arXiv:2301.01272v1 [eess.SY] 1 Jan 2023

结构化矩阵的对角稳定性条件汇总（及综述论文）

Zhiyong Sun

埃因霍温理工大学电气工程系控制系统组，荷兰

摘要

本文总结并评述了矩阵稳定性（尤其是对角矩阵稳定性）和矩阵可稳定性的各种条件与刻画方法。

关键词：
矩阵稳定性、矩阵可稳定性、对角稳定性。

1. 定义和记号

- 若一个实方阵的非对角元素均为非正，则称其为**Z-矩阵** 。
- **Metzler** 矩阵是指所有非对角元素均为非负（等于或大于零）的实矩阵。
- 具有正主子式的 Z-矩阵称为**M-矩阵**。
  - 注：M-矩阵有许多等价刻画（Fiedler 和 Ptak，1962；Plemmons，1977）。更常用的条件如下：矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 若其非对角元素均为非正，且其特征值的实部均为正，则称为 M-矩阵。
- 若方阵 A 的所有特征值实部均为正，则称其为（**正**）**稳定**。等价地，方阵 A 是（正）稳定的，当且仅当存在一个正定矩阵 D，使得 $AD + DA^T$ 为正定矩阵。
  - 注：在控制系统理论中，我们通常将稳定矩阵定义为特征值实部均为负的方阵（又称**赫尔维茨**矩阵）。上下文中会区分这两种稳定矩阵的定义。
- 若方阵复矩阵的所有主子式均为正，则称其为**P矩阵** 。
- 若方阵复矩阵的主子式均非负，且每个阶数至少有一个主子式为正，则称其为 P_0^+**-矩阵** 。
- 实方阵 A 称为**乘法 D-稳定**（简称**D-稳定**），如果对于每个正对角矩阵 D，DA 都是稳定的。

• 方阵 A 称为**完全稳定**，如果 A 的任意主子矩阵都是 D-稳定的。

• 实方阵 A 称为**加性 D-稳定**，如果对于每个非负对角矩阵 D，$A+D$ 都是稳定的。

• 实方阵 A 称为**李雅普诺夫对角稳定**，如果存在一个正对角矩阵 D，使得 $AD+DA^T$ 是正定的。

– 注：在文献中，李雅普诺夫对角稳定矩阵通常简称为**对角稳定**矩阵，也称为**Volterra–Lyapunov 稳定**，或称为**Volterra 耗散**（例如，参见（Logofet, 2005））。

• 如果存在 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$，且满足 $x_i>0,\forall i$，使得矩阵 $A=\{a_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是**广义行对角占优**，则称其为

$$|a_{ii}|x_i>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|x_j,\forall i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

• 如果存在 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$，且满足 $x_i>0,\forall i$，使得矩阵 $A=\{a_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是**广义列对角占优**，则称其为

$$|a_{jj}|x_j>\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|x_i,\forall j=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

– 注意：广义列-对角占优矩阵的集合等价于广义行-对角占优矩阵的集合（Varga, 1976；Sun 等人, 2021）。它们也常被称为**拟对角占优**矩阵（Kaszkurewicz 和 Bhaya, 2012）。

• 对于实矩阵 $A=\{a_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，我们将其关联到一个**比较矩阵** $M_A=\{m_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，定义如下：

$$m_{ij}=\begin{cases}|a_{ij}|, & \text{if}\quad j=i;\\ -|a_{ij}|, & \text{if}\quad j\neq i.\end{cases}$$

