arXiv:2301.01281v1 [physics.plasm-ph] 29 Dec 2022

从能量通量视角看磁流体湍流与发电机中的湍流减阻

Mahendra K. Verma[1*]、Manohar K.Sharma[2]和 Soumyadeep Chatterjee[1]

[1*]印度理工学院坎普尔分校物理系，卡利安普尔，坎普尔，208016，北方邦，印度。[2]格勒诺布尔大学数学系，Gires，格勒诺布尔，38000，格勒诺布尔，法国。

*通讯作者。电子邮箱：mkv.iitk.ac.in；共同作者：manohar-kumar.sharma@univ-grenoble-aples.fr；soumyade@iitk.ac.in；

摘要

在这篇综述中，我们使用能量通量的普适框架，介绍多种流动中的湍流减阻。在含有稀聚合物和磁场的湍流中，大尺度注入的动能会级联至中间尺度的速度场，同时也会传递至所有尺度上的聚合物和磁场。因此，与纯流体动力学湍流相比，动能通量，$\mathbf{\Pi}_u(\boldsymbol{k})$，受到抑制。我们认为，$\mathbf{\Pi}_u(\boldsymbol{k})$ 受到抑制，是惯性力 $\langle \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\rangle$ 和 *turbulent drag* 减小的重要因素。在聚合物湍流、磁流体动力学湍流、准静态磁流体动力学湍流和稳定分层湍流中，以及在发电机中，都观察到了湍流减阻的这一特征。此外，研究表明，热对流中的湍流减阻是由光滑的热板造成的，这与钝体周围的湍流减阻相似。在所有这些流动中，湍流减阻往往会使流动产生较强的大尺度速度。

关键词：湍流减阻、磁流体湍流、能量通量、发电机、准静态磁流体力学、湍流热对流

1 引言

已有研究观察到，在湍流中引入聚合物和磁场会降低湍流阻力 [1–11]。特定形状的钝体（例如翼型）周围的湍流阻力也会受到抑制。这种现象称为湍流减阻，简称TDR，取决于诸多因素——边界和流体的性质、主体湍流、聚合物的特性等。在本文中，我们利用能量通量，提出一个统一框架，用于解释聚合物湍流、磁流体动力学（MHD）湍流、准静态磁流体力学湍流、稳定分层湍流以及发电机中的湍流减阻。

在雷诺数较小时，管流表现出黏性阻力；而在雷诺数较大时，则会出现湍流阻力 [12, 13]。研究发现，在流动中加入少量聚合物，可使湍流阻力降低多达 80% [1–11]。图1展示了有聚合物和无聚合物的流体动力学（HD）流动中，平均归一化速度剖面（V^+）随距壁面归一化距离（y^+）的变化。带绿色圆点的底部曲线表示 V^+ 纯流体动力学湍流，其具有卡门对数层；而带红色方块的点划线曲线则表示聚合物湍流，呈现出湍流减阻（TDR）。L'vov 等人 [6] 构建了一个描述最大减阻渐近线（图中的点划线曲线）的唯象模型，与数值和实验数据都吻合得相当好。鉴于湍流减阻具有广泛的实际应用，对其进行研究尤为重要。例如，消防员会在水中混入聚合物，以增加消防水带的射程。此外，聚合物也用于提高输油管等管道中的流量。

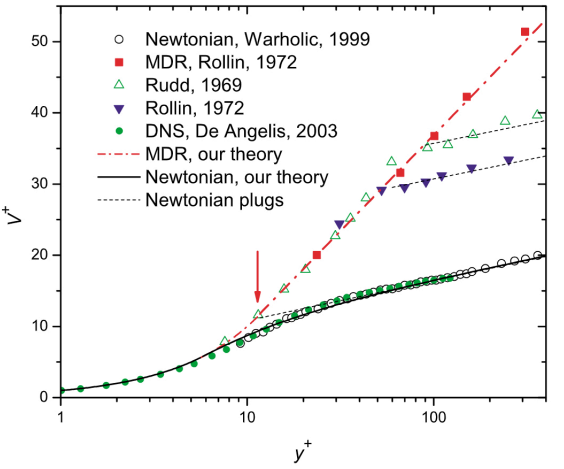


图 1 对于受壁面约束的流动，平均归一化速度剖面（V^+）随距壁面的归一化距离（y^+）的变化。带绿色圆点的底部曲线表示纯流体动力学湍流，而带红色方块的链线表示聚合物湍流。引自 L'vov *et al.* [6]。经美国物理学会许可转载。

钝体在小雷诺数下也会受到黏性阻力，在大雷诺数下则会受到湍流阻力。钝体所受的湍流阻力取决于表面性质，例如光滑度和曲率 [14, 15]。考虑到这些因素，飞机、汽车、导弹和船舶的设计都以尽量减小湍流阻力为目标。

在最近的一篇论文中，Verma等人 [11] 指出，磁流体湍流中会发生湍流减阻，这与含稀聚合物的湍流中的湍流减阻类似。他们表明，在聚合物湍流和磁流体湍流中，动能（KE）通量（$\Pi_u(k)$）都会受到抑制，这是因为能量分别从速度场传递到聚合物和磁场。此前已有多项研究探讨了聚合物湍流和磁流体湍流中的能量通量 [1, 11,16–19]。研究认为，湍流阻力与非线性项 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$成正比，且与 $\Pi_u(k)/U$成正比，其中 $\mathbf{u}$ 表示速度场， U 表示大尺度速度，而 $\langle . \rangle$ 表示取平均。因此，Verma等人的 [11] 形式体系为多种流动中的湍流减阻提供了通用框架，包括聚合物湍流和磁流体湍流。

在湍流中引入聚合物或磁场会增强平均流，但会抑制 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$ [1–11]。Verma 等 [11] 在磁流体湍流的壳层模型中观察到了上述现象。请注意， $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$和 $\Pi_u(k)$在很大程度上取决于傅里叶模态之间的相位关系。Verma 等 [11] 认为，与纯流体动力学湍流相比，聚合物湍流和磁流体湍流中的速度关联有所增强。尽管 U得到增强，这些相关性仍会导致 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$ 和 $\Pi_u(k)$受到抑制。因此，湍流减阻、能量通量和 U 的增强彼此相关。

基于以往的研究结果，Verma 等 [11] 提出，准静态磁流体力学（QSMHD）湍流 [20, 21]中存在湍流减阻。焦耳耗散会在所有波数 [20–23], 处抑制 $\Pi_u(k)$，因此，QSMHD湍流的 $\Pi_u(k)$低于流体动力学湍流中对应的通量。此外，随着相互作用参数增大，大尺度 U 也会增强，这表明QSMHD湍流中存在湍流减阻。

行星、恒星和星系等天体物理对象中的磁场生成，可以用发电机机制 [24–27]来解释。在这一机制中，磁场会因自感电流而增长，并在某一水平上达到饱和。在本综述中，我们利用能量通量探讨发电机中的湍流减阻。基于早期的发电机模拟（例如， [27, 28]），我们表明，当系统中出现大尺度磁场时，速度和磁场的涨落会受到抑制。这一特征表明，发电机中存在湍流减阻。

行星和恒星大气中常会出现稳定分层湍流。在这类流动中，较轻的流体位于较重的流体之上，重力方向朝下 [29, 30]。稳定分层湍流中的动能通量会受到抑制，这与聚合物湍流和磁流体湍流中的情况类似。基于这些观察，我们认为稳定分层湍流中存在湍流减阻。

研究人员报告称，与流体动力学湍流相比，湍流热对流中的黏性耗散率（ϵ_u）和热耗散率（ϵ_T）受到抑制。例如，Pandey 等 [31] 和 Bhattacharya等

[32] 表明，$\epsilon_u \sim (U^3/d)\mathrm{Ra}^{-0.2}$和 $\epsilon_T \sim (U(\Delta T)^2/d)\mathrm{Ra}^{-0.2}$，其中 ΔT是相距 d 的顶部和底部热板之间的温差，而 Ra 是瑞利数，即热对流中浮力与扩散之比。此外，Pandey等 [31] 观察到，$\langle \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle/(Ud/\nu) \approx \mathrm{Re}\mathrm{Ra}^{-0.14}$，其中 Re 是雷诺数。因此，湍流热对流中的非线性受到抑制。在这篇综述中，我们将上述非线性和耗散率的抑制与钝体上的湍流减阻联系起来。有人认为，湍流对流中的湍流减阻源于热板上方的大尺度环流（LSC），而光滑的热板会影响主体湍流。

因此，动能通量和 $\langle \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$ 为理解湍流减阻的物理机制提供了重要线索。湍流减阻也与速度场中增强的相关性有关。本文综述了多种流动中的这些方面，包括聚合物流动、磁流体动力学、准静态磁流体力学和稳定分层湍流；发电机；以及湍流热对流。本文聚焦于主体湍流，不讨论边界层和光滑表面。关于后两方面，已有许多专著和综述，例如 [3–5, 10, 14, 15]。我们指出，能量通量是湍流文献中广为人知的一个量 [33–37]。然而，能量通量与湍流减阻之间的联系直到近期才被揭示 [11], ，强调上述联系的论文数量相对有限。

湍流减阻期间平均速度场的增加与再层流化有关。Narasimha 和 Sreenivasan [38] 研究了稳定分层湍流、旋转湍流和热对流中的再层流化，并将其与 $\langle \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$的降低联系起来。因此，再层流化机制与湍流减阻密切相关。

本综述的结构如下。在第2 节中，我们简要回顾管流和钝体绕流中的黏性阻力与湍流阻力。在第3 节中，我们介绍一种基于能量通量的湍流减阻通用框架。在第4 节中，我们回顾含稀聚合物湍流中的能量通量，并将其与整体流动中的湍流减阻联系起来。第5 节提出一种基于能量通量的磁流体湍流减阻框架。在第6 节中，我们介绍磁流体湍流直接数值模拟（DNS）和壳层模型中湍流减阻的特征。第7 节和第8节分别讨论发电机中的湍流减阻和准静态磁流体湍流中的湍流减阻。在第9 节中，我们介绍稳定分层湍流和湍流热对流中的湍流减阻。最后，我们在第10节作总结。

2 流体动力学湍流中的黏性阻力和湍流阻力

不可压缩流体动力学的方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

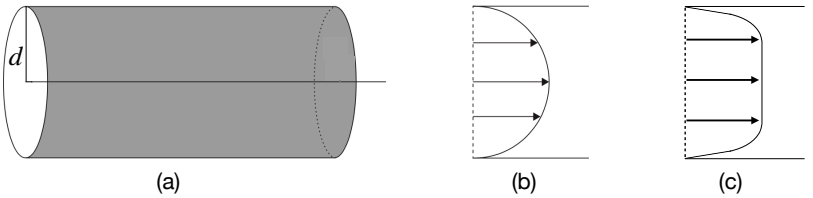


图 2 （a）管流及其黏性流动剖面的示意图。（c）湍流管流中的平均速度剖面。

其中，$\mathbf{u}$ p 分别表示速度场和压力场； ρ 表示密度，假设其为单位值； ν 表示运动黏度；$\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 表示作用于大尺度、用于维持稳态的外力。流体流动的一个重要参数是雷诺数，其定义为

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}, \tag{3}$$

其中， L 和 U 分别为大尺度长度和速度。对于均匀各向同性湍流，Re 是非线性项与黏性项之比。然而，在聚合物湍流、磁流体湍流和湍流对流等更复杂的流动中，

$$\frac{\text{Nonlinear term}}{\text{Viscous term}} = f\mathrm{Re}, \tag{4}$$

其中，前因子 f 可能不等于 1，并可能呈现湍流减阻的特征。例如， $f \approx$ 瑞利数$^{-0.2}$ 适用于湍流对流，其中 Ra 为瑞利数 [31]。我们预计， f 磁流体湍流和聚合物湍流的情况会更复杂。

流体在半径为 d 的管道中流动时会受到阻力（见图 2）。在低雷诺数下，这种阻力称为 黏性阻力。此时，在稳态下，压力梯度 $-\nabla(p/\rho)$，可视为 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$，与黏性项 $\nu\nabla^2\mathbf{u}$相匹配。因此，我们估算黏性阻力为 [13, 39]

$$F_{\text{drag}} \approx \frac{\nu U}{d^2}. \tag{5}$$

比例常数的量级为 1。在高雷诺数下，非线性项变得显著，因此 [12–15]，

$$F_{\text{drag}} \approx \frac{U^2}{d} + \frac{\nu U}{d^2}, \tag{6}$$

除了比例常数之外。在上述公式中， U^2/d 表示湍流阻力，其大小是黏性阻力的 Re 倍。显然，在高 Re 下，湍流阻力占主导地位。请注意，上述阻力的单位为单位质量所受的力；本文中我们将始终遵循这一约定。

一个相关问题是流动中的钝体所受的摩擦力。与管流类似，钝体在低雷诺数下受到黏性阻力，而在高雷诺数下受到湍流阻力。在文献中，阻力系数定义为 [13, 14]

$$C_d = \frac{F_{\text{drag}}}{\rho U^2 A}, \tag{7}$$

其中， A 是钝体的面积。

通常，我们用傅里叶空间描述流体流动，其中，方程（1，2）变换为 [35–37]

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{k}) = -i\sum_{\mathbf{p}}\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\mathbf{u}(\mathbf{p}) - i\mathbf{k}p(\mathbf{k}) - \nu k^2\mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}), \tag{8}$$

其中，**k**、**p**、**q** 是波数，满足**k** = **p** + **q**；而**u(k)**，**u(p)**，**u(q)**是相应的速度傅里叶模态。模态能量E_u**(k)** = |**u(k)**|$^2/2$ 的方程为 [35–37, 40]

$$\frac{d}{dt}E_u(\mathbf{k}) = T_u(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) - D_u(\mathbf{k}), \tag{9}$$

其中

$$T_u(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}}\Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right], \tag{10}$$

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) = \Re[\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})], \tag{11}$$

$$D_u(\mathbf{k}) = 2\nu k^2 E_u(\mathbf{k}). \tag{12}$$

这里， $\Re$， $\Im$ 分别表示该自变量的实部和虚部；T_u**(k)** 表示传递至模态 **u(k)** 的非线性能量传递； D_u**(k)** 表示波数 **k** 处的能量耗散率；而 $\mathcal{F}_{\text{ext}}$**(k)** 表示外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$**(k)** 对 **u(k)** 的动能注入率。

我们假设外力在大尺度上注入动能，例如在一个波数带 (0， k_f) 内，其中 k_f 很小。因此，总动能注入率ϵ_{inj}为

$$\int_0^{k_f} d\mathbf{k}\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) \approx \epsilon_{\text{inj}}. \tag{13}$$

注入的动能以动能通量的形式级联至中间和小尺度， $\Pi_u(K)$，其定义为半径为 K 的球体内速度模态向球体外速度模态传递的累积动能传递率。图 3 中，

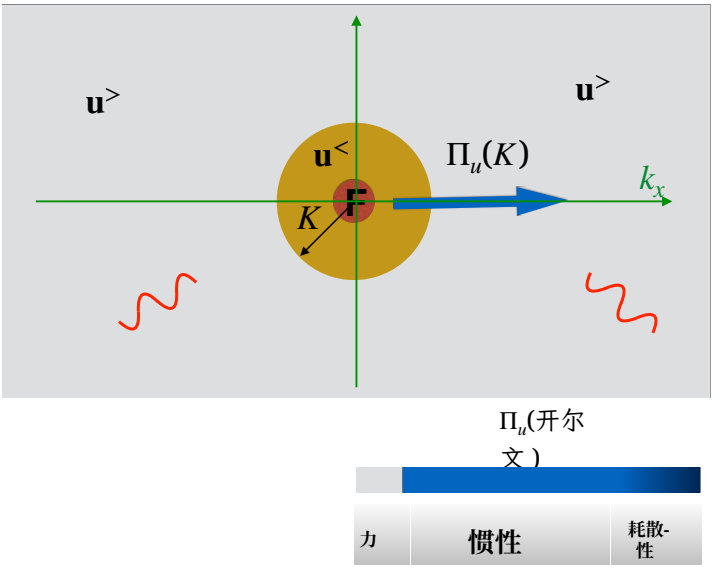


图3 动能通量示意图 $\Pi_u(K)$。动能注入小红球体中。 $\Pi_u(K)$ 在惯性区内保持恒定，并在小尺度上以耗散率 D_u耗散。引自 Verma *et al.* [11]。经美国物理联合会许可转载。

我们分别将内模态和外模态表示为$\mathbf{u}^<$ 和$\mathbf{u}^>$ 。用傅里叶模态表示，上述通量为 [16, 37, 41, 42]

$$\Pi_u(K) = -\sum_{k\le K} T_u(\mathbf{k}) = \sum_{p\le K}\sum_{k>K} \Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right], \quad (14)$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$。

上述能量通量在耗散区内耗散，总黏性耗散率为

$$\epsilon_u = \int d\mathbf{k} D_u(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k} 2\nu k^2 E_u(\mathbf{k}). \quad (15)$$

在高雷诺数下，已有研究表明，在惯性区内 [33, 35, 36, 43, 44],

$$\Pi_u(k) \approx \epsilon_{\text{inj}} \approx \epsilon_u \approx \frac{U^3}{d}. \quad (16)$$

也就是说，惯性区能量通量、黏性耗散率和能量注入率都相等。请注意，在惯性区中，由于没有外力且黏性耗散可忽略， $\Pi_u(k) = \epsilon_{\text{inj}}$ [33, 37, 40]。我们稍后将说明，与ϵ_{inj}相比，磁场、聚合物以及光滑壁面都会抑制能量通量。我们认为，这一特征会导致湍流减阻（TDR）。

对于稳态，对钝体进行式（1）积分，可得阻力公式：

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = \int d\mathbf{r} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla(p/\rho) - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right]. \tag{17}$$

