最大定义域。

引理 A.1. 设 $z = x + \sqrt{-1}y$ 和 $x \in S_\delta$。则

$$\Gamma(x) < const \cdot |x|^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}. \tag{A.4}$$

$$|\Gamma(z)| < const \cdot |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\min(x,0)} e^{-\frac{\pi|y|}{2}}. \tag{A.5}$$

此外，如果 $x \in S_\delta \cap K$，其中 K 是一个紧集，那么

$$|\Gamma(z)| < const(|y|+1)^{x-1/2} e^{-\frac{\pi|y|}{2}}. \tag{A.6}$$

证明。由公式 (A.3)，存在正常数 c_1、c_2，使得

$$c_1 |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{-y\mathrm{Arg}(z)} < |\Gamma(z)| < c_2 |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{-y\mathrm{Arg}(z)}, \quad x > \delta. \tag{A.7}$$

如果 $x > 0$，那么 $x > \delta$ sinc e $x \in S_\delta$。我们可以写成 Arg(z) = 反正切(y/x) = 符号函数(y)π/2 − 反正切(x/y)，因此有 e

$$-y\mathrm{Arg}(z) = -y(\mathrm{sign}(y)\pi/2 - \mathrm{Arctan}(x/y)) < \frac{\pi|y|}{2} + x,$$

因为反正切(x/y) < x/y。因此，

$$|\Gamma(z)| < c_2 |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|y|}{2}}, \quad x > \delta. \tag{A.8}$$

如果 $x < 0$，那么 $|\sin(\pi x)| > \sin\delta$，因为 $x \in S_\delta$。我们使用反射公式和 (A.7)：

$$|\Gamma(z)| = \frac{\pi}{|\Gamma(1-z)\sin(\pi z)|} < \frac{\pi}{c_1} |1-z|^{-(1-x)+1/2} e^{1-x} e^{y\mathrm{Arg}(1-z)} |\sin(\pi z)|^{-1}, \quad x < 0. \tag{A.9}$$

若 $x < 0$，则 $|1-z| > |z|$、$|1-z|^{x-1/2} < |z|^{x-1/2}$，且 |辐角(1 − z)| < π/2，因此

$$|\Gamma(z)| < \frac{\pi e}{c_1} |z|^{x-1/2} e^{-x} e^{\frac{\pi|y|}{2}} |\sin(\pi z)|^{-1}. \tag{A.10}$$

当 $y = 0$ 时，第一个公式 (A.4) 可由 (A.7) 和 (A.10) 推得。

我们有 sin(πz) = sin(π(x + √−1y)) = sin(πx) cosh(πy) + √−1 cos(πx) 双曲正弦(πy)，

$$|\sin(\pi z)| \geq |\sin(\pi x)\cosh(\pi y)| > \sin(\pi\delta)\frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{2} > \frac{1}{2}\sin(\pi\delta) e^{\pi|y|}.$$

最后，我们利用这一点来简化 (A.10)：

$$|\Gamma(z)| < const \cdot |z|^{x-1/2} e^{-x} e^{\frac{-\pi|y|}{2}}. \tag{A.11}$$

结合公式 (A.8) 和 (A.11)，得到不等式 (A.5)：

$$|\Gamma(z)| \leq const \cdot |z|^{x-1/2} e^{-\min(x,0)} e^{-\pi|y|/2}, \quad x \in S_\delta, \tag{A.12}$$

其中常数取决于 δ。

第三个公式 (A.6) 由 (A.12) 和 $(|y| + const)^x \sim |y|^x$, $y \to \infty$ 得出。 □

我们还回顾多变量柯西-阿达马定理。

定理 A.2（柯西–阿达马）。设

$$\sum_{m \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^\kappa} c_m z^m. \tag{A.13}$$

级数在具有多重半径 $r = (r_1, \ldots, r_\kappa)$ 的多圆盘中（绝对）收敛，当且仅当

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{m, |m|=N} (c_m r^m)^{1/|m|} \leq 1 \tag{A.14}$$

并且，当左端等于右端时，这样的多圆盘是最大的。

命题 A.3。 *(1)* 收敛域

$$Z_I = \sum_{m \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^\kappa} \prod_{i' \in I'} \Gamma(\langle \mathsf{D}_{i'}, \sigma_m \rangle + \alpha_{i'}) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{m_i}}{m_i!} \exp(\langle \theta, \sigma_m \rangle), \tag{A.15}$$

非空。此外，如果该级数在 ζ_0 处收敛，那么当 $\zeta \in \{\zeta_0\} - \angle_I$ 时也收敛。

(2) 该级数的收敛域为 $U_I+\sqrt{-1}\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}}$，其中 $U_I\subset\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}}$ 由以下约束定义

$$\langle\zeta+\log\Psi(\sigma),\sigma\rangle=\sum_{i\in I}(\langle\zeta,\mathrm{D}_i^{*,I}\rangle+\log\Psi_i(\sigma))\sigma_i>0,\ \sigma\in\angle_I^*, \tag{A.16}$$

其中，$\Psi(\sigma)=(\Psi_1(\sigma)..,\Psi_{\boldsymbol{\kappa}}(\sigma))$ 是证明中下文定义的霍恩向量。