给定矩阵 A 称为**H-矩阵**，如果其比较矩阵 M_A 是一个 M-矩阵。

– H-矩阵的集合等价于拟对角占优矩阵的集合（Kaszkurewicz 和 Bhaya, 2012；Sun 等人, 2021）。

• 若方阵 A 存在一个对角矩阵 D，使得 DA稳定，则称其**对角可稳定化**。

注：上文中关于实矩阵的许多定义同样适用于复矩阵；实矩阵与复矩阵的区别将在上下文中明确说明。

2. 可对角稳定化矩阵的条件

一个关键的启发性问题：给定一个方阵 A，我们能否找到一个对角矩阵 D，使矩阵 DA稳定？

Fisher 和 Fuller（Fisher 和 Fuller，1958年）证明了以下结果：

定理 1。（*Fisher 和 Fuller，1958年*）若 P是一个实 $n \times n$ 矩阵，满足以下条件：

- ***(A)***：P至少有一组各阶均非零的主子式序列 $M_k\, k = 1$、2、$\cdots$、n，使得 M_{k-1}是 M_k的 k 前几个主子式之一；

那么存在一个实对角矩阵 D，使得 DP的特征方程稳定。

Fisher-Fuller 定理也有以下另一种表述：

定理 2。设 P 是一个 $n \times n$ 实矩阵，其所有顺序主子式均为正。则存在一个 $n \times n$ 正对角矩阵 D，使得 DP 的所有根均为正且互异。

Fisher 后来为一个类似但更强的结果给出了简洁的证明（Fisher，1972年）。

定理 3。（*Fisher，1972年*）若 P 是一个 $n \times n$ 实矩阵，且至少有一个嵌套主子式集，M_k，满足 $(-1)^k M_k > 0$，$\forall k = 1 \cdots$，n，则存在一个实对角矩阵 D，其对角元素均为正，使得 DP 的特征根均为实数、负数且互异。

备注 1。下面讨论关于可对角稳定化矩阵条件的一些说明。

- 上述定理涉及确定（至少）一个嵌套主子式集的符号。在（*Johnson 等人，1997年*）中，给出了充分条件，以确定一个 $n \times n$ 零非零模式是否允许存在一个嵌套的非零主子式序列。特别是，文中给出了一种为该模式赋予符号的方法，使其允许存在一个 $k \times k$ 主子式序列，其符号为 $(-1)^k$，其中 $k = 1$，$\cdots$，n。
- *Fisher-Fuller* 定理中的条件是矩阵对角稳定性的一个充分条件。矩阵对角稳定性的一个必要条件是：对于每个阶数 $k = 1 \cdots$，n，至少有一个 $k \times k$ 主子式 P非零。目前尚不清楚其充要条件是什么。

Ballantine（Ballantine，1970）将上述 Fisher-Fuller 定理推广到了复矩阵的情形。

定理4。*(Ballantine，1970)* 设 A 是一个 $n \times n$ 复矩阵，其所有顺序主子式均非零。那么存在一个 $n \times n$ 复对角矩阵 D，使得 DA的所有根均为正且互异。

备注2。（*Hershkowitz，1992*）证明了，上述 *Ballantine* 定理不能通过将“复对角矩阵 *D*”替换为“正对角矩阵 *D*”来加强。（*Hershkowitz，1992*）给出了一个反例，其中有一个 2×2 复矩阵 A 的顺序主子式均为正，但不存在正对角矩阵 D 使得 DA的特征值为正。

刻画可对角稳定化矩阵的一个相关问题是**逆特征值问题**（IEP），而 Friedland（Friedland，1977）证明了以下定理。

定理 5。（*Friedland，1977*）设 A 是给定的 $n \times n$ 复数值矩阵。假设 A 的所有主子式均不为零。那么，对于任意给定的集合$\lambda = \{\lambda, \cdots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^n$，存在一个对角复数值矩阵 D，使得 AD 的谱为集合 λ。这样的 D 数量有限，且不超过 $n!$ 。此外，对于几乎所有 λ，对角矩阵 D 的数量恰好为 $n!$ 。

备注 3。在复矩阵情形下，关于逆特征值问题的 *Friedland* 定理不能直接推广到实数情形。此外，利用一个 2×2矩阵的反例很容易证明，即使主子式非零，实数情形下也不一定能保证特征值可定位性。

