arXiv:2301.01268v1 [math.CV] 3 Jan 2023

避开无界凸集的欧几里得空间中的真全纯映射

Barbara Drinovec Drnovˇsek 和 Franc Forstneriˇc

摘要 我们证明，若 E 是 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中包含于某个闭半空间 H 的闭凸集，且 $E\cap bH$ 非空且有界，那么凹域 $\Omega=\mathbb{C}^n\setminus E$ 包含来自任意维数为 $<n$ 的 Stein 流形 X 的恰当全纯映射 $f\colon X\to\mathbb{C}^n$ 的像，并且这些映射可在 X 的闭紧子集上逼近给定映射。此外，若 $2\dim X+1\le n$，则 f 可选为嵌入；若 $2\dim X=n$，则可选为浸入。在对 E 施加更强条件时，我们还可为此类映射在闭复子簇上获得插值性质。

关键词 Stein 流形、全纯嵌入、Oka流形、极小曲面、凸性

2010年数学主题分类：32H02, 32Q56; 52A20, 53A10

日期：2023年1月3日

谨以此文纪念 Nessim Sibony

1. 引言

设 X 是一个 Stein 流形。用 $\mathscr{O}(X,\mathbb{C}^n)$ 表示赋予紧开拓扑的全纯映射弗雷歇空间 $X\to\mathbb{C}^n$，并记 $\mathscr{O}(X,\mathbb{C})=\mathscr{O}(X)$。Remmert [36]（1956）、Narasimhan [35]（1960）和 Bishop [7]（1961年）的一个定理指出：若 $\dim X=n$，几乎适当映射在 $\mathscr{O}(X,\mathbb{C}^n)$ 中是剩余的；若 $\dim X<n$，适当映射是稠密的；若 $2\dim X\le n$，适当浸入是稠密的；若 $2\dim X<n$，适当嵌入是稠密的。Gunning 和 Rossi 的专著 [29] 中也给出了一个证明。

自然会问，适当映射需要多大的空间？我们提出以下问题。

问题1.1. 对于哪些区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，如上所述的真全纯映射（浸入、嵌入）$X\to\mathbb{C}^n$ 的像包含于 Ω，且在 $\mathscr{O}(X,\Omega)$ 中稠密？

显然，Ω 不能包含于 $\mathbb{C}^n$ 的某个半空间，因为从 $\mathbb{C}$ 到半空间的每个全纯映射都落在一个复超平面内。本文对补集 $E=\mathbb{C}^n\setminus\Omega$ 满足以下条件的凹域给出肯定答案。

定义 1.2. 若实或复欧几里得空间 V 中的闭凸集 E 满足以下条件，则称其具有有界凸穷竭包（BCEH）：对于每个 V中的紧凸集 K

$$\text{the set } h(E,K)=\mathrm{Conv}(E\cup K)\setminus E \text{ is bounded.} \tag{1.1}$$

这里，Conv 表示凸包。以下是我们的第一个主要结果。

定理 1.3. 设 E 是 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中的一个无界闭凸集，且具有有界凸穷竭包。给定一个 Stein 流形 X，满足 $\dim X<n$，一个 $\mathcal{O}(X)$-凸紧集 K，其中X，以及一个全纯映射 $f_0\colon K\to\mathbb{C}^n$，满足 $f_0(bK)\subset\Omega=\mathbb{C}^n\setminus E$，则我们可以在 K 上一致地用真全纯映射 $f\colon X\to\mathbb{C}^n$ 逼近 f_0，且这些映射满足 $f(X\setminus K)\subset\Omega$。若 $2\dim X<n$，则映射f可选为嵌入；若 $2\dim X\le n$，则可选为浸入。

在本文中，若映射 $f\colon K \to \mathbb{C}^n$ 定义在紧集 K 上，并且是某个 K开邻域上的全纯映射在 K 上的限制，则称其为全纯映射。

特别地，若 $f_0(K) \subset \Omega$，则该定理给出了用真全纯映射 $f\colon X \to \mathbb{C}^n$ 一致逼近 f_0，且满足 $f(X) \subset \Omega$。若 bE 属于 $\mathscr{C}^1$ 类且在无穷远处严格凸，则我们可得到定理 1.3 的类似结果，并在闭复子簇 X' 上增加插值条件，其中 $f_0\colon X' \to \mathbb{C}^n$ 是真全纯的；见定理 4.2。若不要求值域满足该条件，则 Acquistapace 等人 [1] 于 1975年实现了在闭复子簇上对真全纯嵌入 $X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ 的插值。

对于 Stein 流形中的无界闭集，将凸包替换为全纯凸包所得的 BCEH 条件类似结果，用于 Arakelyan 和 Carleman 型全纯逼近理论；综述见 [18]。

显然，闭凸集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 具有 BCEH，当且仅当存在一个紧凸集的递增序列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$，其并集为 $\mathbb{R}^n$，并且对每个 $j = 1, 2, \ldots$，集合 $h(E, K_j)$（见 (1.1)）都是有界的。特别地，BCEH 是一个关于无穷远处的条件，在支集包含于某个紧集的扰动下保持不变。对于紧凸集 $E \subset \mathbb{C}^n$，定理 1.3 已在 [24] 中得到证明；在这种情况下，BCEH 显然成立。

我们将在第 3 节证明，闭凸集 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有 BCEH，当且仅当 E 在 Gale 和 Klee [26]的意义下是连续的；见命题 3.3。若 E 具有 BCEH，则对任意紧凸集 $K \subset \mathbb{R}^n$，Conv($E \cup K$) 都是闭集（见 [26, 定理 1.5]）。若此类 E无界（这是我们主要关注的情形），则存在仿射坐标 $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$，使得 $E = E_\phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \geq \phi(x)\}$ 是一个凸函数$\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$的上图集，该函数在无穷远处至少线性增长（见命题 3.4）。特别地，具有 BCEH 的无界闭凸集 $E \subset \mathbb{C}^n$ 具有如下形式

$$E = E_\phi = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \Im z_n \geq \phi(z', \Re z_n)\} \tag{1.2}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上的某些仿射复坐标 $z = (z', z_n)$ 中，其中 ϕ 如上所述。（这里，$\Re$ 和 $\Im$ 分别表示实部和虚部。）对于一个属于 $\mathscr{C}^1$ 类的凸函数 ϕ，我们给出其上图集 E_ϕ 满足 BCEH 条件的微分刻画；见命题 3.8。若 ϕ 的径向导数趋于无穷，则其上图集具有 BCEH 性质；见推论 3.9。另一方面，也存在增长呈线性的凸函数，其上图集具有 BCEH 性质；见例 3.10。根据命题 3.11，具有至少线性无穷远增长的凸函数 ϕ，可以在紧集上一致地用同类函数 $\psi \leq \phi$ 逼近，且这些函数的上图集 E_ψ 均具有 BCEH 性质。由此我们可将定理 1.3 推广如下；证明见第 4 节。

推论 1.4. 定理 1.3 的结论适用于任何形式为 (1.2) 的凸上图 E_ϕ，只要 $\phi \geq 0$ 且集合 $\{\phi = 0\}$ 非空并且紧致。

具有 BCEH 的闭凸集 $E \subset \mathbb{C}^n$ 不包含任何仿射实直线（见命题 3.4），而根据 Wold 和第二作者的结果，其补集 $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus E$ 是一个 Oka 域；见 [25, 定理 1.8]。这一事实在我们于第 4 节给出的定理 1.3 的证明中起着重要作用。（我们将使用的 Oka 理论中的确切结果陈述为定理 4.1。）在闭凸上图 (1.2) 中，具有 Oka 补集的集合类严格大于具有 BCEH 的集合类。特别是，前一类包含许多含有边界直线的集合，而具有 BCEH 的集合不可能如此。

问题 1.5. 是否存在一个（不一定是凸的）集合 $E_\phi \subset \mathbb{C}^n$，其形式为 (1.2)，且 $\phi \geq 0$ 具有次线性增长，使得定理 1.3 成立？在 $\mathbb{C}^2$ 中是否存在这样一个集合，使得 $\mathbb{C}^2 \setminus E_\phi$包含一个真全纯圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ 的像：} |z| < 1\} \to \mathbb{C}^2$?

定理 1.3 是文献中的首个一般性结果，它给出了从任意维数为 $< n$ 的 Stein 流形到$\mathbb{C}^n$ 的真全纯映射$X \to \mathbb{C}^n$，其像避开接近半空间的大型凸集，并且可在 X 的一个紧全纯凸集上逼近给定映射。若不要求逼近，且假设 $\dim X \le n-2$，则存在从 X 到 $\mathbb{C}^n \setminus E$中的复超平面的真全纯映射。

另一方面，关于欧几里得空间以及更一般的 Stein 流形中的真全纯映射，已有许多结果。这些映射的像避开某些较小的闭子集，例如紧集或完全多极集；还有一些结果以圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 为源流形。Alexander [5] 于 1977年构造了像避开形如 $E = E' \times \mathbb{C}$ 的闭完全多极集的真全纯圆盘 $\mathbb{C}^2$，其中 $E' \subset \mathbb{C}$。第一作者在 [13]（2004年）证明，对于 Stein 流形 Y 中任意闭完全多极集 E，若 $\dim Y > 1$ 且点 $p \in Y \setminus E$，则存在真全纯圆盘 $f\colon \mathbb{D} \to Y$，使得 $p \in f(\mathbb{D}) \subset Y \setminus E$。若 $Y = \mathbb{C}^2$，根据 Borell 等人 [8]（2008年）的结果，还存在具有此性质的嵌入全纯圆盘；当 $\dim Y \ge 3$ 时，这可由一般位置论证得到。Globevnik 和第二作者 [23] 于 2001年构造了像包含在某些凹锥中的 $\mathbb{C}^2$ 中的真全纯圆盘。他们还构造了像位于（$\mathbb{C} \setminus \{0\}$）^{2}，中的 $\mathbb{C}^2$ 中的真全纯圆盘，因而也构造了真调和圆盘 $\mathbb{D} \to \mathbb{R}^2$，从而推翻了 Schoen 和 Yau 的猜想 [37, , 第 18] 页。（Bo˘zin [9] 也给出了这类映射的另一种构造。）更一般地，Alarc´on 和 L´opez [4, 在 2012年的推论 1.1] 中证明，每个开黎曼曲面 X 都存在到 $\mathbb{R}^2$ 的真调和映射，该映射是保角极小浸入 $X \to \mathbb{R}^3$ 的投影。第一作者在 [12]（2002年）利用了 [23] 中的上述结果，对 $\mathbb{C}^2$ 中补集由在 $\mathbb{C}^2$ 中为真的全纯圆盘的像覆盖的闭凸集进行了分类。最近，Forstneri˘c 和 Ritter [24]（2014年）在 $E \subset \mathbb{C}^n$ 为紧多项式凸集且 $2\dim X \le n$（对浸入而言）或 $2\dim X < n$（对嵌入而言）的情况下，证明了定理 1.3；对于真全纯映射 $X \to \mathbb{C}^n$，当 $\dim X < n$ 且 E 为紧凸集时，也证明了该定理。沿此方向的进一步发展，是定理 1.3 的类似结果：将 $\mathbb{C}^n$ 替换为具有稠密性性质的 Stein 流形 Y，并令 $E \subset Y$ 为紧 $\mathscr{O}(Y)$-凸集；参见 [22, 注 4.5] 及其中的参考文献。然而，除 [23, 12], 中的结果外，上述所有结果所避开的集合都是薄集或紧集。