证明。在本证明中，我们采用基 $\{\mathrm{D}_i^{*\,I}\}_{i\in I}$，并在 $\mathfrak{g}$ 上使用相应的坐标系，同时在 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^\vee$上也使用相应的坐标系。也就是说，若 $f\in\mathfrak{g}$和 $f^\vee\in\mathfrak{g}^\vee$，我们记作 $f=\sum_i f_i\mathrm{D}_i^{*\,I}$，$f^*=\sum_i f_{i_1}^*\mathrm{D}_i$，其中 $f_i:=\langle\mathrm{D}_i,f\rangle$且 $f_i^*:=\langle f^*,\mathrm{D}_i^{*I}\rangle$。

设 $s_{i'i}^I:=\langle\mathrm{D}_{i'},\mathrm{D}_i^{*I}\rangle$。考察级数 (A.15) 的渐近行为。我们将该级数写为

$$Z_I=\sum_{m\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{\boldsymbol{\kappa}}}\prod_{i'\in I'}\Gamma(-\sum_i s_{i'i}^I(m_i+\alpha_i)+\alpha_{i'})\prod_{i\in I}\frac{(-1)^{m_i}}{m_i!}\exp(\langle\theta,\sigma_m\rangle)=\exp(-\sum_i\theta_i\alpha_i)\sum_{m\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{\boldsymbol{\kappa}}}c_m z^m, \tag{A.17}$$

其中 $z^m=\prod_{i=1}^{\boldsymbol{\kappa}}z_i^{m_i}=\prod_i\exp(-m_i\theta_i)$。对于一般的 α，伽马函数的辐角与 $\mathbb{Z}_{\leq0}$ 之间至少相距 $\delta>0$，因为 $s_{i'i}^I$ 是有理数。

因此，我们可以应用引理 A.1，并写出级数展开系数的上界：

$$\begin{aligned}|c_m|&\leq const\cdot\frac{\prod_{i'\in I'}(s_{i'}^Im+c_{i'})^{(s_{i'}^Im+c_{i'}-1/2)}}{\prod_{i\in I}m_i^{m_i-1/2}},\\ \text{where } s_{i'}^Im&=\sum_{i\in I}s_{i'i}^Im_i\text{ and }c_{i'}=\sum_{i\in I}s_{i'i}^I\alpha_i+\alpha_{i'}.\end{aligned} \tag{A.18}$$

因此我们可以写成

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{m,|m|\geq N}(c_mr^m)^{1/|m|}\leq \tag{A.19}$$

$$\leq\lim_{N\to\infty}\sup_{m,|m|\geq N}\left(const\prod_{i'\in I'}(s_{i'}^Im+c_{i'})^{c_{i'}-1/2}\prod_i m_i^{-1/2}\cdot\exp\left(-\langle\zeta,m\rangle-\sum_{i'\in I'}s_{i'}^Im\log(s_{i'}^Im+c_{i'})-\sum_i m_i\log m_i\right)\right)^{1/|m|},$$

其中 $|m|$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的任意范数。

我们定义霍恩向量 $\Psi(\sigma):=\sum_i\Psi_i(\sigma)\mathrm{D}_i$，其中

$$\Psi_i(\sigma):=\frac{\sigma_i}{\prod_{i'\in I'}(s_{i'}^I\sigma)^{s_{i'i}^I}}. \tag{A.20}$$

特别地，$\log\Psi(\sigma)=\sum_i\log\Psi_i(\sigma)\mathrm{D}_i$，其中 $\log\Psi_i(\sigma)=\log(\sigma_i)-\sum_{i'\in I'}s_{i'i}^I\log(s_{i'}^I\sigma)$。我们注意到，尽管若任意一个 $\sigma_i,s_{i'}^I\sigma=0$，$\log\Psi_i(\sigma)$ 都没有定义，但总和 $\sum_i\sigma_i\log\Psi_i(\sigma)=\langle\log\Psi(\sigma)\ \sigma\rangle$ 可以通过取极限来定义。

在命题 $\zeta=\Re(\theta)$ 的假设下，满足方程

$$\langle\zeta+\log\Psi(\sigma),\sigma\rangle>0 \tag{A.21}$$

对所有 $\sigma\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}}\backslash\{0\}$，因此我们有

$$-\langle\zeta,m\rangle-\sum_{i'\in I'}s_{i'}^Im\log(s_{i'}^Im+c_{i'})-\sum_{i\in I}m_i\log m_i\leq \tag{A.22}$$

$$\leq-\langle\zeta,m\rangle-\sum_{i'\in I'}s_{i'}^Im\log(s_{i'}^Im+c_{i'})-\sum_{i\in I}m_i\log m_i+\langle\zeta+\log\Psi(m),m\rangle=-\sum_{i'\in I'}s_{i'}^Im\log(1+c_{i'}/(s_{i'}^Im)),$$