在钝体表面附近，黏性力占主导地位，惯性项可以忽略。因此，对于钝体，上述方程中的惯性项可略去。普朗特 [15, 45] 首次将钝体的$\mathbf{F}^{\text{drag}}$ 计算为黏性阻力与逆压梯度之和。圆柱和翼型的阻力也以这种方式计算 [13–15]。

管流中$\mathbf{F}^{\text{drag}}$ 的计算也相当复杂，涉及许多因素——壁面、流体性质、主体湍流、雷诺数等。在本综述中，我们关注主体区域的湍流阻力，在那里可以忽略壁面的影响。上述简化使我们能够在许多不同的流动中，采用统一框架计算湍流阻力，包括聚合物湍流、磁流体湍流、发电机和液态金属中的流动。

我们关注周期性盒子内的湍流 $\int d\mathbf{r} \nabla(p/\rho) = \mathbf{0}$。忽略黏性阻力后，可得湍流阻力为（见方程（1,17））

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int d\mathbf{r} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right]. \tag{18}$$

由于外力作用于大尺度，在稳态下，

$$\langle \mathbf{F}_{\text{drag}} \rangle_{\text{LS}} \approx \langle | (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} | \rangle_{\text{LS}} \approx \langle \mathbf{F}_{\text{ext}} \rangle, \tag{19}$$

其中 $\langle . \rangle_{\text{LS}}$ 表示对大尺度进行系综平均。为估算$\langle \mathbf{F}_{\text{drag}} \rangle_{\text{LS}}$，我们将式（1）与 $\mathbf{u}$ 作点积，并在半径为 k_f 的波数球（强迫波数带）上积分，得到

$$\int_{\text{LS}} d\mathbf{r} [\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}] = \int_{\text{LS}} d\mathbf{r} [\mathbf{F}_{\text{drag}} \cdot \mathbf{u}] = f_1 U F_{\text{drag}}, \tag{20}$$

其中 $f_1 \approx 1$。在稳态下，利用式（9、14）可推得

$$\int_{\text{LS}} d\mathbf{r} [\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}] = \langle | [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} | \rangle_{\text{LS}} = -\int_0^{k_f} T_u(k') dk' = \Pi_u(k). \tag{21}$$

因此，

$$U F_{\text{drag}} \approx \Pi_u \approx \frac{U^3}{d} \approx \epsilon_{\text{inj}}, \tag{22}$$

or

$$F_{\text{drag}} \approx \frac{\Pi_u}{U} \approx \frac{U^2}{d}. \tag{23}$$

注意，大尺度上的黏性耗散可以忽略。

研究发现，聚合物和磁场能够抑制湍流阻力。我们将在后续章节详细阐述这些现象。

3 基于能量通量的湍流减阻通用框架 x

本节将介绍湍流中存在次级场时湍流减阻的一般框架 $\mathbf{B}$。为方便起见，我们暂且假设 $\mathbf{B}$ 是一个向量，但它也可以是标量或张量。本文采用的形式体系取自 Verma等人 [11]。

速度场和次级场的方程为 [11, 29, 37, 46]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_u(\mathbf{u},\mathbf{B}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \eta\nabla^2\mathbf{B} + \mathbf{F}_B(\mathbf{u},\mathbf{B}), \tag{25}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{26}$$

其中，$\mathbf{u}$ p 分别为速度场和压力场； ρ 为密度，假设其值为 $\mathbf{1}$； ν 为运动黏度； η 为$\mathbf{B}$的扩散系数；$\mathbf{F}_u$ 和$\mathbf{F}_B$ 分别为作用于$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{B}$ 的力场。注意，$\mathbf{F}_u$ 和 $\mathbf{F}_B$ 通常表示$\mathbf{u}$ 与$\mathbf{B}$之间的相互作用。外场$\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 作用于速度场的大尺度，以维持稳态。

利用方程（24），我们推导出以下动能密度方程 $u^2/2$（其中 $\rho = 1$）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{u^2}{2} + \nabla\cdot\left[\frac{u^2}{2}\mathbf{u}\right] = -\nabla\cdot(p\mathbf{u}) + [\mathbf{F}_u + \mathbf{F}_{\text{ext}}]\cdot\mathbf{u} - \nu\mathbf{u}\cdot\nabla^2\mathbf{u}. \tag{27}$$

在傅里叶空间中，模态动能方程 $E_u(\mathbf{k}) = |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2/2$ 为

$$\frac{d}{dt}E_u(\mathbf{k}) = T_u(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_u(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) - D_u(\mathbf{k}), \tag{28}$$

其中

$$T_u(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right], \tag{29}$$

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \Re[\mathbf{F}_u(\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})], \tag{30}$$

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) = \Re[\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})], \tag{31}$$

$$D_u(\mathbf{k}) = -2\nu k^2 E_u(\mathbf{k}), \tag{32}$$

与 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$相加。我们对半径为 28 的波数球上的 $\mathbf{u}$ 模态求和方程（ K ，得到 [37, 40]:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k\le K} E_u(\mathbf{k}) = \sum_{k\le K} T_u(\mathbf{k}) + \sum_{k\le K}\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) + \sum_{k\le K}\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) - \sum_{k\le K} D_u(\mathbf{k}). \tag{33}$$

式（33）右侧各项的物理解释如下：

1. $\sum_{k\le K} T_u(\mathbf{k})$ 表示由于非线性项 $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 作用，球体外部的 $\mathbf{u}$ 模态向球体内部的 $\mathbf{u}$ 模态传递的净动能。等价地，$\sum_{k\le K} T_u(\mathbf{k}) = -\Pi_u(K)$，见式（14）。
2. $\sum_{k\le K} \mathcal{F}_u(\mathbf{k})$ 表示相互作用力 $\mathbf{F}u(\mathbf{k})$ 向球体内部的 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$ 模态传递的总能量传递率。3. $\sum_{k\le K} \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k})$ 表示外力 $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 注入的净动能（图4中的红色球体）。对于 $K > k_f$，$\sum_{k\le K} \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) = \epsilon_{\text{inj}}$，因为 $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ 超出$k = k_f$。

这些$\mathbf{u}^<$ 模态通过非线性相互作用向$\mathbf{u}^>$ 和$\mathbf{B}$ 模态损失能量。式（$-\sum_{k\le K}\mathcal{F}_u$（$\mathbf{k}$）的33）中的项表示从$\mathbf{u}^<$ 模态（球体内部的模态）通过相互作用力$\mathbf{B}$ 模态（$\mathbf{B}^<$ 和 $\mathbf{B}^>$）向所有$\mathbf{F}_u$（$\mathbf{k}$）模态的净能量传递。我们将相应的通量定义为 Π_B（K），即

$$\Pi_B(K) = -\sum_{k\le K} \mathcal{F}_u(\mathbf{k}). \tag{34}$$

因此，$\mathbf{u}^<$ 模态不仅通过非线性相互作用向$\mathbf{u}^>$ 模态损失能量，也向$\mathbf{B}$ 模态损失能量。此外，$\mathbf{u}^<$ 模态通过黏性耗散损失能量，这是式（33）的最后一项。因此，在稳态下，$\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 注入的动能必须与 Π_u（K）、 Π_B（K）以及黏性耗散率 [37, 40][1]的总和在统计意义上相匹配。也就是说，

$$\Pi_u(K) + \Pi_B(K) + \sum_{k\le K} D_u(\mathbf{k}) = \epsilon_{\text{inj}}. \tag{35}$$

在 D_u（$\mathbf{k}$）≈ 0的惯性区内，我们得到

$$\Pi_u(K) + \Pi_B(K) \approx \epsilon_{\text{inj}}. \tag{36}$$

在后续章节中，我们将展示，Π_B（k）> 0 适用于磁流体动力学、准静态磁流体力学、聚合物以及稳定分层湍流。因此，利用式（36），我们推 deduce，在相同的注入率ϵ_{inj}下，Π_u（k）在含$\mathbf{B}$场的混合物中的值低于流体动力学湍流中的值，即

$$\Pi_{u,\text{mix}} < \Pi_{u,\text{HD}}. \tag{37}$$

现在我们估算存在$\mathbf{B}$时的阻力。如下面所述，有几种方法可以估算这种阻力。

[1]本文不讨论$\mathbf{B}$ 场的能量学，因为湍流减阻与速度场相关的能量通量有关。

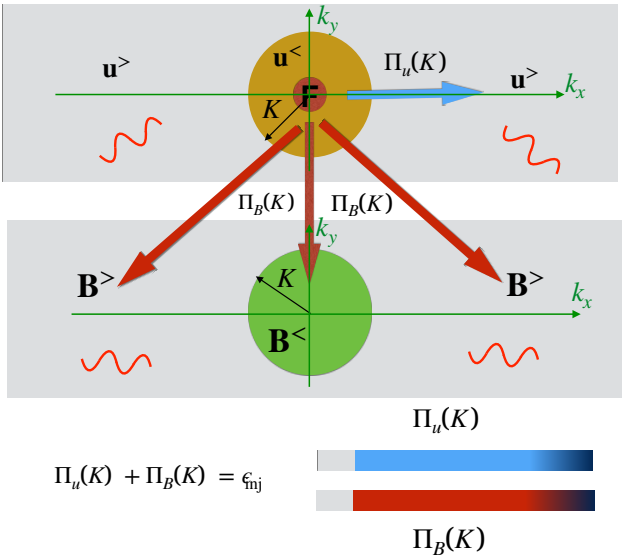


图4 外力以如下速率向小红球注入动能：ϵ_{inj}。$\Pi_u(K)$ 是半径为 K（黄色球体）的速度波数球的动能通量，而 $\Pi_B(K)$ 是从球内所有 $\mathbf{u}$ 模态到所有 $\mathbf{B}$ 模态的净能量传递。能量通量 $\Pi_u(K)$ 以耗散率 D_u耗散。对于小波数和惯性区，$\Pi_u(K) + \Pi_B(K) \approx \epsilon_{\text{inj}}$。引自 Verma *et al.* [11]。经美国物理联合会许可转载。

1. 如第2节所述，我们对小波数范围内的式（24）取平均。使用

$$\int_{\text{LS}} d\mathbf{r}[\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}] = \int_{\text{LS}} d\mathbf{r}[\mathbf{F}_{\text{drag}} \cdot \mathbf{u}] = f_2 U F_{\text{drag,mix}}. \tag{38}$$

在稳态下，利用方程（9，14），我们可推得

$$\int_{\text{LS}} d\mathbf{r}[\mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}] = -\int_0^{k_f} [T_u(k') + \mathcal{F}_u(k')]dk' = \Pi_u(k) + \Pi_B(k). \tag{39}$$

因此，

$$F_{\text{drag,mix}} \approx \frac{\Pi_u + \Pi_B}{f_2 U} \approx \frac{\epsilon_{\text{inj}}}{f_2 U}. \tag{40}$$

可以观察到，在混合物中，U 通常大于流体动力学湍流中的 [5, 11]。计算 f_2 可能相当复杂，因此难以比较 f_1 和 f_2。不过，考虑到 $U_{\text{mix}} > U_{\text{HD}}$，我们预期$F_{\text{drag, mix}}$ 会弱于相应的流体动力学湍流阻力。这就是存在$\mathbf{B}$ 场（聚合物或磁场）时，整体湍流减阻的起因。

2. 考虑到 f_2 中的不确定性，我们提出湍流阻力与 $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ [11] 成正比。对于磁流体湍流，力 $\mathbf{F}_u$（即洛伦兹力）可以单独处理，而 $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 可视为

阻力。此假设可简化计算，并且

$$F_{\mathrm{drag,mix}} \approx \frac{\Pi_u}{U}. \tag{41}$$

在典型情形下，$\Pi_{u,\,\mathrm{mix}} < \Pi_{u,\,\mathrm{HD}}$和 $U_{\mathrm{mix}} > U_{\mathrm{HD}}$ [5, 11]。因此，我们预期

$$F_{\mathrm{drag,mix}} < F_{\mathrm{drag,HD}}. \tag{42}$$

因此，存在磁场和聚合物等次级场时，湍流阻力会降低。Verma等人 [11] 采用这一方案计算湍流阻力。本文将始终采用这一方案。

在图 5中，我们给出了管流和主体湍流中湍流减阻（TDR）的示意图。在管流中引入聚合物会减弱涨落并增强平均流（见图 5(a,b)）。同样，在主体湍流中，聚合物和磁场能够诱发强烈的大尺度 U，并与流体动力学湍流相比减弱涨落（见图 5(c,d)）。

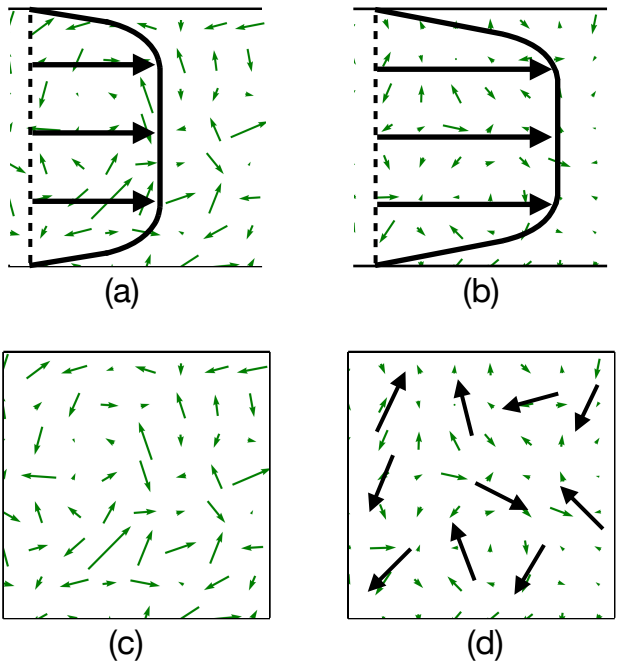


图5 （a）无聚合物时管流中的平均速度剖面（D 剖面）和涨落（绿色箭头）。（b）加入稀聚合物后，平均流增强，但涨落受到抑制。（c）流体动力学湍流中的速度涨落。（d）加入聚合物和磁场后，涨落（绿色箭头）受到抑制，而大尺度 U （黑色箭头）增强。

我们提出以下阻力系数，用于量化主体湍流中的湍流减阻：

$$\bar{C}_{d1} = \frac{\langle \Pi_u \rangle}{U^3/L}, \tag{43}$$

$$\bar{C}_{d2} = \frac{\langle |(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}| \rangle}{U^2/L}, \tag{44}$$

其中， L 是积分尺度， U 是大尺度速度。对于流体动力学湍流，我们得到 $C_{d1} \approx 1$ 和 $C_{d2} \approx 1$ 。然而，混合物的 C_{d1} 和 C_{d2} 小于流体动力学湍流中的对应值。在后续章节中，我们将计算上述阻力系数，涵盖各种流动，但重点讨论磁流体湍流、准静态磁流体湍流和发电机。

下一节将简要介绍含稀聚合物的湍流中的湍流减阻。

4 通过能量通量研究含稀聚合物流动中的湍流减阻

在湍流中加入少量聚合物会抑制湍流阻力 [1–11]。如第1节所述，聚合物湍流中的湍流减阻取决于边界、主体湍流、流体和聚合物的性质、各向异性等。然而，本文重点讨论聚合物存在时因动能通量受抑制而产生的湍流减阻。有关聚合物导致湍流减阻的详细讨论，请参阅文献 [1–11]。

一种常用的聚合物模型是有限可伸展非线性弹性-*Peterlin* 模型 （*FENE-P*） [9, 47]。在此模型中，速度场$\mathbf{u}$ 和构形张量 $\mathcal{C}$ 的控制方程为 [9, 46, 48]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\partial_j u_i = -\partial_i p/\rho + \nu\partial_{jj}u_i + \frac{\mu}{\tau_p}\partial_j(f\mathcal{C}_{ij}) + F_{\text{ext},i}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial t} + u_l\partial_l\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{il}\partial_l u_j + \mathcal{C}_{jl}\partial_l u_i + \frac{1}{\tau_p}[f\mathcal{C}_{ij} - \delta_{ij}], \tag{46}$$

$$\partial_i u_i = 0, \tag{47}$$

其中， ρ 是溶剂的平均密度， ν 是运动黏度， μ 是额外的黏度参数， τ_p 是聚合物弛豫时间， f 是重整化的Peterlin函数。在上述方程中，以下力与$\mathbf{u}$ 和 $\mathcal{C}$ （除常数外） [3, 10, 37, 40, 47]相关：

$$F_{u,i} = \partial_j(f\mathcal{C}_{ij}), \tag{48}$$

$$F_{u,i}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \left[ik_j f(\mathbf{q})\mathcal{C}_{ij}(\mathbf{p})\right], \tag{49}$$

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \Re[F_{u,i}(\mathbf{k})u_i^*(\mathbf{k})] = -c_1\sum_{\mathbf{p}} \Im\left[k_j f(\mathbf{q})\mathcal{C}_{ij}(\mathbf{p})u_i^*(\mathbf{k})\right], \tag{50}$$

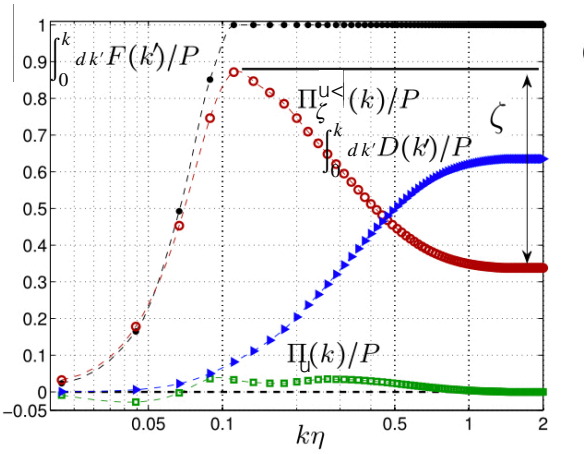


图 6 对于 De $= 16.2$ 的聚合物流动，能量通量 $\Pi_u(k)$ 和 $\Pi_{\mathcal{C}}(k)$ 以动能注入率 P和耗散率 $D_u(k)$ [19]归一化。注入的动能 P被传递到 $\mathbf{u}^>$ 和 $\mathcal{C}$，分别以 $\Pi_u(k)$ 和 $\Pi_{\mathcal{C}}(k)$ 的形式传递。其余注入的能量则被耗散。改编自 Valente 的一幅图 *et al.* [19]。经美国物理联合会许可转载。