如果不要求逼近，雷默特–毕晓普–纳拉辛汉定理关于目标空间维数的结论并非最优。事实上，埃利亚什贝格和格罗莫夫 [17] 于1992年证明，对于维数为 $m \ge 2$ 的 Stein 流形 X，可以将其适当地全纯嵌入 $\mathbb{C}^n$，其中 $n = \left[\frac{3m}{2}\right] + 1$；而对于 $m \ge 1$，可以将其适当地全纯浸入 $\mathbb{C}^n$，其中$n = \left[\frac{3m+1}{2}\right]$。施¨尔曼[38] 于1997年针对奇数维 Stein 流形改进了这一结果。（另见 [20, 第 9.3] 节。）然而，这些论文中的构造方法依赖于某些分层全纯纤维丛截面的 Oka 原理，并不能给出稠密性结论；我们也不知道定理 1.3 对映到这些较低维空间的映射是否成立。每个开黎曼曲面是否都能适当地全纯嵌入 $\mathbb{C}^2$，也是一个尚未解决的问题；参见 [20,第 9.10–9.11] 节及综述 [21]。

定理 1.3 在第 4 节中得到证明。证明依赖于两个主要要素。其一是 Wold 与第二位署名作者 [25, 的结果，即定理 1.8]，该结果特别表明，具有 BCEH 的闭凸集 E 的补集 $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus E$ 是一个 Oka 域。第二项主要技术源于 Dor [10, 11]（1993—1995年）的工作，其前身是 Stensønes [39]（1989年）和 Hakim [30]（1990年）的论文。Dor 构造了从 Stein 流形 X 中任意一个边界光滑、相对紧致的强伪凸域 D 到任意伪凸域 Ω（位于 $\mathbb{C}^n$ 中）的真全纯浸入和嵌入，满足以下维数条件

定理 1.3 中。在此之前，Hakim [30] 构造了余维一情况下到球中的真全纯映射。其主要思想是通过归纳方式，将全纯映射 $f\colon D \to \Omega$ 下 bD 的像提升到强多重次调和穷竭函数 $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ 的给定更高超水平集，同时进行精细控制，确保在这一过程中 D 上任何位置的函数值 $\rho \circ f$ 都不会降低太多。当 D 是有限带边黎曼曲面时，可以通过使用黎曼–希尔伯特边值问题的近似解来实现这一点（见 [14]）。在更高维情形下，证明更为微妙，需要在 D 上精心控制全纯峰函数 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$，使给定映射 $f\colon D \to \Omega$ 在点 $z \in f$（bD）处沿穷竭函数 $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ 的全纯（二次）Levi 多项式的零点集 S_z 的方向局部推进。在 Ω $z \in$ 上的非临界点处， ρ 的零点集 S_z 是光滑的局部复超曲面，而限制函数 $\rho|_{S_z}$ 随着我们远离 z 而呈二次增长。若 ρ 是严格凸函数，则可沿着经过适当选择的仿射复超平面方向推动 f（bD）的像来实现这一点。作者将 Dor 的构造推广到从 Stein 流形中的强伪凸域到任意 Stein 流形 Ω 的映射，并推广到适当取值的 $q \in \mathbb{N}$ 所对应的 q-凸复流形；相关论文分别发表于 2007年和 2010年，见 [14, 15] 。在这些论文中，我们引入了在强伪凸 Cartan 对上拼接流形值映射的全纯喷流、并将控制延伸至边界的技术（这是 Cousin-I 问题的非线性版本），以及一种系统方法，用于避开 Ω 上 q-凸 Morse 穷竭函数的临界点。

早在 1985 年，Løw [34] 和 Forstneriˇc [19] 就给出了这类构造，不过他们使用了更简单的全纯峰函数和更高的余维，并证明每个相对紧的强伪凸域 D 都能以全纯方式适当地嵌入 Stein 流形中的高维欧几里得球。Globevnik [27] 于 1987 年给出了一个相关结果，其中在 D 边界的适当子集上进行了插值。Løw [33] 于 1982 年在 $\mathbb{C}^n$ 的球上构造内函数，这一方法受到该构造的启发，而该构造基于 Hakim 和 Sibony [31]的工作。

在定理 1.3 中，我们应用这一方法，将全纯映射 $f_0\colon D \to \mathbb{C}^n$ 的边界 $f_0(bD) \subset \Omega = \mathbb{C}^n \setminus E$ 推出某个紧凸帽 C 之外。该帽沿着 bC 的一部分附着于 E，且该部分包含在 bE 中；此外，集合 $E_1 = E \cup C$ 是凸的，并具有有界的凸 $\bar{\ }$ 穷竭包。同时，我们确保新的映射 $g\colon D \to \mathbb{C}^n$ 仍将 $\overline{D \setminus K}$ 映入 Ω。精确结果见命题 2.1。下一步，我们利用 $\Omega_1 = \mathbb{C}^n \setminus E_1$ 是一个 Oka 域这一事实（见推论 3.6）。由于 $g(bD) \subset \Omega_1$, ，我们可以应用 Oka 原理（见定理 4.1），用全纯映射 $f_1 : X \to \mathbb{C}^n$ 逼近 g，且满足 $f_1(X \setminus D) \subset \Omega_1$。如此逐步归纳，我们得到一个全纯映射序列 $X \to \mathbb{C}^n$，它收敛到一个满足定理 1.3 的适当映射。细节见第 4 节。

定理 1.3 和推论 1.4 的类似结果对于 $\mathbb{R}^n$ 中的极小曲面也成立。

定理 1.6. 设 $n \geq 3$，且设 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ 是一个凸函数，使得集合 $\{\phi = 0\}$ 非空且紧致。给定一个开黎曼曲面 X、 X 中的一个紧致 $\mathcal{O}(X)$-凸集 K，以及一个保角极小浸入 $f_0\colon U \to \mathbb{R}^n$，它从 K 的一个邻域出发，满足 $f_0(bK) \subset \Omega = \{y < \phi(x)\}$，则我们可以在 K 上将 f_0 一致逼近为适当保角极小浸入 $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ （若 $n \geq 5$，则为嵌入），并满足 $f(X \setminus \mathring{K}) \subset \Omega$。

此外，若 ϕ 属于 $\mathscr{C}^1$ 类、在无穷远处严格凸，且上图集 $E_\phi = \{y \geq \phi(x)\}$ 具有 BCEH，则可以在此结论中加入对离散集上映射的插值，类似于定理 4.2。

定理 1.6 的证明沿用定理 1.3 的证明，只需将命题 2.1 替换为通过 Riemann–Hilbert 变形方法针对共形

极小曲面得到的类似结果（见 [2] 或 [3, 第 6]章）。此外，作者最近已证明 [16, 推论 1.5]：闭凸集 $E \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 的补集对于极小曲面是灵活的（这是复几何中 Oka 性质的类似结果），当且仅当 E 不是半空间或带状区域；显然，这包括所有具有 BCEH 的集合。

Alarc´on 和 L´opez [4] 于 2012年提出了另一种构造真极小曲面的方法；对于一些定理 1.6 未涵盖的例子，该方法也能得到相同的结果。他们证明，定理 1.6 对任意楔形区域 $\Gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$都成立，其中 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 是角度为 $> \pi$的开锥；见 [4, 定理 5.6]。该集合的补集是凸的，但由于其边界中含有直线，不满足定理 1.6 的假设。这两个领域的一个重要区别会影响可采用的构造方法：每个开黎曼曲面都存在到平面 $\mathbb{R}^2$ 的适当调和映射（见 [4,定理 I]），而只有少数这样的曲面存在到 $\mathbb{C}$的真全纯映射。

极小曲面的类似问题 1.5 提出：在 $\mathbb{R}^3$ 中是否存在形如 $\{x_3 < \phi(x_1, x_2)\}$的区域，其中 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ 是一个次线性增长函数，并且该区域包含双曲型、在 $\mathbb{R}^3$中恰当的极小曲面，或者至少包含极小曲面的一个恰当双曲端？尤其令人感兴趣的是，竖直悬空猫眼曲面的上半部下方的区域是否具有这一性质。另一方面，Hoffman 和 Meeks [32] 的强半空间定理指出，$\mathbb{R}^3$中包含在某个半空间内的真极小曲面只有平面。

2. 将强伪凸边界推出严格凸帽

设 O 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个凸区域，其中 $n > 1$。回忆一下，连续函数 $\rho : O \to \mathbb{R}$ 称为严格凸函数，若对任意一对点 a、$b \in O$，都有

$$\rho(ta + (1-t)b) < t\rho(a) + (1-t)\rho(b) \text{ for all } 0 < t < 1.$$

现在假设 $\rho_t : O \to \mathbb{R}$ $(t \in [0,1])$ 是一个连续族，其由满足下列条件的 $\mathscr{C}^1$ 函数组成：

(a) 对每个 $t \in [0,1]$，函数 ρ_t 都是严格凸的。注意，在 M_t 上，$d\rho_t \neq 0 := \{\rho_t = 0\}$。(b) 若 $0 \leq s < t \leq 1$，则在 M_s 上有 $\rho_t \leq 0$。(c) 存在 M_0 的一个开相对紧子集 ω_0，使得对任意一对数 $0 \leq s < t \leq 1$，都有 $M_t \cap M_0 = M_t \cap M_s = M_0 \setminus \omega_0$.