其中，稍微滥用一下记号，我们将 $m=\sum_{i\in I}m_i\mathrm{D}_i^{*\,I}$，视为相同。考虑函数 $x\log(1+c/x)$。由于 $x\to0$，我们有 $x\log(1+c/x)\sim x\log(c/x)\to0$；而当 $x\to\infty$ 时，$\log(1+c/x)=c/x+O(1/x^2)$，因此 $x\log(1+c/x)\to c$。所以，(A.22) 中的最后一个表达式有上下界，故可写为

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{m,|m|\geq N}(c_mr^m)^{1/|m|}\leq\lim_{N\to\infty}\sup_{m,|m|\geq N}\exp(const\prod_{i'\in I'}(s_{i'}^Im+c_{i'})^{c_{i'}-1/2}\prod_{i\in I}m_i^{-1/2})^{1/|m|}\leq1. \tag{A.23}$$

因此，根据多变量柯西-阿达马定理，级数 (A.15) 收敛。若对某个 σ，不等式 (A.21) 不成立，那么对于所有与 σ 成比例的 m，该不等式都不成立，并且 (A.23) 中的极限大于 1。这就证明了命题的第二个结论。

$\prod_i\Psi_i(\sigma)^{\sigma_i}$ 在单位球面上有界且与 0 保持正距离，因此 $\sum_i\log\Psi_i(\sigma)$ 在同一域上有一个常数 $-N$作为下界。通过选取 $\zeta=N\sum_i\mathrm{D}_i^{*\,I}$，即可证明该命题的第一条结论。

□

记号 A.4. 下文将使用包含许多常数的估计，这些常数的确切取值无关紧要，且可能相当繁杂。记号 $const$、$const_i$ 表示各种此类常数。

下面给出引理 5.8 和推论 5.12 的证明。

引理 5.8 的证明。我们使用引理 A.1 中的公式 (A.6) 来估计被积函数：A.24

$$|\prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\Gamma(\langle \mathsf{D}_i,\sigma\rangle+\alpha_i)e^{\langle\theta,\sigma\rangle}| < const\cdot\prod_{i\notin I_k}(|\langle \mathsf{D}_i,\Im(\sigma)\rangle|+1)^{\langle \mathsf{D}_i,\Re(\sigma)\rangle+\alpha_i}\exp\left(-2\pi\langle B,\Im(\sigma)\rangle-\pi/2\sum_{i\notin I_k}\langle \mathsf{D}_i,\Im(\sigma)\rangle\right),$$

对于积分轮廓上的 σ。

我们注意到，条件 (5.10) 意味着

$$|\langle B,\nu\rangle|-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\langle \mathsf{D}_i,\nu\rangle < -const\cdot|\nu|,$$

对于某个正的 $const$，因为该表达式关于 $|\nu|$ 是一次齐次的。

因此，在引理的假设下，指数函数中的表达式有上界 $-c|\Im(\sigma)|$，其中 $c>0$ 是某个常数（在 $\mathfrak{g}$ 上的任意范数下），所以被积函数的绝对值有一个指数衰减函数作为上界。□

命题 A.5。令 $k<\boldsymbol{\kappa}$, $I_k^{\rm or}=(i_1,\ldots,i_k)$ 满足 $\{\mathsf{D}_i\}_{i\in I_k}$ 线性无关。考虑一个循环 $\mathcal{C}^{I^{\rm or}}\ni\Omega(p)$，其中 $p\in\pi^{I_k}_{m_{I_k}}$，且与所有其他极超平面之间的距离至少为正数 δ。令 B 满足积分

$$\mathrm{Int}(p):=\int_{\mathcal{C}_\Omega^{I_k^{\rm or}}(p)}\mathrm{d}\sigma\,\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle} \tag{A.25}$$

绝对收敛。存在常数 $c_1,c_2>0$，使得若 $\langle\zeta,p/|p|\rangle<-c_1$，则 $|\mathrm{Int}(p)|<e^{-c_2|p|}$，$|p|\gg 0$。

Pro。固定 I，并在由 $\{\mathsf{D}_i\}_{i\in I}$ 给出的基下进行讨论。利用富比尼定理，我们写出

$$\mathrm{Int}(p)=\pm\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}}\int_{(S^1)^k}\mathrm{d}\sigma\prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\Gamma\cdot e^{\langle\theta,\sigma\rangle}= \tag{A.26}$$

$$=const\prod_{i\in I_k}\frac{(-1)^{m_i}}{m_i!}\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}}\Omega\prod_{i\notin I_k}\Gamma(\langle \mathsf{D}_i,p+\sqrt{-1}\Im(\sigma)\rangle+\alpha_i)e^{\langle\theta,\sigma\rangle}.$$

令 $p_i:=\langle \mathsf{D}_i,p\rangle$ 及 $y_i:=\Im(\langle \mathsf{D}_i,\sigma\rangle)$，$|y|:=|\Im(\sigma)|$。考虑伽马函数不作自变量平移 by α时的主要渐近行为：

$$\prod_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}|p_i|^{-p_i}:=\exp\left(-\sum_{i\notin I_k}p_i\log|p_i|+\sum_{i\in I_k}(m_i+\alpha_i)\log(m_i+\alpha_i)\right), \tag{A.27}$$