其中，$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$，且 c_1 是一个常数。注意，场 $\mathcal{C}$ 取代了方程（**B** 24-26）中的。利用上述方程，我们推导出能量通量 $\Pi_{\mathcal{C}}(K)$，它表示从$\mathbf{u}^<$ 到 $\mathcal{C}$的净能量传递率，如下：[37, 40]

$$\Pi_{\mathcal{C}}(K) = \sum_{k \le K} \sum_{\mathbf{p}} -c_1 \Im \left[k_j f(\mathbf{q}) \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{p}) u_i^*(\mathbf{k}) \right] \tag{51}$$

与 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$。

Valente 等人 [18, 19] 分析了含有稀聚合物的湍流中的能量通量 $\Pi_u(k)$ 和 $\Pi_{\mathcal{C}}(k)$，并观察到 $\Pi_{\mathcal{C}}(k) > 0$。他们一幅展示 $\Pi_u(k)$ 和 $\Pi_{\mathcal{C}}(k)$ 的图被复现于图 6 [19]中。如图所示，对于 De $= 16.2$，当 $k\eta \approx 0.1$时，$\Pi_{\mathcal{C}}(k)/P$（$P =$ 总注入功率) 在约 0.9 处达到峰值，其中 η 是 Kolmogorov 波数。然而，对于所有 $k\eta$，$\Pi_u(k)/P$ 始终小于 0.1。Valente 等人 [18, 19] 还报告称，$\Pi_u(k)$ 和 $\Pi_{\mathcal{C}}(k)$ 取决于德博拉数 De；该数是聚合物的弛豫时间尺度与能量级联特征时间尺度之比。值得注意的是，当 De ~ 1时，$\Pi_{\mathcal{C}}(k)$ 达到最大值。因此，Valente 等人 [18, 19]表明，由于能量从速度场传递至聚合物，$\Pi_u(k)$ 相较于 ϵ_{inj} 显著降低。也就是说，$\Pi_u(k) < \epsilon_{\text{inj}}$。

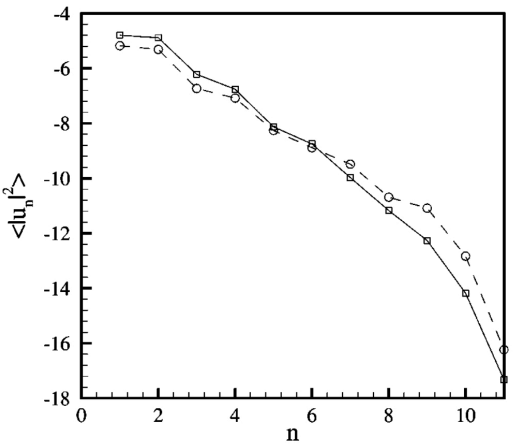

-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
0
2
4
6
8
10
n
<|u_n|^2>

图 7 纯流体动力学湍流（带圆圈的虚线）和聚合物湍流（带方块的实线）的动能谱。在小波数处，E_u（k）含有聚合物时大于不含聚合物时。引自 Benzi *et al.* [7]。经美国物理学会许可转载。

Benzi 等人 [7] 和 Ray和Vincenzi [49]表明，在湍流减阻过程中，与流体动力学湍流相比，大尺度动能得到了增强。图 7 展示了 Benzi 等人 针对纯流体动力学湍流和聚合物湍流的能谱。在图中我们观察到，在小波数处， $E_u(k)$ 在聚合物湍流中的值大于流体动力学湍流中的值。因此，我们推断，大尺度 U在聚合物存在时得到了增强。Thais 等人 [50] 和 Nguyen 等人 [51]通过对聚合物湍流进行直接数值模拟，也得出了类似结论。基于这些观察，我们推断

$$\Pi_{u,\mathrm{Polymeric}} < \Pi_{u,\mathrm{HD}} \quad \text{and} \quad U_{\mathrm{Polymeric}} > U_{\mathrm{HD}}. \tag{52}$$

因此，利用 $F_{\mathrm{drag}} = \Pi_u / U$，我们推导出

$$F_{\mathrm{drag,Polymeric}} < F_{\mathrm{drag,HD}}. \tag{53}$$

因此，动能通量的减少会导致非线性减弱，从而使聚合物湍流中的湍流减阻增强。

L'vov 等人 [52] 及其他研究者观察到了含泡流中的湍流减阻。在含泡流中，动能传递给气泡的弹性能，从而导致湍流减阻。我们还注意到，在层流状态下，聚合物通过项 $\mu\partial_j \left(f\mathcal{C}_{ij} \right) / \tau_p$ （式 45）引入额外阻力。因此，聚合物在黏性极限下会增强阻力 [5]。还需注意的是，在本综述中，我们关注主体湍流中的湍流减阻，未讨论边界层、各向异性、聚合物浓度的影响等问题。

此前，Fouxon和Lebedev [46] 已将含有稀聚合物的湍流方程与磁流体湍流方程联系起来。在下一节中，我们

将展示磁流体湍流中的能量传递与聚合物湍流中的能量传递相似。

5 通过能量通量研究磁流体湍流中的湍流减阻

磁流体是一种准中性且高导电的带电流体，其动力学由磁流体力学（MHD）描述。我们的宇宙充满了磁流体，典型例子包括太阳风、太阳日冕、恒星对流区、星际介质和星系际介质 [53–55]。

不可压缩磁流体力学的方程为 [53, 54]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_u(\mathbf{B},\mathbf{B}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B} = \eta\nabla^2\mathbf{B} + \mathbf{F}_B(\mathbf{B},\mathbf{u}), \tag{55}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{56}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{57}$$

其中 $\mathbf{u}$，$\mathbf{B}$ 分别表示速度和磁场；p 表示总（热 + 磁）压力；ρ 表示密度，假定其为单位值；ν 表示运动黏度；η 表示磁扩散率；$\mathbf{F}_{\text{ext}}$ 表示施加于大尺度上的外力；并且

$$\mathbf{F}_u = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}, \tag{58}$$

$$\mathbf{F}_B = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} \tag{59}$$

分别表示洛伦兹力和速度场对磁场的拉伸。注意，$\mathbf{F}_u$ 和$\mathbf{F}_B$ 会在$\mathbf{u}$ 和$\mathbf{B}$ 模态之间引起能量交换。在上述方程中，磁场$\mathbf{B}$ 采用速度单位表示，这是通过 $\mathbf{B}_{\text{cgs}} \to \mathbf{B}_{\text{cgs}}/\sqrt{4\pi\rho}$实现的。 ——

模态动能 $E_u(\mathbf{k}) = |\mathbf{u}(\mathbf{k})|^2/2$的演化方程为 [16, 36, 37, 40–42, 56]

$$\frac{d}{dt}E_u(\mathbf{k}) = T_u(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_u(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) - D_u(\mathbf{k}), \tag{60}$$

其中

$$T_u(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{p}} \Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{u}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right], \tag{61}$$

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \Re[\mathbf{F}_u(\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})] = \sum_{\mathbf{p}} -\Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{B}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right], \tag{62}$$

$$\mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) = \Re[\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})], \tag{63}$$

$$D_u(\mathbf{k}) = 2\nu k^2 E_u(\mathbf{k}), \tag{64}$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$。对半径为 60 的波数球上的各模态求和 K 可得 [30, 48, 56]:

$$-\frac{d}{dt}\sum_{k\le K} E_u(\mathbf{k}) = -\sum_{k\le K} T_u(\mathbf{k}) - \sum_{k\le K} \mathcal{F}_u(\mathbf{k}) - \sum_{k\le K} \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) + \sum_{k\le K} D_u(\mathbf{k})$$
$$= \Pi_u(K) + \Pi_B(K) - \epsilon_{\text{inj}} + \text{total viscous dissipation}. \quad (65)$$

注意

$$\Pi_B(K) = -\sum_{k\le K} \mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \sum_{k\le K}\sum_{\mathbf{p}} \Im\left[\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{q})\}\{\mathbf{B}(\mathbf{p})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})\}\right]. \quad (66)$$

在图 4中，我们用红色箭头示意 $\Pi_B(K)$。

在稳态下（$dE_u(\mathbf{k})/dt = 0$），

$$\Pi_u(K) + \Pi_B(K) + \sum_{k\le K} D_u(\mathbf{k}) = \epsilon_{\text{inj}}. \quad (67)$$

在 $D_u(\mathbf{k}) \approx 0$ 的惯性区内，我们得到

$$\Pi_u(K) + \Pi_B(K) \approx \epsilon_{\text{inj}}. \quad (68)$$

按照第3节中类似的推理思路，我们估算磁流体湍流中的湍流阻力为

$$\langle F_{\text{drag,MHD}}\rangle \approx \langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle_{\text{LS}} \approx \frac{\Pi_u}{U} \approx \frac{\epsilon_{\text{inj}} - \Pi_B}{U}. \quad (69)$$

研究人员详细研究了在各种参数组合下的能量通量 Π_u 和 Π_B，这些参数包括强迫函数、边界条件、 ν 和 η（或它们的比值 Pm $= \nu/\eta$，即磁普朗特数）。例如，Dar等人 [16]，、Debliquy等人 [57]，、Mininni 等人 [17]，和Kumar等人 [58, 59] 利用数值模拟计算了通量 Π_u 和 Π_B，并观察到大多数情况下 $\Pi_B > 0$。Mininni 等人 [17] 利用数值模拟表明，$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) < 0$，因此 $\Pi_B(\mathbf{k}) > 0$（见图8）。

因此，利用式（69），我们推导出

$$\Pi_{u,\text{MHD}} < \Pi_{u,\text{HD}}. \quad (70)$$

也就是说，磁流体湍流中的动能通量低于流体动力学湍流中相应的通量（无磁场时）。此外，引入磁场后，速度 U 可能会增大。因此，利用 $F_{\text{drag}} = \Pi_u/U$，我们推导出

$$F_{\text{drag,MHD}} < F_{\text{drag,HD}}. \quad (71)$$

在下一节中，我们将探讨上述不等式是否适用于磁流体湍流的数值模拟。

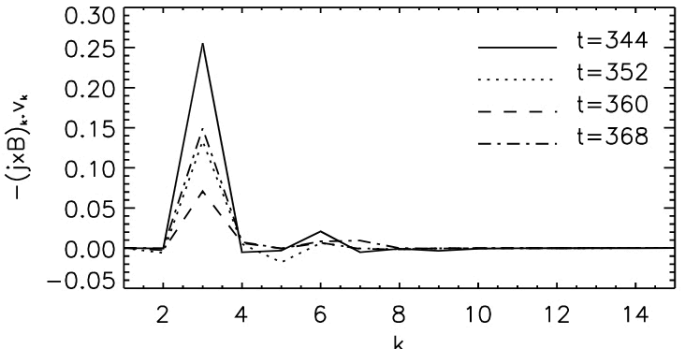


图8 数值计算得到的 $\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \Re[[\mathbf{J}\times\mathbf{B}](\mathbf{k})\cdot\mathbf{u}^*(\mathbf{k})]$，来自 Mininni *et al.* [17]。显然，$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) > 0$，因此 $\Pi_B(K) > 0$。引自 Mininni *et al.* [17]。经《天体物理学杂志》许可转载。

6 磁流体湍流中湍流减阻的数值验证

许多研究人员对磁流体湍流进行了模拟，但尚未详细研究磁流体湍流中的湍流减阻。在本节中，我们将介绍通过直接数值模拟（DNS）和壳层模型得到的湍流减阻数值结果。

磁流体湍流具有六种能量通量，如图 9所示。这些通量表示能量从 $u^<$ 和 $u^>$ 传递至 $b^<$ 和 $b^>$ [16, 37, 42]。然而，正如我们在第 3 节讨论的那样，与湍流减阻相关的通量是 Π_u 和Π_B。此外，湍流减阻发生在大尺度上，因此我们考虑来自小波数球的能量通量。就图 9 中的通量而言，

$$\Pi_u(K) = \Pi_{u>}^{u<}(K), \tag{72}$$
$$\Pi_B(K) = \Pi_{b<}^{u<}(K) + \Pi_{b>}^{u<}(K). \tag{73}$$

如第5节 $\Pi_B > 0$ [16, 17, 57–60]。因此，$\Pi_u < \epsilon_{\rm inj}$ 这会导致磁流体湍流中的湍流减阻。本节将报告通过直接数值模拟和壳层模型得到的流体动力学湍流与磁流体湍流的能量通量和 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$，并对其进行比较，以量化磁流体湍流中的湍流减阻。

需要注意的是，速度场通过能量通量 $\Pi_{u>}^{b<}$ 和 $\Pi_{u>}^{b>}$接收部分 Π_B。不过，这些传递在中等和大波数范围内较为有效。本综述聚焦于小波数，因此可以忽略这些能量传递。在下一小节中，我们将讨论磁流体湍流直接数值模拟中的湍流减阻。

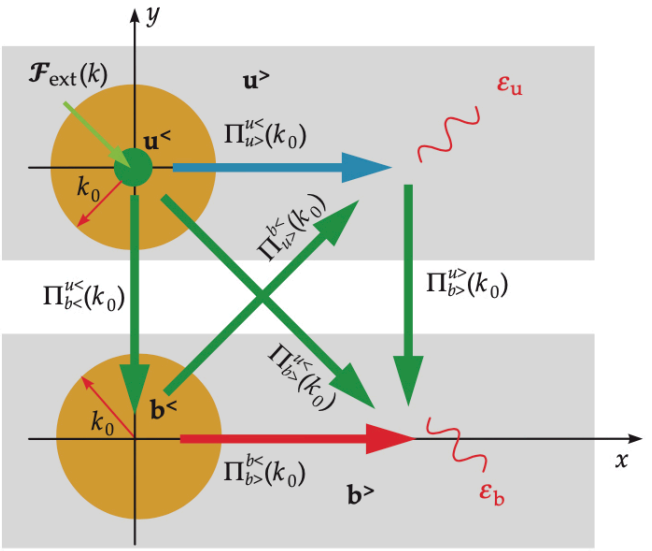


图 9 磁流体湍流的六种能量通量：$\Pi^{u<}_{u>}$，$\Pi^{u<}_{b<}$，$\Pi^{u<}_{b>}$，$\Pi^{b<}_{b>}$，$\Pi^{b<}_{u>}$，$\Pi^{u>}_{b>}$。摘自 Verma [37]。经 Verma 许可转载。

6.1 磁流体湍流直接数值模拟中的湍流减阻

我们使用伪谱代码 TARANG [61–63]，在边长为 $(2\pi)^3$ 的立方周期盒中求解无量纲磁流体力学方程（54-57）。我们分别采用初始均方根速度 (U_0)、盒子尺寸 (2π) 和初始涡周转时间 ($2\pi/U_0$) 对速度、长度和时间进行无量纲化。时间推进采用四阶龙格–库塔（RK4）格式；计算时间步长时采用 Courant-Friedrich-Lewy（CFL）条件 Δt；去混叠采用 2/3 规则。我们在 256^3 网格上进行数值模拟，磁普朗特数 Pm 取值为 $= 1/3, 1, 10/3$（详见下文讨论）。平均磁场 $\mathbf{B}_0 = 0$。注意，256^3 网格分辨率足以计算大尺度 Π_u、Π_B 和 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$。此外，较低的网格分辨率有助于我们开展持续多个涡周转时间的数值模拟。

对于初始条件，我们在所有波数上采用随机速度场和磁场。为了构造这类场，采用 Craya-Herring 基向量 [64, 65],较为方便，其波数为$\mathbf{k}$ 时的基向量为

$$\hat{\mathbf{e}}_3(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}}; \quad \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{k}) = (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})/|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}|; \quad \hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{k}) \tag{74}$$

$\hat{}$ 沿任意方向的 $\hat{\mathbf{n}}$ ，以及作为沿 $\mathbf{k}$方向单位向量的$\mathbf{k}$ 。我们选择三维不可压缩流动，因此，

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = u_1(\mathbf{k})\hat{\mathbf{e}}_1(\mathbf{k}) + u_2(\mathbf{k})\hat{\mathbf{e}}_2(\mathbf{k}). \tag{75}$$

对于总动能为 E_u的随机初始速度，我们采用

$$u_1(\mathbf{k}) = \sqrt{(E_u/2N^3)}\; i\left(\exp(i\phi_1(\mathbf{k})) - \exp(i\phi_2(\mathbf{k}))\right), \tag{76}$$

$$u_2(\mathbf{k}) = \sqrt{(E_u/2N^3)}\; \left(\exp(i\phi_1(\mathbf{k})) + \exp(i\phi_2(\mathbf{k}))\right), \tag{77}$$

其中， N^3 为模态总数，相位 $\phi_1(\mathbf{k})$ 和 $\phi_2(\mathbf{k})$ 从波段 $[0, 2\pi]$ 的均匀分布中随机选取。上述公式确保动能螺度保持为零。我们在数值模拟中采用 $E_u = 0.5$。对于初始磁能为 0.25 的随机磁场，我们采用类似方案。上述模拟运行 $\nu = \eta = 0.01$，即 $\mathrm{Pm} = 1$。

我们在波数壳层 (2,3) 中对速度模态施加随机力，记作 $k_f = 2$，以达到稳态 [66]。动能注入率 $\epsilon_{\mathrm{inj}} = 0.4$。我们将数值模拟运行至 29 个涡周转时间。不过请注意，流动大约在 15 个涡周转时间后达到稳态。