这意味着超曲面 M_t 在子集 $M_0 \setminus \omega_0$ 上重合；随着 $t \in [0,1]$ 增大，域 $\omega_t = M_t \setminus M_0 \subset M_t$ 两两不相交，并沿凸方向移动。每个形如

$$C_t = \bigcup_{s \in [0,t]} \overline{\omega}_s \quad \text{for } t \in [0,1] \tag{2.1}$$

的紧集称为以 ω_0 为底的严格凸帽。注意，$bC_t = \overline{\omega}_0 \cup \overline{\omega}_t$, C_t 沿 ω_t 严格凸，沿 ω_0 严格凹，并且沿 $\overline{\omega}_0 \cap \overline{\omega}_t$ 有角点。随着 $t \in [0,1]$ 增大至 1，凸帽 C_t 单调增大至 C_1，且它们有相同的底 ω_0。同样，对于任意$0 \leq s < t \leq 1$，集合 $C_{s,t} = \bigcup_{u \in [s,t]} \overline{\omega}_u$ 是以 ω_s 为底的严格凸帽。这些集合

$$E_t = \{z \in O : \rho_t(z) \leq 0\} \text{ for } t \in [0,1] \tag{2.2}$$

沿 $bE_t = \{\rho_t = 0\}$ 严格凸，它们在 t中构成一个连续递增族，并且

$$E_t = E_0 \cup C_t \text{ for every } t \in [0,1].$$

在这些假设下，我们得到以下结果。

命题 2.1. 设 D 是 Stein 流形 X 中的一个边界光滑、相对紧且强伪凸的区域，且 $\dim X < n$。设集合 $E_t \subset O \subset \mathbb{C}^n\,(t \in [0,1])$ 按照 (2.2) 给出，并设 $f_0\colon D \to O$ 是一个属于 $\mathscr{A}(D)$ 类的映射，满足 $f_0(bD) \cap E_0 = \varnothing$。给定一个紧集 $K \subset D$，使得 $f_0(\overline{D \setminus K}) \cap E_0 = \varnothing$，以及一个数 $\epsilon > 0$，则存在一个映射 $f\colon D \to O$，属于 $\mathscr{A}(D)$ 类，并满足以下条件：

(i) $f(bD) \cap E_1 = \varnothing$, (ii) $f(\overline{D \setminus K}) \cap E_0 = \varnothing$，以及 (iii) $\max_{x \in K} |f(x) - f_0(x)| < \epsilon$。

回顾一下，若映射 $f\colon D \to O$ 在 D 上连续且在 D上全纯，则称其属于 $\mathscr{A}(D)$ 类。在定理 1.3 的证明中应用命题 2.1 时，集合 O 将是一个球（或整个欧几里得空间），而超曲面 $M_t = \{\rho_t = 0\} = bE_t$ 将是定义在坐标超平面 $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^n$上方的凸图像。

在命题 2.1 的证明中，我们需要以下引理。

引理 2.2. 设 O 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个凸开子集，其中 $n > 1$，L 是O的一个紧子集，且 $\rho\colon O \to \mathbb{R}$ 是一个 $\mathscr{C}^1$ 光滑严格凸函数。那么存在一个数 $\delta > 0$，具有如下性质：若 D 是 Stein 流形 X 中的一个边界光滑的强伪凸域，维数为 $\dim X = m < n$，K 是 D的一个紧子集，且 $f\colon D \to O$ 是一个映射，属于 $\mathscr{A}(D)$ 类，并且

$$\rho(f(z)) > -\delta \text{ for all } z \in bD \quad \text{and} \quad \rho(f(z)) > 0 \text{ if } z \in bD \text{ and } f(z) \notin L, \tag{2.3}$$

那么，给定 $\eta > 0$，存在一个映射 $g\colon D \to O$，它属于 $\mathscr{A}(D)$ 类，并满足以下条件：

(i) $\rho(g(z)) > 0$当 $z \in bD$ 时，(ii) 对于满足 $g(z) \in L$ 的那些 $z \in bD$，$\rho(g(z)) > \delta$，(iii) $\rho(g(z)) > \rho(f(z)) - \eta$当 $z \in \overline{D \setminus K}$ 时，以及 (iv) 对于 $z \in K$，$|f(z) - g(z)| < \eta$。

对于 $m = 1$，也就是说，当 D 是有限带边界黎曼曲面时，这是 [14, 引理 6.2 和 6.3], 的一个简化版本，其证明采用了黎曼–希尔伯特边值问题的近似解。[14] 中提到的几篇早期论文也使用了这一方法。当 ρ 严格凸时，只需满足 $\mathscr{C}^1$ 光滑，因为在证明中，我们可以取一族连续的、与 ρ 的次水平集相切的切向线性圆盘。

对于 $m \geq 2$，引理 2.2 是对 [15, 引理 5.3] 的简化且略作修改的版本。除了我们考虑的是单个映射 $D \to O$ 而非映射喷流之外，唯一的区别是：[15, 引理 5.3] 中关于集合 $\{\rho = 0\}$ 是紧集的假设，被假设 (2.3) 所取代；该假设指出，对于 $z \in bD$，只有当 $\rho(f(z))$ 为负时，$f(z)$ 才可能落在紧集 $L \subset O$ 中。这个假设确保，只需在 O 的一个紧子集上进行较大幅度的提升（常数 δ 的作用）；而在其他地方，只需注意不要使 $\rho \circ f$ 降低超过给定幅度，并在 K 上作足够好的逼近（常数 η 的作用）。证明只需对 [15,引理 5.3], 的证明作小幅调整，利用其局部版本 [15, 引理 5.2]，并对 bD 作有限归纳：以小开集覆盖该集合，且这些开集上都有良好的局部全纯峰函数系。事实上，引理 2.2 对应于 [15, 子引理 5.4], 的一个简化版本；该子引理说明，如何在 bD 中那些被映射 f 映到目标流形中某个坐标图 U_i 的点处，相对于 ρ 将 bD 的像提升足够大的幅度。

在我们的情形中，U_i 由集合$L \cap \{\rho = 0\}$ 在 O 中的一个开且相对紧邻域扮演，因此无需使用 [15, 引理 5.3]证明的其余部分。

命题 2.1 的证明。对于 $t \in [0,1]$，设 $\delta_t > 0$ 为一个数，使得引理 2.2 的结论对函数 ρ_t 和紧集 $L = C_1$ 成立（见 (2.1)）。这些开集

$$U_t = \{z \in O : -\delta_t < \rho_t(z) < \delta_t\} \text{ for } t \in [0,1]$$

构成 C_1的一个开覆盖，因此存在 $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le 1$的有限子覆盖 $\{U_{t_j}\}$。应用引理 2.2，我们归纳地找到映射 $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{A}(D)$，使得对于每个$j = 1, \ldots, k$，都有

(a) $f_j(bD) \cap E_{t_j} = \varnothing$ （其中 E_t 由 (2.2) 给出），
(b) $f_j(\overline{D \setminus K}) \cap \overline{E}_0 = \varnothing$，以及 (c) 在 K上的
$|f_j - f_{j-1}| < \epsilon/k$。

注意到条件 (a) 和 (b) 对于 f_0 成立，而 (c) 是空的。归纳地假设，对于某个 $j \in \{1, \ldots, k\}$，我们已有满足这些条件的映射 f_0、.....、f_{j-1}。应用引理 2.2，其中取 $f = f_{j-1}$ 并令 $f_j = g$，由引理 2.2 的 (i) 得到条件 (a)，只要将引理 2.2 中的数 $\eta > 0$ 取得足够小，由 (ii) 得到条件 (b)；只要 $\eta \le \epsilon/k$，由引理 2.2 中的 (iii) 得到条件 (c)。于是得到满足条件 (a)–(c) 的映射 f_j，归纳可以继续进行。映射 $f = f_k$ 于是满足该命题。□

注 2.3. 命题 2.1 也以同样的证明成立，只要 ρ_t （$t \in [0,1]$）是 $\mathscr{C}^2$ 类的强拟凸函数，并且在 $M_t = \{\rho_t = 0\}$ 上满足 $d\rho_t \ne 0$。事实上，证明中使用的 [15], 的结果也适用于这种情形。在本文中，我们只会在 $\mathscr{C}^1$ 光滑性条件下使用凸情形，这在构造中是自然出现的。

3. 具有 BCEH 的闭凸集

在凸分析的背景下，Gale 和 Klee [26] 于 1959年研究了与紧凸集具有若干重要性质的闭无界凸集。他们引入了连续集这一类，我们证明该类与具有 BCEH 的集合类一致，后者在定义 1.2 中引入；参见命题 3.3。随后，我们进一步研究这些集合的性质，这些性质与我们主要定理的证明有关。

在 $\mathbb{R}^n$中，射线是指闭仿射半直线。设 E 是$\mathbb{R}^n$的闭凸子集。E 的边界射线是包含于 E边界中的射线。E 的渐近线是满足 dist$(L, E) = \inf\{|x - y| : x \in L, y \in E\} = 0$ 的射线$L \subset \mathbb{R}^n \setminus E$。函数

$$\sigma : \{u \in \mathbb{R}^n : |u| = 1\} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \sigma(u) = \sup\{x \cdot u : x \in E\}$$

称为 E的支撑函数。（这里，$x \cdot u$ 表示欧几里得内积。）如果闭凸集 E 的支撑函数 E 是连续的，则称其在 Gale 和 Klee [26] 的意义下是连续的。注意，每个紧凸集都是连续的。

以下结果是 Gale 和 Klee 所提出的 [26, 定理 1.3] 的一部分；我们只列出将要用到的条件。最后一项 (iv) 也用到了 [26,定理 1.5]。