其中，若存在任意 $p_i=0$，则左侧定义为一个极限。卡拉比-丘条件 $\sum_{i=1}^{n+\boldsymbol{\kappa}}\mathsf{D}_i=0$ 意味着 (A.27) 是关于 p 的 0 次齐次函数。我们用它来简化被积函数的渐近行为：

$$\prod_{i\in I_k}m_i^{-m_i}\prod_{i\notin I_k}|p_i+\alpha_i+\sqrt{-1}y_i|^{p_i}\prod_i|p_i|^{-p_i}= \tag{A.28}$$

$$=\prod_{i\in I_k}(m_i+\alpha_i)^{\alpha_i}\exp\left(\sum_{i\notin I_k}p_i\log|1+(\alpha_i+\sqrt{-1}y_i)/p_i|+\sum_{i\in I_k}m_i\log(1+\alpha_i/m_k)\right)\le$$

$$\le e^{const\cdot|p|}\exp\left(\sum_{i\notin I_k}p_i\log|1+(\alpha_i+\sqrt{-1}y_i)/p_i|\right),\ |p|\to\infty.$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $(m_i+\alpha_i)^{\alpha_i}$ 可由 $|p|$ 和 $m_i\log(1+\alpha_i/m_i)<\alpha_i$的一个多项式所界定这一事实。类似于引理 5.8 的证明，我们有

$$e^{-2\pi\langle B,\Im(\sigma)\rangle-\sum_{i\notin I_k}\pi|y_i|/2}\le e^{-const_2|y|}. \tag{A.29}$$

现在我们将引理 A.1 应用于 (A.25)：

$$\prod |p_i|^{-p_i}|\mathrm{Int}(p)| \le \prod_i |p_i|^{-p_i} \prod_{i\in I_k} m_i^{-m_i} e^{-\sum_{i\in I_k} m_i} e^{\langle \zeta, p\rangle} \times \tag{A.30}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}} \Omega \prod_{i\notin I_k} |p_i+\alpha_i+\sqrt{-1}y_i|^{p_i+\alpha_i-1/2} e^{-\sum_{i\notin I_k} \min(p_i+\alpha_i,0)} e^{-2\pi\langle B, \Im(\sigma)\rangle - \sum_{i\notin I_k}\pi|y_i|/2} \le$$

$$\le e^{const_4|p|+\langle\zeta,p\rangle} e^{\sum_i \alpha_i} \int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}} \Omega \prod_{i\notin I_k} |p_i+\alpha_i+\sqrt{-1}y_i|^{\alpha_i-1/2} \exp\left(\sum_{i\notin I_k} p_i \log|1+(\alpha_i+\sqrt{-1}y_i)/p_i|\right) e^{-const_2|y|},$$

其中在最后一行中，我们用到了 (A.28) 和 (A.29)。

我们利用显然的不等式 $(a+b)^x \le (2a)^x+(2b)^x$，对 $a,b>0,\ x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$，可得 $|a+\sqrt{-1}b|^x = \overline{(a^2+b^2)}^{x/2} \le 2^{x/2}(|a|^x+|b|^x)$。此外，若 $p_i<0$,

$$|1+(\alpha_i+\sqrt{-1}y_i)/p_i|^{p_i} < |1+\alpha_i/p_i|^{p_i}. \tag{A.31}$$

此估计与 y 无关；若 p_i 与 $-\alpha_i$ 分离，则它关于 p 是次指数的，因此我们可以在估计中忽略这些项。于是

$$\prod_{i\notin I_k,\alpha_i-1/2>0} |p_i+\alpha_i+\sqrt{-1}y_i|^{\alpha_i-1/2} \exp\left(\sum_{i\notin I_k,p_i>0} p_i \log|1+(\alpha_i+\sqrt{-1}y_i)/p_i|\right) < \tag{A.32}$$

$$< 2^{\sum_{i\notin I_k}(p_i+\alpha_i-1/2)/2} \prod_{i\notin I_k,\alpha_i-1/2>0} \left(|p_i+\alpha_i|^{\alpha_i-1/2}+|y_i|^{\alpha_i-1/2}\right) \prod_{i\notin I_k,p_i>0} ((1+|\alpha_i/p_i|)^{p_i}+|y_i|^{p_i}/|p_i|^{p_i}) \le$$

$$\le 2^{\sum_{i\notin I_k}(p_i+\alpha_i-1/2)/2} \prod_{i\notin I_k,\alpha_i-1/2>0} \left(|p_i+\alpha_i|^{\alpha_i-1/2}+|y_i|^{\alpha_i-1/2}\right) \prod_{i\notin I_k,p_i>0} (e^{|\alpha_i|}+|y_i|^{p_i}/|p_i|^{p_i}),$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $(1+c/x)^x = e^{x\log(1+c/x)} < e^c,\ c,x>0$。最后一行中的第一个乘积关于 p_i 呈多项式行为，因此可由关于 $|p|$ 的一个多项式所界定。此外，因子 2^{p_i} 由 $e^{const|p|}$ 所界。我们来考察包含 $|y_i|^{p_i}/p_i^{p_i}$ 的唯一非平凡项。我们略去 $|y_i|^{\alpha_i-1/2}$ 的幂，因为它们会产生相同的指数渐近行为。为了证明该命题的结论，我们证明每个积分

$$\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}} \Omega \prod_{i\in J\subset I_k'} |y_i|^{p_i}/p_i^{p_i} e^{-const_2|y|} \tag{A.33}$$