在（Hershkowitz，1992）中证明了以下两个定理。

定理 6。*(Hershkowitz，1992*）设 A 是一个具有正顺序主子式的复方阵，并设 ϵ 是任意正数。那么存在一个正对角矩阵 D，使得 DA 的特征值均为单特征值，且每个此类特征值的辐角的绝对值都小于 ϵ。

定理 7。*(Hershkowitz，1992*）设 A是一个具有实主子式和正顺序主子式的复方阵。那么存在一个正对角矩阵 D，使得 DA具有单正特征值。

备注 4。上述定理均给出了刻画对角可稳定化矩阵和逆特征值问题的某些充分条件，但这些条件并非必要条件。对角矩阵 D 存在的一个必要条件是，对于每个阶数 i，A 至少有一个非零的 $i \times i$ 主子式。然而，对对角可稳定化矩阵的完整刻画（即充要条件）仍然是一个开放问题。

对角矩阵稳定化问题的一种变体如下：

- 问题（*）：给定一个实方阵 G，求一个实对角矩阵 D，使乘积 GD 及其所有主子矩阵均为赫尔维茨矩阵。

令人惊讶的是，如（Locatelli 和 Schiavoni，2012）所示，存在一个解决上述问题的充要条件。令 $\mathcal{M} := \{1, 2, \cdots, m\}$ 且 $\mathcal{F} := \{f | f \subset \mathcal{M}\}$。此外，对于任意 $m \times m$ 矩阵 Δ，记 $\Delta(f)$ 为删除索引属于 f的行和列后得到的主子矩阵，$f \in \mathcal{F}$。（Locatelli 和 Schiavoni，2012）的主要结果证明了以下结论：

定理8。（*Locatelli 和 Schiavoni，2012*）问题（*）有解，当且仅当

$$det(G(f))det(G_D(f)) > 0, \forall f \in \mathcal{F} \tag{3}$$

其中 $G_D =$ 对角矩阵$\{g_{ii}\}$。此外，如果满足上述条件，则存在$\bar{\epsilon} > 0$，使得对于任意给定的 $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$，矩阵

$$D := G_D Z(\epsilon), Z(\epsilon) := -diag\{\epsilon^i\} \tag{4}$$

解决稳定化问题（*）。

3. 对角稳定矩阵的条件

我们简要总结对角稳定矩阵的现有条件（摘自（Barker 等人，1978）、（Cross，1978）和（Hershkowitz，2006））。

- (Barker 等人，1978）李雅普诺夫对角稳定矩阵是 P矩阵。
- (Barker 等人，1978）矩阵 A 是李雅普诺夫对角稳定矩阵，当且仅当存在一个正对角矩阵 D 使得 $x^T DAx > 0$ 对所有非零向量 x均成立。
- (Barker 等人，1978）实矩阵 2×2 是李雅普诺夫对角稳定矩阵，当且仅当它是 P矩阵。
- (Cross，1978）对于给定的李雅普诺夫对角稳定矩阵 P，其所有主子矩阵 P 都是李雅普诺夫对角稳定矩阵。
- (Barker 等人，1978）实方阵 A 是李雅普诺夫对角稳定矩阵，当且仅当对于每个非零实对称半正定矩阵 H，矩阵 HA 至少有一个正对角元素。– 注意：这一结果称为 BBP 定理，后来在（Shorten 等人，2009）中以更简单的证明再次给出。
- (Cross，1978）李雅普诺夫对角稳定矩阵的集合是乘法 D-稳定矩阵的真子集。
- (Cross，1978）李雅普诺夫对角稳定矩阵的集合是加法 D-稳定矩阵的真子集。– 注意：乘法 D-稳定矩阵和加法 D-稳定矩阵不一定是对角稳定矩阵。
- Z-矩阵是李雅普诺夫对角稳定的充要条件是它为 P-矩阵（即它是 M-矩阵）。
- 具有非负对角部分的非奇异 H-矩阵是李雅普诺夫对角稳定的。
- 具有非负对角部分的准对角占优矩阵是李雅普诺夫对角稳定的。注意，赫尔维茨 H-矩阵与准对角占优矩阵等价（Sun 等人，2021）。