定理 3.1. 对于 E 中的一个 $\mathbb{R}^n$ 闭凸子集，下列条件等价 *t:*

(i) E 是连续的。(ii) E 没有边界射线，也没有渐近线。(iii) 对每个点 $p \in \mathbb{R}^n$，凸包 Conv$(E \cup \{p\})$ 都是闭集。(iv) 对每个紧凸集 $K \subset \mathbb{R}^n$，集合 Conv$(E \cup K)$ 都是闭集。

条件 (iii) 意味着，闭凸包 Conv($E \cup \{p\}$) 是连接 p与 E中各点的线段的并集。这也表明，无界连续闭凸子集 E 不包含于 $\mathbb{R}^n$ 的任何仿射超平面中。

记录以下将在后文用到的观察结果。

引理 3.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个闭凸集，$p \in \mathbb{R}^n \setminus E$，且 $L \subset \mathbb{R}^n$ 是包含 p 的仿射子空间。那么，凸包($E \cup \{p\}$) $\cap L =$ 凸包(($E \cap L$) $\cup \{p\}$)。

证明。令 $E' = E \cap L$。显然，凸包($E' \cup \{p\}$) $\subset$凸包($E \cup \{p\}$) $\cap L$。反过来，由于 E 是凸的，每个点 $q \in$凸包($E \cup \{p\}$) 都属于一条线段，该线段从 p 延伸到某个点$q' \in E$。此外，如果 $q \in L$ 且 $q \neq p$，那么 $q' \in E'$，因此 $q \in$凸包($E' \cup \{p\}$)。□

命题 3.3. 闭凸集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 具有 BCEH，当且仅当它在 Gale 和 Klee [26]的意义下是连续的。

证明。由于所有闭有界凸集都具有 BCEH 且是连续的，只需考虑集合 E 无界的情形。

若 E 不连续，则根据定理 3.1，它有一条边界射线或一条渐近线。将其记为 L，并令 ℓ 为包含 L的仿射直线。任取包含 ℓ的仿射二维平面 $H \subset \mathbb{R}^n$。存在一点 $p \in H \setminus (\ell \cup E)$。考察从 p到趋近于 L且趋于无穷远的点 $q \in E$所作的射线（若 L 是边界射线，我们可以选取点 $q \in L$），可知集合 $h(E,p) =$ Conv($E \cup \{p\}$) $\setminus E$ 的闭包包含经过 p且与 L 平行平移得到的集合 $L' \subset H^+$，因此 $h(E,p)$无界，故 E 不具有 BCEH。

现在假设 E 是连续的，并证明它具有 BCEH。我们需要证明，对于任意闭球 $B \subset \mathbb{R}^n$，集合 $h(E,B) =$ 凸包($E \cup B$) $\setminus E$ 是有界的。反设存在一个序列 $x_m \in h(E, B)$，使得 $|x_m| \to \infty$ 趋于 $m \to \infty$。由于集合 E 和 B 是凸的，因此有

$$x_m = t_m b_m + (1 - t_m)e_m \text{ for } t_m \in [0,1],\, b_m \in B,\, e_m \in E, \text{ and } m \in \mathbb{N}.$$

注意，$(1 - t_m)|e_m| \to \infty$ 趋于 $m \to \infty$。由相应集合的紧致性，取一个子序列后，不妨设对所有 m 都有 $e_m \neq 0$，且序列 t_m、b_m 和 $\frac{1}{|e_m|}e_m$ 均收敛。将它们各自的极限记为 t、b 和 f。于是有

$$x_m = t_m b_m + (1 - t_m)e_m = b_m + (1 - t_m)|e_m| \left(\frac{e_m}{|e_m|} - \frac{b_m}{|e_m|} \right) = b_m + (1 - t_m)|e_m| f_m$$

其中 $f_m = (\frac{e_m}{|e_m|} - \frac{b_m}{|e_m|})$。注意，$\lim_{m\to\infty} f_m = f$。取一个数 $\alpha \geq 0$，并令 $p = b + \alpha f$。如果 m 足够大，那么 $(1-t_m)|e_m| > \alpha$，因此点 $y_m = b_m + \alpha f_m$ 位于连接 b_m 和 x_m的线段上。由于 $x_m \in$ 属于凸包 Conv($E \cup \{b_m\}$)，可得 $y_m \in$ 属于凸包 Conv($E \cup \{b_m\}$)。注意，序列 y_m 收敛到 p。由于 E 连续，根据定理 3.1，Conv($E \cup \{b\}$) 是闭集，因此 $p = \lim_{m\to\infty} y_m \in$ Conv($E \cup \{b\}$)。由于这对每个 $\alpha \geq 0$都成立，射线$L = \{b + \alpha f\colon\ \alpha \in [0,\infty)\}$ 包含在 Conv($E \cup \{b\}$) 中。根据引理 3.2，存在 $\alpha_0 \in [0,\infty)$，使得射线 $L' = \{b + \alpha f\colon\ \alpha \geq \alpha_0\}$ 包含在 E 中。由于 E 连续，根据定理 3.1，L 不是 E的边界射线，因此 L 包含某个点 $q = b + \alpha_1 f \in E \setminus bE$，其中某个 $\alpha_1 \geq \alpha_0$成立。取 q的一个邻域 $U_q \subset E$。对于任意足够大的 m，我们便有 $p_m :$ $= b_m + \alpha_1 f_m \in U_q$。令 $L_m = \{b_m + \alpha f_m\colon\ \alpha \geq 0\}$。注意，根据引理 3.2，$L_m \cap$ Conv($E \cup \{b_m\}$) $=$ Conv(($L_m \cap E$)$\cup \{b_m\}$)。然而，当 m 足够大时，点 $x_m \in L_m$ 位于 p_m的与 b_m相反的一侧，因此 x_m 属于 $L_m \cap$ Conv($E \cup \{b_m\}$)，但不属于 Conv(($L_m \cap E$) $\cup \{b_m\}$)。这一矛盾证明 E 具有 BCEH。□

给定函数 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$, ϕ 的上图集为集合

$$E = E_\phi = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} : y\geq\phi(x)\}. \tag{3.1}$$

注意，一个函数是凸函数，当且仅当它的上图集是凸集。

命题 3.4. 若 $E\subsetneq\mathbb{R}^n$ 是具有 BCEH 的闭无界凸集，则

(i) E 不包含任何仿射实直线；且 (ii) 对于每一条与 E 相交于一条射线的仿射直线 ℓ，以及任意一个与 ℓ 横截的超平面 H， E 都是定义在 H 上的凸函数的上图集。特别地，存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射坐标 (x,y)，使得 E 具有式 (3.1) 的形式，其中凸函数 $\phi\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}_+$ 满足

$$\liminf_{|x|\to+\infty}\frac{\phi(x)}{|x|} > 0. \tag{3.2}$$

条件 (3.2) 表明， ϕ 在无穷远处至少线性增长。我们将在例 3.10 中证明，线性增长是可能的。

证明。(i) 假设 $\ell\subset E$ 是一条仿射直线，下面证明 E 不具有 BCEH。由于 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的真子集，存在 ℓ 的一个平行平移 ℓ'，它不包含在 E 中，因此 $\ell'\setminus E$ 包含一条射线 L。令 p 为 L 的端点，并令 $p'\in L$ 为任意另一个点。由于 $E\cap L=\varnothing$，存在一个以 p' 为中心的球 B，使得 $\mathrm{Conv}(B\cup\{p\})\cap E=\varnothing$。显然，存在一点 $q\in B$，使得以 p 为端点且经过 q 的射线 L_q 与直线 ℓ 相交，因此，从 p 到 q 的线段属于 $\mathrm{Conv}(E\cup\{p\})\setminus E = h(E,p)$。将 $p'\in L$ 移至无穷远处可知， $h(E,p)$ 无界，因此 E 不具有 BCEH。

(ii) 由于 E 无界，因此它包含一条射线 L。记包含 L 的仿射直线为 ℓ。设 ℓ' 为 ℓ 的任意平行平移。由 (i) 可知， E 不含仿射直线，因此存在一点 $p\in\ell'\setminus E$。 L 与 p 的并集的闭凸包包含经过 p 的 L 的平行平移 $L'\subset\ell'$。由于 E 具有 BCEH，我们得出 $L'\subset\subset\mathrm{Conv}(E\cup\{p\})$，且 $L'\setminus E$ 有界。由于 $E\cap L'$ 是凸的， $L'\cap E$ 是一条端点位于 bE 上的闭射线。这表明 E 是一族闭射线的并集，这些闭射线包含在直线 ℓ 的平行平移中，因此它是在任意一个与 ℓ 横截的超平面 $H\subset\mathbb{R}^n$ 上定义的凸函数的上图集。选取 H 使得 $H\cap E=\varnothing$，则在 $\mathbb{R}^n$ 上存在仿射坐标 (x,y)，满足 $H=\{y=0\}$ 且 $\ell=\{x=0\}$。在这些坐标下， E 具有式 (3.1) 的形式，其中 ϕ 是正凸函数。

最后，如果条件 (3.2) 不成立，那么存在一个序列 $(x_k,y_k)\in E$，满足 $|x_k|\to+\infty$，且 $y_k/|x_k|\to 0$ 为 $k\to\infty$。与之相交的线段 L_k（连接 $p=(0,-1)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 与 (x_k,y_k)）的并集和下半空间 $y\leq 0$，是 $h(E,p)=\mathrm{Conv}(E\cup\{p\})\setminus E$ 的一个无界子集，这与 E 具有 BCEH 的假设矛盾。□

注 3.5。对于上图集，如果存在一个支撑超平面 $H\subset\mathbb{R}^n$，使得 E 的集合 $E\cap H$ 非空且紧致，那么总能通过选取适当的线性坐标（即使不具备 BCEH 性质）使增长条件 (3.2) 成立。事实上，此时我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上选取坐标 (x,y)，使得 $H=\{y=0\}$、 $E\subset\{y\geq 0\}$ 和 $0\in E$。如果条件 (3.2) 不成立，那么存在一个序列 $(x_k,y_k)\in E$，满足 $|x_k|\to+\infty$，且 $y_k/|x_k|\to 0$ 为 $k\to\infty$。取一个子序列后， $E\cap H$ 中的一条射线位于连接原点与 (x_k,y_k) 的线段 $L_k\subset E$ 的并集的闭包中，这与假设后一个集合是紧致的相矛盾。