在上述数值模拟结束时，我们进行了以下四项独立模拟。我们将上述模拟的最终状态作为以下模拟的初始状态（$t = 0$）。

1. MHD1： $\nu = 0.01$、 $\eta = 0.03$，因此 Pm 为 $= 1/3$。2. MHD2： $\nu = 0.01$、 $\eta = 0.01$，因此 Pm 为 $= 1$。这是对上述模拟的延续。3. MHD3： $\nu = 0.01$、 $\eta = 0.003$，因此 Pm 为 $= 10/3$。4. HD： $\nu = 0.01$ ，关闭磁场。

我们将流体动力学和 MHD2 模拟运行至 40 个涡周转时间，而 MHD1 和 MHD3 模拟运行至 5 个涡周转时间。随后，在四项模拟分别经过若干个涡周转时间并达到各自的稳态后，我们比较它们的能量通量和 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}|\rangle$。流体动力学模拟稳态时的雷诺数（$\mathrm{Re} = UL/\nu$）为 457。对于 $\mathrm{Pm} = 1/3$，1，和 $10/3$ 的磁流体力学模拟，其稳态时的 Re 分别为 $= 413$、347 和 338，而 $\mathrm{Rm} = 137$ 分别为 347 和 1127。

在图10（左列）中，我们展示了流体动力学模拟的动能时间序列，以及三组磁流体力学模拟的动能、磁能（ME）和总能量。相应的耗散率见图10右列。如图所示，所有模拟在经过数个涡周转时间后都达到稳态。流体动力学模拟的动能耗散率迅速升至 0.4，即动能注入率（ϵ_{inj}）。Pm 为 $= 1/3$、1 和 $10/3$ 的磁流体力学模拟中，动能分别趋于约 0。65、0。47 和 0。41，而相应的磁能则分别趋于约 0。07、0。2 和 0。26。注意，磁流体力学模拟的能量存在显著涨落，但总能量的耗散率保持在 0.4。

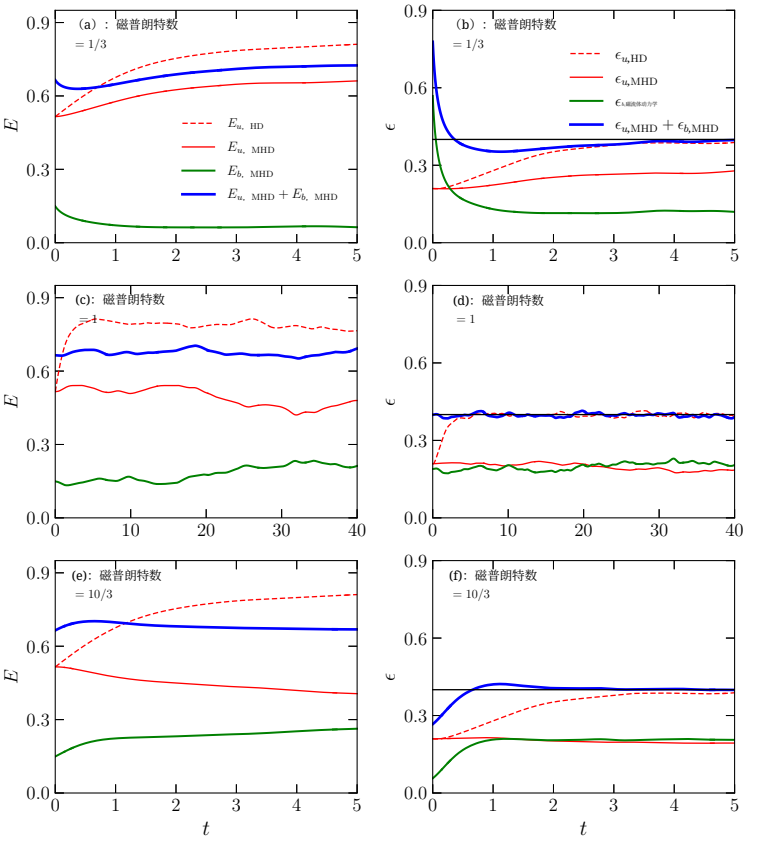


图10 左列：(a、c、e) 流体动力学模拟的动能时间序列（红色虚线）；以及磁普朗特数为 $= 1/3$, 1, $10/3$ 的磁流体力学模拟中的动能（红色实线）、磁能（绿色实线）和总能量（蓝色实线）。右列：(b、d、f) 相应的能量耗散率，符号含义相同。

现在，我们报告波数为 k 时速度场和磁场的能谱。数值上，我们通过以下方式计算它们：

$$E_u(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-1<|\mathbf{k}'|\leq k} |\mathbf{u}(\mathbf{k}')|^2, \tag{78}$$

$$E_b(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-1<|\mathbf{k}'|\leq k} |\mathbf{b}(\mathbf{k}')|^2. \tag{79}$$

在图11中，我们展示了磁流体力学模拟的 $E_u(k)$和 $E_b(k)$，以及流体动力学模拟的 $E_u(k)$。这些量取自稳态下多个时刻的平均值。我们观察到，除磁普朗特数为 $= 1/3$ 时的几个小波数处外，流体动力学模拟的 $E_u(k(k) > E_u(k)$均大于磁流体力学模拟中的相应值。

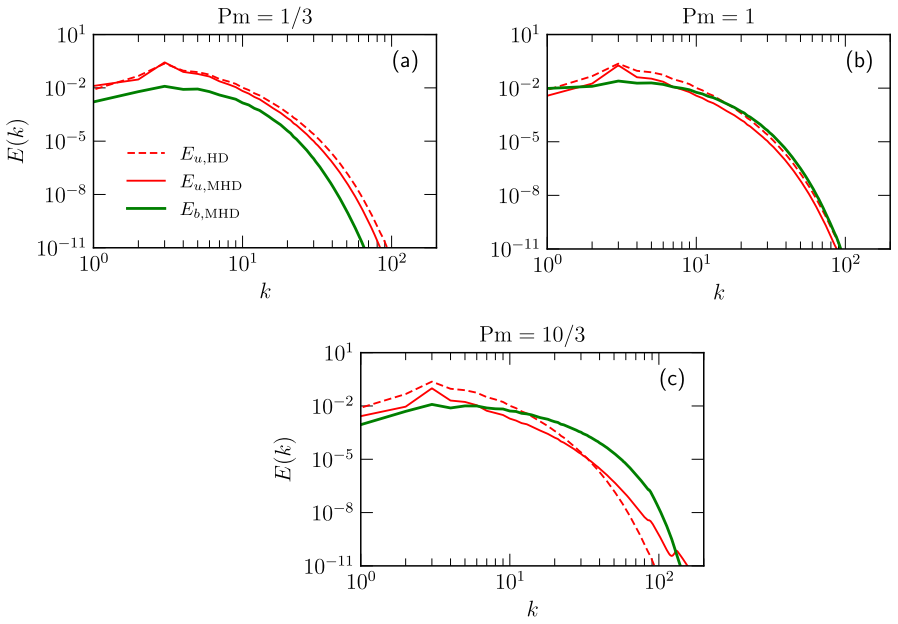


图 11 (a,b,c) 对于磁普朗特数为 $= 1/3,1,10/3$ 的磁流体力学模拟，动能谱（红色实线）和磁能谱（绿色实线）。我们还展示了流体动力学模拟的动能谱图（红色虚线）。

此外，对于流体动力学模拟和磁流体力学模拟，我们报告了大尺度速度 U、积分尺度 L以及基于泰勒微尺度的雷诺数 $\mathrm{Re}_\lambda = U\lambda/\nu$，其中泰勒微尺度 $\lambda = (15\nu U^2/\epsilon)^{1/2}$ [35, 37]。遵循 Sreenivasan [43], 的做法，我们将 U 计算为速度场各分量的均方根值，或

$$U = \left[\frac{2}{3}\int dk E(k)\right]^{1/2}, \tag{80}$$

而积分尺度 L 的计算方式为

$$L = \frac{\int dk k^{-1} E(k)}{\int dk E(k)}. \tag{81}$$

我们通过三种方式量化 U： U_{rms}；以及 $U(K=1)$和 $U(K=2)$，后两者分别利用半径为1和2的波数球内的动能计算得出。我们在表1中列出 U_{rms}。图12展示了四组模拟中 U_{rms}、 $U(K=1)$、$U(K=2)$、 L和Re_λ的时间序列。我们观察到，磁流体力学模拟中的 U_{rms}、 $U(K=1)$和$U(K=2)$均小于流体动力学模拟中的对应量，但MHD1（Pm $=1/3$）除外，其 $U(K=1)$与流体动力学模拟中的相应量相当。因此，MHD1的Re_λ 接近流体动力学模拟中的值，而另外两组磁流体力学模拟的Re_λ 则小于

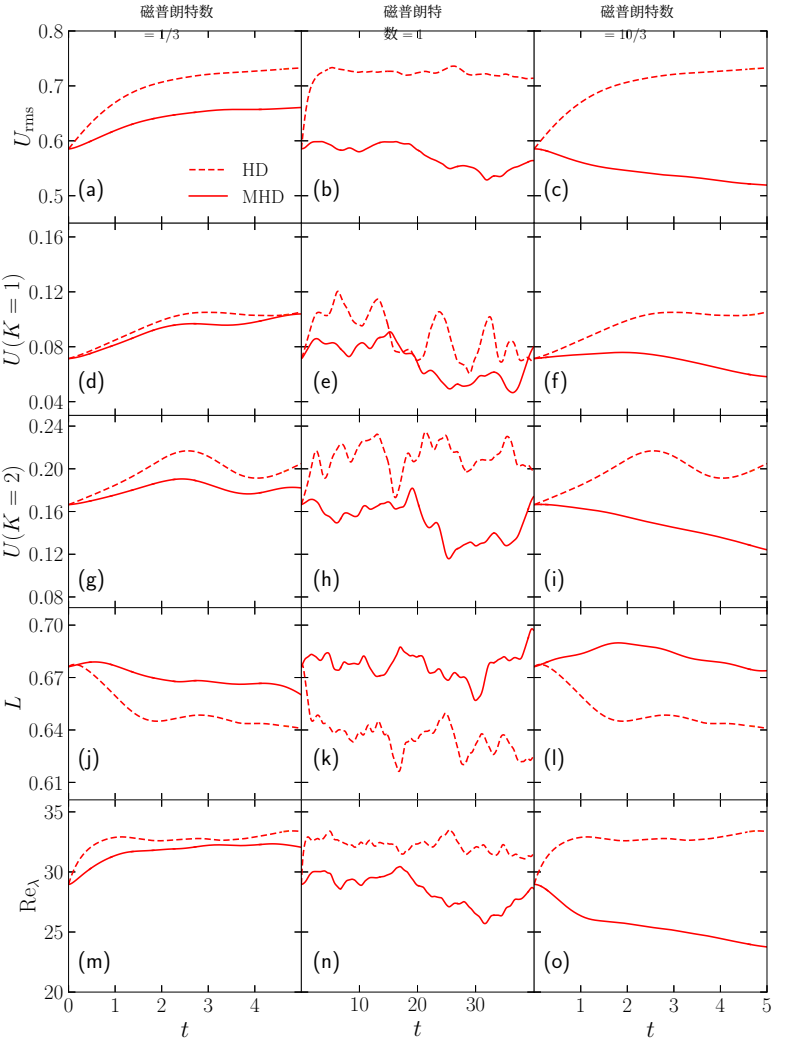


图 12 流体动力学模拟（红色虚线）和磁流体力学模拟（红色实线）在磁普朗特数为 $= 1/3$、**1**、$10/3$ 时的均方根速度（$U_{\rm rms}$）、U（$K = 1$）、U（$K = 2$）、积分尺度（L）以及雷诺数$_\lambda$ 的时间演化。U（$K = 1$）和 U（$K = 2$）分别使用半径为 **1** 和 **2** 的波数球中包含的动能计算得出。

流体动力学模拟中的值。三组磁流体力学模拟的积分尺度 L 大于流体动力学模拟中的对应 L 。因此，与流体动力学模拟相比，磁流体力学模拟中的速度场更有序。

接下来，我们计算 $\Pi_u(K)$，用于流体动力学模拟和磁流体力学模拟；并计算 $\Pi_B(K)$，用于磁流体力学模拟。这些通量呈现显著涨落，因此我们对稳态下多个时刻的结果取平均。图 13所示的通量清楚地表明，$\Pi_B > 0$，这意味着能量在所有尺度上都从速度场传递到磁场

24 磁流体湍流中的湍流减阻

表1 对于磁普朗特数 Pm = 1/3、1、10/3 的磁流体力学模拟，惯性区内平均动能通量（$\langle \Pi_u \rangle$）、均方根速度（$U_{\rm rms}$）以及 $\langle \bar{C}_{d1} \rangle$ 的数值。我们还列出了半径为 $K = 1$ 和 $K = 2$ 的波数球对应的 $\langle |(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| \rangle$ 和 $\langle \bar{C}_{d2} \rangle$。表中还列出了流体动力学模拟的相应量。对于所有模拟，$\epsilon_{\rm inj} = 0.4$

					$K = 1$		$K = 2$	
	Pm	$\langle \Pi_u \rangle$	$U_{\rm rms}$	$\langle \bar{C}_{d1} \rangle$	$\langle \lvert(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\rvert \rangle$	$\langle \bar{C}_{d2} \rangle$	$\langle \lvert(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\rvert \rangle$	$\langle \bar{C}_{d2} \rangle$
HD	-	0.35	0.72	0.58	0.1	0.13	0.3	0.37
MHD1	1/3	0.28	0.66	0.65	0.07	0.11	0.3	0.46
MHD2	1	0.25	0.55	0.98	0.06	0.13	0.22	0.49
MHD3	10/3	0.17	0.53	0.8	0.04	0.09	0.17	0.41

在所有尺度上都与磁场有关，而且 taanna

$$\Pi_{u,\rm MHD} < \Pi_{u,\rm HD}. \tag{82}$$

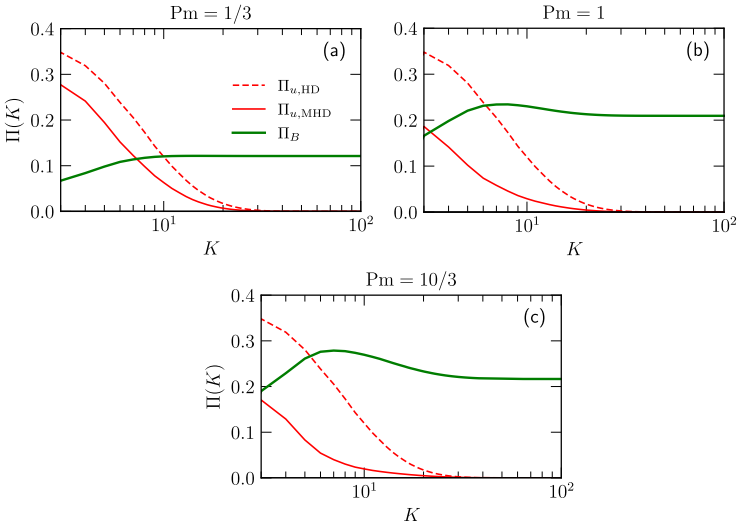


图13 (a、b、c) 绘制了磁流体力学模拟中 Pm = 1/3、1、10/3 时的 $\Pi_u(K)$（红色实线）和 $\Pi_B(K)$（绿色实线）。图中还展示了流体动力学模拟的 $\Pi_u(K)$（红色虚线）。

我们计算阻力系数 C_{d1}，其定义见方程（43），即$\langle \Pi_u \rangle / (U_{\rm rms}^3/L)$，并在图 14中展示其时间序列。在表 1中，我们列出了稳态下 的平均值 C_{d1}。我们观察到，流体动力学模拟稳态下的 C_{d1}

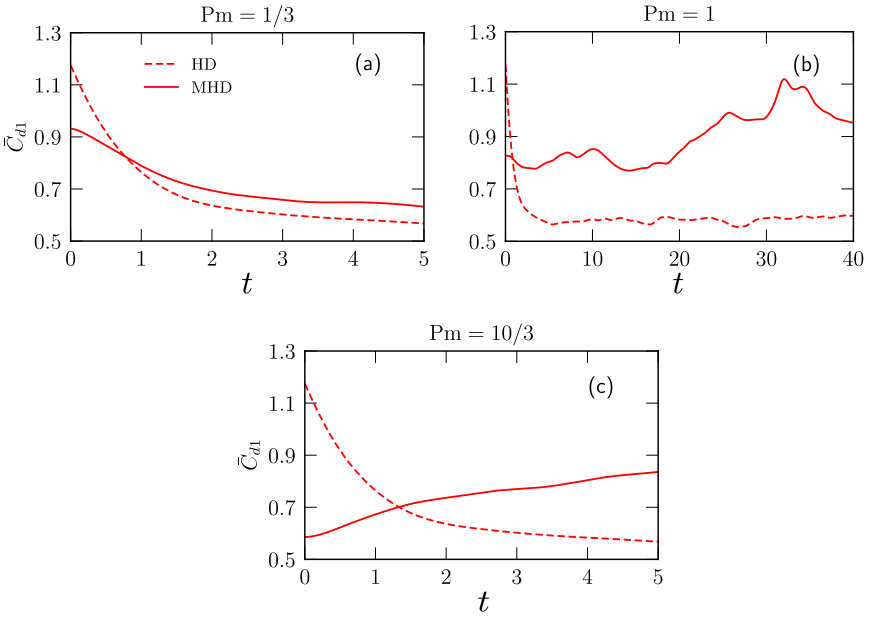


图14 (a,b,c) 对于磁普朗特数 Pm $= 1/3,\ 1,\ 10/3$，流体动力学模拟（红色虚线）和磁流体力学模拟（红色实线）的减阻系数 $\bar{C}_{d1}$ 随时间的演化。

结果与 Sreenivasan 的结果一致 [43], ，从而验证了我们的代码和诊断方法。然而， C_{d1} 三个磁流体力学模拟稳态下的阻力系数均大于流体动力学模拟。这是因为磁流体力学模拟中 U_{rms}^3 的减小，超过了 Π_u（K）的减小。