由 $e^{const|p|}$ 给出上界。令 $\rho=|y|$。那么，在 $\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}$ 上的极坐标中，我们写作

$$\int_{\mathbb{R}^{\boldsymbol{\kappa}-k}} \Omega \prod_{i\in J\subset I_k'} |y|^{p_i}/p_i^{p_i} e^{-const_2|y|} = const \prod_i p_i^{-p_i} \int_0^\infty \mathrm{d}\rho\ \rho^{\boldsymbol{\kappa}-k-1+\sum_i p_i} e^{-const_2\rho} = \tag{A.34}$$

$$= const\cdot const_2^{k-\boldsymbol{\kappa}-\sum_i p_i} \prod p_i^{-p_i} \Gamma(\sum p_i+\boldsymbol{\kappa}-k).$$

如果 $\sum_i p_i$ 很小，那么积分也很小。否则，我们可以使用斯特林近似。 $\Gamma(\sum_i p_i+\boldsymbol{\kappa}-k)/\Gamma(\sum_i p_i)$ 被 $|p|$ 的一个多项式所界，因此我们需要证明

$$\Gamma(\sum_i p_i)\prod_i p_i^{-p_i} < e^{const|p|}.$$

斯特林近似表明：

$$\Gamma(\sum_i p_i) < const(\sum_i p_i)^{\sum_i p_i-1/2} e^{-\sum_i p_i}. \tag{A.35}$$

引理 A.6。 设 $a_1,\ldots,a_k>0$ 和 $a=\sum_{i=1}^k a_i>0$。那么

$$a^a \prod_i a_i^{-a_i} \le k^a \tag{A.36}$$

证明。 方程（A.36）等价于

$$\prod_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{a}\right)^{-\frac{a_i}{a}} \le k \tag{A.37}$$

定义 $f\colon\ [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ 如下

$$f(b_1,\dots,b_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^k b_i^{-b_i} & \text{if } b_1,\dots,b_k > 0, \\ 0 & \text{if } b_i = 0 \text{ for some } i. \end{cases}$$

那么 f是连续的，并且在 $(0,\infty)^k$ 上光滑。令 $\Delta_k := \{(b_1,\dots,b_k) \in \mathbb{R}\colon\ b_i \geq 0, \sum_{i=1}^k b_i = 1\}$ 为 $(k-1)$-单纯形。那么 f在 Δ_k的内部为正，在 $\partial\Delta_k$上为零。利用拉格朗日乘子，我们计算得

$$\max_{(b_1,\dots,b_k)\in\Delta_k} f(b_1,\dots,b_k) = f(\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k}) = k.$$

因此，只要 $a_1,\dots,a_k > 0$和 $a = \sum_{i=1}^k a_i$，(A.37) 就成立。 □

应用引理 A.6，我们得到

$$\Gamma(\sum_i p_i)\prod_i p_i^{-p_i} \leq e^{const(\sum_i p_i)} \leq e^{const|p|}. \tag{A.38}$$

回到 (A.30)，我们得到

$$\prod_i |p_i|^{-p_i}|\mathrm{Int}(p)| \leq e^{\langle\zeta,p\rangle}e^{const|p|},\ |p|\to\infty, \tag{A.39}$$

or

$$|\mathrm{Int}(p)| < e^{\langle\zeta,p\rangle+\sum_i p_i\log|p_i|+const|p|} = e^{(\langle\zeta,p/|p|\rangle+\sum_i p_i/|p|\log|p_i|/|p|)+const)|p|}, \tag{A.40}$$

这里用到了 $\prod_i |p_i|^{-p_i}$是 0 次齐次的。因此，若 $\langle\zeta,p/|p|\rangle + \sum_i p_i/|p|\log(|p_i|/|p|) < -const$，则当 $|p|$ 足够大时，积分由 $e^{-c_2|p|}$ 界定，且该界与 p无关。注意，$\sum_i p_i\log|p_i|$是连续函数，因而有界；若存在一个与 p无关的实数 c_1 使得 $\langle\zeta,p/|p|\rangle < -c_1$，则该估计成立。