推论 3.6。如果 E 是 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中具有 BCEH 的闭凸集，那么 $\mathbb{C}^n\setminus E$ 是 Oka。

证明。由命题 3.4 可知，集合 E 不含任何仿射实直线，因此 $\mathbb{C}^n\setminus E$ 是 Oka 的，根据 [25, 定理 18]。□

下面的引理表明，BCEH 条件在一致逼近下保持不变。

引理 3.7. 假设 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数，其上图集 E_ϕ (3.1) 具有 BCEH。那么对于任意 $\epsilon > 0$ 和满足 $|\phi - \psi| < \epsilon$ 的凸函数 $\psi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，其上图集 E_ψ 也具有 BCEH。

证明. 若 E_ψ 不具有 BCEH，那么由定理 3.1 和命题 3.3 可知，它有一条边界射线或一条渐近线，L。由于 dist$(L, E_\psi) = 0$ 且 E_ψ 是凸的，当 $x \in L$ 趋于无穷时，dist(x, E_ψ) 趋于零。因此，必要时缩短 L，可得$L \subset E_{\phi-2\epsilon} \setminus E_{\phi+2\epsilon}$。于是，$L$ 位于 $E_{\phi+2\epsilon}$ 之外，但对 L 作 4ϵ 的竖直平移会将其推入 $E_{\phi+2\epsilon}$。由于 $E_{\phi+2\epsilon}$ 是 E_ϕ 的平移，具有 BCEH，这与命题 3.4 (ii) 矛盾。这个矛盾表明，E_ψ 如所声称的那样具有 BCEH。□

现在我们给出上图集 (3.1) 具有 BCEH 性质的微分刻画。

命题 3.8. 若 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 是一个满足条件 (3.2) 的 $\mathscr{C}^1$ 类凸函数，则上图集 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n\colon y \geq \phi(x)\}$ 具有 BCEH，当且仅当

$$\lim_{|x|\to\infty} |x| \left(1 - \frac{\phi(x)}{x \cdot \nabla\phi(x)}\right) = +\infty. \tag{3.3}$$

证明。我们首先考虑 $n = 2$的情形。此时，x 是一个单变量，而 (3.3) 等价于 o

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}\right) = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)}\right) = -\infty. \tag{3.4}$$

对于每个满足 $\phi'(x) \neq 0$ 的 $x \in \mathbb{R}$，数值

$$\xi(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)} \tag{3.5}$$

是函数 ϕ 的图像在点 $(x, \phi(x))$ 处的切线与第一坐标轴 $y = 0$的交点的第一坐标。由 (3.2) 和凸性可知，对于所有充分大的 $|x|$，$|\phi'(x)|$ 远离零。这说明条件 (3.4) 在平移下保持不变，因此不妨设 $\phi \geq 0$ 且 $\phi(0) = 0$。容易看出函数 ξ 是递增的。若 ϕ 属于 $\mathscr{C}^2$ 类，则有 $\xi'(x) = \phi(x)\phi''(x)/\phi'(x)^2 \geq 0$。

现在假设条件 (3.4) 成立。取一对序列 $a_j < b_j$ in $\mathbb{R}$，使得 $\lim_{j\to\infty} a_j = -\infty$ 且 $\lim_{j\to\infty} b_j = +\infty$。于是，区间 $I_j = [\xi(a_j)\ \xi(b_j)]$ 随之增大，并在 $j \to \infty$ 时趋于 $\mathbb{R}$。我们将 I_j 与 $I_j \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ 等同。由于 ϕ 是凸的，其上图集位于任意一点处切线的上方。因此，集合 $h(E, I_j)$（见 (1.1)）是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 中的有界区域，其边界由 I_j、连接 I_j 的端点 $(\xi(a_j), 0)$ 和 $(\xi(b_j), 0)$ 与相应点 $A_j = (a_j, \phi(a_j))$ 和 $B_j = (b_j, \phi(b_j))$ 的两条线段 L_j 和 L'_j，以及 $[a_j, b_j]$上 ϕ 的图像组成。L_j 和 L'_j 的支撑直线交于下半空间 $y < 0$ 中的一点 C_j，由此得到一个闭三角形 Δ_j，其顶点为 A_j、B_j和 C_j。注意，$\Delta_j \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = I_j$。由于 ϕ 至少线性增长（见 (3.2)），当 $j \to \infty$时，三角形 $\Delta_j \subset \mathbb{R}^2$ 覆盖整个 $\mathbb{R}^2$；并且对于每个 j，集合 $h(E, \Delta_j)$ (1.1) 都是有界的。因此，E 具有 BCEH。此外，这一论证还表明，对于任意点 $p = (0, -c) \notin E$，都存在唯一一对经过 p、与 bE 相切的切线。记这两条切线与 bE 的交点分别为 q_1、$q_2 \in bE$，则凸包 Conv$(E \cup \{p\})$ 是 E 与以 p、q_1、q_2 为顶点的三角形的并集。

反过来，如果 (3.3) 不成立，很容易看出 E 有一条边界射线或一条渐近线，因此它不具有 BCEH。细节留给读者。

现在，关于 $n \geq 3$ 的情形很容易得出。取一个单位向量 $v \in \mathbb{R}^{n-1}$、$|v| = 1$，并令 L_v 表示 $\mathbb{R}^n$ 中经过原点、由 v 和 $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ 张成的二维平面。于是，$E_v := E \cap L_v = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \phi(tv)\}$，而 (3.4) 中的第一个条件写作

$$\lim_{t \to +\infty} \left(t - \frac{\phi(tv)}{\sum_{j=1}^{n-1} v_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(tv)} \right) = +\infty. \tag{3.6}$$

写成 $x = tv$ with $t \geq 0$and $v = x/|x|$的形式，这显然等价于 (3.3)。与前面一样，令$p = (0, \ldots, 0, -c) \notin E$。若 (3.3) 成立，则通过将 L_v 中由两条经过 p 、与 bE_v 相切的切线所确定的三角形（如情形 $n = 2$ 中所述）添加到E_v 上，即可得到 $\mathrm{Conv}(E_v \cup \{p\}) \subset L_v$。这些三角形的大小关于方向向量 $|v| = 1$一致有界，而条件 (3.2) 表明，随着 $c \to +\infty$，这些三角形一致地扩张至 L_v，其中一致性是相对于 v而言的。由于 $\bigcup_{|v|=1} L_v = \mathbb{R}^n$，引理 3.2 表明

$$\mathrm{Conv}(E \cup \{p\}) = \bigcup_{|v|=1} \mathrm{Conv}(E_v \cup \{p\}),$$

因此 E 具有 BCEH。反向结论可由特殊情形 $n = 2$ 中的论证得到。 □

推论 3.9。若 $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ 是一个 $\mathscr{C}^1$ 类凸函数，使得

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{x \cdot \nabla \phi(x)}{|x|} = +\infty,$$

则上图集 $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \geq \phi(x)\}$ 具有 BCEH。

证明。按照上述证明的方法限制在平面上，只需考虑 $n = 2$ 的情形。不妨设 $\phi \geq 0$ 且 $\phi(0) = 0$。由于 ϕ 是凸函数，$g(x) = \phi'(x)$ 是递增函数，上述条件可写为 $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$。对于任意 $x_0 > 0$ 和 $x \geq x_0$，有

$$\xi(x) := x - \frac{1}{g(x)} \int_0^x g(t)dt = \int_0^x \Big(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\Big)dt \geq \int_0^{x_0} \Big(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\Big)dt.$$

令 $x \to +\infty$，可得 $^{g(t)\ g(x)} \underrightarrow{\to 0}$ 在 $t \in [0, x_0]$ 上一致收敛，因此最后一个积分收敛到 x_0。令 $x_0 \to \infty$，可见 $\lim_{x \to +\infty} \xi(x) = +\infty$。当 $x \to -\infty$ 时，类似论证同样适用。因此，条件 (3.3) 成立，从而 E 具有 BCEH。□

例 3.10. 存在具有 BCEH 的凸上图 (3.1)，其中函数 ϕ 呈线性增长；但在缺少边界射线和渐近线时，它在无穷远处不能过于接近线性。我们在 $\mathbb{R}^2$ 中给出这样一个例子。令 $g : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ 为奇连续递增函数，满足 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ 且 $\int_0^\infty (1 - g(x))dx = +\infty$。（一个显式例子是 $g(x) = \frac{2}{\pi}$反正切 x。）其积分 $\phi(x) = \int_0^x g(t)dt$ for $x \in \mathbb{R}$ 显然满足 $\phi(x) \geq 0$,$\phi'(x) = g(x) \in (-1, +1)$（因此 ϕ 呈线性增长），并且 ϕ 是凸函数。现在我们证明 (3.3) 成立。取足够大的 $x > 0$，使得 $g(x) > 0$。我们有

$$\xi(x) = x - \frac{1}{g(x)} \int_0^x g(t)dt = \int_0^x \Big(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\Big)dt.$$

固定 $x_0 > 0$并令 $x \geq x_0$。那么，$\xi(x) \geq \int_0^{x_0} (1 - g(t)/g(x))dt$。由于 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$，且当 $|x|$足够大时，ξ递增，因此可得 $\lim_{x \to +\infty} \xi(x) \geq \int_0^{x_0} (1 - g(t))dt$。令 $x_0 \to +\infty$ 趋于无穷，得到 $\lim_{x \to +\infty} \xi(x) \geq \int_0^\infty (1 - g(t))dt = +\infty.$。类似地可得 $\lim_{x \to -\infty} \xi(x) = -\infty$。因此，(3.3)成立，从而 ϕ 的上图集具有 BCEH。

利用上述例子中的思路，我们现在证明以下逼近结果，它将定理 1.3推广到更广泛的一类凸上图（见推论 1.4）。

命题 3.11。设 $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ 是一个凸函数，且集合 $\{\phi = 0\}$非空且紧。给定数值 $\epsilon > 0$ (小) 和 $R > 0$ (大)，存在一个光滑凸函数 $\psi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，使得 $\psi < \phi$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$上成立，$\phi(x) - \psi(x) < \epsilon$ 对所有 $|x| \le R$均成立，并且其上图集 $E_\psi = \{y \ge \psi\}$具有 BCEH。