现在，我们考察流体动力学模拟和磁流体力学模拟的非线性项 N_u。由于阻力在大尺度上起作用，我们用小波数球（半径为 K）内的均方根值估算 N_u，即

$$\langle|(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}|\rangle_{\mathrm{LS}} = N_u(K) = \sqrt{\sum_{k\le K}|\mathbf{N}_u(\mathbf{k})|^2}. \tag{83}$$

具体而言，我们选择 $K=1$ 和 $K=2$。图 15(a,b) 展示了 $N_u(K)$ 的时间序列，其中流体动力学模拟以红色虚线表示，磁流体力学模拟以红色实线表示，分别对应 $K=1$ 和 $K=2$。表 1列出了所有模拟中 $N_u(K$的平均值。我们观察到，三个磁流体力学模拟的 $N_u(K)$ 均小于对应流体动力学模拟的 $N_u(K)$。因此，与流体动力学湍流相比，磁流体湍流中的 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}|\rangle_{\mathrm{LS}}$ 有所降低，这表明磁流体湍流中存在湍流减阻。

接下来，我们计算减阻系数 C_{d2}，其定义见式（44）：$\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}|\rangle_{\mathrm{LS}}/(U_{\mathrm{rms}}^2/L)$。图 $\bar{C}_{d2}$ 展示了 $K=1$ 和$K=2$的16时间序列，其稳态下的平均值

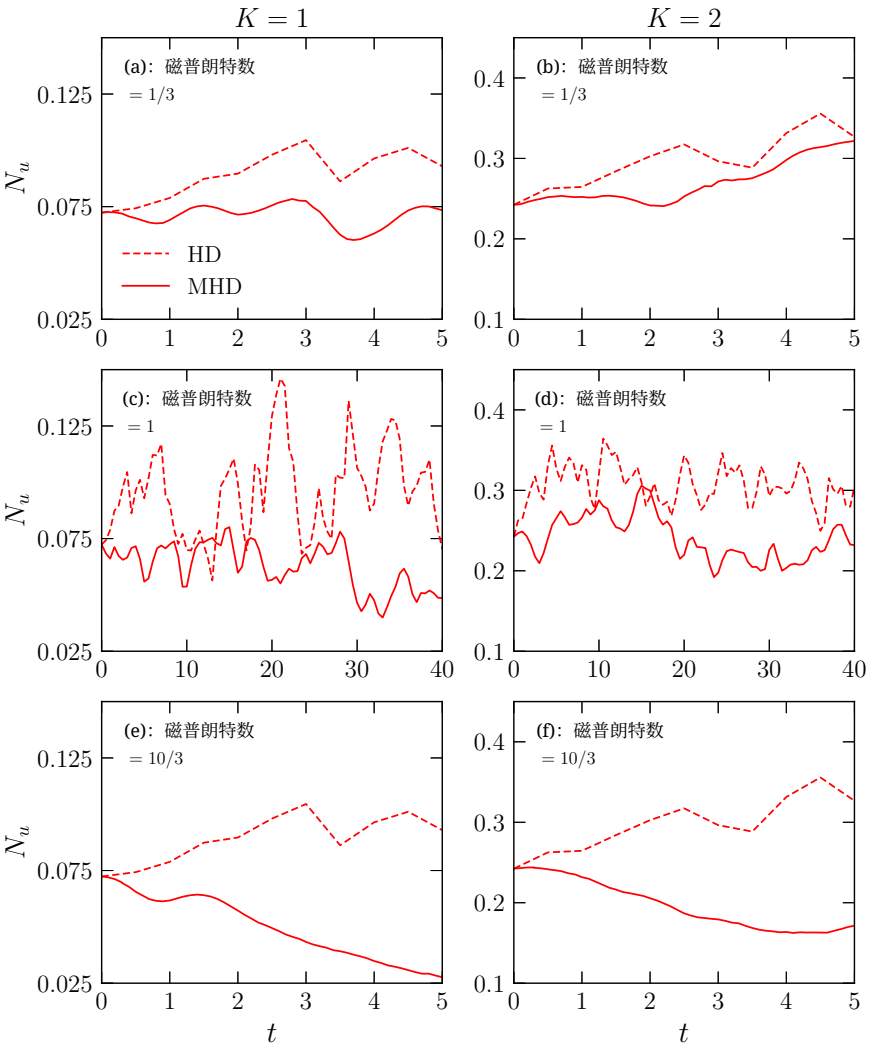


图 15 (a、b、c) 流体动力学模拟（红色虚线）和磁流体力学模拟（红色实线）中，磁普朗特数为 $= 1/3$，1，$10/3$时，半径分别为 (a) $K = 1$和 (b) $K = 2$ 的球体的非线性项（N_u）时间序列图。

¯列于表 1。我们观察到，对于磁普朗特数为 C_{d2}（$K = 1$）和 10/3 的磁流体力学模拟，$= 1/3$ 比雷诺数为 $t \gtrsim 2$时的流体动力学模拟更小。对于¯其他情况，C_{d2} 磁流体力学模拟中的值大于流体动力学模拟中的值。

因此，对于 $1/3 \leq \mathrm{Pm} \leq 10/3$, Π_u 和 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}|\rangle$，磁流体力学模拟的结果小于相应流体动力学模拟的数值。对于 $K = 1$，当 Pm 为 $=$ 1/3 和 10/3 时，阻力¯系数 C_{d2} 呈现类似的行为，但当¯Pm 为 $=$ 1时则并非如此。这与 C_{d1}形成对比，后者在磁流体力学模拟中的数值通常大于相应流体动力学模拟中的数值。

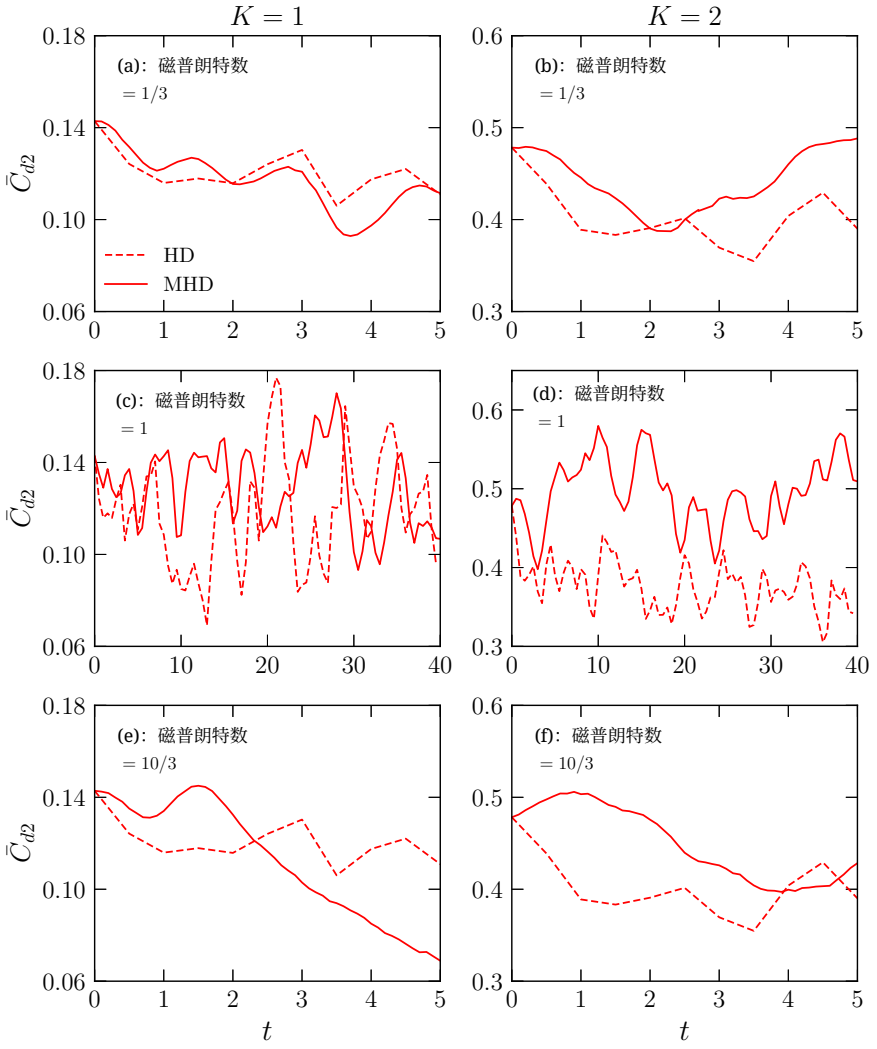


图 16 (a,b,c) 半径为 (a)$K = 1$和 (b) $K = 2$ 的球体的减阻系数 $\bar{C}_{d2}$ 的时间演化：流体动力学湍流（红色虚线）和磁流体湍流（红色实线），磁普朗特数 Pm $= 1/3$，1，$10/3$。

我们将在第 8 节展示，准静态磁流体湍流（对应于 Pm $= 0$）的 U 大于相应的流体动力学湍流。因此，我们预计，磁普朗特数极小的磁流体动力学模拟将产生大于相应流体动力学模拟的 U。这一猜想有待未来验证。此外，发电机模拟显示，在大尺度磁场形成时，U 会有所增强（见第7节）。我们将在后续章节讨论这些问题。

总之，与流体动力学湍流相比，磁流体湍流的直接数值模拟显示， $\Pi_u(k)$和$\langle|(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}|\rangle_{\mathrm{LS}}$均有所降低。然而，在磁流体力学模拟中，我们没有观察到 U 增强，至少在 $1/3 \leq$ 磁普朗特数 $\leq 10/3$的情况下是如此。我们猜想，磁普朗特数非常小的磁流体力学模拟可能会显示 U增强。

在上述关于磁流体湍流中湍流减阻的直接数值模拟结果的讨论之后，我们将在下一小节讨论磁流体湍流壳层模型中的湍流减阻。

6.2 磁流体湍流壳层模型中湍流减阻的数值验证

与直接数值模拟相比，壳层模型的变量少得多，因此计算速度更快。因此，壳层模型常用于研究湍流，尤其是在极端参数条件下。从用于流体动力学湍流的 Gledzer- Ohkitani-Yamada (GOY壳层模型) 开始 [67–69], 研究人员已为磁流体湍流开发了若干壳层模型 [70–73]。在本小节中，我们报告磁流体湍流壳层模型中的湍流减阻 [11]。Verma等人 采用经过修订的 GOY 壳层模型，计算了流体动力学和磁流体力学模拟中的阻力和非线性项。他们表明，与流体动力学湍流相比，磁流体湍流中的湍流阻力确实有所降低。

在湍流壳层模型中，一个波数壳层内的所有傅里叶模态都由单个变量表示。具有 N 个壳层的磁流体动力学壳层模型包含 N 个速度壳层变量和 N 个磁场壳层变量，它们之间存在非线性耦合。相应的流体动力学壳层模型包含 N 个速度壳层变量。在本小节中，我们介绍 Verma等人 [11]的壳层模型结果。

Verma等人 [11] 采用了一个含 36 个壳层的壳层模型，并在壳层 $n = 1$ 和 2 上施加随机强迫，使动能注入率保持恒定 [74]。他们进行了三组流体动力学和磁流体动力学模拟，动能注入率分别为 $\epsilon_{\mathrm{inj}} = 0.1$、1。0 和 10。0，以及 $\nu = \eta = 10^{-6}$。在时间积分中，他们采用固定的四阶龙格–库塔（RK4）格式Δt。对于 $\epsilon_{\mathrm{inj}} = 0.1$ 和 1。0，他们选择了 $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$；而对于 $\epsilon_{\mathrm{inj}} = 10.0$，他们取 $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$。数值结果总结于表 2。他们进行了流体动力学和磁流体动力学模拟，持续时间达到 1000 个涡周转时间。有关模型和数值方法的更多细节，请参阅 Verma 等人[11]。

流体动力学和磁流体动力学的数值模拟分别在约 200 个涡周转时间后达到稳态。有趣的是，Verma 等人 [11]观察到，对于相同的 ϵ_{inj}，磁流体湍流的动能和 U 大于流体动力学湍流中的对应值（见表2）。这些观察清楚地表明，与流体动力学湍流相比，磁流体湍流中的 U 有所增强，稀聚合物湍流也有类似情况。

与流体动力学模拟相比，磁流体力学模拟中的 U 增加源自能谱。Verma等人 [11] 计算了平均动能谱$E_u(k)$，涵盖流体动力学模拟和磁流体力学模拟。这些谱如图17所示，呈现出 Kolmogorov $k^{-5/3}$ 谱。对于给定的ϵ_{inj}, $E_u(k$流体动力学模拟和磁流体力学模拟的图几乎相互重合，但小波数处除外

表2 对于 $\epsilon_{\rm inj}=0.1$，1.0、10.0 条件下的流体动力学和磁流体湍流壳层模型模拟，惯性区动能通量的数值 Π_u、均方根速度 U，$\langle|\quad\cdot\nabla\quad|\rangle=\sum_n|N_n[u,u]|^2\ ^{1/2}$ $\bar{C}_{d1}$ $\bar{C}_{d2}$ [11] $(\mathbf{u}\,)\mathbf{u}()$,,and . 。

	$\epsilon_{\rm inj}$	Π_u	U	$\langle\|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\|\rangle$	$\bar{C}_{d1}$	$\bar{C}_{d2}$
HD	0.1	0.1	0.87	8.77	0.15	11.6
MHD	0.1	0.02	0.92	4.17	0.026	4.93
HD	1.0	1.0	1.88	47.48	0.15	13.4
MHD	1.0	0.21	2.02	23.79	0.026	5.83
HD	10.0	10.0	3.95	271.88	0.16	17.4
MHD	10.0	2.06	4.33	136.44	0.025	7.28

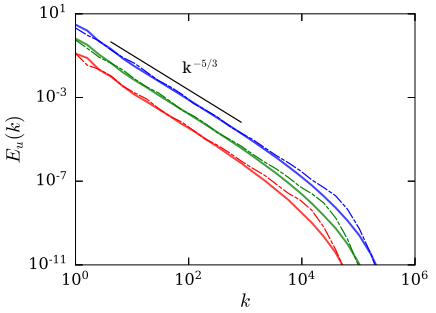


图 17 壳层模型模拟的动能谱 $E_u(k)$，其中 $\epsilon_{\rm inj}=0.1$（红色）、$\epsilon_{\rm inj}=1.0$（绿色）和 $\epsilon_{\rm inj}=10.0$（蓝色）。虚线和实线分别表示磁流体动力学和流体动力学模拟的 $E_u(k)$。Kolmogorov 的 $-5/3$ 标度关系（黑色）与所有模拟在惯性区内均吻合良好。摘自 Verma *et al.* [11]。经美国物理联合会许可转载。

其中，$E_u(k)$ 在磁流体力学模拟中大于对应的流体动力学模拟。由于能量集中在小波数处，我们观察到 $U_{\rm MHD}>U_{\rm HD}$。这与第 6 节的直接数值模拟结果截然相反；在该节中，U 和 $E_u(k)$ 在磁普朗特数适中的磁流体力学模拟中，小于流体动力学模拟中的对应值。然而，在发电机模拟中，我们确实观察到，磁流体湍流的 U 可能大于流体动力学湍流中的对应值；这一问题将在下一节讨论。

接下来，Verma等人 [11]利用壳层模型的数值数据，通过以下方式估算了流体动力学模拟和磁流体力学模拟中（$\mathbf{u}\cdot\nabla$）$\mathbf{u}$ 的均方根值：

$$\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle=\left(\sum_n|N_n[u,u]|^2\right)^{1/2}. \tag{84}$$

为了抑制涨落，我们对大量状态进行了平均。如2表 $\langle|$（$\mathbf{u}\cdot\nabla$）$\mathbf{u}|\rangle$ 磁流体力学模拟中的值受到抑制

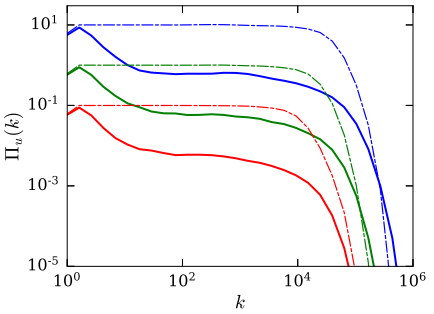


图 18 的图 $\Pi_u(k)$，对应 $\epsilon_{\rm inj} = 0.1$ (红色)、 $\epsilon_{\rm inj} = 1.0$ (绿色)和 $\epsilon_{\rm inj} = 10.0$ (蓝色)。虚线表示流体动力学模拟中的 $\Pi_u(k)$，而实线表示磁流体力学模拟中的对应曲线。引自 Verma 等人 *et al.* [11]。经美国物理联合会许可转载。

与相应的流体动力学模拟相比。这些结果进一步证实，非线性 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$ 严重依赖于傅里叶模态的相位；较大的 U 并不一定意味着较大的 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$。我们指出，对于估算 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$，对较小的 n 取平均会更合适，DNS中便采用了这种做法。

Verma 等人 [11] 还计算了流体动力学模拟和磁流体力学模拟 [37, 73]中的平均动能通量。这些通量如图 18 所示，其稳态下的平均值列于表2中。图中显示，对于给定的$\epsilon_{\rm inj}$，磁流体力学模拟的动能通量低于相应的流体动力学模拟。这与 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$受到抑制的情况一致；较低的 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$ 会导致较低的¯ ¯动能通量。此外，我们使用表2中的数值计算了 C_{d1} 和 C_{d2} – $L = 1$。显然，磁流体力学模拟中的 C_{d1} 和 C_{d2} 低于相应流体动力学模拟中的值，这表明磁流体湍流中存在湍流减阻。

因此，直接数值模拟和壳层模型的结果表明，与流体动力学湍流相比，磁流体湍流的 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$ 和 $\Pi_u(k)$ 均较低。这些结果表明，磁流体湍流中存在湍流减阻。不过请注意，在直接数值模拟中， U 磁流体力学模拟在 $1/3 \leq$ 磁普朗特数 $\leq 10/3$ 下的数值小于 U 相应流体动力学模拟的数值；而在壳层模型中，情况则恰好相反。正如第6节所述，我们预计， U 磁普朗特数极小的磁流体力学模拟中的数值会大于U 流体动力学模拟中的数值。