以下事实见于（Cross，1978）和（Kaszkurewicz 和 Bhaya，2012）：

- 对于正规矩阵，在集合 Z 中，D-稳定性、加性D-稳定性和对角稳定性都等价于矩阵稳定性。
- 如果矩阵 A 是赫尔维茨稳定、D-稳定或对角稳定的，那么矩阵A^T 和 A^{-1} 也具有相应的性质。

在（Shorten 和 Narendra，2009）中，Shorten 和 Narendra 给出了矩阵对角稳定性的以下充要条件（通过 KYP 引理对 Redheffer 定理的另一种证明）：

定理 9。 *(Shorten 和 Narendra，2009)* 和 *(Redheffer，1985年)* 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个对角元素为负的赫尔维茨矩阵。令 A_{n-1} 表示 $[n-1 \times n-1]$ 的前导子矩阵， A并令 B_{n-1} 表示 A^{-1}的对应分块。则矩阵 A 是对角稳定的，当且仅当线性时不变系统存在一个共同的对角李雅普诺夫函数 $\Sigma_{A_{n-1}}$ 和 $\Sigma_{B_{n-1}}$。

上述定理涉及为一组线性时不变系统寻找一个共同的对角李雅普诺夫函数，这在实际应用中可能存在限制且计算量大，尤其是当矩阵 A 的维数较大时。

THEOREM 1.
a. *In general*

$$\mathcal{L} \Leftarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S},$$

b. *For Z-matrices, i.e., matrices with nonpositive off-diagonal entries,*

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{S}.$$

c. *For symmetric matrices*

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

d. *For triangular matrices*

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{L} \Leftrightarrow \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

e. *for normal matrices*

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

The absence of an implication in the above relations means that a counterexample exists.

图 1：不同矩阵类型下矩阵稳定性之间的关系：（Berman 和 Hershkowitz，1983）中的主定理

4. 矩阵稳定性与对角稳定性的关系

论文（Berman 和 Hershkowitz，1983）刻画了某些特殊矩阵与矩阵对角稳定性之间的关系。他们定义了

- $\mathscr{A} = \{A:$ 存在一个正定对角矩阵 D，使得 $AD + DA^T$ 为正定$\}$；即，$\mathscr{A}$表示对角稳定矩阵的集合；
- $\mathscr{L} = \{A:$ 存在一个正定矩阵 D，使得 $AD + DA^T$ 为正定$\}$；即，$\mathscr{L}$表示（正）稳定矩阵的集合；
- $\mathscr{P} = \{A:$ A 的主子式均为正$\}$；即，$\mathscr{P}$ 表示 P矩阵的集合；
- $\mathscr{S} = \{A:$ 存在一个正向量 x，使得 Ax 为正$\}$；即，$\mathscr{S}$表示半正矩阵的集合。

（Berman 和 Hershkowitz，1983）中的主要结果已被引用，并展示于图1中。一般而言，这些不同的结构化矩阵集合并不等价，而集合 $\mathscr{A}$是其他集合的子集。不过，对于 Z-矩阵，这些集合是等价的。特别是，对于 Z-矩阵，这些集合的刻画给出了 M 矩阵的等价条件（改变符号后）。请注意，还有许多其他刻画 M 矩阵的条件；例如参见（Plemmons，1977）。

综述论文（Hershkowitz，1992）介绍了矩阵稳定性条件之间的蕴含关系，以及文中所引图2和3所示的 Z-矩阵的矩阵稳定性等价关系。同样，如图3所示，对于 Z-矩阵，所有稳定性类型都等价。