证明。根据注 3.5，函数 ϕ 在无穷远处附近至少线性增长（见 (3.2)）。令

$$A = \liminf_{|x|\to\infty} \frac{\phi(x)}{|x|} > 0. \tag{3.7}$$

由于集合 $\phi = 0$ 不包含任何仿射直线，Azagra 的结果 [6, 定理 1 和命题 1] 表明，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个光滑严格凸函数 ψ，定义在$\mathbb{R}^{n-1}$ 上并满足 $\phi - \epsilon < \psi < \phi$。因此，用 $\psi - \min_x \psi(x) \ge 0$ 替换 ϕ 后，我们可以假设 ϕ 是光滑的。必要时增大数值 $R > 0$，我们可以假设

$$\frac{\phi(x)}{|x|} \ge \frac{A}{2} \quad \text{for all } |x| \ge R. \tag{3.8}$$

选取一个接近 1 的数 $r \in (0, 1)$，使得

$$(1 - r) \sup_{|x|\le R} \phi(x) < \epsilon. \tag{3.9}$$

选取一个光滑递增函数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$，使得

$$h(t) = 0 \text{ for } t \le R, \quad \lim_{t\to+\infty} h(t) = 1, \quad \text{and} \quad \int_0^\infty (1 - h(t))dt = +\infty.$$

（我们可以对例 3.10 中使用的反正切函数进行光滑化。）令

$$H(x) = \int_0^{|x|} h(s)ds \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

显然，$H \ge 0$ 是一个径向对称光滑凸函数，在 $|x| \le R$ 上为零，并且对所有 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$都满足 $H(x) \le |x|$。令 A 和 r 如(3.7)和(3.9)中所定义，并设

$$\delta = \frac{A(1 - r)}{2}.$$

我们断言函数

$$\psi(x) = r\phi(x) + \delta H(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

满足定理中的条件。显然，$\psi \ge r\phi$是一个光滑凸函数。对于$|x| \le R$，有 $H(x) = 0$，因此 $\psi(x) = r\phi(x) \le \phi(x)$，且 $\phi(x) - \psi(x) = (1 - r)\phi(x) < \epsilon$，由(3.9)可得。若 $|x| > R$，则由(3.8)可得 $\phi(x)/|x| \ge A/2$，且 $H(x) < |x|$，这意味着

$$\frac{\psi(x)}{|x|} \le r\frac{\phi(x)}{|x|} + \delta \le \frac{\phi(x)}{|x|}.$$

事实上，我们有 $\frac{\phi}{|x|}(x) = r\frac{\phi(x)}{|x|} + (1 - r)\frac{\phi(x)}{|x|} \ge A(1-r)/2 = \delta$。因此，$\psi \le \phi$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$上。

还需要证明上图集 E_ψ 满足 BCEH。我们将验证 (3.3)，它等价于 (3.6)，其中关于向量 $v = x/|x|$一致收敛。记

$$g_v(t) = r\frac{\partial\phi(tv)}{\partial t}, \quad k(t) = \delta h(t), \quad \tilde{g}_v(t) = \frac{\partial\psi(tv)}{\partial t} = g_v(t) + k(t).$$

与函数 ψ 相关的 (3.6) 中的量为

$$\begin{aligned}\xi_v(t) &= t-\frac{\psi(tv)}{\tilde{g}_v(t)}=\int_0^t\left(1-\frac{g_v(s)+k(s)}{g_v(t)+k(t)}\right)ds\\ &= \int_0^t\frac{g_v(t)-g_v(s)}{g_v(t)+k(t)}ds+\int_0^t\frac{k(t)-k(s)}{g_v(t)+k(t)}ds\\ &\geq \int_0^t\frac{g_v(t)-g_v(s)}{g_v(t)+\delta}ds+\int_0^t\frac{k(t)-k(s)}{g_v(t)+\delta}ds,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为函数 g_v 和 k 非负且单调递增，并且$k<\delta$。取 $c>0$。我们将证明，当 $t>0$ 足够大且 $v\in\mathbb{R}^{n-1}$ 为任意单位向量时，上述表达式大于或等于 c。选取正数 t_0、a、t_1 如下:

$$t_0=3c,\quad a=\max\{3\max_{|v|=1}g_v(t_0),3\delta\},\quad \int_0^{t_1}(k(t_1)-k(s))ds>ac.$$

这样的 t_1 存在，因为 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t(k(t)-k(s))ds=\delta\int_0^\infty(1-h(s))ds=+\infty$。由于 $\xi_v(t)$ 的界中的被积函数非负，因此对于 $t\geq\max\{t_0,t_1\}$ 和 $|v|=1$，有

$$\xi_v(t)\geq\int_0^{t_0}\frac{g_v(t)-g_v(s)}{g_v(t)+\delta}ds+\int_0^{t_1}\frac{k(t)-k(s)}{g_v(t)+\delta}ds. \tag{3.10}$$

假设对于某个这样的 (t,v)，有 $g_v(t)+\delta\geq a$。由于 $a\geq3\delta$，可得$g_v(t)\geq2\delta$，因此

$$\frac{g_v(t)}{g_v(t)+\delta}\geq\frac{2}{3}.$$

此外，由 $a\geq3\max_{|v|=1}g_v(t_0)$ 可得，对于 $0\leq s\leq t_0$，有

$$\frac{g_v(s)}{g_v(t)+\delta}\leq\frac{g_v(t_0)}{a}\leq\frac{1}{3}.$$

这两个不等式意味着 (3.10) 中的第一个积分下界为 $t_0/3\geq c$。另一方面，如果 $g_v(t)+\delta<a$，那么 (3.10) 中第二个积分的分母至多为a，因此根据 t_1 的选取，该积分为 $\geq c$。这表明，对于所有 $|v|=1$ 以及满足 $t\geq\max\{t_0,t_1\}$ 的情形，$\xi_v(t)\geq c$。由于 c 是任意的，条件 (3.3) 成立，因此 E_ψ 具有 BCEH。□

下面的观察将在定理 1.3 的证明中用到。

命题 3.12。记 $\mathbb{B}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开单位球。设 $E_\phi\subset\mathbb{R}^n$ 是形如 (3.1) 的闭凸集，其 $\mathscr{C}^1$ 边界具有 BCEH，其中函数 $\phi\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 有下界，且在无穷远处严格凸。那么存在一个 $r_0>0$，使得对于每个$r\geq r_0$，凸包 $\mathrm{Conv}(E_\phi\cup r\overline{\mathbb{B}})=\{y\geq\psi(x)\}$ 是具有 BCEH 的闭凸集，并且$\psi\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 是一个 $\mathscr{C}^1$ 类凸函数，满足 $\psi\leq\phi$，且这些函数在无穷远处一致。此外，如果 $r\geq r_0$ 足够大，那么由下式定义的函数 $\phi_t\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$

$$\phi_t(x)=(1-t)\phi(x)+t\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}^{n-1} \tag{3.11}$$

对于每个 $t\in(0,1)$ 都是严格凸的，并且对于任意 $0<t_0<t_1<1$，集合的闭包

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^n:\phi_{t_1}(x)<y<\phi_{t_0}(x)\}$$

是一个底位于严格凸超曲面 $\{y=\phi_{t_0}(x)\}$ 中的严格凸帽。

证明。考虑定义在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的函数

$$\tilde{\phi}_r(x) = \begin{cases} \min\{\phi(x), -\sqrt{r^2-|x|^2}\}, & |x|<r, \\ \phi(x), & |x|\geq r. \end{cases}$$

˜（注意，ϕ_r 在球面 $|x|=r$上的点处可能不连续。）其上图集 $E_{\tilde{\phi}_r}$ 的凸包等于 Conv($E\cup r\overline{\mathbb{B}}$), 根据定理 3.1 (iv)，该集合是闭集；集合 $h(E, r\overline{\mathbb{B}}) = \tilde{}$ $\tilde{}$Conv($E\cup r\overline{\mathbb{B}}$) $\setminus E$ 有界，因为 E 具有 BCEH。通过对 ϕ_r 进行光滑化，我们得到一个 $\mathscr{C}^1$ 类函数 ψ_r，它在无穷远处与 ϕ 一致，且 Conv($E_{\tilde{\psi}_r}$) =Conv($E\cup r\overline{\mathbb{B}}$)。由 [28,定理 3.2] 可知，Conv($E\cup r\overline{\mathbb{B}}$)具有 $\mathscr{C}^1$ 边界，因此它是凸函数 ψ_r 的上图集 E_{ψ_r}：该函数 $\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ 属于 $\mathscr{C}^1$ 类，且在无穷远处与 ϕ 一致。

由于 ϕ 至少线性增长，因此存在一个函数 $\tau(r)$，当 $r\in\mathbb{R}_+$ 足够大时有定义，并且对 $|x|\leq\tau(r)$，有 $\psi_r(x) = -\sqrt{r^2-|x|^2}$，且当 $r\to+\infty$时，$\tau(r)\to+\infty$。通过选取足够大的 r，函数 ϕ 不严格凸的点所构成的紧集便包含于球 $|x|<\tau(r)$ 中。由于在这个球上，我们有 $\psi_r(x) = -\sqrt{r^2-|x|^2}$，且它是严格凸的，因此式 (3.11) 中 ϕ_t 与 ϕ 的凸组合 $\psi=\psi_r$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上对所有 $0<t<1$ 都是严格凸的。对于这样的 r，命题中的最后一条显然成立。（注意，严格凸函数 $\rho_t(x,y) = \exp(\psi_t(x) - y) - 1$，其中 $t\in\in(0,1)$，对应于第 2 节中使用的函数。）□

4. 定理 1.3 的证明

关于 Oka 流形的定义和主要定理，见 [20, 定义 5.4.1 和定理 5.4.4]。我们将使用以下版本的 Oka 原理；见 [22,定理 1.3]。

定理 4.1. 假设 X 是一个 Stein 流形，K 是 X中的一个紧 $\mathscr{O}(X)$-凸集，X'是 X的一个闭复子簇，Ω 是复流形 Y中的一个 Oka 区域，$f\colon X\to Y$是一个连续映射，且在 K的某个邻域上全纯；$f|_{X'}\colon X'\to Y$是˚全纯的，并且 $f(X\setminus K)\subset\Omega$。那么存在一个连续映射族的同伦 $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ $f_t\colon X\to Y$，将 $f=f_0$ 连接到一个全纯映射 $f_1\colon X\to Y$，使得对于每个 $t\in[0,1]$，映射 f_t 在 K的某个邻域上全纯，在 X'上与 f 一致，在 K 上一致地逼近 f˚，并且关于 $t\in[0,1]$ 一致地任意逼近，同时 $f_t(X\setminus K)\subset\Omega$。