下一节将介绍发电机中的湍流减阻。

7 发电机中的湍流减阻

天体物理对象中的磁场生成，或称发电机过程，是磁流体动力学的一个重要分支。在发电机过程中，速度场由机械力驱动，或由温度和/或浓度梯度诱发的对流驱动。旋转也在发电机过程中发挥重要作用。关于发电机已有许多书籍和论文，例如参见 [24, 25]。本节仅讨论少数与湍流减阻相关的发电机研究。

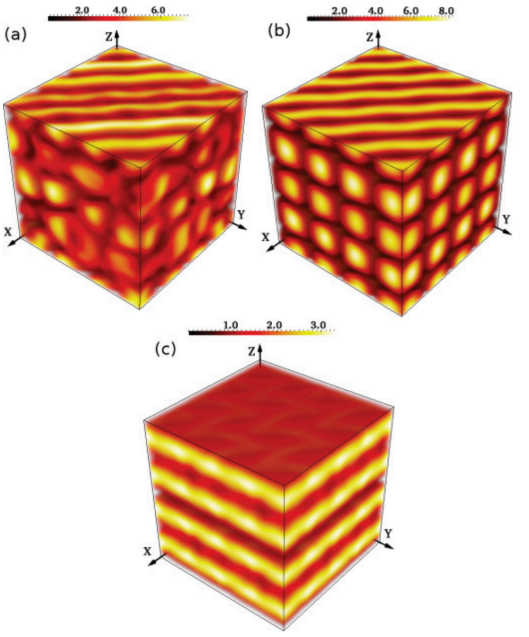


图 19 对于驱动振幅为 $F_0 = 15.2$ 的泰勒-格林发电机，(a) 无发电机状态下空间混沌速度场的三维图；(b) 在有限平均磁场存在时，混沌受到抑制而形成的发电机状态所对应的有序速度场；(c) 有序磁场。引自 Yadav *et al.* [27]。经美国物理学会许可转载。

Yadav 等人 [27] 模拟了磁普朗特数 $\mathrm{Pm} = 0.5$ 时的泰勒-格林发电机。他们报告了许多有趣的特性，包括次临界发电机转变，以及稳态、周期、准周期和混沌发电机状态。我们来关注这一发电机中一个与湍流减阻相关的有趣特征。图 19 展示了速度场和磁场强度的大小，外力振幅为 $F_0 = 15.2$。在发电机转变之前，如图 19(a) 所示，速度场具有很强的湍流特性。然而，在发电机转变之后，也就是磁场出现之后，如图 19(b、c) 所示，速度场和磁场都变得比图 19(a) 中的纯流体动力学状态更有序。Yadav 等人 在其他若干个 F_0 中也观察到了类似特征。例如，在 $F_0 = 15.8$，磁场出现后，速度涨落受到抑制，速度场和磁场变得相当协调（见图 20）。速度场变得有序，类似于聚合物使管流中的平均速度增强。

与具有极端参数下旋转和热对流的球形地球发电机及太阳发电机相比，Yadav 等人 [27]上述数值模拟在一定程度上是理想化的。有趣的是，球形发电机与泰勒-格林发电机具有某些共同特征。如图 21所示，球形发电机的速度场 [28] 呈垂直柱状排列，这

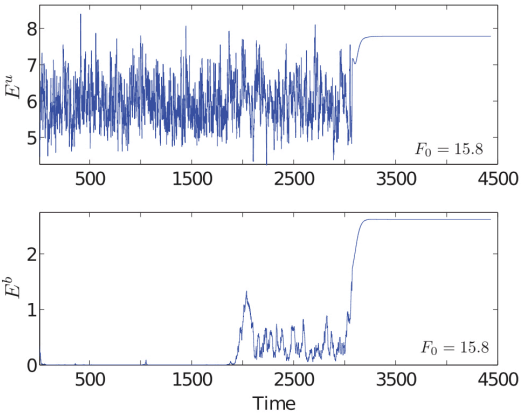


图 20 泰勒-格林发电机的总动能（上图）和总磁能（下图）曲线，其中 $F_0 = 15.8$。发电机启动后，我们观察到有序的速度场和磁场（时间 > 3000 单位）。引自 Yadav *et al.* [27]。经美国物理学会许可转载。

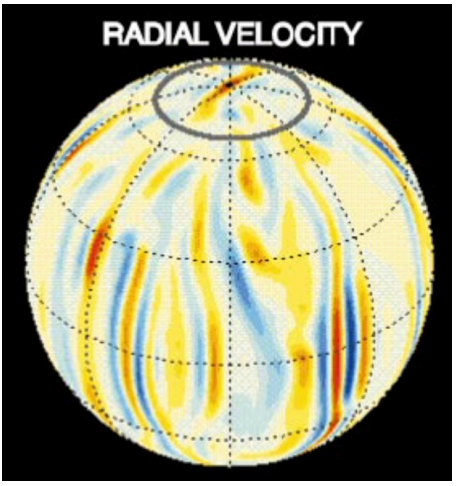


图 21 Olson等人对地球发电机进行数值模拟所得的速度场径向分量 [28]。引自 Olson等人 [28]。经约翰·威立父子公司许可转载。

也是旋转湍流的一个特征 [29, 75]。热对流和磁场也可能有助于流动的结构组织；不过，这一特征仍需仔细考察。

尽管 $\langle|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|\rangle$ 以及发电机中的能量通量已得到广泛研究（例如，[25, 42, 58]），但尚未对发电机中的湍流减阻进行详细分析。希望未来能够对发电机中的湍流减阻开展系统研究。

下一节中，我们将介绍准静态磁流体湍流中的湍流减阻。

8 通过能量通量研究准静态磁流体湍流中的湍流减阻 x

液态金属的磁普朗特数（Pm）较小，因此使用准静态磁流体动力学方程来描述。这些方程是磁流体力学方程的一种极限情况 [20, 21, 76]。在强外加磁场 $\mathbf{B}_0$ 下，准静态磁流体动力学方程为 [20, 21, 76]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla(p/\rho) - \frac{\sigma}{\rho}\Delta^{-1}[(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)^2\mathbf{u}] + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \tag{85}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{86}$$

其中，σ 是电导率，Δ^{-1} 是逆拉普拉斯算子。在傅里叶空间中，准静态磁流体动力学方程的无量纲形式为

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{k}) = -i\sum_{\mathbf{p}}\{\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{q})\}\mathbf{u}(\mathbf{p}) - i\mathbf{k}p(\mathbf{k})/\rho - N(\cos^2\theta)\mathbf{u}(\mathbf{k}) - \nu k^2\mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}), \tag{87}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0, \tag{88}$$

其中，N 是相互作用参数，θ 是波数$\mathbf{k}$ 与$\mathbf{B}_0$之间的夹角。相互作用参数 N 是洛伦兹力与非线性项（$\mathbf{u}\cdot\nabla$）$\mathbf{u}$之比，或

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}. \tag{89}$$

利用方程（87），我们推导出模态能量方程如下

$$\frac{d}{dt}E_u(\mathbf{k}) = T_u(\mathbf{k}) - 2NE_u(k)\cos^2\theta + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\mathbf{k}) - D_u(\mathbf{k}), \tag{90}$$

其中 $T_u(\mathbf{k})$ 在方程（10）中定义，而洛伦兹项引起的耗散为 [21, 76]

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = -2NE_u(\mathbf{k})\cos^2\theta < 0. \tag{91}$$

因此，磁场会在准静态磁流体力学湍流中引入额外的耗散。

方程（91）表示在波数 $\mathbf{k}$ 处从速度场向磁场的能量传递。将 $\mathcal{F}_u$（$\mathbf{k}$）在半径为 K 的波数球上求和，可得能量通量 Π_B（K）：

$$\Pi_B(K) = -\sum_{k\le K}\mathcal{F}_u(\mathbf{k}) = \sum_{k\le K}2NE_u(\mathbf{k})\cos^2\theta > 0. \tag{92}$$

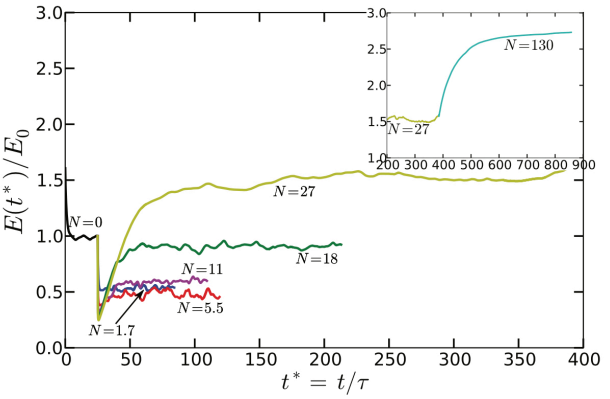


图 22 根据 Reddy 和 Verma 对准静态磁流体湍流进行的数值模拟，[22]，归一化动能的时间序列，$E(t)/E_0$，对于 $N = 5.5$，11，18，27，130，其中 E_0 是 $N = 0$ 数值模拟最终状态下的能量。对于每个 N，施加外加磁场后，动能骤然下降，随后逐渐增加并达到统计稳态值。所有 $N > 18$ 的模拟，其渐近动能均大于 E_0。引自 Reddy 和 Verma [22]。经美国物理联合会许可转载。

因此，洛伦兹力将动能传递给磁能，而磁能随即通过焦耳耗散耗散掉；这一特征是由 Pm $= 0$ 所致。因此，对于注入率 $\epsilon_{\rm inj}$，准静态磁流体力学模拟的 $\Pi_u(K)$ 比相应流体动力学模拟的 $\Pi_u(K)$ 受到抑制。因此，在惯性区，

$$\Pi_u < \epsilon_{\rm inj}. \tag{93}$$

因此，按照前文各节的相同论证思路，我们推断准静态磁流体湍流中的湍流阻力会受到抑制。此外，与相应的流体动力学模拟相比，磁流体力学模拟中的速度场随机性更弱（或更有序），因此会抑制 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$。因此，我们预计准静态磁流体湍流中的湍流阻力小于相应的流体动力学情形。接下来，我们将介绍与上述预测一致的数值结果。

Reddy 和 Verma [22] 在周期性盒子中模拟了准静态磁流体湍流，参数 N 范围为 1.7 至 220。他们采用了恒定的动能注入率 0.1（以无量纲单位表示）。事实上，磁场 $\mathbf{B}_0$ 是在初始流体动力学模拟充分发展后才开启的。引入 $\mathbf{B}_0$，后，动能首先因焦耳耗散而骤降，随后因流动重组而增加。如图 22所示，当 $N > 18$时，总动能大于对应的流体动力学情形（$N = 0$）。在此 N范围内，流动变得准二维，具有更大的 U，且湍流阻力受到抑制。这有悖直觉，因为我们预期动能会随着焦耳耗散的增加而降低。然而，流动重组会增强U 流动中的动能和湍流减阻。

在表3中，我们列出了均方根速度 U 随 N变化的情况。显然，U 随 N 单调增加，因为 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$ 和湍流阻力会随之减小

表 3 在 Verma 和 Reddy 对准静态磁流体力学湍流进行的数值模拟中，[77]，均方根速度（U）随不同 N's 变化。显然，U 随着 N的增加而增大。

N	1.7	18	27	220
U	0.39	0.51	0.65	0.87

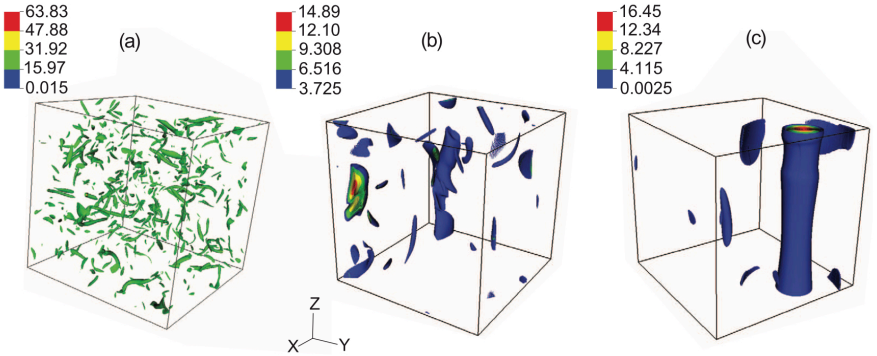


图 23 根据 Reddy 和 Verma 对准静态磁流体力学湍流进行的数值模拟，[22]，给出了（a）N $= 0$、（b）N $= 5.5$ 和（c）N $= 18$时的涡量等值面。随着 N的增加，流场变得各向异性且更加有序。当 $N = 18$时，我们观察到一个涡管。引自 Reddy 和 Verma [22]。经美国物理联合会许可转载。

随着 N的增加。在图 23 中，我们展示了 $N = 0$、5。5、以及 18 时的涡量等值面。如图所示，随着 N的增加，流动变为准二维且更加有序。

上述结果再次表明，较大的 U 并不一定意味着较大的 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$，因为非线性项取决于 U 以及速度模态之间的相位关系。在准静态磁流体湍流中，即使 U较大，二维化也会导致 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$ 减小。不过请注意，要确凿地证明准静态磁流体湍流中的减阻，我们仍需对流体动力学湍流和准静态磁流体湍流中的 Π_u 与 $\langle|(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}|\rangle$进行比较研究。

湍流通量减小是实现减阻的重要因素。需要注意的是，层流准静态磁流体中不会出现这种减小；在这种情况下，洛伦兹力会进一步抑制流动。我们以槽道流为例说明这一观点。在流体动力学槽道流中，管道中心处的最大速度为（见图 2）[13, 39]

$$U_{\mathrm{HD}} = -\frac{d^2}{2\nu\rho}\left(\frac{dp}{dx}\right), \tag{94}$$

其中 d 是通道的半宽（见图 2）。然而，在层流准静态磁流体流动中，相应的速度为 [20, 76, 78]

$$U_{\mathrm{QSMHD}} = -\frac{1}{\sigma B_0^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right). \tag{95}$$

两个速度之比为

$$\frac{U_{\mathrm{QSMHD}}}{U_{\mathrm{HD}}} = \frac{2\nu\rho}{\sigma B_0^2 d^2} = \frac{1}{\mathrm{Ha}^2}, \tag{96}$$

其中 Ha 为哈特曼数，对于准静态磁流体力学流动，其值远大于 1。因此，层流准静态磁流体中的速度远小于流体力学通道中的速度。相比之下，在准静态磁流体力学湍流中，U 随 N 增大。因此，减阻是一种非线性现象，在湍流中清晰可见。

下一节将介绍湍流减阻的另外几个例子。

9 其他系统中的湍流减阻

本节将简要介绍稳定分层湍流、光滑表面上的湍流减阻，以及湍流对流中的湍流减阻。

9.1 稳定分层湍流中的湍流减阻

许多自然界和实验室流动都呈稳定分层状态，较轻的流体位于较重的流体上方，重力方向朝下。在布oussinesq近似下，稳定分层流动的控制方程为 [13, 29, 30, 79]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - \Omega\rho\hat{\mathbf{z}} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_{\mathrm{LS}}, \tag{97}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho = \Omega u_z + \kappa\nabla^2\rho, \tag{98}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{99}$$

其中，p 表示压力，ρ 表示以速度为单位的密度涨落，$-\Omega\rho\hat{}\mathbf{z}$ 表示浮力，而 Ω 为布伦特-维¨赛¨拉¨频率，其定义为 [29, 79]

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\rho_m}\left|\frac{d\bar{\rho}}{dz}\right|}. \tag{100}$$

这里，ρ_m 是整个流体的平均密度，$d\bar{\rho}/dz$ 是平均密度梯度，g 是重力加速度。我们通过变换 $\rho \to \rho g/(\Omega\rho_m)$ 将密度转换为速度单位。比值 ν/κ 称为施密特数，记为 Sc。理查森数 Ri 是一种

无量纲数，用于量化浮力与非线性项（$\mathbf{u}\cdot\nabla$）$\mathbf{u}$的比值。

对于周期性或消失边界条件，且不存在耗散项时，总能量，

$$E_u + E_\rho = \int d\mathbf{r}\frac{1}{2}u^2 + \int d\mathbf{r}\frac{1}{2}\rho^2, \tag{101}$$

守恒 [29, 40, 79, 80]。这里， E_ρ 可解释为总势能。已有研究表明，在惯性区内，相关能量通量遵循以下守恒定律 [40, 81]:

$$\Pi_u + \Pi_\rho = \text{const} = \epsilon_{\text{inj}}, \tag{102}$$

其中， Π_ρ 为势能通量，ϵ_{inj} 为动能注入率。注意，在稳态下， Π_ρ 等于从速度场向密度场的能量传递率。利用流动的稳定性，我们可以论证 $\Pi_\rho > 0$ [29, 30, 40, 81]。

稳定分层湍流的性质在很大程度上取决于密度梯度或理查森数。对于中等密度梯度（Ri ≈1），Bolgiano [82] 和 Obukhov [83] 认为， Π_ρ 为正且为常数，而 $\Pi_u(k) \sim k^{-4/5}$。理查森数较小时，其标度关系更接近被动标量湍流 [84],，但理查森数较大时，流动会变为准二维 [29, 30]。这里，我们仅展示一个数值结果。Kumar等人 [85] 模拟了 Sc $= 1$ 且 Ri $= 0.01$ 的稳定分层湍流，并观察到在惯性区内， $\Pi_\rho(k)$ = 常数（> 0），且 $\Pi_u(k) \sim k^{-4/5}$。图24给出了示意图。研究人员还观察到，对于较小和较大的 Ri 值， $\Pi_\rho > 0$ [29, 80, 84]。