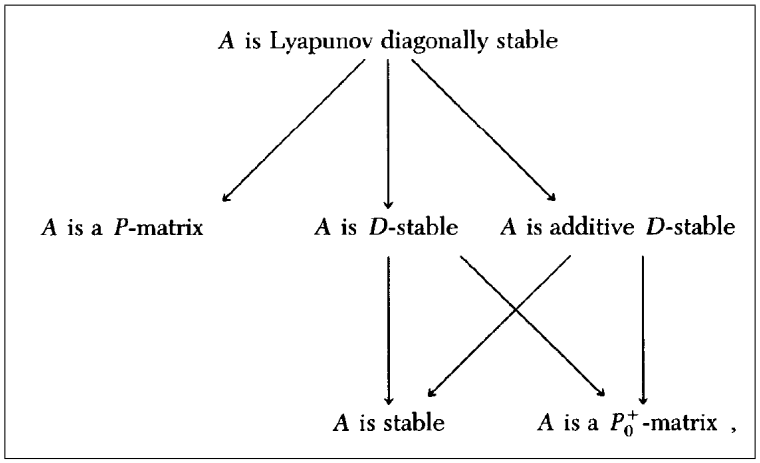

图2：矩阵稳定性条件之间的蕴含关系，引自（Hershkowitz, 1992）

.

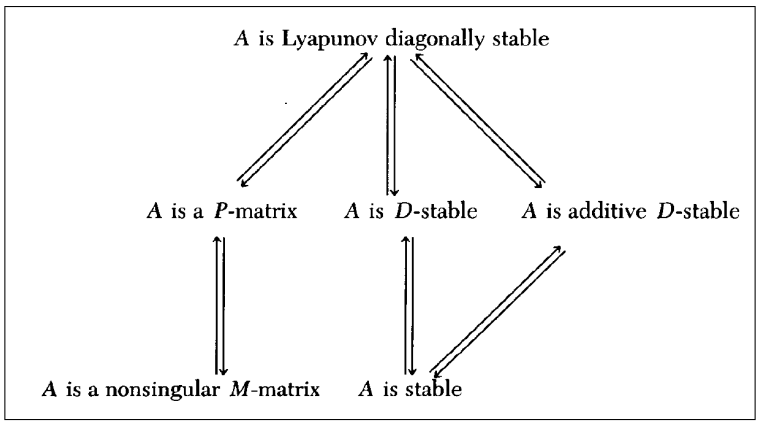

图3：对于Z-矩阵，所有稳定性类型都等价。引自（Hershkowitz, 1992）

.

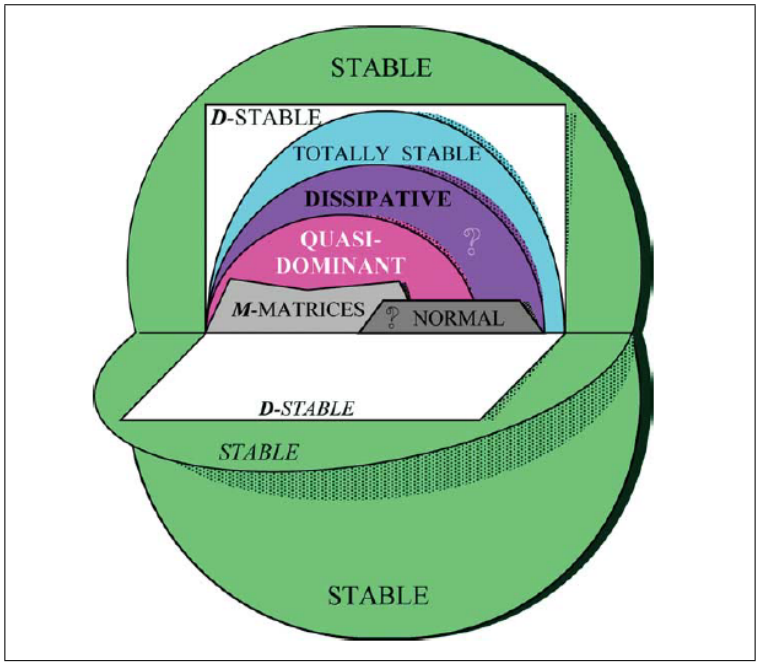

图 4：矩阵稳定性之间的关系。引自（Logofet，2005，图 2）

.