定理 1.3 的证明。由命题 3.4，存在 $z=(z',z_n)$ 上的复坐标，使得给定集合 E 是形如 (1.2) 的上图集。我们将 $z=(x,y)$ 写作 $x=(z',\Re z_n)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^{2n-1}$ 和 $y=\Im z_n\in\mathbb{R}$，因此 $E=E_\phi=\{y\geq\phi(x)\}$，其中 $\phi\geq 0$ 是命题 3.4 中的凸函数。设集合 $K\subset X$ 和映射 $f_0\colon K\to\mathbb{C}^n$ 如定理所述；特别地，$f_0(bK)\subset\mathbb{C}^n\setminus E$。因此，存在 K 的开邻域 $U\subset X$ 以及 $\epsilon>0$，使得 f_0 在 U 上全纯，且 $f_0(U\setminus K)\subset\mathbb{C}^n\setminus E_{\phi-\epsilon}$。由 Azagra [6, 定理 1.8]，存在一个实解析严格凸函数 $\phi_0\colon\mathbb{R}^{2n-1}\to\mathbb{R}$，使得 $\phi-\epsilon<\phi_0<\phi$。其上图集 $E_0=\{(x,y)\in\mathbb{C}^n\colon y\geq\phi_0(x)\}$ 是一个具有实解析边界的闭严格凸˚集合；根据引理 3.7，它具有 BCEH，且 $f_0(U\setminus K)\subset\mathbb{C}^n\setminus E_0$。

令 $\mathbb{B}$ 表示以 0 为中心的 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球。回顾式 (1.1) 中的记号 $h(E,K)$。取一个数 $r_0>0$。我们可以找到一个趋于无穷大的递增序列 $r_k>0$，使得

$$\overline{h(E_0, r_k\overline{\mathbb{B}})}\subset r_{k+1}\mathbb{B} \quad \text{for } k=0,1,2,\ldots. \tag{4.1}$$

事实上，由于 E_0 具有 BCEH，对于每个 k，集合 $h(E_0, r_k\overline{\mathbb{B}})$ 都是有界的，因此只要将数 r_{k+1} 取足够大，(4.1) 就成立。令

$$E_{k+1} = \mathrm{Conv}(E_0 \cup r_k\overline{\mathbb{B}}) = E_0 \cup h(E_0, r_k\overline{\mathbb{B}}) \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

显然，我们有 $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k = \mathbb{C}^n$。此外，由 (4.1) 可知，对于 $j = 0$, 1, ..., $k+1$，有 $E_0 \subset E_j \subset E_0 \cup r_{k+1}\mathbb{B}$，因此

$$E_{k+2} = \mathrm{Conv}(E_j \cup r_{k+1}\overline{\mathbb{B}}) \text{ for } j = 0, 1, \ldots, k+1. \tag{4.2}$$

命题 3.12 表明，对于每个 $k = 1$, 2, ..., 都有 $E_k = \{y \geq \phi_k(x)\}$，其中 ϕ_k 是一个 $\mathscr{C}^1$ 类凸函数，它在无穷远处与 ϕ_0 一致，并且 E_k 具有 BCEH。因此，

$$\Omega_k = \mathbb{C}^n \setminus E_k = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n : y < \phi_k(x)\}$$

根据推论 3.6，对于每个 $k = 0$, 1, ...，它都是一个 Oka 域。鉴于 $E_{k+2} = \mathrm{Conv}(E_k \cup r_{k+1}\overline{\mathbb{B}})$（见 (4.2)），命题 3.12 还表明，如果 r_{k+1} 取得足够大，那么函数

$$\psi_t = (1-t)\phi_k + t\phi_{k+2} : \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{4.3}$$

对每个 $t \in (0, 1)$ 都是严格凸的，并且对每个 $0 < t_0 < t_1 < 1$，集合的闭包

$$C = \{(x, y) : \psi_{t_1} < y < \psi_{t_0}\} \tag{4.4}$$

是第 2 节所述的严格凸帽。（注意，严格凸函数 $\rho_t(x, y) = \exp(\psi_t(x) - y) - 1$ 对于 $t \in (0, 1)$ 对应于第 2 节中使用的函数。）

选取一个由光滑边界、相对紧且闭包为 $\mathscr{O}(X)$-凸的强伪凸域组成的穷竭 $D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k = X$，使得 $K \subset D_0 \subset\subset D_0 \subset\subset U$。为保持记号一致，我们设 $D_{-1} = K$。现在我们构造一个全纯映射序列 f_k: $D_k \to \mathbb{C}^n$，满足以下条件，其中 $k = 0, 1, 2, \ldots$:

(a) $f_k(\overline{D_k \setminus D_{k-1}}) \subset \Omega_k = \mathbb{C}^n \setminus E_k$, (b) $f_{k+1}(\overline{D_k \setminus D_{k-1}}) \subset \Omega_k$, 且 (c) f_{k+1} 在 D_{k-1} 上以任意所需的精度一致逼近 f_k。

对于 $k = 0$ 定理 1.3 中的初始映射 f_0，条件 (a) 成立，而条件 (b) 和 (c) 则不适用。归纳地假设我们已经找到了满足这些条件的映射 f_0、.....、f_k，则下一个映射 f_{k+1} 的构造分为以下两步。

由集合 $f_k(bD_k) \subset \Omega_k = \{y < \phi_k(x)\}$ 的紧致性，我们可以将 $t_0 \in (0, 1)$选得足够小，使得 $f(bD_k) \subset \{y < \psi_{t_0}(x)\}$，其中函数 $\psi_t (t \in [0, 1])$由 (4.3) 给出。根据 (4.1)，我们还可以将 $t_1 \in (t_0, 1)$选得足够接近 1，使得

$$E_{k+1} \subset \{(x, y) : y \geq \psi_{t_1}(x)\}.$$

将命题 2.1 应用于映射 f_k、集合 E_k 以及严格凸帽 C (4.4)（它对应于命题 2.1 中的 C_1），可得全纯映射 g_k: $D_k \to \mathbb{C}^n$，它在 $\overline{D}_{k-1}$ 上逼近 f_k，并满足

$$g_k(bD_k) \subset \{(x, y) : y < \psi_{t_1}(x)\} \subset \mathbb{C}^n \setminus E_{k+1} = \Omega_{k+1} \quad \text{and} \quad g_k(\overline{D_k \setminus D_{k-1}}) \subset \Omega_k. \tag{4.5}$$

在第二步中，我们利用 Ω_{k+1} 是一个 Oka 域。由于 Ω_{k+1} 是可缩的，且 $g_k(bD_k) \subset \Omega_{k+1}$（由 (4.5)），$g_k$ 可从 D_k 延拓为一个连续映射 $X \to \mathbb{C}^n$，将 $X \setminus D_k$ 映到 Ω_{k+1}。将定理 4.1 应用于 g_k，得到一个全纯映射 f_{k+1}: $D_{k+1} \to \mathbb{C}^n$，它在 D_k 上逼近 g_k，并满足 $f_{k+1}(\overline{D_{k+1} \setminus D_k}) \subset \Omega_{k+1}$（这是 $k+1$的条件 (a)）以及 $f_{k+1}(\overline{D_k \setminus D_{k-1}}) \subset \Omega_k$（条件 (b)）。由于 f_{k+1} 在 D_k 上逼近 g_k，且 g_k 在 D_{k-1}上逼近 f_k，f_{k+1} 也满足条件 (c)。归纳步骤至此完成。

如果逼近足够接近，那么序列 f_k 在 X 上紧致集上一致收敛到一个全纯映射 $f\colon X \to \mathbb{C}^n$。条件 (a)–(c) 以及集合$E_k$穷尽 $\mathbb{C}^n$这一事实，意味着 f是一个满足 $f(X\setminus K) \subset \Omega_0 = \mathbb{C}^n \setminus E_0$ 的适当全纯映射。为了在定理所给的适当维数中构造适当全纯浸入和嵌入，我们在每一步都使用一般位置论证，以确保序列中的每个映射 f_k 都是浸入或嵌入。（例如参见 [20, 推论 8.9.3]。）如果收敛足够快，那么根据一个标准论证，极限映射 f 也具有同样性质。□

推论 1.4 的证明。给定一个全纯映射 $f_0\colon K \to \mathbb{C}^n$，其满足 $f_0(bK) \subset \mathbb{C}^n \setminus E_\phi$，如定理 1.3 所述，命题 3.11 给出了一个具有 BCEH 的闭凸集 $E_\psi \supset E_\phi$，使得 $f_0(bK) \subset \mathbb{C}^n \setminus E_\psi$。应用定理 1.3 并取 E_ψ，即可得到所需结论。□

我们有如下定理 1.3 的类似结果，其中在 X 的闭复子簇上进行插值。与上面的推论不同，不能使用具有 BCEH 的凸集从外部逼近 E，因为子簇 $f(X')$ 到 bE 的距离可能为零。这个结果推广了 [24, 定理 15] 的情形，其中 E 是一个紧凸集。

定理 4.2. 设 E 是 $\mathbb{C}^n$ ($n > 1$) 中一个具有 $\mathscr{C}^1$ 边界、在无穷远处严格凸且具有有界凸穷竭包的闭凸集。设 X 是一个 Stein 流形，$K \subset X$ 是一个紧的 $\mathscr{O}(X)$-凸集，$U \subset X$ 是一个包含 K 的开集，X' 是 X 的闭复子簇，且 $f_0\colon U \cup X' \to \mathbb{C}^n$ 是一个全纯映射，使得 $f_0|_{X'}\colon X' \to \mathbb{C}^n$ 是恰当全纯映射，且 $f_0(bK \cup (X'\setminus K)) \cap E = \varnothing$。给定 $\epsilon > 0$，存在一个恰当全纯映射 $f\colon X \to \mathbb{C}^n$，满足以下条件：

$$(a)\ f(X \setminus \mathring{K}) \subset \mathbb{C}^n \setminus E, \qquad (b)\ \|f - f_0\|_K < \epsilon, \qquad (c)\ f|_{X'} = f_0|_{X'}.$$