利用 $\Pi_\rho(k) > 0$，根据第3节所述的论证，我们认为，在稳定分层湍流中，湍流阻力将会减小。也就是说，对于相同的动能注入率ϵ_{inj}， $\Pi_u(k)$ 以及 $\langle\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$而言，稳定分层湍流中的值将小于流体动力学湍流中的对应值。我们指出，上述基于通量的论证与 Narasimha 和 Sreenivasan 的观测结果一致， [38] 他们认为稳定分层湍流会再层流化。

在下一小节中，我们将讨论光滑钝体所经历的湍流减阻。

9.2 光滑钝体上的湍流减阻

如第2节所述，在雷诺数较大时，钝体会受到湍流阻力。模型、实验和数值模拟表明，空气动力学物体所受的湍流阻力由黏性阻力 和 逆压梯度 [13–15]共同构成。工程师设计了巧妙的方法来减小这种阻力，但这些方法超出了本文的讨论范围。

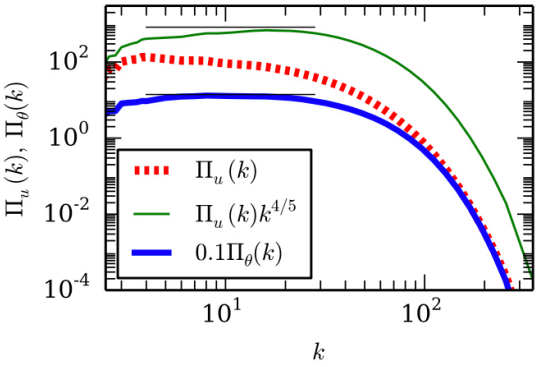


图24 Sc $=1$ 和 Ri $=0.01$ 条件下的稳定分层模拟：动能通量 $\Pi_u(k)$、归一化动能通量 $\Pi_u(k)k^{4/5}$ 以及势能通量 $\Pi_\rho(k)$（图中表示为 $\Pi_\theta(k)$）。引自 Kumar *et al.* [85]。经美国物理学会许可转载。

方程（17）表明，钝体所受的湍流阻力由惯性力、黏性力和逆压梯度共同构成。不过，对于翼型和汽车等钝体，主要贡献来自黏性阻力和逆压梯[14, 15]度。然而需要注意的是，光滑表面上方的主体流动具有各向异性，并且包含表面性质的特征。因此，¯非线性项 $\langle|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|\rangle$ 以及阻力系数 C_{d2} 可能有助于深入理解钝体的湍流减阻。Narasimha 和 Sreenivasan [38]对多种流动进行了此类分析。在下一小节中，我们将运用上述思路解释湍流热对流中的湍流减阻。

9.3 湍流热对流中的湍流减阻

湍流对流具有与湍流减阻相关的有趣特性。本小节考察瑞利–贝纳德对流（RBC），这是一种理想化构型，由夹在两块热传导板之间的薄流体层组成，两板相距 d。底板和顶板的温度分别为 T_b 和 T_t，其中 $T_b > T_t$。

布oussinesq近似下热对流的方程为 [86]

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\alpha gT\hat{\mathbf{z}}+\nu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{103}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)T=\kappa\nabla^2T, \tag{104}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0, \tag{105}$$

其中，T 是温度场；α，κ 分别是流体的热膨胀系数和热扩散率；g 是重力加速度。湍流热对流的两个重要参数是

热普朗特数 $\mathrm{Pr} = \nu/\kappa$ 和瑞利数，

$$\mathrm{Ra} = \frac{\alpha g d^3 (T_b - T_t)}{\nu\kappa}. \tag{106}$$

在湍流热对流中，速度场通过浮力从温度场获得能量。需要注意的是，热羽流驱动热对流。这一特点与聚合物湍流、磁流体湍流和稳定分层湍流中的情况相反；在那些湍流中，速度场会向次级场损失能量。然而，湍流对流中也存在湍流减阻的特征，这是由光滑的热板造成的。因此，湍流热对流中的湍流减阻机制不同于聚合物湍流、磁流体湍流和稳定分层湍流中的机制。

下面列出一些与热对流中湍流减阻相关的研究结果。

1. Kraichnan [87]认为，瑞利数非常大时，湍流热对流将变为完全湍流，或达到终极区间 。在这一渐近状态下，壁面的影响预计会消失，类似于流体动力学湍流主体区域中边界效应的消失 [35, 36, 88]。Kraichnan [87] 预测，在终极区间中，努塞尔数 $\propto$ 瑞利数$^{1/2}$ 。然而，实验观测和数值模拟显示，当瑞利数 10^{13} $\sim$ $^{\beta}$ β 0 29 0 33 [30, 89, 90] $\lessapprox$ 时，努塞尔数 瑞利数，指数范围为 . 至 . 。努塞尔数指数从 1/2 降至约 0.30，归因于光滑热板、边界层及其他复杂特性对热通量的抑制 [30, 89–92]。

2. Pandey等人 [31] 对瑞利–贝纳德对流进行了数值模拟，研究了普朗特数为 $= 1$ 、瑞利数范围为 10^6 至 5×10^8的情况，并表明

$$\frac{\text{Nonlinear term}}{\text{Viscous term}} = \frac{|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|}{|\nu\nabla^2\mathbf{u}|} \sim \mathrm{ReRa}^{-0.14}. \tag{107}$$

注意，上述比值对于流体动力学湍流而言就是雷诺数。因此，在大瑞利数下，湍流热对流中的非线性（$\langle|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|\rangle$）受到抑制。

3. Pandey等人 [31] 和 Bhattacharya等人 [32, 93] 表明，黏性耗散率（ϵ_u）和热耗散率（ϵ_T）取决于瑞利数和普朗特数，并且 ϵ_u 和 ϵ_T 相较于流体动力学湍流受到抑制。对于中等普朗特数和较大瑞利数，

$$\epsilon_u \sim \frac{U^3}{d}\mathrm{Ra}^{-0.2}, \tag{108}$$

$$\epsilon_T \sim \frac{U(T_b - T_t)^2}{d}\mathrm{Ra}^{-0.2}. \tag{109}$$

有趣的是，对于较小的普朗特数， $\epsilon_u \sim U^3/d$ 其对瑞利数的依赖修正非常小 [32, 93]。示意见图25。

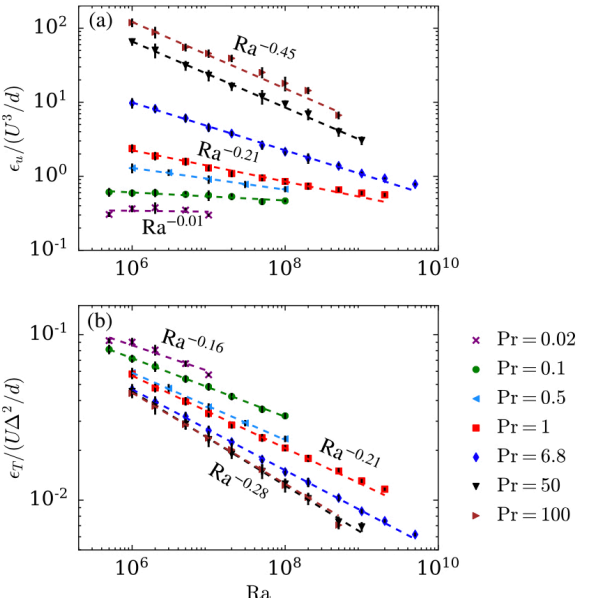


图 25 展示黏性耗散率和热耗散率对瑞利数和普朗特数依赖关系的图。对于中等普朗特数，ϵ_u，$\epsilon_T \sim$ 瑞利数$^{-0.20}$。引自 Bhattacharya 等人 [32]。经美国物理联合会许可转载。

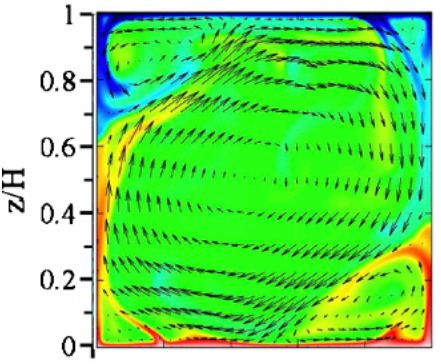


图 26 Sugiyama *et al.* [95] 在二维瑞利–贝纳德对流中观测到的大尺度环流。箭头表示速度场，颜色表示流体的温度，其中红色表示热流体，蓝色表示冷流体。引自 Sugiyama *et al.* [95]。经美国物理学会许可转载。

众所周知，湍流对流中存在大尺度环流（LSC）（见图26） [94–98]。如下文所示，瑞利–贝纳德对流中的非线性（$\langle|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|\rangle$）抑制和湍流阻力与这种大尺度环流及光滑壁面有关。

如图所示26，顶板和底板附近的流动与平板附近的流动相似。大尺度环流沿

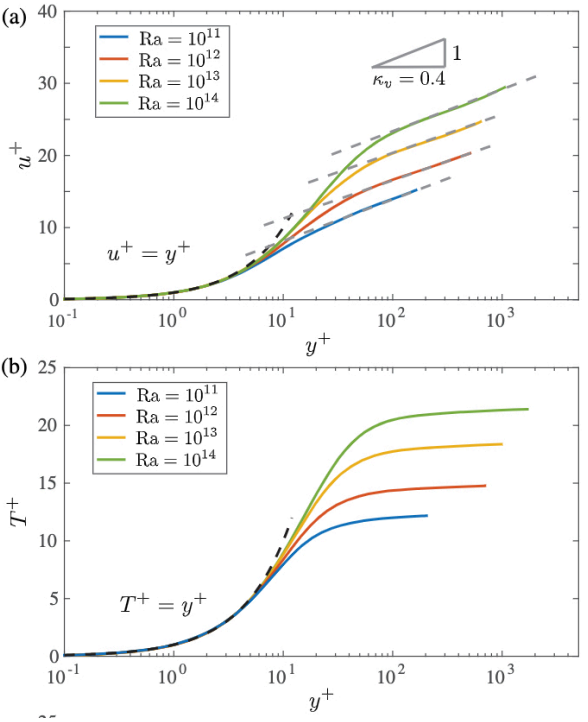


图 27 在 Zhu 的数值模拟中 *et al.* [99]，不同 Ra 下以壁面单位表示的速度 (a) 和温度 (b) 剖面。虚线表示黏性底层和对数层。速度场中可观察到对数层，但温度场中没有。引自 Zhu *et al.* [99]。经美国物理学会许可转载。

垂直壁面运动，但沿热板水平运动。然而，对于典型的瑞利–贝纳德对流流动，大尺度环流的水平延伸范围小于平板绕流中的水平延伸范围。研究者认为，当瑞利数（Ra $\gtrapprox 10^{13}$）较大时，边界层会转变为对数层，这是从黏性边界层向湍流边界层转变的特征，与平板绕流的情况相同 [12–14, 30, 89]。例如，Zhu 等人 [99] 对二维瑞利–贝纳德对流进行了模拟，并指出，在黏性层上方，归一化速度场随归一化垂直距离呈对数变化。具体而言，Zhu 等人[99] 观察到 $u^+ \propto \log(y^+)$，其中 $y^+ \gtrapprox 10$ （见图 27）。不过请注意，热边界层并未呈现向对数层的转变 [99]。其他一些实验也表现出类似行为 [100]。

由于湍流热对流的边界层具有与平板上方边界层相似的性质，我们可以认为，湍流对流中的非线性 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$受到抑制。这就是湍流热对流中的耗散率和湍流阻力小于流体动力学湍流中相应数值的原因。Verma 等人 [101] 研究了相关性 $\langle u_z \theta \rangle$，其中 θ 为温度涨落，并指出，对于

中等普朗特数，

$$\langle u_z\theta\rangle = \sqrt{\langle u_z^2\rangle}\sqrt{\langle\theta^2\rangle}(\mathrm{PrRa})^{-0.22}. \tag{110}$$

注意，$\sqrt{\langle u_z^2\rangle} \approx$ 瑞利数$^{1/2}$ 和 $\sqrt{\langle\theta^2\rangle} \approx (\Delta T)$。因此，对上述方程进行修正（普朗特数瑞利数）$^{-0.22}$ 可得 $\langle u_z\theta\rangle \sim$ 瑞利数$^{0.28}$ 或努塞尔数 $\sim$ 瑞利数$^{0.28}$。Verma等人 [30, 101] 认为，当瑞利数非常大时，修正项将消失，流动将趋近于终极区间，此时 $\langle u_z\theta\rangle \sim$瑞利数$^{1/2}$ 或努塞尔数 $\sim$ 瑞利数$^{1/2}$。

然而需要注意的是，目前尚无实验或数值模拟能够达到终极区间，因此终极区间目前仍然只是一种猜想 [90, 99, 102, 103]，尽管若干实验和数值模拟报告称，系统发生了向终极区间的转变，努塞尔数指数最高达到 0.38（但低于 1/2） [99, 102]，而另一些研究则认为并未发生向终极区间的转变 [90, 103]。值得注意的是，对于粗糙热板，由于粗糙度增强了湍流，热输运也随之增强 [104]。

采用周期性边界条件的瑞利–贝纳德对流由于不存在边界层而表现出 $\mathrm{Nu} \propto \mathrm{Ra}^{1/2}$ [101, 105]。此外，普朗特数较小的瑞利–贝纳德对流也表现出与采用周期性边界条件时相似的性质。这是因为在这两种系统中，主体区域内的温度梯度都是线性的 [93, 106]。

总之，与流体动力学湍流相比，湍流热对流中的非线性（$\langle|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}|\rangle$）和动能通量受到抑制。这种抑制主要是由光滑壁面造成的，并进而使热对流中的湍流减阻成为可能。

10 讨论与结论

实验和数值模拟表明，含有稀聚合物的湍流会出现湍流减阻。边界层、聚合物性质以及流动的主体性质等多种因素都会影响这一现象 [1–11]。这一领域有许多有趣的研究，不过本文综述重点关注主体湍流对湍流减阻的作用。存在聚合物时，动能通量 $\Pi_u(k)$ 会受到抑制。这种降低 $\Pi_u(k)$ 会导致非线性 $\langle\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$ 和湍流阻力受到抑制。

磁流体湍流表现出与聚合物湍流非常相似的行为 [11]。这里，$\Pi_u(k)$也受到抑制，因为注入的动能有很大一部分被传递到磁场中。因此，在磁流体湍流中，$\langle\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$ 和湍流阻力均受到抑制。在大尺度注入相同动能率的条件下，磁流体湍流的 $\Pi_u(k)$和 $\langle\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\rangle$ 均小于流体动力学湍流中的相应量。这些性质已在直接数值模拟和壳层模型中得到验证。

稳定分层湍流的动能通量 $\Pi_u(k)$ 相较于流体动力学湍流也有所减弱。因此，我们预计稳定分层湍流会发生湍流减阻。Narasimha 和 Sreenivasan [38] 也有类似发现。我们需要进行详细的数值模拟来验证上述说法。一个值得

注意的点是，对于上述三种流动，

$$\Pi_u(k) + \Pi_B(k) = \text{const} = \epsilon_{\text{inj}}, \tag{111}$$

其中 $\Pi_B(k)$ 表示与次级场相关的能量通量 B，次级场可以是聚合物、磁场或密度。方程（111）中通量总和保持恒定，是由于系统 [29, 40, 81] 的稳定性。上述恒定性还体现了注入的大尺度动能重新分配至：(a) 中间尺度的速度场，以及 (b) 次级场。正值 Π_B 意味着 $\Pi_u(k) < \epsilon_{\text{inj}}$，从而使流动产生湍流减阻。因此，湍流减阻与方程（111）的守恒定律密切相关。

湍流减阻的另一个重要特征是，在聚合物或磁场的作用下，平均流或大尺度速度（U）会增强。这是因为湍流减阻会使速度场更有序。即使存在强 U，$\Pi_u(k)$ 和 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$ 受到抑制，也是由于速度场中的相关性。在发电机和准静态磁流体湍流中也观察到了有序 U 的出现。遗憾的是，磁普朗特数 Pm 为 $= 1/3$、1 和 10/3 的磁流体湍流直接数值模拟，并未显示出相较于相应流体动力学湍流，U 有所增强。基于准静态磁流体湍流（Pm ≈ 0）和发电机的研究结果，我们猜想，磁普朗特数极小的磁流体湍流的 U 将大于相应流体动力学湍流的这一数值。

在湍流热对流中也观察到了湍流减阻（TDR）现象。这一观察基于黏性耗散率和热耗散率的降低，以及非线性项 $\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rangle$ [31, 32, 37] 的减弱。然而需要注意的是，与磁流体动力学、聚合物和稳定分层湍流不同，湍流热对流中的 $\Pi_u(k)$ 并未受到抑制，这是由于热对流具有不稳定性 [40, 81]。因此，湍流热对流中的湍流减阻机制不同于磁流体动力学、聚合物和稳定分层湍流中的湍流减阻机制。在本文中，我们认为湍流热对流中的湍流减阻源于光滑的热板。在热板附近，大尺度环流类似于平板绕流。这一特征对热对流向终极区间可能发生的转变具有重要影响。

在 U 湍流减阻条件下的增强类似于再层流化过程中平均流的增加。Narasimha 和 Sreenivasan [38] 展示了在层流化作用下，流动剖面如何从随机形态转变为光滑形态；这些层流化作用可能包括稳定分层、旋转、热对流等。图 28 说明了层流化作用通过平均流与湍流之间的相互作用所产生的影响。在该图中，通道 1、2 和 3 表示再层流化过程中平均流与涨落之间的复杂相互作用，而通道 0 表示流体动力学湍流中的这些相互作用。Verma等 [11] 的论点与 Narasimha 和 Sreenivasan [38]的论点具有一定相似性。

总之，本文综述了一个基于动能通量的通用框架，用以解释多种现象中的湍流减阻（TDR），包括聚合物湍流、磁流体动力学（MHD）、准静态磁流体力学（QSMHD）和稳定分层湍流、发电机以及湍流热对流。这类研究相对较新，希望未来能得到进一步探索