□

References

[AGV] D. Abramovich、T. Graber 和 A. Vistoli，《Deligne-Mumford 叠的 Gromov-Witten 理论》，《美国数学杂志》130 (2008)，第 5 期，1337–1398。[AV02] D. Abramovich 和 A. Vistoli，《紧化稳定映射空间》，《美国数学会杂志》15 (2002)，第 1 期，27–75。[Al23] K. Aleshkin，《GLSM 的 T 对偶膜的中心荷》，准备中。[AB1] K. Aleshkin 和 A. Belavin，《五次三维簇 101 维模空间上的特殊几何》，《高能物理杂志》2018，第 3 期，018，前置部分+13 页。[AB2] K. Aleshkin 和 A. Belavin，《Fermat 型 Calabi-Yau 超曲面特殊几何的精确计算》，《JETP 快报》，2018 年，第 108 卷，第 10 期，705–709。[AL1] K. Aleshkin 和 C.-C. M. Liu，《 K理论拟映射不变量的墙穿越 I》，arXiv:2210.10315。[AL2] K. Aleshkin 和 C.-C. M. Liu，《 K理论拟映射不变量的墙穿越 II》，准备中。[BC] F. Benini 和 S. Cremonesi，《 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 规范理论在 S^2 上的配分函数与涡旋》，《数学物理通讯》334，第 3 期，1483–1527 (2015)，doi:10.1007/s00220-014-2112-z [arXiv:1206.2356 [hep-th]]。[BFK] M. Ballard、D. Favero 和 L. Katzarkov，《几何不变理论商与导出范畴的变分》，《纯粹与应用数学杂志》746 (2019)，235–303。[BP10] V. Baranovsky 和 J. Pecharich，《关于导出范畴与奇异范畴的等价》，Cent. Eur. J. Math. 8 1, 1 2010 14 ( ), no. – 。[BF97] K. Behrend 和 B. Fantechi，《内蕴正规锥》，Invent. Math. 128 (1997)，第 1 期，45–88。[BCS] L. Borisov、L. Chen 和 G. G. Smith，《环面 Deligne-Mumford 叠的轨形 Chow 环》，《美国数学会杂志》18 (2005)，第 1 期，193–215。[BH1] L.A. Borisov 和 P. R. Horja，《光滑环面 DM 叠的 K理论》，《Snowbird 弦几何讲座》，21–42，《当代数学》，401，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[BH2] L. A. Borisov 和 P. R. Horja，《作为傅里叶-穆凯变换的 Mellin-Barnes 积分》，Adv. Math. 207 (2006)，第 2 期，876–927。[BH06] L.A. Borisov 和 P. R. Horja，《光滑环面 DM 叠的 K理论》，《Snowbird 弦几何讲座》，21–42，《当代数学》，401，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[BH15] L.A. Borisov 和 P. R. Horja，《同调镜像对称在超几何系统中的应用：对偶猜想》，Adv. Math. 271 (2015)，153–187。[CL12] H.-L. Chang 和 J. Li，《带场稳定映射的 Gromov-Witten 不变量》，《国际数学研究通知》IMRN 2012，第 18 期，4163 4217 no. – 。[CLL] H.-L. Chang、J. Li、W.-P. Li，《通过余截面局部化构造 Witten 顶陈类》，Invent. Math. 200 (2015)，第 3 期，1015–1063。[CL20] H.-L. Chang 和 M.-L. Li，《带场稳定拟映射的不变量》，《美国数学会汇刊》373 (2020)，第 5 期，3669–3691。[CJR] Q. Chen、F. Janda 和 Y. Ruan，《对数规范线性西格玛模型》，Invent. Math. 225 (2021)，第 3 期，1077–1154。[CT] J.-C. Chen 和 H.-T. Tseng，《关于导出 McKay 对应的注记》，《数学研究快报》15 (2008)，第 3 期，435–445。[CCK] D. Cheong、I. Ciocan-Fontanine 和 B. Kim，《轨形拟映射理论》，《数学年刊》363 (2015)，第 3–4 期，777–816。[CKS] Dongwook Choa、Bumsig Kim、Bhamidi Sreedhar，《堆化矩阵分解的 Riemann-Roch 定理》，arXiv:2202.04418