If 2 若 dim $X \le n$，则 f 可以取为浸入（若 2 dim $X + 1 \le n$，则可以取为嵌入）*pro*前提是 $f_0|_{X'}$ 是一个。

证明。通过对定理 1.3 证明作小幅修改即可证明这一点，这与 [24, 定理 15] 的证明类似。证明的初始步骤——从外部用严格凸集逼近 E ——并非必要，因为 bE 在无穷远处严格凸。主要（也是实质上唯一的）改动在于 Stein 流形X的穷竭 D_k 的选择。在构造映射 f_{k+1} 的归纳步骤中，我们还必须假设$f_k(bD_k \cap X') \subset \Omega_{k+1} = \mathbb{C}^n \setminus E_{k+1}$。然后，我们用与之前相同的方法将 bD_k 的像推出 E_{k+1}，使用命题 2.1，同时确保修改在 X' 上保持不变，并且在 $bD_k \cap X'$ 附近足够小。这是可行的，因为 [15] 中的方法是在 bD_k 附近（远离 $bD_k \cap X'$）局部应用的，并且这些局部修改通过保持映射在 X' 上的取值而粘合在一起。更精确的描述请参见 [24, 定理 15] 的证明。由此得到下一个全纯映射 $f_{k+1}\colon X \to \mathbb{C}^n$，满足 $f_{k+1}(X \setminus D_k) \subset \Omega_{k+1}$,$f_{k+1}|_{X'} = f_k|_{X'}$，以及定理 1.3 证明中的条件 (b) 和 (c)。接着，我们选取下一个区域 $D_{k+1} \subset X$，使其足够大，从而 $f_{k+1}(bD_{k+1} \cap X') \subset \Omega_{k+2} = \mathbb{C}^n \setminus E_{k+2}$。这是可行的，因为映射 $f_{k+1}|_{X'} = f_0|_{X'}\colon X' \to \mathbb{C}^n$ 是恰当的，$f_0(X' \setminus \mathring{K}) \subset \Omega = \mathbb{C}^n \setminus E$，并且根据构造，区域 Ω_{k+2} 在无穷远处与 Ω 一致。显然，归纳步骤至此完成。假设逼近足够接近，则序列 f_k 收敛到一个满足所述条件的极限全纯映射 $f\colon X \to \mathbb{C}^n$。□

致谢。第一位署名作者获得斯洛文尼亚共和国 ARRS 的资助，项目编号为 P1-0291、J1-3005 和 N1-0137。第二位署名作者获得欧盟（欧洲研究理事会高级资助项目 HPDR，101053085）以及 P1-0291、J1-3005 和 N1-0237 项目的资助

资助方为斯洛文尼亚共和国 ARRS。作者谨向 Antonio Alarc´on 致谢，感谢他就涉及极小曲面的情形提供的有益讨论和信息。

参考文献

[1] F. Acquistapace、F. Broglia 和 A. Tognoli。Stein 空间的相对嵌入定理。比萨高等师范学院科学类年刊 (4), 2(4):507–522, 1975年。[2] A. Alarc´on、B. Drinovec Drnov˘sek、F. Forstneri˘c 和 F. J. L´opez。每个带边黎曼曲面都是一条由若尔当曲线围成的完备共形极小曲面。《伦敦数学会会刊》(3), 111(4):851–886, 2015年。[3] A. Alarc´on、F. Forstneri˘c 和 F. J. L´opez。从复解析视角研究极小曲面。Springer数学专著。Springer，尚贝里，2021年。[4] A. Alarc´on 和 F. J. L´opez。 $\mathbb{R}^3$ 适当地投影到 $\mathbb{R}^2$ 中的极小曲面。《微分几何杂志》，90(3):351–381，2012年。[5] H. Alexander。将（去心）圆盘显式嵌入 $\mathbb{C}^2$。《瑞士数学评论》，52(4):539–544，1977年。[6] D. Azagra。凸函数的整体逼近与精细逼近。《伦敦数学会会刊》(3 824, 2013 107 4 799), ( ): – 。[7] E. Bishop。部分解析空间的映射。《美国数学杂志》，83:209–242，1961年。[8] S. Borell、F. Kutzschebauch 和 E. F. Wold。 $\mathbb{C}^2$中簇补集内的真全纯圆盘。《数学研究快报》，15(4):821–826，2008年。[9] V. Bo˘zin。调和映射札记。《国际数学研究通知》，1999(19):1081–1085，1999年。[10] A. Dor。向凸域的真全纯映射逼近。比萨高等师范学院科学类年刊 (4), 20(1):147–162，1993年。[11] A. Dor。全纯域中的浸入与嵌入。《美国数学会汇刊》，347 2849, 1995 8 2813( ): – 。[12] B. Drinovec Drnov˘sek。避开闭凸集的真全纯圆盘。《数学杂志》，241(3):593–596，2002年。[13] B. Drinovec Drnov˘sek。避开完全多极集的 Stein 流形中的真圆盘。《数学研究快报》，11(5-6):575–581，2004年。[14] B. Drinovec Drnov˘sek 和 F. Forstneri˘c。复空间中的全纯曲线。《杜克数学杂志》，139(2):203–253，2007年。[15] B. Drinovec Drnov˘sek 和 F. Forstneri˘c。作为复流形子簇的强伪凸域。《美国数学杂志》，132(2):331–360，2010年。[16] B. Drinovec Drnov˘sek 和 F. Forstneri˘c。欧几里得空间中极小曲面的柔性域。《数学分析与应用杂志》，517:126653，2023年。[17] Y. Eliashberg 和 M. Gromov。将维数为 n 的 Stein 流形嵌入维数为$3n/2+1$的仿射空间。《数学年刊》(2), 136(1):123–135，1992年。[18] J. E. Fornæss、F. Forstneri˘c 和 E. Wold。全纯逼近：魏尔斯特拉斯、龙格、Oka-Weil 和梅尔格良的传承。载于《复分析进展：从理论到实践》，第133–192页。尚贝里：Springer，2020年。[19] F. Forstneri˘c。将严格伪凸域嵌入球中。《美国数学会汇刊》，295 368，1986 1 347( ): – 。[20] F. Forstneri˘c。Stein 流形与全纯映射（复分析中的同伦原理），数学与其交界领域成果系列第3辑第56卷。Springer，尚贝里，第二版，2017年。[21] F. Forstneri˘c。Stein 流形的全纯嵌入与浸入：综述。载于《几何复分析》，Springer数学与统计学论文集第246卷，第145–169页。Springer，新加坡，2018年。[22] F. Forstneri˘c。Oka流形的最新进展。arXiv 电子预印本，2022年。https://arxiv.org/abs/2006.07888。[23] F. Forstneri˘c 和 J. Globevnik。 $\mathbb{C}^2$ 中的真全纯圆盘。《数学研究快报》，8(3):257–274，2001年。[24] F. Forstneri˘c 和 T. Ritter。球补集的 Oka性质。《数学杂志》，277(1-2):325–338，2014年。[25] F. Forstneri˘c 和 E. F. Wold。欧几里得空间中的 Oka 域。《国际数学研究通知》，即将出版。https://arxiv.org/abs/2203.12883。[26] D. Gale 和 V. Klee。连续凸集。《Math. Scand.》，7:379–391，1959年。[27] J. Globevnik。通过真全纯映射进行边界插值。《数学杂志》，194(3):365–373，1987年。[28] A. Griewank 和 P. J. Rabier。凸包络的光滑性。《美国数学会汇刊》，322(2):691–709，1990年。[29] R. C. Gunning 和 H. Rossi。多复变数解析函数。AMS Chelsea出版公司，罗得岛州普罗维登斯，2009年。重印自1965年的原版。

[30] M. Hakim。从 $\mathbb{C}^n$ 的严格伪凸域到 $\mathbb{C}^{n+1}$的单位球的连续恰当全纯映射。（关于从 $\mathbb{C}^n$ 中的严格伪凸域到 $\mathbb{C}^{n+1}$的单位球的恰当全纯映射之延拓）。《杜克数学杂志》，60(1):115–133，1990年。[31] M. Hakim 和 N. Sibony。上的有界全纯函数。Invent. Math.，: – 。[32] D. Hoffman 和 W. H. Meeks, III。极小曲面的强半空间定理。Invent. Math.，101(2):373–377，1990年。[33] E. Løw。在 C^p的单位球上构造内函数。Invent. Math.，67:223–229，1982年。[34] E. Løw。将严格伪凸域嵌入多圆盘和球，以及从严格伪凸域到多圆盘和球的真全纯映射。《数学杂志》，190(3):401–410，1985年。[35] R. Narasimhan。全纯完备复空间的嵌入。《美国数学杂志》，82:917–934，1960年。[36] R. Remmert。关于全纯可分且全纯凸的解析空间。《巴黎科学院报告》，243:118–121，1956年。[37] R. Schoen 和 S. T. Yau。调和映射讲义。几何与拓扑会议论文集及讲义，第II卷。International Press，马萨诸塞州剑桥，1997年。[38] J. Sch¨urmann。将 Stein 空间嵌入最低维数的仿射空间。《数学年刊》，307(3):381–399，1997年。[39] B. Stensønes。从 $\mathbb{C}^2$ 中的强伪凸域到$\mathbb{C}^3$中的单位多圆盘的恰当全纯映射。《Math. Scand.》，65(1):129–139，1989年。

Barbara Drinovec Drnovˇsek

卢布尔雅那大学数学与物理学院，Jadranska 19，SI–1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚

I数学、物理与力学研究所，Jadranska 19，SI–1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚 a. 电子邮件：barbara.drinovec@fmf.uni-lj.si

Franc Forstneriˇc

卢布尔雅那大学数学与物理学院，Jadranska 19，SI–1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚；数学、物理与力学研究所，Jadranska 19，SI–1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚；电子邮件：franc.forstneric@fmf.uni-lj.si