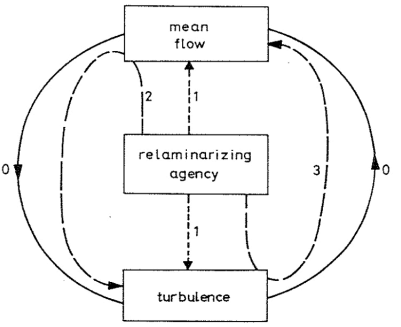


图 28 平均流与湍流通过再层流化作用相互作用。相较于流体动力学湍流中经由通道 0 发生的相互作用，通道 1、2、3 使流动再层流化。引自 Narasimha 和 Sreenivasan [38]。经 K. R. Sreenivasan 许可转载。

。我们也预计，湍流减阻还会出现在其他系统中，例如漂移波湍流、天体物理磁流体力学、旋转湍流等。这类研究还有一项额外益处：湍流减阻在工程流动、液态金属、聚合物流动等领域具有实际应用价值。

致谢。 作者感谢 Abhishek Kumar 和 Shashwat Bhattacharya 提供有益的讨论。本项目由 CEFIPRA 的印度—法国项目 6104-1 资助。S. Chatterjee 获得印度科学技术部的 INSPIRE 奖学金（编号 IF180094）资助。

声明

利益冲突声明。 作者声明，就本文而言，不存在任何实际或潜在的利益冲突。

参考文献

[1] Lumley, J., Blossey, P.：添加剂减阻。《流体力学年度评论》**1**(1), 367–384 (1969)[2] Tabor, M., de Gennes, P.G.：减阻的级联理论。《欧洲物理快报》**2**(7), 519–522 (1986)[3] de Gennes, P.G.：《聚合物动力学导论》。剑桥大学出版社，剑桥 (1990)[4] de Gennes, P.G.：《聚合物物理学中的标度概念》。康奈尔大学出版社，伊萨卡 (1979)

[5] Sreenivasan, K.R., White, C.M.：稀释聚合物添加剂引发减阻的起始点及最大减阻渐近线。《流体力学杂志》**409**，149–164（2000）[6] L'vov, V.S., Pomyalov, A., Procaccia, I., Tiberkevich, V.：壁面约束湍流中的聚合物减阻。《物理评论快报》**92(24)**，244503（2004）[7] Benzi, R., De Angelis, E., Govindarajan, R., Procaccia, I.：均匀湍流中聚合物添加剂减阻的壳层模型。《物理评论E》**68(1)**，016308（2003）[8] White, C. M., Mungal, M.G.：聚合物添加剂湍流减阻的力学原理与预测。《流体力学年度评论》**40**，235–256（2008）[9] Benzi, R.：壁面约束湍流中聚合物减阻简述。《物理学D辑》**239(14)**，1338–1345（2010）[10] Benzi, R., Ching, E.S.C.：流体流动中的聚合物。《凝聚态物理年度评论》**9(1)**，163–181（2018）[11] Verma, M.K., Alam, S., Chatterjee, S.：磁流体湍流和准静态磁流体湍流中的湍流减阻。《等离子体物理》**27**，052301（2020）[12] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.：《流体力学》，第2版。《理论物理学教程》。爱思唯尔，牛津（1987）[13] Kundu, P.K., Cohen, I.M., Dowling, D.R.：《流体力学》，第6版。学术出版社，圣迭戈（2015）[14] Anderson, J.D.：《空气动力学基础》。麦格劳-希尔教育，纽约（2017）[15] Anderson Jr., J.D.：《空气动力学史》。剑桥大学出版社，纽约（1998）[16] Dar, G., Verma, M.K., Eswaran, V.：二维磁流体湍流中的能量传递：形式体系与数值结果。《物理学D辑》**157(3)**，207–225（2001）[17] Mininni, P.D., Ponty, Y., Montgomery, D.C., Pinton, J.-F., Politano, H., Pouquet, A.G.：非螺旋力驱动下的发电机状态。《天体物理学杂志》**626**，853–863（2005）[18] Valente, P.C., da Silva, C.B., Pinho, F.T.：黏弹性对湍动能级联的影响。《流体力学杂志》**760**，39–62（2014）

46 磁流体湍流中的湍流减阻[19] Valente, P.C., da Silva, C.B., Pinho, F.T.：弹性惯性湍流中的能谱。《流体物理》**28**(7), 075108–17 (2016)[20] Moreau, R.J.：《磁流体力学》。Springer，柏林（1990）[21]Knaepen, B., Moreau, R.：低磁雷诺数下的磁流体湍流。《流体力学年度评论》**40**, 25–45 (2008)[22] Reddy, K.S., Verma, M.K.：高相互作用参数下准静态磁流体湍流中的强各向异性。《流体物理》**26**, 025109 (2014)[23] Reddy, K.S., Kumar, R., Verma, M.K.：准静态磁流体湍流中的各向异性能量传递。《等离子体物理》**21**(10), 102310 (2014)[24] Moffatt, H.K.：《导电流体中的磁场生成》。剑桥大学出版社，剑桥（1978）[25] Roberts, P.H., Glatzmaier, G.A.：地磁发电机理论与模拟。《现代物理评论》**72**, 1081–1123 (2000)[26] Brandenburg, A., Subramanian, K.：天体物理磁场与非线性发电机理论。《物理报告》**417**(1-4), 1–209 (2005)[27] Yadav, R.K., Verma, M.K., Wahi, P.：Taylor–Green发电机中的双稳态与混沌。《物理评论E》**85**(3), 036301 (2012)[28] Olson, P.L., Christensen, U.R., Glatzmaier, G.A.：地球发电机的数值建模：磁场生成与平衡机制。《地球物理研究杂志B辑：固体地球》**104**(B5), 10383–10404 (1999)[29] Davidson, P.A.：《旋转、分层及导电流体中的湍流》。剑桥大学出版社，剑桥（2013）[30] Verma, M.K.：《浮力流体物理学：从不稳定性到湍流》。世界科技出版公司，新加坡（2018）[31] Pandey, A., Verma, M.K.：瑞利–B´énard对流中大尺度量的标度关系。《流体物理》**28**(9), 095105 (2016)[32] Bhattacharya, S., Verma, M.K., Samtaney, R.：重新审视湍流热对流中的雷诺数和努塞尔数。《流体物理》**33**, 015113 (2021)[33] Kolmogorov, A.N.：局部各向同性湍流中的能量耗散。《苏联科学院学报》**32**, 16–18 (1941)

[34] Kolmogorov, A.N.：不可压黏性流体在雷诺数极高时的湍流局部结构。《苏联科学院学报》30，301–305（1941）[35] Lesieur, M.：《流体中的湍流》。Springer，多德雷赫特（2008）[36] Frisch, U.：《湍流：A. N. Kolmogorov 的遗产》。剑桥大学出版社，剑桥（1995）[37] Verma, M.K.：《流体流动中的能量传递：多尺度与谱视角》。剑桥大学出版社，剑桥（2019）[38] Narasimha, R., Sreenivasan, K.R.：流体流动的再层流化。《应用力学进展》19，221–309（1979）[39] Verma, M.K.：《力学导论》，第2版。Universities Press，海得拉巴（2016）[40] Verma, M.K.：湍流中的可变能量通量。《物理学杂志 A：数学与理论》55(1)，013002（2022）2011.07291。https: //doi.org/10.1088/1751-8121/ac354e[41]Kraichnan, R.H.：雷诺数极高时各向同性湍流的结构。《流体力学杂志》5，497–543（1959）[42] Verma, M.K.：磁流体湍流的统计理论：近期成果。《物理报告》401(5)，229–380（2004）[43] Sreenivasan, K.R.：各向同性湍流能量耗散率的最新进展。《流体物理》10(2)，528–529（1998）[44] Onsager, L.：统计流体力学。《新物理学杂志》6(2)，279–287（1949）[45] Prandtl, L.：关于摩擦极小的流体运动。载于：Krazer, A.（编）《海德堡第三届国际数学家大会论文集》。Teubner，莱比锡（1905）[46]Fouxon, A., Lebedev, V.：稀聚合物溶液中的湍流谱。《流体物理》15(7)，2060–2072（2003）[47] Perlekar, P., Mitra, D., Pandit, R.：聚合物添加剂在衰减的均匀各向同性湍流中减阻的表现。《物理评论快报》97(26)，264501（2006）[48] Sagaut, P., Cambon, C.：《均匀湍流动力学》，第2版。剑桥大学出版社，剑桥（2018）

[49] Ray, S.S., Vincenzi, D.：聚合物溶液壳层模型中的弹性湍流。《欧洲物理快报》**114**，44001（2016）[50] Thais, L., Gatski, T.B., Mompean, G.：基于能量收支分析聚合物减阻机制。《国际传热传质杂志》**43**(C)，52–61（2013）[51] Nguyen, M.Q., Delache, A., Simo¨ens, S., Bos, W.J.T., El Hajem, M.：各向同性黏弹性湍流的小尺度动力学。《物理评论：流体》**1**(8)，083301（2016）[52] L'vov, V.S., Pomyalov, A., Procaccia, I., Tiberkevich, V.：湍流中微气泡减阻：微小气泡的极限。《物理评论快报》**94**(17)，174502（2005）[53] Cowling, T.G.：磁流体力学。Adam Hilger，伦敦（1976）[54] Priest, E.R.：太阳磁流体力学。剑桥大学出版社，剑桥（2014）[55] Goldstein, M.L., Roberts, D.A.：太阳风中的磁流体湍流。《天文学与天体物理学年评》**33**，283–325（1995）[56] Davidson, P.A.：湍流：科学家与工程师导论。牛津大学出版社，牛津（2004）[57] Debliquy, O., Verma, M.K., Carati, D.：三维衰减磁流体湍流中的能量通量与壳层间传递。《等离子体物理》**12**(4)，042309（2005）[58] Kumar, R., Verma, M.K., Samtaney, R.：小尺度发电机中的能量传递与磁能增长。《欧洲物理快报》**104**(5)，54001（2014）[59] Kumar, R., Verma, M.K., Samtaney, R.：小磁普朗特数发电机中的能量传递。《湍流杂志》**16**(11)，1114–1134（2015）[60]Verma, M.K.：磁流体湍流中重整化黏度、重整化电阻率与能量通量的场论计算。《物理评论E》**64**(2)，026305（2001）[61] Boyd, T.J.M., Sanderson, J.J.：《等离子体物理学》。剑桥大学出版社，剑桥（2003）[62] Verma, M.K., Chatterjee, A.G., Yadav, R.K., Paul, S., Chandra, M., Samtaney, R.：用于湍流模拟的伪谱代码TARANG的基准测试与标度研究。《Pramana物理学杂志》**81**(4)，617–629

(2013)

[63] Chatterjee, A.G., Verma, M.K., Kumar, A., Samtaney, R., Hadri, B., Khurram：快速傅里叶变换和伪谱流体求解器在多达 196608 个核心上的标度关系。《并行与分布式计算杂志》**113**，77–91（2018）[64]Craya, A.：对与平均速度相关的湍流分析的贡献。博士论文，格勒诺布尔大学（1958）[65] Herring, J.R.：轴对称湍流向各向同性的演变。《流体物理》**17(5)**，859–872（1974）[66]Sadhukhan, S., Verma, M.K., Stepanov, R., Plunian, F., Samtaney, R.：螺旋流体湍流中的动能螺度和涡量平方转移。《物理评论：流体》**4**，84607（2019）[67]Gledzer, E.B.：允许存在两个二次运动积分的流体动力学类型系统。《苏联科学院学报》**209**，1046–1048（1973）[68] Yamada, M., Ohkitani, K.：充分发展壳层模型湍流的李雅普诺夫谱渐近公式。《物理评论E》**57(6)**，6257（1998）[69] Ditlevsen, P.D.：《湍流与壳模型》。剑桥大学出版社，剑桥（2010）[70] Frick, P., Sokoloff, D.D.：磁流体湍流壳层模型中的级联与发电机作用。《物理评论E》**57(4)**，4155–4164（1998）[71] Stepanov, R., Plunian, F.：湍流发电机增长与饱和的现象学。《天体物理学杂志》**680(1)**，809–815（2008）[72] Plunian, F., Stepanov, R., Frick, P.：磁流体湍流的壳层模型。《物理报告》**523**，1–60（2012）[73] Verma, M.K., Kumar, R.：极端磁普朗特数下的发电机：壳层模型带来的启示。《湍流杂志》**17(12)**，1112–1141（2016）[74] Stepanov, R., Plunian, F.：低磁普朗特数下充分发展的湍流发电机。《湍流杂志》**7(39)**，1–15（2006）[75] Sharma, M.K., Kumar, A., Verma, M.K., Chakraborty, S.：快速旋转衰减湍流的统计特征：涡量平方和能谱以及相干结构。《流体物理》**30(4)**，045103（2018）[76] Verma, M.K.：准静态磁流体湍流中的各向异性。《物理学进展报告》**80(8)**，087001（2017）

[77] Verma, M.K., Reddy, K.S.：采用可变能量通量对准静态磁流体湍流进行建模。《流体物理》**27**(2), 025114 (2015)[78] M¨uller, U., B¨uhler, L.：《通道与容器中的磁流体动力学》。Springer，柏林海德堡 (2001)[79] Tritton, D.J.：《物理流体动力学》。克拉伦登出版社，Oxord (1988)[80] Lindborg, E.：强分层流体中的能量级联。《流体力学杂志》**550**, 207–242 (2006)[81]Verma, M.K.：稳定分层流与热对流中的湍流对比。《Phys. Scr.》**94**(6), 064003 (2019)[82] Bolgiano, R.：稳定分层大气中的湍流谱。《地球物理研究杂志》**64**(12), 2226–2229 (1959)[83] Obukhov, A.M.：浮力对湍流中温度场结构的影响。《苏联科学院学报》**125**, 1246 (1959)[84] Yeung, P.K., Donzis, D.A., Sreenivasan, K.R.：湍流混合的高雷诺数模拟。《流体物理》**17**(8), 081703 (2005)[85]Kumar, A., Chatterjee, A.G., Verma, M.K.：浮力驱动湍流的能谱。《物理评论E》**90**(2), 023016 (2014)[86] 钱德拉塞卡, S.：《流体动力学与磁流体动力学稳定性》。牛津大学出版社，克拉伦登 (1961)[87]Kraichnan, R.H.：任意普朗特数下的湍流热对流。《流体物理》**5**(11), 1374–1389 (1962)[88] Verma, M.K., Ayyer, A., Debliquy, O., Kumar, S., Chandra, A.V.：流体湍流中通过非局部相互作用实现的局部壳层间能量传递。《Pramana物理学杂志》**65**(2), 297–310 (2005)[89]Grossmann, S., Lohse, D.：热对流中的标度关系：一种统一理论。《流体力学杂志》**407**, 27–56 (2000)[90] Niemela, J.J., Skrbek, L., Sreenivasan, K.R., Donnelly, R.J.：极高瑞利数下的湍流对流。《自然》**404**, 837–840 (2000)[91] Shraiman, B.I., Siggia, E.D.：高瑞利数对流中的热输运。《物理评论A辑》**42**(6), 3650–3653 (1990)[92] Siggia, E.D.：高瑞利数对流。《流体力学年度评论》**26**(1), 137–168 (1994)

[93] Bhattacharya, S., Verma, M.K., Samtaney, R.：湍流瑞利-贝纳德对流中小尺度特性对普朗特数的依赖性。《物理评论：流体》**6**，063501（2021）[94] Sreenivasan, K.R., Bershadskii, A., Niemela, J.J.：热对流中的平均风及其反转。《物理评论E》**65(5)**，056306（2002）[95] Sugiyama, K., Ni, R., Stevens, R.J.A.M., Chan, T.-S., Zhou, S.-Q., Xi, H.-D., Sun, C., Grossmann, S., Xia, K.-Q., Lohse, D.：热驱动湍流中的流动反转。《物理评论快报》**105(3)**，034503（2010）[96] Chandra, M., Verma, M.K.：湍流对流中流动反转的动力学与对称性。《物理评论E》**83**，067303（2011）[97] Chandra, M., Verma, M.K.：通过涡旋重联实现湍流对流中的流动反转。《物理评论快报》**110(11)**，114503（2013）[98] Verma, M.K., Ambhire, S.C., Pandey, A.：具有自由滑移壁面的湍流对流中的流动反转。《流体物理》**27(4)**，047102（2015）[99] Zhu, X., Mathai, V., Stevens, R.J.A.M., Verzicco, R., Lohse, D.：二维瑞利-贝纳德对流向终极区间的转变。《物理评论快报》**120(14)**，144502（2018）[100] He, X., van Gils, D.P.M., Bodenschatz, E., Ahlers, G.：湍流瑞利-贝纳德对流中温度涨落的对数空间变化与普适功率谱。《物理评论快报》**112(17)**，174501（2014）[101] Verma, M.K., Mishra, P.K., Pandey, A., Paul, S.：湍流对流中场关联与热输运的标度关系。《物理评论E》**85(1)**，016310（2012）[102] He, X., Funfschilling, D., Nobach, H., Bodenschatz, E., Ahlers, G.：湍流瑞利-贝纳德对流向终极态的转变。《物理评论快报》**108(2)**，024502（2012）[103] Iyer, K.P., Scheel, J.D., Schumacher, J., Sreenivasan, K.R.：对流的经典1/3标度关系一直成立，直至 $ra = 10^{15}$。《美国国家科学院院刊》**117(14)**，7594–7598（2020）[104] Roche, P.-E., Gauthier, F., Kaiser, R., Salort, J.：关于对流终极区间的触发。《新物理杂志》**12(8)**，085014（2010）[105] Lohse, D., Toschi, F.：热对流的终极态。《物理评论快报》**90(3)**，034502（2003）[106]Mishra, P.K., Wahi, P., Verma, M.K.：模式与分岔

低普朗特数瑞利–贝纳德对流。《欧洲物理快报》**89**(4), 44003 (2010)