综述论文（Logofet，2005）展示了矩阵稳定性之间关系的一些优美的花形刻画，如图 4 和5所示。

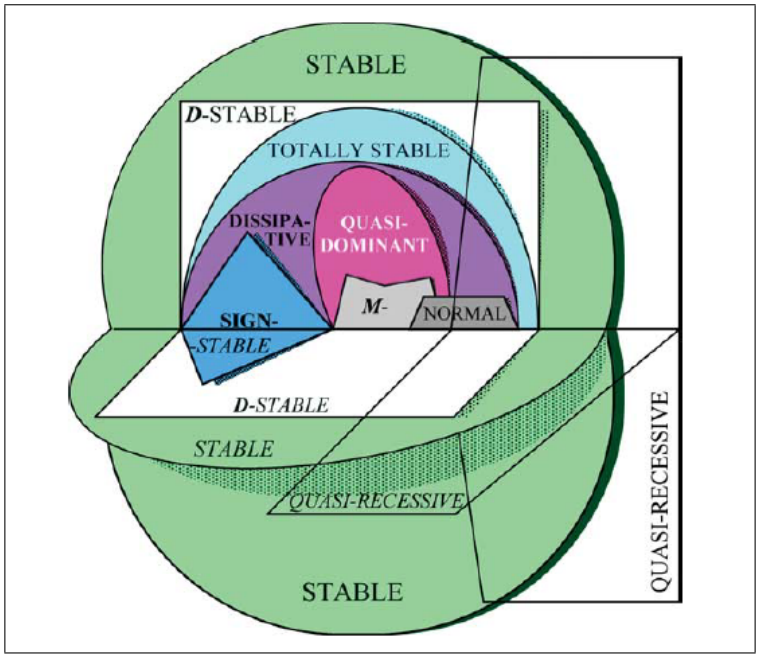

图 5: sign-Flower 中稳定矩阵的花瓣 . 引自（Logo fet，2005，图 4）

.

5. 使用子矩阵和 Schur 补的稳定性条件

“结构化”矩阵的稳定性条件通常涉及子矩阵的稳定性，这些子矩阵利用分块子矩阵及其 Schur 补来确定稳定性。

在（Narendra and Shorten，2010）中，Narendra and Shorten 基于赫尔维茨稳定的梅茨勒矩阵是对角稳定这一事实，提出了判定给定梅茨勒矩阵是否为赫尔维茨矩阵的充要条件。这些条件在（Souza 等人，2017）中得到了推广。我们回顾（Souza 等人，2017）中的一些主要稳定性判据。

引理 1. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个梅茨勒矩阵，按相容的维度分块为 $A = [A_{11}, A_{12};\ A_{21}, A_{22}]$，其中 A_{11} 和 A_{22} 为方阵。则以下命题等价。

- A 是赫尔维茨稳定的。
- A_{11} 及其舒尔补 $A/A_{11} := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 是赫尔维茨稳定的梅茨勒矩阵。
- A_{22} 及其舒尔补 $A/A_{22} := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 是赫尔维茨稳定的梅茨勒矩阵

注5. 下面给出一些说明。

• 对于结构化矩阵，如果其舒尔补也保持相同的稳定性和结构性质，则称该性质为舒尔补稳定性性质。具有舒尔补稳定性的其他类型结构化矩阵包括对称矩阵、三角矩阵和施瓦茨矩阵。参见（*Souza* 等人，*2017*）。

• 引理 *1*中关于 *M*-矩阵的结果可以推广到 *H*-矩阵：设 A 是一个按相容维数分块的 *H*-矩阵，如下所示： $A = [A_{11}, A_{12}$； A_{21}， $A_{22}]$其中 A_{11} 且 A_{22} 均为方阵。若 A 是赫尔维茨稳定的，则 A_{11} 及其舒尔补 A/A_{11}：$= A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 是赫尔维茨稳定的 *H*-矩阵；或者 A_{22} 及其舒尔补 A/A_{22}：$= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 是赫尔维茨稳定的 *H*-矩阵。