[CKK] Kuerak Chung、Bumsig Kim 和 Taejung Kim，《链级 HKR 型映射与陈特征公式》，arXiv:2109.14372。[CKM] I. Ciocan-Fontanine、B. Kim 和 D. Maulik，《到 GIT 商的稳定拟映射》，《几何与物理杂志》75 (2014)，17–47。[CK] I. Ciocan-Fontanine 和 B. Kim、Bumsig，《零属拟映射理论中的墙穿越与镜像映射》，Algebr. Geom. 1 (2014)，第 4 期，400–448。[CFGKS] I. Ciocan-Fontanine、D. Favero、J. Gu´er´e、B. Kim 和 M. Shoemaker，《GLSM 的基本分解，第一部分：构造》，arXiv:1802.05247，即将在《美国数学会回忆录》发表。[CIR] A. Chiodo、H. Iritani、Y. Ruan，《Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 对应、整体镜像对称与 Orlov 等价》，Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 119 (2014)，127–216。[CN] A. Chiodo 和 J. Nagel，《Calabi-Yau 完全交的混合 Landau-Ginzburg 模型》，《拓扑递归及其对分析、几何与拓扑的影响》，103–117，《纯数学进展研究论文集》，100，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018。[CR] A. Chiodo 和 Y. Ruan，《LG/CY 对应：态空间同构》，Adv. Math. 227 (2011)，第 6 期，2157–2188。[CCIT] T. Coates、A. Corti、H. Iritani 和 H.-H. Tseng，《环面叠的镜像定理》，Compos. Math. 151 10, 1878 2015 1912 ( ), no. – 。[CIJ] T. Coates、H. Iritani 和 Y. Jiang，《环面完全交的保正则变换猜想》，Adv. Math. 329 (2018)，1002–1087。[CIJS] T. Coates、H. Iritani、Y. Jiang 和 E. Segal，《环面 Deligne-Mumford 叠的 K理论与范畴性质》，Pure Appl. Math. Q. 11 (2015)，第 2 期，239–266。[CLL] H.-L. Chang、J. Li 和 W.-P. Li，《通过余截面局部化构造 Witten 顶陈类》，Invent. Math. 200 3, 1015 2015 1063 ( ), no. – 。[CLS] D. A. Cox、J. B. Little 和 H. K. Schenck，《环面簇》，《数学研究生教材》，124。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011。xxiv+841 页。[FK] D. Favero 和 B. Kim，《一般 GLSM 不变量及其上同调场论》，arXiv:2006.12182。[FJR11] 《Witten 方程、镜像对称与量子奇点理论》，《数学年刊》 (2) 178 (2013)，第 1 期，1–106。[FJR] H. Fan、T. J. Jarvis 和 Y. Ruan，《规范线性西格玛模型的数学理论》，Geom. Topol. 22 (2018)，第 1 期，235–303（出版版本）及 arXiv:1506.02109v5 (2020)。[Fa20] B. Fang，《环面簇的 T 对偶膜的中心荷》，《美国数学会汇刊》373 (2020)，第 6 期，3829–3851。[FZ] B. Fang 和 P. Zhou，《从 T 对偶膜上的积分与同调镜像对称得到环面簇的 Gamma II》，arXiv:1903.05300。[Fu93] W. Fulton，《环面簇导论》，《数学年刊研究》131。《几何 William H. Roever 讲座》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。xii+157 页。[Fu98] W. Fulton，*Intersection theory*，第二版。施普林格出版社，柏林，1998。xiv+470 页。[Gi96] A. Givental，《等变 Gromov-Witten 不变量》，Internat. Math. Res. Notices 1996，第 13 期，613–663。[Gi98] A. Givental，《环面完全交的镜像定理》，《拓扑场论、原始形式及相关主题》（京都，1996），141–175，Progr. Math., 160, Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1998。[GiV] A. Givental，《置换等变量子 K 理论 V. 环面 q超几何函数》，arXiv:1509.03903。[GiVI] A. Givental，《置换等变量子 K 理论 VI. 镜像》，arXiv:1509.07852。[GL] A. Givental、Y. Lee，《旗流形上的量子 K 理论、有限差分 Toda 格与量子群》，Invent. Math. 151 (2003)，第 1 期，193–219。[Gu] J. Gu´er´e，《等变 Landau-Ginzburg 镜像对称》，arXiv:1906.04100。[HL] D. Halpern-Leistner，《GIT 商的导出范畴》，《美国数学会杂志》28 (2015)，第 3 期，871–912。[HLS] D. Halpern-Leistner 和 I. Shipman，《通过几何不变理论得到导出范畴的自等价》，Adv. Math. 303 (2016)，1264–1299。[HS] L. Heath 和 M. Shoemaker，《拟映射的量子 Serre 对偶》，Eur. J. Math. 8 (2022)，增刊 1，S53–S93。[Ho] J. Horn，《论两个及三个变量的超几何级数的收敛性》，（德文）《数学年刊》34 (1889)，第 4 期，544–600。[HHP] M. Herbst、K. Hori 和 D. C. Page，《边界上 N=2 维理论的相》，arXiv:0803.2045。[HR] K. Hori 和 M. Romo，《带边界的二维 (2,2) 超对称规范理论的精确结果》，arXiv:1308.2438。[HR19] K. Hori 和 M. Romo，《半球札记》，《原始形式及相关主题——Kavli IPMU 2014》，127–220，《纯数学进展研究》83，日本数学会，东京，2019。[Ir09] H. Iritani，《量子上同调中的整结构与环面轨形的镜像对称》，Adv. Math. 222 (2009)，第 3 期，1016–1079。[KL13] Y.H. Kiem 和 J. Li，《通过余截面局部化虚循环》，《美国数学会杂志》26 (2013)，第 4 期，1025–1050。[KL18] Y.-H. Kiem 和 J. Li，《通过余截面局部化虚结构层》，《国际数学研究通知》IMRN 2020，第 22 期，8387–8417。[KP22] B. Kim 和 A. Polishchuk，《整体矩阵分解的 Atiyah 类与陈特征》，J. Inst. Math. Jussieu 21 (2022)，第 4 期，1445–1470。

[08] **52** 2008 2, 493 514 Ji Y. [08] Jiang，《单纯环面叠丛的轨形上同调环》，Illinois J. Math. ( )，no. – JT Y. Jiang 和 H.-H. Tseng，《关于半射影环面 Deligne-Mumford 叠的轨形 Chow 环的注记》，Comm. Anal. Geom. 16 (2008)，第 1 期，231–250。[JT10] Y. Jiang 和 H.-H. Tseng，《环面 Deligne-Mumford 叠的积分（轨形）Chow 环》，Math. Z. 264 1, 225 2010 248 ( ), no. – 。[Ka] Y. Kawamata，《对数保正则双有理映射与导出范畴》，J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 12 (2):211–231, 2005。[Ka79] T. Kawasaki，《复 V-流形上的 Riemann-Roch 定理》，Osaka J. Math. 16 (1979)，第 1 期，151–159。[KiLi] Y.-H. Kiem 和 J. Li，《通过余截面局部化虚循环》，《美国数学会杂志》26 (2013)，第 4 期，1025–1050。[Ki21] B. Kim，《整体矩阵分解的 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理》，arXiv:2106.00435。

