arXiv:2301.01280v1 [math.NA] 3 Jan 2023

超立方体上 Aldaz-Kounchev-Render 算子的一个渐近公式

Ana-Maria Acu[a], Ioan Ra,sa[b]

[a]*Lucian Blaga University of Sibiu, Department of Mathematics and Informatics, Romania, e-mail: anamaria.acu@ulbsibiu.ro*[b] *Technical University of Cluj-Napoca, Faculty of Automation and Computer Science,Department of Mathematics, Str. Memorandumului nr. 28, 400114 Cluj-Napoca, Romania e-mail: ioan.rasa@math.utcluj.ro*

摘要

我们证明了一个关于超立方体上 Aldaz-Kounchev-Render 算子渐近行为的猜想的一个版本。

关键词：Aldaz-Kounchev-Render 算子；伯恩斯坦算子；Voronovskaja 型公式；张量积。2010 年数学学科分类：41A36

1. 引言

设 $B_n^{[1]}\colon\ C[0,1]\to C[0,1]$ 为经典伯恩斯坦算子，其定义为

$$B_n^{[1]}f(x)=\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)p_{n,i}(x),$$

其中 $p_{n,\,i}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\quad x\in[0,1]$。

对于固定的 $j\in\mathbb{N}$、$j\geq 2$ 以及 $n\geq j$，Aldaz、Kounchev 和 Render [2] 引入了一个多项式算子 $B_{n,\,j}^{[1]}\colon\ C[0,1]\to C[0,1]$，它固定 e_0 和 e_j，研究了其逼近性质，并将其应用于计算机辅助几何设计。该算子的显式表达式为

$$B_{n,j}^{[1]}f(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(t_{n,k}^{j}\right)p_{n,k}(x),$$

其中

$$t_{n,k}^{j}=\left(\frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{n(n-1)\ldots(n-j+1)}\right)^{1/j}.$$

序列 $(B_{n}^{[1]}{}_{,\,j})_{n\geq 1}$ 的 Voronovskaja 型公式于 [4] 提出猜想，并于 [3], [5]得到证明。

对于 $f \in C([0,1]^2)$，张量积 $B_n^{[1]} \otimes B_n^{[1]}$为

$$B_n^{[2]} f(x,y) := (B_n^{[1]} \otimes B_n^{[1]}) f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) p_{n,k}(x) p_{n,l}(y). \quad (1.1)$$

令 $B_n^{[1]}{}_{,j}$: $C[0,1] \to C[0,1]$ 为 AKR 算子，且 $(x,y) \in [0,1]^2$。那么，对于 $f \in C([0,1]^2)$，张量积 $B_n^{[1]}{}_{,j} \otimes B_n^{[1]}{}_{,j}$ 由下式给出

$$\begin{aligned} B_{n,j}^{[2]} f(x,y) &:= (B_{n,j}^{[1]} \otimes B_{n,j}^{[1]}) f(x,y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} f\left(t_{n,k}^{j}, t_{n,l}^{j}\right) p_{n,k}(x) p_{n,l}(y), \ (x,y) \in [0,1]^2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

关于序列 $(B_n^{[2]}{}_{,j})$ 的 Voronovskaja 型公式的一个猜想在 [1] 中提出。本文旨在证明这一猜想的一个版本。

2. 猜想的证明

为简洁起见，我们仅考虑 $j = 2$ 的情形，但显然证明可以推广到任意 j。

设 k 和 n 为整数， $n \geq 2, 0 \leq k \leq n$。定义

$$R(n,k) := \frac{k}{n} - \sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}} - \frac{1}{2n} + \frac{k}{2n^2}.$$

容易证明

$$R(n,0) = -\frac{1}{2n}, \quad (2.1)$$

$$R(n,k) \geq 0, \ k = 1,2,\ldots,n, \quad (2.2)$$

$$0 \leq \frac{k}{n} - \sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}} \leq \frac{1}{n}. \quad (2.3)$$

引理 2.1. 如果 $0 < x \leq 1$，那么

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} p_{n,k}(x) R(n,k) = 0. \quad (2.4)$$

证明. 令 $x \in (0,1]$ 和 $f \in C^2[0,1]$。已知（见 [3], [5]），

$$\lim_{n\to\infty} n(B_{n,2}^{[1]} f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x) - \frac{1-x}{2} f'(x).$$

此外，众所周知，

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n^{[1]} f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

由此可得,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_{n,2}^{[1]}f(x)-B_n^{[1]}f(x)\right)=-\frac{1-x}{2}f'(x).$$

特别地，对于函数 $f(t)=t$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}-\frac{k}{n}\right)=-\frac{1-x}{2}.$$

这可以写成

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)\left[\frac{1}{2n}\left(1-\frac{k}{n}\right)+R(n,k)\right]=\frac{1-x}{2},$$

即,

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)\left(1-\frac{k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)R(n,k)=\frac{1-x}{2}. \tag{2.5}$$

我们注意到

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(B_n^{[1]}(1-t;x)-(1-x)^n\right)=\frac{1}{2}(1-x).$$