• 舒尔补及其闭包性质对于若干类结构化矩阵（包括对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵、*P*矩阵、对角占优矩阵、*M*矩阵等）的相关讨论，见（*Zhang*，*2006*，第*4*章）。

6. 矩阵对角稳定性条件的应用示例

关于对角矩阵可稳定性的 Fisher-Fuller 定理（定理1 及其变体）已被控制系统领域多次重新发现，并已在实际中应用于解决分布式稳定化和去中心化控制问题。本节回顾两个应用示例。

6.1. 去中心化稳定化的条件

在（Corfmat 和 Morse，1973）Corfmat 和 Morse 解决了以下问题：

- 给定并固定实矩阵 A 和 P，求（如果可能）一个非奇异对角矩阵 D，使得 $I + ADP$ 舒尔稳定（即，$I + ADP$ 的所有特征值都位于复平面的单位圆内）。

为了解决上述问题，他们证明了以下结论：

定理 10. 如果 A 是一个 $n \times n$ 强非奇异矩阵，那么存在一个对角矩阵 D，使得（$I + DA$）舒尔稳定。

注：在（Corfmat 和 Morse，1973）中，如果矩阵的所有**顺序主子式均非零**，则称该矩阵 n 为强非奇异矩阵。

定理 11。如果 A 是固定的非奇异矩阵，则存在一个置换矩阵P，使得 PA 为强非奇异矩阵。

去中心化稳定化的解： A 非奇异是存在置换矩阵 P 和非奇异对角矩阵 D 的充要条件，使得 $(I + ADP)$ 为舒尔稳定。

6.2. 持续编队的分布式稳定化

在（Yu 等人，2009）中，持续编队稳定化问题涉及研究以下微分方程的可稳定性

$$\dot{z} = \Delta A z$$

其中 Δ 是对角矩阵或可能为分块对角矩阵，而 A 是关于编队形状的类刚性矩阵。为了解决（Yu 等人，2009）中的编队稳定化问题，采用以下结果（（Yu 等人，2009，定理 3.2 ））：

定理 12. 假设 A 是一个 $m \times m$ 非奇异矩阵，且所有顺序主子式均非零。那么存在一个对角矩阵 D，使得 DA 的特征值实部均为负。

我们指出，这只是 Fisher-Fuller 定理的一种改述。

7. 关于矩阵稳定性和对角稳定性条件的重要综述论文与著作选集

- 综述论文（Hershkowitz，1992）总结了相关的矩阵稳定性结果及其发展，直至 1992 年。
- 这篇论文（Bhaya等人，2003）全面讨论并刻画了多类矩阵稳定性条件。

- 这篇论文（Hershkowitz 和 Keller，2003）研究了主子式的正性、符号对称性与矩阵稳定性之间的关系。
- 这篇综述论文（Hershkowitz，2006）简要概述了矩阵稳定性与惯性。

- 这本著作（Kaszkurewicz 和 Bhaya，2012）探讨了系统中的矩阵对角稳定性及其计算。
- 这篇综述论文（Logofet，2005）回顾了不同矩阵稳定性之间的关系，并揭示了一些精妙的联系。
- 篇幅极长的综述论文（Kushel，2019），从统一视角探讨矩阵稳定性及其历史发展。
- 近期出版的著作（Johnson 等人，2020）探讨了正矩阵、P矩阵和逆M矩阵。