[KRS] J. Knapp、M. Romo 和 E. Scheidegger，《D膜中心荷与朗道-金兹堡轨形》，《数学物理通讯》384（2021），第 1 期，609–697。[Lee] Y.-P. Lee，*Quantum K-theory I. Foundations*，《杜克数学杂志》121（2004），第 3 期，389–424。[LPS] Y.-P. Lee、N. Priddis、M. Shoemaker，*A proof of the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence via the crepant transfor-mation conjecture*，《高等师范学校科学年鉴》（第 4 辑）49（2016），第 6 期，1403–1443。[LT98] J. Li 和 G. Tian，《代数簇的虚模空间循环与 Gromov-Witten 不变量》，《美国数学会杂志》11（1998），第 1 期，119–174。[LLY] B. Lian、K. Liu 和 S.-T. Yau，《镜像原理 I》，《亚洲数学杂志》1（1997），第 4 期，729–763。[MS] T. Milanov、Y. Shen，《可逆简单椭圆奇点的整体镜像对称》，《傅里叶研究所年鉴》（格勒诺布尔）66（2016），第 1 期，271–330。[Ok20] A. Okounkov，《非阿贝尔稳定包络、带后代类的顶点函数及 q-差分方程的积分解》，arXiv:2010.13217。[Or04] D. Orlov，《奇点三角范畴与朗道-金兹堡模型中的 D膜》，（俄文）《斯捷克洛夫数学研究所学报》246（2004），代数几何方法、联系与应用，240–262；译文见《斯捷克洛夫数学研究所学报》2004 年，第 3 期（246），227–248。[Or05] D. Orlov，《相干层的导出范畴与奇点三角范畴》，《代数、算术与几何：纪念 Yu. I. Manin》，第 II 卷，503–531，数学进展，270，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2009。[PS16] Nathan Priddis 和 Mark Shoemaker，《镜像五次的 Landau-Ginzburg/Calabi-Yau 对应》，《傅里叶研究所年鉴》（格勒诺布尔）66（2016），第 3 期，1045–1091。[PV11] A. Polishchuk 和 A. Vaintrob，《代数堆的矩阵分解与奇点范畴》，《傅里叶研究所年鉴》（格勒诺布尔）61（2011），第 7 期，2609–2642。[PV16] A. Polishchuk 和 A. Vaintrob，《矩阵分解与上同调场论》，《纯粹与应用数学杂志》714（2016），1–122。[Ro] M. Romagny，《代数堆上的群作用及其应用》，《代数堆上的群作用及其应用》，《密歇根数学杂志》53（2005），第 1 期，209–236。[RR] D. Ross 和 Y. Ruan，《零属朗道-金兹堡理论中的墙穿越》，《纯粹与应用数学杂志》733（2017），183–201。[Ru99] Y. Ruan，《手术、量子上同调与双有理几何》，《北加利福尼亚辛几何研讨会》，183–198，美国数学会译丛，第 2 辑，196，数学进展，45，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1999。[Ru02] Y. Ruan，《轨形的弦式几何与拓扑》，《纪念 C. H. Clemens 研讨会》（犹他州盐湖城，2000），187–233，《当代数学》312，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2002。[Ru06] Y. Ruan，《轨形保正解消的上同调环》，《自旋曲线与轨形的 Gromov-Witten 理论》，117–126，《当代数学》403，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[Sh21] M. Shoemaker，《窄量子D模与量子 Serre 对偶》，《傅里叶研究所年鉴》（格勒诺布尔）71 3，1135 2021 1183（），第 – 期。[Sh] M. Shoemaker，《迈向 GLSM 的镜像定理》，arXiv:2108.12360。[TY] H. Tseng 和 F. You，《零属 K理论朗道-金兹堡理论中的墙穿越》，arXiv:1609.08176。[Ts] A. K. Tsikh，《多重留数及其应用》（俄文）［《高维留数及其应用》]"科学"西伯利亚分部，新西伯利亚，1988。240 页。*Multidimensional residues and their applications*。由 E. J. F. Primrose 从 1988 年俄文原著翻译。数学专著译丛，103。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1992。x+188 页。[Vi89] A. Vistoli，《代数堆及其模空间上的交理论》，《数学发明》97（1989），第 3 期，613–670。[Zh22] Y. Zhou，《GIT 商的拟映射墙穿越》，《数学发明》227（2022），第 2 期，581–660。[ZZ] M. Zhang 和 Y. Zhou，《K理论拟映射墙穿越》，arXiv:2012.01401。

Konstantin Aleshkin, Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA
Email address: aleshkin@math.columbia.edu

Chiu-Chu Melissa Liu, Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA*Email address*: ccliu@math.columbia.edu