结合 (2.5) 即可得到 (2.4)，证明至此完成。 □

定理 2.1. 设 $0<x\le 1$, $0<y\le 1$, $f\in C^2([0,1]^2)$。则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\left(B_{n,2}^{[2]}f(x,y)-f(x,y)\right)\\&=\frac{x(1-x)}{2}f''_{x^2}(x,y)+\frac{y(1-y)}{2}f''_{y^2}(x,y)-\frac{1-x}{2}f'_x(x,y)-\frac{1-y}{2}f'_y(x,y).\end{aligned} \tag{2.6}$$

证明。首先，我们有

$$\begin{aligned}&n\left(B_{n,2}^{[2]}f(x,y)-B_n^{[2]}f(x,y)\right)\\&=n\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left[f\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}},\sqrt{\frac{l(l-1)}{n(n-1)}}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right]\\&=E_nf(x,y)+F_nf(x,y)+G_nf(x,y),\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
E_nf(x,y) &:= n\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}-\frac{k}{n}\right) f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right),\\
F_nf(x,y) &:= n\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left(\sqrt{\frac{l(l-1)}{n(n-1)}}-\frac{l}{n}\right) f'_y\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right),\\
G_nf(x,y) &:= \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left\{\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}-\frac{k}{n}\right)^2 f''_{x^2}(\xi,\eta)\right.\\
&\quad + 2\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}-\frac{k}{n}\right)\left(\sqrt{\frac{l(l-1)}{n(n-1)}}-\frac{l}{n}\right) f''_{xy}(\xi,\eta)\\
&\quad \left.+\left(\sqrt{\frac{l(l-1)}{n(n-1)}}-\frac{l}{n}\right)^2 f''_{y^2}(\xi,\eta)\right\},
\end{aligned}
$$

其中合适的 (ξ,η) 由泰勒公式给出。利用 (2.3) 可知

$$
\lim_{n\to\infty} G_nf(x,y)=0. \tag{2.7}
$$

此外,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E_nf(x,y)\\
&= -\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left[\frac{1}{2n}\left(1-\frac{k}{n}\right)+R(n,k)\right] f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)\left(1-\frac{k}{n}\right) f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\\
&- \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)R(n,k) f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} B_n^{[2]}\left((1-s)f'_x(s,t);(x,y)\right)\\
&- \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n} p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)R(n,k) f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\\
&+ \lim_{n\to\infty} n\sum_{l=0}^{n}(1-x)^n p_{n,l}(y)\frac{1}{2n} f'_x\left(0,\frac{l}{n}\right).
\end{aligned}
$$

第一项等于 $-\frac{1}{2}(1-x)f'_x(x,y)$。

此外，利用 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}&\left|n\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n}p_{n,k}(x)p_{n,l}(y)R(n,k)f'_x\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right|\\&\leq\sum_{l=0}^{n}\left(n\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)R(n,k)\|f'_x\|_\infty\right)p_{n,l}(y)\\&=n\sum_{k=1}^{n}p_{n,k}(x)R(n,k)\|f'_x\|_\infty,\end{aligned}$$

而（2.4）表明第二项为零。第三项也为零，因此

$$\lim_{n\to\infty}E_nf(x,y)=-\frac{1-x}{2}f'_x(x,y). \tag{2.8}$$

同理,

$$\lim_{n\to\infty}F_nf(x,y)=-\frac{1-y}{2}f'_y(x,y). \tag{2.9}$$

现在，由（2.7）、（2.8）和（2.9）可得

$$\lim_{n\to\infty}n\left(B^{[2]}_{n,2}f(x,y)-B^{[2]}_nf(x,y)\right)=-\frac{1-x}{2}f'_x(x,y)-\frac{1-y}{2}f'_y(x,y). \tag{2.10}$$

另一方面，众所周知

$$\lim_{n\to\infty}n(B^{[2]}_nf(x,y)-f(x,y))=\frac{x(1-x)}{2}f''_{x^2}(x,y)+\frac{y(1-y)}{2}f''_{y^2}(x,y). \tag{2.11}$$

由（2.10）和（2.11）可得（2.6），定理得证。 □

参考文献

[1] A.M. Acu、S. De Marchi、I. Ra¸sa，《Aldaz–Kounchev–Render 算子及其逼近性质》。Results Math 78, 21（2023年）。[2] J.M. Aldaz、O. Kounchev、H. Render，《扩展 Chebyshev 空间上广义伯恩斯坦算子的保形性质》，Numer. Math.，2009，114(1)，1–25。[3] M. Birou，《关于伯恩斯坦型算子渐近公式的一个猜想的证明》，Results Math. 72（2017），1129–1138。[4] D. C´ardenas-Morales、P. Garrancho、I. Rasa，《通过 Korovkin 型结果得到的渐近公式》，Abstr. Appl. Anal. 第2012卷，文章编号217464，共12页。

[5] I. Gavrea，M. Ivan，与 Voronovskaja 型定理猜想相关的完整渐近展开，《数学分析与应用杂志》458 (1) (2018)，452-463。