参考文献

Ballantine, C., 1970. 对角矩阵稳定化。《美国数学会会刊》25，728–734。Barker, G., Berman, A., Plemmons, R.J., 1978. 李雅普诺夫方程的正对角解。线性与多重线性代数 5，249–256。Berman, A., Hershkowitz, D., 1983. 矩阵对角稳定性及其意义。《SIAM代数与离散方法杂志》4，377–382。Bhaya, A., Kaszkurewicz, E., Santos, R., 2003. 稳定矩阵类的刻画。《线性代数及其应用》374，159–174。Corfmat, J., Morse, A., 1973. 分散式反馈控制的稳定化。IEEE自动控制汇刊 18，679–682。Cross, G., 1978. 三种矩阵稳定性。《线性代数及其应用》20，253–263。Fiedler, M., Ptak, V., 1962. 关于具有非正非对角元素和正主子式的矩阵。《捷克斯洛伐克数学杂志》12，382–400。

Fisher, F.M., 1972. Fisher–Fuller 定理的一个简单证明，载于：《剑桥哲学会数学学报》，剑桥大学出版社，第523–525页。Fisher, M.E., Fuller, A., 1958. 关于矩阵的稳定化与线性迭代过程的收敛，载于：《剑桥哲学会数学学报》，剑桥大学出版社，第417–425页。Friedland, S., 1977. 逆特征值问题。《线性代数及其应用》17，15–51。Hershkowitz, D., 1992. 矩阵稳定性的新近研究方向。《线性代数及其应用》171，161–186。Hershkowitz, D., 2006. 矩阵稳定性与惯性，载于：《线性代数手册》。Chapman and Hall/CRC，第19–1页。Hershkowitz, D., Keller, N., 2003. 主子式的正性、符号对称性与稳定性。《线性代数及其应用》364，105–124。Johnson, C.R., Maybee, J.S., Olesky, D., Van den Driessche, P., 1997. 主子式的嵌套序列与潜在稳定性。《线性代数及其应用》262，243–257。Johnson, C.R., Smith, R.L., Tsatsomeros, M.J., 2020. 矩阵正性。第221卷。剑桥大学出版社。Kaszkurewicz, E., Bhaya, A., 2012. 系统与计算中的矩阵对角稳定性。施普林格科学与商业媒体。Kushel, O.Y., 2019. 统合矩阵稳定性概念并着眼于应用。《SIAM评论》61，643–729。Locatelli, A., Schiavoni, N., 2012. 矩阵及其主子矩阵稳定化的充要条件。《线性代数及其应用》436，2311–2314。Logofet, D.O., 2005. 强于李雅普诺夫意义的矩阵稳定性概念，或“花朵”如何帮助解决数学生态学问题。《线性代数及其应用》398，75–100。Narendra, K.S., Shorten, R., 2010. 梅茨勒矩阵的赫尔维茨稳定性。IEEE自动控制汇刊 55，1484–1487。Plemmons, R.J., 1977. M矩阵刻画。I—非奇异M矩阵。《线性代数及其应用》18，175–188。Redheffer, R., 1985. Volterra乘子 II。《SIAM代数与离散方法杂志》6，612–623。

Shorten, R., Mason, O., King, C., 2009. 关于 Barker、Berman、Plemmons（BBP）对角稳定性结果及其推广的另一种证明。《线性代数及其应用》430, 34–40. Shorten, R., Narendra, K.S., 2009. 关于 Redheffer 对角稳定性定理。《线性代数及其应用》431, 2317–2329. Souza, M., Wirth, F.R., Shorten, R.N., 2017. 关于递归舒尔补、梅茨勒矩阵的分块赫尔维茨稳定性及相关结果的一则注记。IEEE自动控制汇刊 62, 4167–4172. Sun, Z., Rantzer, A., Li, Z., Robertsson, A., 2021. 分布式自适应稳定化。《自动化》129, 109616. Varga, R.S., 1976. 关于对角占优递归定理。《线性代数及其应用》13, 1–9. Yu, C., Anderson, B.D.O., Dasgupta, S., Fidan, B., 2009. 平面内最小持续编队的控制。《SIAM 控制与优化杂志》48, 206–233. Zhang, F., 2006. 舒尔补及其应用。第4卷。施普林格科学与商业媒体。